



Київський національний університет імені Тараса Шевченка

І.В.Зависляк, Є.В.Мартиш

**Збірник задач з курсу
“Електродинаміка НВЧ”**

Навчальний посібник

Київ 2002

УДК 538.3
ББК 22.313
С 23

І.В.Зависяк, С.В.Мартиш

Рецензент: М.І.Ляшенко, *д-р фіз.-мат. наук, професор*

Збірник задач з курсу “Електродинаміка НВЧ”: навчальний посібник /І.В.Зависяк, С.В.Мартиш, М.А.Стаканов/

У збірнику систематизовано матеріал для практичних занять з курсу електродинаміки НВЧ. Кожний розділ має стислі теоретичні відомості, приклади вирішення типових задач та набір задач для самостійної роботи. Для кожної задачі наведена кінцева відповідь.

Посібник розрахований на студентів та викладачів вузів, фахівців у галузі прикладної електродинаміки та техніки НВЧ. Може бути використаний особами, які самостійно підвищують свою кваліфікацію у цих галузях.

Передмова

Задачі, що входять у збірник, охоплюють головні розділи курсів “Електродинаміка НВЧ”, які читаються студентам спеціальності “Радіофізика та електроніка”. Відомо, що засвоєння розділів (модулів) теоретичного курсу неможливе без практичної роботи над відповідними задачами. Крім того, така робота допомагає у розвитку творчої самостійності студентів, формує навички неформального мислення, що є особливо важливим в умовах сучасної вищої школи.

За своєю структурою всі розділи збірника однакові і складаються з трьох частин. У першій наведені частині наведені теоретичні відомості, розрахункові співвідношення та графіки, які необхідні для вирішення задач. Друга частина містить приклади розв'язку типових задач. У третій частині даються задачі для самостійного вирішення них студентами. Для зручності в самостійній роботі студентів в усіх задачах наведені відповіді.

У роботі над задачником були використані вправи з відомих книг: А.А. Семенов – “Теорія електромагнітних хвиль”; А.А. Рухадзе та ін. – “Основи електродинаміки плазми”; В.В. Данілов, І.В. Зависляк, М.Г. Балінський – “Спінхвильова електродинаміка”. Основою задачнику став збірник задач з курсу “Електродинаміка та розповсюдження радіохвиль” під редакцією С.І. Баскакова.

Розділ перший ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ

§ 1.1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Для опису фізичних полів прийнято використовувати їхні математичні моделі — скалярні й векторні поля. В ортогональній криволінійній системі координат (x_1, x_2, x_3) скалярне поле φ набуває вигляду деякої функції $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, що приймає чисельні значення — дійсні чи комплексні. Векторне поле \mathbf{A} задається трьома проекціями на одиничні вектори (орти) обраної системи координат:

$$\mathbf{A} = A_{x_1}(x_1, x_2, x_3)\mathbf{l}_{x_1} + A_{x_2}(x_1, x_2, x_3)\mathbf{l}_{x_2} + A_{x_3}(x_1, x_2, x_3)\mathbf{l}_{x_3}.$$

Для характеристики величини і напрямку швидкості зміни скалярного поля в просторі вводять градієнт цього поля

$$\text{grad } \varphi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathbf{1}_{x_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \mathbf{1}_{x_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \mathbf{1}_{x_3}, \quad (1.1)$$

де h_1 , h_2 , і h_3 – коефіцієнти Ляме по координатах x_1 , x_2 і x_3 , що є коефіцієнтами пропорційності між диференціалами узагальнених координат і нескінченно малими ребрами елементарного паралелепіпеда в обраній точці простору.

Приведемо значення коефіцієнтів Ляме для найбільш уживаних координатних систем:

декартова система координат (x, y, z)

$$h_x = h_y = h_z = 1;$$

циліндрична система координат (r, φ, z)

$$h_r = 1, \quad h_\varphi = r, \quad h_z = 1;$$

сферична система координат (r, ϑ, φ)

$$h_r = 1, \quad h_\vartheta = r, \quad h_\varphi = r \sin \vartheta;$$

Конкретно градієнт обчислюють у такий спосіб:

у декартовій системі координат

$$\text{grad} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{1}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{1}_z;$$

у циліндричній системі координат

$$\text{grad} \equiv \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{1}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{1}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{1}_z;$$

у сферичній системі координат

$$\text{grad} \equiv \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{1}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{1}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{1}_\varphi.$$

Опис диференціальних властивостей векторного поля дещо складніше. Векторне поле \mathbf{A} прийнято характеризувати скалярним полем — дивергенцією $\text{div } \mathbf{A}$ та векторним полем — ротором $\text{rot } \mathbf{A}$. Значення дивергенції дорівнює густині джерел розглянутого поля в заданій точці простору. Поняття ротора особливо є наочним при розгляді поля лінійних швидкостей частинок суцільного середовища. Зрозуміло, що течія рідини або газу може мати обертання (завихрення), тоді ротор поля лінійної швидкості не дорівнює нулю. Звідти і пішла назва ротор, або вихор. У англійській літературі часто використовується позначення “curl” (вихор) замість уживаного у нас позначення “rot”. Більш формальний підхід веде до поняття циркуляції вектора \mathbf{A} по лінії L , що обмежує контур площею S :

$$\Gamma = \oint_{(L)} \mathbf{A} \, d\mathbf{r}.$$

Легко перевірити, що циркуляція постійного вектора завжди дорівнює нулю. Також можна показати, що вона “породжується” на поверхні S . Наступний крок – густина “породження” циркуляції, тобто циркуляція, що породжується дуже малою ділянкою поверхні і є віднесеною до площі усієї ділянки. Так виникає:

$$\frac{d\Gamma}{dS} = \text{rot}_n \mathbf{A}.$$

В останньому виразі n вказує на те, що береться проекція ротора на нормаль \mathbf{n} . Тобто формула дає циркуляцію по нескінченно малому контуру, віднесеному до одиниці площі, яку охоплює контур. Звідси випливає, що напрям $\text{rot} \mathbf{A}$ у просторі виражений як напрям нормалі до такої ділянки, де $d\Gamma/dS$ є максимальним. Це визначення схоже з визначенням напрямку градієнту скаляра φ як напрямку лінії (l), в якому існує максимум $d\varphi/dl$. Якщо задати скінченну орієнтовану поверхню S з контуром L , то

$$\oint_{(L)} \mathbf{A} \, d\mathbf{r} = \oint_{(S)} \text{rot} \mathbf{A} \, d\mathbf{S}.$$

Це важливе рівняння має назву *формула Стокса*.

Дивергенцію векторного поля \mathbf{A} обчислюють шляхом диференціювання його проекцій за певними правилами:

у декартовій системі координат

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \quad (1.2)$$

у циліндричній системі координат

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \quad (1.3)$$

у сферичній системі координат

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\vartheta) + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (1.4)$$

У довільній ортогональній криволінійній системі координат

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 A_{x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 A_{x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 A_{x_3}) \right]. \quad (1.5)$$

Проекції ротора векторного поля мають вид:

у декартовій системі координат.

$$\begin{aligned}(\text{rot } \mathbf{A})_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\(\text{rot } \mathbf{A})_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\(\text{rot } \mathbf{A})_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y};\end{aligned}\tag{1.6}$$

у циліндричній системі координат

$$\begin{aligned}(\text{rot } \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \\(\text{rot } \mathbf{A})_\varphi &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \\(\text{rot } \mathbf{A})_z &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right];\end{aligned}\tag{1.7}$$

у сферичній системі координат

$$\begin{aligned}(\text{rot } \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\varphi) - \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right], \\(\text{rot } \mathbf{A})_\vartheta &= \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right], \\(\text{rot } \mathbf{A})_\varphi &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right];\end{aligned}\tag{1.8}$$

Ротор векторного поля \mathbf{A} в довільній системі координат виражають через проекції вихідного поля і коефіцієнти Ляме:

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{A} &= \frac{\mathbf{I}_{x_1}}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_3 A_{x_3})}{\partial x_2} - \frac{\partial (h_2 A_{x_2})}{\partial x_3} \right] + \frac{\mathbf{I}_{x_2}}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial (h_1 A_{x_1})}{\partial x_3} - \frac{\partial (h_3 A_{x_3})}{\partial x_1} \right] + \\&+ \frac{\mathbf{I}_{x_3}}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial (h_2 A_{x_2})}{\partial x_1} - \frac{\partial (h_1 A_{x_1})}{\partial x_2} \right].\end{aligned}\tag{1.9}$$

Диференціальні операції зі скалярними й векторними полями зручно записувати за допомогою оператора Гамільтона ∇ . За визначенням

$$\text{grad } U = \nabla U, \quad \text{div } \mathbf{A} = \nabla \mathbf{A}, \quad \text{rot } \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}]\tag{1.10}$$

У декартовій системі координат оператор Гамільтона являє собою

символічний вектор

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{1}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{1}_z. \quad (1.11)$$

З диференціальних векторних операцій другого порядку широке застосування в електродинаміку знаходить оператор ∇^2 , закон дії якого на векторне поле \mathbf{A} описується співвідношенням

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A} \quad (1.12)$$

Диференціальна операція другого порядку, що діє на скалярне поле, задається оператором Лапласа

$$\nabla^2 = \Delta \equiv \text{div grad}$$

Оператор Лапласа в різних координатних системах записується в такий спосіб:

у декартовій системі координат

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (1.13)$$

у циліндричній системі координат

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (1.14)$$

у сферичній системі координат

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \quad (1.15)$$

Для графічного зображення векторних полів прийнято будувати картину їхніх силових ліній. У кожній точці силової лінії вектор поля дотичний до неї. Там, де інтенсивність поля більше, силові лінії проводять частіше, і навпаки.

§ 1.2. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗ'ЯЗАННЯ

1.1. Скалярне поле φ задано в декартовій системі координат виразом

$$\varphi = 3x^2 y \cos z + 2z^2.$$

Обчислити векторне поле $\text{grad } \varphi$.

Відповідь: $\text{grad } \varphi = 6xy \cos z \mathbf{1}_x + 3x^2 \cos z \mathbf{1}_y + (2z - 3x^2 y \sin z) \mathbf{1}_z$.

1.2. Визначити дивергенцію і ротор векторного поля \mathbf{A} , що

характеризується наступними складовими в циліндричній системі координат: $A_r = 10/r^3$, $A_\varphi = 0$, $A_z = 0$.

Відповідь: $\operatorname{div} \mathbf{A} = -10/r^3$, $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$.

1.3. Визначити дивергенцію і ротор векторного поля \mathbf{A} , який у сферичній системі координат має єдину складову $A_\vartheta = 8r \exp(-10r)$.

Відповідь: $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 16(1 - 5r) \exp(-10r)$

1.4. У декартовій системі координат деяке скалярне поле задано тривимірним інтегралом Фур'є

$$\varphi = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \int \Phi(k_1, k_2, k_3) e^{j(k_1 x + k_2 y + k_3 z)} dk_1 dk_2 dk_3$$

Обчислити $\Delta\varphi$.

Відповідь: $\varphi = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int F(k_1, k_2, k_3) e^{j(k_1 x + k_2 y + k_3 z)} dk_1 dk_2 dk_3$,

де $F = -(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)\Phi$.

1.5. Зобразити графічно картину силових ліній векторних полів, заданих у декартовій системі координат своїми проекціями:

$$A_x = y + 10, A_y = 0, A_z = 0, B_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, B_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, B_z = 0.$$

1.6. Знайти ротор і дивергенцію наступних векторних полів, заданих у декартовій системі координат:

$$\mathbf{A} = \cos(ay)\mathbf{1}_x + \sin(ax)\mathbf{1}_y + \operatorname{tg}(az)\mathbf{1}_z, \quad \mathbf{B} = 6x\mathbf{1}_x + 5z\mathbf{1}_y + 10y\mathbf{1}_z$$

Відповідь: $\operatorname{rot} \mathbf{A} = a(\cos(ax) - \sin(ax))\mathbf{1}_x$, $\operatorname{div} \mathbf{A} = a/\cos^2(az)$,

$\operatorname{rot} \mathbf{B} = -5 \cdot \mathbf{1}_x$, $\operatorname{div} \mathbf{B} = 6$.

1.7. Використовуючи правила дії з оператором Гамільтона, довести тотожність

$$\operatorname{rot}[\mathbf{A}\mathbf{B}] = (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A}.$$

1.8. У просторі задані два векторних поля \mathbf{A} і \mathbf{B} . Знайти вираз для поля $\mathbf{C} = \operatorname{grad}(\mathbf{A}\mathbf{B})$.

Вказівка: Виразити операцію grad через оператор ∇ і скористатися правилом диференціювання добутку.

Відповідь: $\mathbf{C} = [\mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B}] + [\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A}] + (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}\nabla)\mathbf{B}$.

1.9. Довести наступні тотожності векторного аналізу (φ і \mathbf{A} – довільні диференційовані скаляр та векторне поле):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= 0, \\ \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi &= 0, \\ \operatorname{rot}(\varphi \mathbf{A}) &= [\operatorname{grad} \varphi \mathbf{A}] + \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A}, \\ \operatorname{div}(\varphi \mathbf{A}) &= \operatorname{grad} \varphi \mathbf{A} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{A}, \\ \operatorname{grad}(\varphi_1 \varphi_2) &= \varphi_1 \operatorname{grad} \varphi_2 + \varphi_2 \operatorname{grad} \varphi_1. \end{aligned}$$

Розділ другий РІВНЯННЯ МАКСВЕЛА

§ 2.1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Класична теорія електромагнетизму базується на рівняннях Максвелла, що описують сукупність емпіричних відомостей про електромагнітне поле. Для вакууму вводять два основних векторних об'єкти — *напруженість електричного поля* \mathbf{E} та *напруженість магнітного поля* \mathbf{H} . Крім того, визначають скалярне поле *об'ємної густини електричного заряду* ρ і векторне поле *об'ємної густини електричного струму* \mathbf{J}_e , зв'язаного з рухом носіїв заряду в просторі. Система рівнянь Максвелла в диференціальній формі для вакууму щодо згаданих вище величин записується наступним чином

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}_e, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= \rho / \varepsilon_0, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

У ці рівняння входять дві фундаментальні фізичні константи: $\varepsilon_0 = 10^{-9} / (36\pi)$ Ф/м — *електрична стала* і $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — *магнітна стала*.

До основних принципів електродинаміки відноситься також закон збереження електричного заряду, що знаходить своє відображення в рівнянні неперервності струму:

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_e + \partial \rho / \partial t = 0. \tag{2.2}$$

Перше рівняння системи (2.1) являє собою диференціальну форму запису відомого закону Ампера, доповнену вектором *густини струму*

зміщення:

$$\mathbf{J}_{\text{зм}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Іноді буває зручно виділяти густину *стороннього* електричного струму $\mathbf{J}_{\text{ст.е}}$. Суму струму заміщення, струму провідності, а також стороннього струму в електродинаміці називають *повним струмом*.

Друге рівняння системи (2.1) описує закон електромагнітної індукції Фарадея. Два інших рівняння, строго кажучи, залежать від перших двох рівнянь Максвелла. З третього рівняння системи (2.1) випливає, що силові лінії електричного поля можуть починатися і закінчуватися тільки на електричних зарядах. Четверте рівняння вказує на те, що у вакуумі силові лінії магнітного поля завжди замкнуті (магнітне поле не має джерел).

У присутності матеріальних середовищ теорія Максвелла повинна бути доповненою рядом додаткових уявлень, що враховують мікроскопічну структуру речовини. Під дією прикладеного електричного поля \mathbf{E} в середовищі виникає *струм провідності* з об'ємною густиною

$$\mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E}. \quad (2.3)$$

Тут σ — питома об'ємна провідність речовини.

Співвідношення (2.3) є диференціальною формою запису закону Ома; пропорційність між \mathbf{J}_e і \mathbf{E} в сильних електричних полях може порушуватися.

Молекули або атоми речовини в електричному полі поляризуються, що відображається в теорії введенням векторного поля *електричної поляризації* \mathbf{P} . Даний вектор у кожній точці характеризує дипольний момент одиниці об'єму речовини. Якщо електромагнітне поле змінюється в часі, то в середовищі виникає електричний струм поляризації з об'ємною густиною

$$\mathbf{J}_{\text{пол}} = \partial \mathbf{P} / \partial t$$

У кожній точці середовища прийнято вводити вектор електричного зміщення (індукції)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.4)$$

У результаті перше рівняння Максвелла набуває вигляд

$$\text{rot } \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{ст.е}}. \quad (2.5)$$

Магнетизм матеріальних середовищ має квантову природу. У рамках класичних уявлень визначають *вектор намагніченості* \mathbf{M} , що

є магнітним моментом одиниці об'єму речовини, та вектор магнітної індукції \mathbf{B} , зв'язаний із \mathbf{H} та \mathbf{M} співвідношенням

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}).$$

Друге рівняння Максвелла в матеріальному середовищі має вигляд

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t. \quad (2.6)$$

Третє і четверте рівняння Максвелла записуються так:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (2.7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.8)$$

У лінійному наближенні поляризація і намагніченість пов'язані з напруженостями полів співвідношеннями:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (2.9)$$

де χ_e , χ_m — діелектрична й магнітна сприйнятливості речовини.

На підставі цього матеріальні рівняння електромагнітного поля можна записати у вигляді

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}. \quad (2.10)$$

Коефіцієнтами пропорційності між напруженостями й індукціями є *абсолютна діелектрична проникність* ε_a та *абсолютна магнітна проникність* μ_a . У розрахунках часто використовують *відносні проникності*

$$\varepsilon = \varepsilon_a / \varepsilon_0, \quad \mu = \mu_a / \mu_0. \quad (2.11)$$

Співвідношення виду (2.10) справджуються лише за умови, що взаємодія поля та речовини відбувається практично безінерційно.

У НВЧ та оптичному діапазонах доводиться враховувати ефекти, зв'язані з кінцевим часом становлення стану речовини. При цьому можна говорити про діелектричну й магнітну проникності, що залежать від частоти.

Четверте рівняння Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ свідчить про те, що в природі не існує магнітних зарядів. Проте іноді буває зручно скористатися формальним уявленням про *сторонній магнітний струм*, густина якого $\mathbf{J}_{\text{ст.м}}$ вводять у праву частину другого рівняння Максвелла.

Остаточню одержуємо:

рівняння Максвелла в диференціальній формі

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \partial \mathbf{D} / \partial t + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{ст.е}}, \\
\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t - \mathbf{J}_{\text{ст.м}}, \\
\operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \\
\operatorname{div} \mathbf{B} &= 0;
\end{aligned}
\tag{2.12}$$

рівняння Максвела в інтегральній формі

$$\begin{aligned}
\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= \int_S (\partial \mathbf{D} / \partial t + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{ст.е}}) d\mathbf{S}, \\
\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} &= -\int_S (\partial \mathbf{B} / \partial t + \mathbf{J}_{\text{ст.м}}) d\mathbf{S}, \\
\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} &= \int_V \rho dV, \\
\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.13}$$

Часто розглядають гармонічні електромагнітні поля, що змінюються в часі за законом $e^{j\omega t}$ з частотою ω . При цьому рівняння Максвела записують відносно *комплексних амплітуд полів*:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &= j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.е}}, \\
\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.м}}, \\
\operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} &= \dot{\rho}, \\
\operatorname{div} \dot{\mathbf{B}} &= 0;
\end{aligned}
\tag{2.14}$$

У ці рівняння входять комплексні діелектрична $\tilde{\epsilon}_a$, і магнітна $\tilde{\mu}_a$ проникності:

$$\tilde{\epsilon}_a = \epsilon'_a - j\epsilon''_a, \quad \tilde{\mu}_a = \mu'_a - j\mu''_a$$

Наявність уявних частин проникності вказує на незворотне перетворення частини енергії електромагнітного поля в енергію теплового руху. Виділення тепла може відбуватися як за рахунок струмів провідності, так і за рахунок внутрішнього тертя, що супроводжує процеси поляризації й перемагнічування. Якщо втрати в середовищі зв'язані тільки з наявністю струмів провідності, то

$$\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a - j\sigma / \omega, \quad \tilde{\mu}_a = \mu_a.$$

У техніці різні речовини прийнято характеризувати за допомогою

тангенсів кутів діелектричних і магнітних втрат:

$$\operatorname{tg} \delta_e = \varepsilon_a'' / \varepsilon_a', \quad \operatorname{tg} \delta_m = \mu_a'' / \mu_a' \quad (2.15)$$

На границі розділу двох матеріальних середовищ із різними електричними параметрами вектори поля повинні задовольняти визначеним граничним умовам. Кожний з векторів (наприклад, \mathbf{E}) у точці границі прийнято розкласти на нормальну й тангенціальну (дотичну) складові:

$$\mathbf{E} = E_n \mathbf{I}_n + E_\tau \mathbf{I}_\tau$$

($\mathbf{I}_n, \mathbf{I}_\tau$ — орти нормального і тангенціального напрямків відповідно).

Нормальні складові індукцій і тангенціальні складові напруженостей неперервні в кожній точці границі розділу:

$$\begin{aligned} D_{1n} &= D_{2n}, & E_{1\tau} &= E_{2\tau}; \\ B_{1n} &= B_{2n}, & H_{1\tau} &= H_{2\tau}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Якщо одне з середовищ є ідеально провідний метал, для якого $\sigma \rightarrow \infty$ тангенціальна, поверхні тангенціальна складова електричного вектора відсутня:

$$E_\tau = 0. \quad (2.17)$$

На поверхні металу присутній електричний струм з *поверхневою густиною*

$$\boldsymbol{\eta} = [\mathbf{I}_n \mathbf{H}]. \quad (2.18)$$

Електромагнітне поле є носієм енергії. Об'ємна густина енергії в будь-якій точці простору

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \mathbf{D} + \mathbf{H} \mathbf{B}). \quad (2.19)$$

Закон збереження енергії знаходить своє відображення в *теоремі Пойнтинга*:

$$-\operatorname{div} [\mathbf{E} \mathbf{H}] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{E} \mathbf{D} + \mathbf{H} \mathbf{B}) \right] + \sigma E^2 + \mathbf{J}_{\text{ст.е}} \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{ст.м}} \mathbf{H}. \quad (2.20)$$

Вектор Пойнтинга

$$\boldsymbol{\Pi} = [\mathbf{E} \mathbf{H}] \quad (2.21)$$

характеризує густину потоку потужності випромінювання.

Для полів, що змінюються в часі за гармонічним законом, прийнято вводити комплексний вектор Пойнтинга

$$\dot{\boldsymbol{\Pi}} = \left[\dot{\mathbf{E}} \mathbf{H}^* \right] \quad (2.22)$$

Дійсна частина цього вектора

$$\mathbf{P}_{\text{ср.}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^* \right] \quad (2.23)$$

дорівнює середньому за період потоку потужності випромінювання.

З рівнянь Максвела випливає ряд додаткових співвідношень, яким повинні задовольняти електромагнітні поля. Так, якщо система сторонніх джерел $\dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.1e}}$ збуджує в просторі електромагнітний процес $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$, у той час як системі $\dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.2e}}$ відповідають поля $\dot{\mathbf{E}}_2, \dot{\mathbf{H}}_2$, то справедлива рівність

$$\operatorname{div} \left[\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2 \right] - \operatorname{div} \left[\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1 \right] = \dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.1e}} - \dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.2e}}, \quad (2.24)$$

що зветься *лемою Лоренца*.

§ 2.2. ПРИКЛАДИ РОЗ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

2.1. У вакуумі існує електромагнітне поле, що гармонічно змінюється в часі. У деякій точці простору вектор $E = 130 \cos 2\pi \cdot 10^{10} \mathbf{1}_x$.

Визначити густину струму зміщення в даній точці.

Розв'язок. За визначенням струм зміщення

$$\mathbf{J}_{\text{зм}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -0,556 \sin 2\pi \cdot 10^{10} \mathbf{1}_x.$$

Слід звернути увагу на те, що в просторі струм зсуву й напруженість електричного поля паралельні, однак струм випереджає по фазі напруженість поля на 90° .

2.2. Показати, що з рівнянь Максвела для вакууму випливають відомі *хвильові рівняння*

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0, \\ \nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Розв'язок. Випишемо систему з двох перших рівнянь Максвела, справедливих для вакууму під час відсутності сторонніх джерел:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\end{aligned}\quad (2.26)$$

і застосуємо операцію rot до другого рівняння системи (2.25):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{H}).$$

Припускаючи, що в даній області простору немає зарядів ($\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$) і, скориставшись першим рівнянням (2.26), одержимо хвильове рівняння (2.25) для вектора електричного поля. Рівняння щодо вектора магнітного поля знаходять аналогічно.

2.3. Матеріальне середовище характеризується абсолютними проникностями $\tilde{\varepsilon}_a = \tilde{\varepsilon}_a(x, y, z)$, $\mu_a = \mu_0$.

Вивести диференціальне рівняння другого порядку, якому повинне задовольняти векторне поле \mathbf{H} у даному неоднорідному середовищі, якщо електромагнітний процес гармонічно змінюється в часі з частотою ω .

Р о з ’ я з о к . Розглянемо два перших рівняння Максвелла відносно комплексних амплітуд:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}}, \quad (2.27)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \mu_0 \dot{\mathbf{H}}$$

застосуємо операцію rot до першого рівняння (2.28):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\mathbf{H}} - \nabla^2 \dot{\mathbf{H}} = j\omega \operatorname{rot} \left(\tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}} \right).$$

Магнітна проникність середовища незмінна в просторі, тому $\operatorname{div} \dot{\mathbf{H}} = 0$, крім того,

$$\operatorname{rot} \left(\tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}} \right) = \left[\operatorname{grad} \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}} \right] + \tilde{\varepsilon}_a \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}.$$

Вектор \mathbf{E} можна виразити через вектор \mathbf{H} із першого рівняння

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{-j}{\omega \varepsilon_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}.$$

Звідси одержуємо остаточний вид шуканого рівняння

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + \omega^2 \tilde{\varepsilon}_a \mu_0 \dot{\mathbf{H}} + \left[\frac{\text{grad } \tilde{\varepsilon}_a}{\tilde{\varepsilon}_a} \text{rot } \dot{\mathbf{H}} \right] = 0.$$

2.4. Показати, що рівняння неперервності струму впливає з першого і третього рівнянь Максвелла (2.1).

Роз'язок. Тут варто взяти до уваги відому тотожність векторного аналізу і записати

$$\text{div rot } \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{E} + \text{div } \mathbf{J}_e = 0,$$

потім скористатися третім рівнянням Максвелла (2.1). Таким чином приходимо до рівняння неперервності

$$\text{div } \mathbf{J}_e + \partial \rho / \partial t = 0.$$

§ 2.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗ'ЯЗАННЯ

2.5. Показати, що з четвертого рівняння Максвелла в неоднорідному середовищі, магнітна проникність якої є функцією просторових координат, впливає наступне рівняння для вектора напруженості магнітного поля:

$$\text{div } \mathbf{H} = -\frac{1}{\mu_a} (\mathbf{H} \text{ grad } \mu_a).$$

2.6. Показати, що електромагнітне поле, яке змінюється в часі за гармонічним законом із частотою ω в області простору, вільної від джерел, задовольняє однорідним рівнянням Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \dot{\mathbf{E}} = 0,$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \dot{\mathbf{H}} = 0.$$

2.7. Вектор напруженості електричного поля \mathbf{E} в декартовій системі координат має єдину, відмінну від нуля, складову E_x .

Показати, що при цьому вектор Пойнтинга не може мати складової вздовж осі x .

2.8. У фіксованій точці простору відомі миттєві значення векторів поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

де \mathbf{E}_0 і \mathbf{H}_0 — сталі вектори.

Показати, що миттєве значення вектора Пойнтинга складається з

незмінного в часі середнього значення

$$\mathbf{P}_{\text{ср.}} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_0 \mathbf{H}_0] \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

і змінної частини

$$\mathbf{P}_{\text{зм.}} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_0 \mathbf{H}_0] \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2),$$

що змінюється в часі з подвоєною частотою.

2.9. При феноменологічному описі частотних властивостей полярних діелектриків використовують математичну модель, що уподібнює молекулярні диполі уявним твердим частинкам, що відчують при своєму русі в'язкий опір навколишнього середовища. При цьому зв'язок між вектором поляризації \mathbf{P} та вектором напруженості електричного поля \mathbf{E} встановлюється диференціальним рівнянням

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} + \frac{1}{T} \mathbf{P} = a\mathbf{E},$$

де a — константа; T — час релаксації середовища.

Вивести залежність комплексної абсолютної діелектричної проникності від частоти.

Відповідь: $\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_0 + \frac{aT}{1 + j\omega T}$.

2.10. Використовуючи умови попередньої задачі, вивести формулу тангенса кута діелектричних втрат.

Відповідь: $\text{tg}\delta_e = \frac{a\omega T^2}{\varepsilon_0 + T(a + \omega^2 \varepsilon_0 T)}$

2.11. Розв'язати задачу 2.9 для випадку, коли динаміка процесу поляризації описується рівнянням

$$\frac{d^2\mathbf{P}}{dt^2} + \frac{2}{T} \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{P} = b\mathbf{E},$$

де ω_0 — власна частота молекулярного диполя; b — константа. Таке рівняння виникає, якщо за модель диполя прийняти осцилятор із тертям.

Проаналізувати графіки частотних залежностей дійсної та уявної частин діелектричної проникності.

$$\text{Відповідь: } \varepsilon_a = \varepsilon_0 + \frac{bT}{(\omega^2 - \omega^2)T + j2\omega}.$$

2.12. Комплексні амплітуди векторів електромагнітного поля в деякій точці простору задаються вираженнями

$$\dot{\mathbf{E}} = 0.85e^{j0.6} \mathbf{1}_x - 1.3e^{-j0.7} \mathbf{1}_y, \quad \dot{\mathbf{H}} = 4.2 \cdot 10^{-3} e^{-j1.2} \mathbf{1}_z.$$

Визначити комплексний вектор Пойнтинга і його середнє значення.

$$\text{Відповідь: } \dot{\mathbf{P}} = -2.73 \cdot 10^{-3} e^{j0.5} \mathbf{1}_x - 1.785 \cdot 10^{-3} e^{j1.8} \mathbf{1}_y,$$

$$\dot{\mathbf{P}}_{cp} = -2.396 \cdot 10^{-3} \mathbf{1}_x + 0.406 \cdot 10^{-3} \mathbf{1}_y.$$

Розділ третій

ПЛОСКІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

§ 3.1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Плоскі електромагнітні хвилі існують в однорідному необмеженому середовищі. У випадку полів, що змінюються з часом за гармонічним законом, комплексні амплітуди $\dot{\mathbf{E}}$ і $\dot{\mathbf{H}}$ задовольняють рівнянням Гельмгольца

$$\begin{aligned} \nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \gamma^2 \dot{\mathbf{E}} &= 0, \\ \nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + \gamma^2 \dot{\mathbf{H}} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

де $\gamma = \omega \sqrt{\tilde{\varepsilon}_a \tilde{\mu}_a} = \beta - j\alpha$ – комплексний коефіцієнт розповсюдження, β – коефіцієнт фази, або хвильове число, α – коефіцієнт ослаблення.

Оскільки вихідні рівняння Максвела дають однозначний зв'язок між \mathbf{E} та \mathbf{H} , то достатньо знайти розв'язок лише одного з цих рівнянь.

Окремий розв'язок рівняння Гельмгольца описує однорідну плоску хвилю. Якщо остання розповсюджується вздовж осі z декартової системи координат, тоді вказаний розв'язок має вигляд

$$\dot{\mathbf{E}}(z) = \dot{\mathbf{E}}_1(0) e^{-j\gamma z} + \dot{\mathbf{E}}_2(0) e^{j\gamma z}. \quad (3.2)$$

Перший доданок відповідає прямій (падаючій) хвилі, що розповсюджується в напрямку додатних значень z .

Якщо величини $\tilde{\varepsilon}_a$ та $\tilde{\mu}_a$ відомі, то β і α можна знайти за допомогою виразу для кореня квадратного з комплексного числа:

$$\sqrt{a \pm jb} = \pm \left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} \pm j \sqrt{\frac{r-a}{2}} \right),$$

де $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа, квадрантні корені $\sqrt{r+a}$, $\sqrt{r-a}$ слід вважати додатними.

На високих частотах магніті властивості більшості середовищ проявляються слабо. Тому з достатньою для практичних цілей ступеню точності можна вважати

$$\mu_a = \mu_0.$$

Оскільки

$$\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon'_a - j\varepsilon''_a = \varepsilon\varepsilon_0(1 - j \operatorname{tg} \delta_E),$$

комплексний коефіцієнт розповсюдження

$$\gamma = \beta - j\alpha = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon'_a} \sqrt{1 - j \operatorname{tg} \delta_E}. \quad (3.3)$$

Коефіцієнт фази β характеризує зміну фази гармонічний коливань при розповсюдженні хвилі. Відстань, на якій фаза змінюється на 2π рад, називається *довжиною хвилі*:

$$\lambda = 2\pi / \beta.$$

Площина рівних фаз зветься *фазовим фронтом хвилі*, а швидкість переміщення цієї площини – *фазовою швидкістю*:

$$\vartheta_\phi = \omega / \beta. \quad (3.4)$$

Коефіцієнт фази та коефіцієнт ослаблення можуть бути представлені наступними формулами:

$$\beta = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0} \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_E}}{2} \right)^{1/2}, \quad (3.5)$$

$$\alpha = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0} \left(\frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_E} - 1}{2} \right)^{1/2}. \quad (3.6)$$

Таким чином, між ними існує співвідношення

$$\alpha = \beta \operatorname{tg}(\delta_E / 2).$$

Фазова швидкість

$$\vartheta_\phi = \frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{\varepsilon} \left(1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_E} \right)^{1/2}}, \quad (3.7)$$

довжина хвилі

$$\lambda = \frac{\sqrt{2\lambda_0}}{\sqrt{\varepsilon} \left(1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_E}\right)^{1/2}}. \quad (3.8)$$

Відношення фазової швидкості в середовищі до швидкості світла звуть *коефіцієнтом заломлення*:

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

З рівнянь Максвела випливає, що у випадку плоскої хвилі, комплексні амплітуди векторів \mathbf{E} та \mathbf{H} зв'язані через *характеристичний опір середовища*:

$$Z_c = \omega\mu_a / \gamma = \sqrt{\tilde{\mu}_a \varepsilon_a}, \quad (3.9)$$

так що

$$\dot{E} = Z_c \dot{H}.$$

Характеристичний опір для немагнітних середовищ ($\mu_a = \mu_0$)

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} (1 - j \operatorname{tg} \delta_E)^{-1/2} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}} (1 + \operatorname{tg}^2 \delta_E)^{-1/4} e^{j\frac{\delta_E}{2}}.$$

Аргумент приймає значення від нуля (діелектрики без втрат) до $\pi/4$ (ідеальний метал).

Характеристичний опір для вакууму

$$Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} = 120\pi = 376,991 \text{ Ом}.$$

Векторні рівняння (3.1) означають, що будь-яка координатна компонента векторів поля задовольняє рівнянню

$$\nabla^2 \dot{U} + \gamma^2 \dot{U} = 0,$$

розв'язком якого в декартовій системі координат є

$$\dot{U} = C \exp[-j\gamma(\xi_x x + \xi_y y + \xi_z z)]. \quad (3.10)$$

Тут C – константа; ξ_x, ξ_y, ξ_z – комплексні сталі, що задовольняють умові

$$\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2 = 1. \quad (3.11)$$

Якщо ξ_x, ξ_y, ξ_z – дійсні числа, тоді вираз (3.10) описує однорідну плоску хвилю, що розповсюджується в довільному відносно вихідної системи координат напрямку. Цю хвилю зручно представити формулою

$$\dot{U} = C \exp[-j\gamma(\boldsymbol{\xi}\mathbf{r})]. \quad (3.12)$$

Числа ξ_x, ξ_y, ξ_z мають зміст напрямляючих косинусів, які

фіксують напрям розповсюдження хвилі, а \mathbf{r} є радіус-вектором точки (x, y, z) . Якщо хоча б одне з чисел ξ_x, ξ_y, ξ_z комплексне, тоді вираз (3.10) буде описувати *неоднорідну плоску хвилю*:

$$\dot{\mathbf{U}} = C \exp\{-j \operatorname{Re}[\gamma(\xi_x x + \xi_y y + \xi_z z)] - \operatorname{Im}[\gamma(\xi_x x + \xi_y y + \xi_z z)]\}. \quad (3.13)$$

у якої фазовий фронт задається рівнянням

$$\operatorname{Re}[\gamma(\xi_x x + \xi_y y + \xi_z z)] = \operatorname{const},$$

а площина рівних амплітуд – рівнянням

$$\operatorname{Im}[\gamma(\xi_x x + \xi_y y + \xi_z z)] = \operatorname{const}.$$

У загальному випадку фазовий фронт і площина рівних амплітуд утворюють довільний кут.

Оскільки рівняння Максвелла лінійні, будь-яка комбінація їх розв'язків також буде розв'язком. Зокрема, якщо $\dot{E}_x \mathbf{1}_x$ і $\dot{E}_y \mathbf{1}_y$ – розв'язки вихідних рівнянь, то

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{E}_x \mathbf{1}_x + \dot{E}_y \mathbf{1}_y. \quad (3.14)$$

також є розв'язком рівнянь Максвелла та, відповідно, воно описує розповсюдження у просторі деякої хвилі. У залежності від співвідношення між фазами та амплітудами \dot{E}_x та \dot{E}_y у кожній точці простору кінець вектора \mathbf{E} буде рухатись по еліпсу з різним відношенням та орієнтацією його півосей. Така хвиля називається хвилею з еліптичною поляризацією. При довільних значеннях амплітуд та фаз у виразі (3.14) шляхом повороту осей довкола осі z завжди можна ввести нову систему координат (x', y', z') , в якій зсув фаз між координатними компонентами буде складати $\pm 90^\circ$, а півосі еліпса – співпадати з напрямом осей системи. Кут повороту, який забезпечить таке перетворення системи координат, буде визначати орієнтацію осей еліпса в системі (x, y, z) . Відношення великої півосі еліпса до малої називають *коефіцієнтом еліптичності* $k_{\text{ел}}$.

Лінійно поляризована хвиля являє собою один із граничних випадків еліптично поляризованої хвилі. Другий граничний випадок має місце при рівності амплітуд вихідних полів та зсуві фаз між ними, що дорівнює 90° . Тут кінець вектора \mathbf{E} рухається по колу, і хвиля зветься хвилею із *круговою поляризацією*. Поле такої хвилі можна представити виразом

$$\dot{\mathbf{E}}_{\pm} = \dot{E}(\mathbf{1}_x \pm j \mathbf{1}_y). \quad (3.15)$$

Знак мінус відповідає хвилі з правою круговою поляризацією, у

якої вектор \mathbf{E} обертається за годинниковою стрілкою (якщо дивитись у напрямку розповсюдження), а знак плюс – хвилі з лівою круговою поляризацією (напряв обертання зворотній). Будь-яка хвиля з лінійною поляризацією може бути представлена сумою двох хвиль із круговою поляризацією, наприклад,

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{E}_x \mathbf{1}_x = \dot{\mathbf{E}}_+ + \dot{\mathbf{E}}_-, \quad (3.16)$$

де

$$\dot{\mathbf{E}}_+ = \frac{\dot{E}_x}{2} (\mathbf{1}_x + j\mathbf{1}_y), \quad \dot{\mathbf{E}}_- = \frac{\dot{E}_x}{2} (\mathbf{1}_x - j\mathbf{1}_y). \quad (3.17)$$

Плоска хвиля переносить енергію в напрямі розповсюдження. Для гармонічних полів цей процес описується середнім значенням вектора Пойнтинга:

$$\mathbf{\Pi}_{cp} = \frac{1}{2} \text{Re}[\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}] \quad (3.18)$$

Часто $\mathbf{\Pi}_{cp}$ зручно виражати лише через напруженість електричного чи магнітного поля:

$$\mathbf{\Pi}_{cp} = \frac{|\dot{\mathbf{E}}|^2}{2} \text{Re}\left(\frac{1}{Z_c}\right) \mathbf{1}_z = \frac{|\dot{\mathbf{H}}|^2}{2} \text{Re}(Z_c) \mathbf{1}_z. \quad (3.19)$$

У середовищах без втрат $\mathbf{\Pi}_{cp}$ не залежить від координати z . Якщо ж середовища зі втратами, тоді густина потоку потужності плоскої електромагнітної хвилі спадає при розповсюдженні за експоненціальним законом:

$$\mathbf{\Pi}_{cp} = \mathbf{\Pi}_{cp}(0) \exp(-2\alpha z). \quad (3.20)$$

Величину втрат у середовищі характеризують *питомим згасанням* Δ у дБ/м:

$$\Delta = 20 \lg \left[\frac{E(0)}{E(1)} \right] = 10 \lg \left[\frac{\Pi(0)}{\Pi(1)} \right],$$

яке пов'язане з коефіцієнтом ослаблення α співвідношенням $\Delta = 8,69\alpha$.

Фазова швидкість плоскої електромагнітної хвилі у середовищі із залежними від частоти параметрами ϵ' і ϵ'' також є функцією частоти. Таке явище зветься *дисперсією* фазової швидкості. При розповсюдженні складних сигналів у цьому випадку будуть порушені вихідні амплітудні та фазові співвідношення між окремими компонентами спектра та, як наслідок, буде змінюватися форма

сигналу в процесі його розповсюдження. Для знаходження вигляду сигналу необхідно користуватись спектральним чи операторним методами. Наприклад, припускаючи, що

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt,$$

є Фур'є перетворенням сигналу у площині $z = 0$, можна знайти сигнал для довільних значень z , використовуючи зворотне перетворення:

$$s(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-j\gamma z} e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.21)$$

Нехтуючи втратами в середовищі та, припускаючи, що сигнали $s(t, z)$ є вузькосмуговими, що їх огинаюча в середовищах із дисперсією розповсюджується зі *груповою швидкістю*

$$\mathfrak{V}_{gp} = \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{d\omega}{d\beta}. \quad (3.22)$$

Якщо умова вузькосмуговості сигналу не виконується, тоді поняття групової швидкості, строго кажучи, перестає адекватно описувати трансформацію форми такого сигналу.

§ 3.2. ПРИКЛАДИ РОЗ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

3.1. Плоска електромагнітна хвиля з частотою 10^9 Гц розповсюджується в середовищі з параметрами $\varepsilon = 2,4$, $\text{tg } \delta_E = 10^{-1}$, $\mu = 1$.

Визначити фазову швидкість, довжину хвилі та коефіцієнт ослаблення.

Роз'язок. Врахуємо, що $\text{tg } \delta_E \ll 1$ та розкладемо вираз (3.3) у степеневий ряд. Обмежуючись трьома першими членами, отримаємо

$$\gamma = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon'_a} \sqrt{1 - j \text{tg } \delta_E} \approx \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon'_a} \left(1 - j \frac{\text{tg } \delta_E}{2} + \frac{\text{tg}^2 \delta_E}{8} \right).$$

Таким чином, для діелектрика з малими втратами коефіцієнт фази та коефіцієнт ослаблення наближено рівні:

$$\beta \approx \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon'_a} \left(1 + 0,125 \text{tg}^2 \delta_E \right),$$

$$\alpha \approx 0,5 \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon'_a}.$$

Використовуючи співвідношення (3.4), знайдемо фазову швидкість хвилі

$$\vartheta_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}(1 + 0,125 \operatorname{tg}^2 \delta_E)}.$$

Отриманий результат свідчить, що наявність втрат у середовищі призводить до зміни величини фазової швидкості. Для $\operatorname{tg} \delta_E = 10^{-1}$ попгтак,ка складає 0,125%, так що практично можна покласти

$$\vartheta_{\phi} \approx c / \sqrt{\varepsilon} = 1,94 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

На основі відомої величини фазової швидкості знайдемо довжину хвилі:

$$\lambda = \vartheta_{\phi} / f 0,194 \text{ м.}$$

Підстановка вихідних даних в отриману раніше формулу дає:

$$\alpha = 1,622 \text{ м}^{-1}.$$

3.2. Обрахувати фазову швидкість, коефіцієнт ослаблення та глибину проникнення поля для плоскої електромагнітної хвилі з частотою 10 МГц, що розповсюджується в металі з параметрами $\sigma = 5 \cdot 10^7 \text{ См/м}$, $\mu = 1$.

Р о з ' я з о к (3.3)

$$\gamma \approx \omega \sqrt{\mu_0 \left(-j \frac{\sigma}{\omega} \right)} = \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu_0}{2}} (1 - j).$$

Коефіцієнт фази та коефіцієнт ослаблення у середовищі, що розглядається, чисельно рівні одне одному:

$$\beta = \alpha = \sqrt{\omega \sigma \mu_0 / 2} = 44,43 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}.$$

На основі відомої величини β можна обчислити фазову швидкість:

$$\vartheta_{\phi} = 1,414 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

За глибину проникнення поля в метал d приймають відстань, на якій його амплітуда зменшується в e раз. Очевидно, що

$$d = 1/\alpha = 22,5 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 22,5 \text{ мкм.}$$

3.3. Плоска електромагнітна хвиля з частотою 10^9 Гц розповсюджується в середовищі з параметрами $\varepsilon = 2,25$, $\operatorname{tg} \delta_E = 0,01$, $\mu = 1$. Амплітуда електричного поля в площині $z = 0$ дорівнює 100 В/м .

Визначити середню густину потоку потужності в площині $z = 1 \text{ м}$.

Р о з ' я з о к . Густина потоку потужності плоскої електромагнітної хвилі визначається виразом

$$P_{cp}(z) = \frac{|\dot{E}|^2}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{Z_c} \right) e^{-2\alpha z}.$$

Таким чином, необхідно обчислити коефіцієнт ослаблення та характеристичний опір. Діючи так само, як і в задачі 3.1, можна знайти α . Підстановка вихідних даних дає $\alpha = 0,162 \text{ м}^{-1}$.

При визначенні характеристичного опору для $\operatorname{tg} \delta_E \ll 1$, можна використати наближений вираз для квадратного кореня, що входить до формули (3.10). Тоді

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} \frac{1}{1 - 0,5j \operatorname{tg} \delta_E} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{1 - 0,5j \operatorname{tg} \delta_E}.$$

Звідки,

$$P_{cp}(z) = \frac{|\dot{E}|^2}{2} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{120\pi} e^{-2\alpha z},$$

Або після необхідних обчислень $P_{cp}(z=1) = 14,38 \text{ Вт/м}^2$

3.4. Деякі речовини (наприклад, водний розчин цукру) мають різну швидкість розповсюдження для хвиль із лівою та правою круговою поляризаціями. Це призводить до повороту площини поляризації плоскої хвилі з лінійною поляризацією в процесі її розповсюдження. Така властивість речовин зветься оптичною активністю.

Вважаючи, що значення фазових швидкостей для лівої ϑ_l та правої ϑ_n кругової поляризації задані, вивести формулу, яка визначає кут повороту площини поляризації хвилі на проміжку ізляху довжиною L для електромагнітної хвилі з заданою частотою ω .

Розв'язок. Лінійно поляризовану хвилю, що в площині $z=0$ має вигляд

$$\dot{\mathbf{E}} = E_{0x} \mathbf{1}_x,$$

Можна представити як суму двох хвиль із круговою поляризацією:

$$\dot{\mathbf{E}}_n = \frac{\dot{E}_{0x}}{2} (\mathbf{1}_x + j\mathbf{1}_y), \quad \dot{\mathbf{E}}_l = \frac{\dot{E}_{0x}}{2} (\mathbf{1}_x - j\mathbf{1}_y).$$

Хвиля із правою круговою поляризацією при розповсюдженні в напрямку осі z буде описуватися виразом

$$\dot{E}_n(z) = E_{0n} \exp\left(-j \frac{\omega}{\vartheta_n} z\right),$$

а з лівою – виразом

$$\dot{E}_l(z) = E_{0l} \exp\left(-j \frac{\omega}{\vartheta_l} z\right).$$

У довільній площині $z \neq 0$ сума цих хвиль являтиме собою хвиля з лінійною поляризацією. Координатні компоненти цієї хвилі рівні:

$$\dot{E}_x(z) = \frac{E_{0x}}{2} \left(e^{-j\beta_n z} + e^{-j\beta_l z} \right),$$

$$\dot{E}_y(z) = j \frac{E_{0x}}{2} \left(e^{-j\beta_n z} - e^{-j\beta_l z} \right).$$

Сумарний вектор \mathbf{E} утворює деякий кут φ з віссю x координатної системи (x, y, z) , який залежить від z . Тангенс цього кута

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_y}{E_x} = \operatorname{tg} \left[\frac{\omega z}{2} \left(\frac{1}{\vartheta_l} - \frac{1}{\vartheta_n} \right) \right].$$

Таким чином, кут повороту площини поляризації на відріжку шляху довжиною L визначається формулою

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \left[\frac{\omega L}{2} \left(\frac{\vartheta_n - \vartheta_l}{\vartheta_l \vartheta_n} \right) \right].$$

Зазвичай відмінність швидкостей розповсюдження ϑ_l та ϑ_n мала. Тому наближено

$$\varphi \approx \frac{\omega L}{2\vartheta} \frac{\vartheta_n - \vartheta_l}{\vartheta} = \pi \frac{L}{\lambda} \delta\vartheta,$$

де ϑ – середнє значення швидкості; $\delta\vartheta$ – відносна різниця швидкостей розповсюдження; $\lambda = \vartheta / f$ – довжина хвилі в середовищі.

§ 3.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗ'ЯЗАННЯ

3.5. Визначити довжину та фазову швидкість електромагнітної хвилі, що розповсюджується у середовищі без втрат з відносними втратами $\epsilon = \mu = 10$, якщо частота хвилі 10 МГц.

Відповідь: 3 м, $3 \cdot 10^7$ м/с.

3.6. Характеристичний опір середовища рівний 1508 Ом, відносна

діелектрична проникність $\varepsilon = 1$.

Визначити відносну магнітну проникність середовища.

Відповідь: 16.

3.7. У середовищі з параметрами $\varepsilon = 4$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ розповсюджується плоска електромагнітна хвиля, комплексна амплітуда вектора напруженості електромагнітного поля якої у площині $z = 0$ $\vec{E} = 0,5\mathbf{I}_x + 0,2\mathbf{I}_y$.

Визначити комплексну амплітуду вектора напруженості магнітного поля, якщо хвиля розповсюджується у напрямку зростання координати z .

Відповідь: $\vec{H} = (-1,061\mathbf{I}_x + 2,651\mathbf{I}_y) \cdot 10^{-3}$ А/м.

3.8. Плоска електромагнітна хвиля розповсюджується у немагнітному середовищі без втрат з невідомим значенням діелектричної проникності. Вимірювання показали, що на шляху, рівному 10 см, коливання з частотою 1 ГГц набуває додатковий у порівнянні з вакуумом зсув по фазі у 40° .

Визначити відносну діелектричну проникність та коефіцієнт заломлення середовища.

Відповідь: $\varepsilon = 16/9 = 1,78$, $n = 4/3 = 1,33$.

3.9. Деякий діелектрик на частоті 10 ГГц має параметри: $\varepsilon = 3,8$, $\mu = 1$, $\text{tg } \delta_E = 10^{-4}$.

Визначити довжину хвилі, коефіцієнт ослаблення та характеристичний опір середовища.

Відповідь: 1,54 см, $2,04 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$, $193 \exp(j0,5 \cdot 10^{-4})$ Ом.

3.10. Кераміка титанату барію (BaTiO_3) на частоті 10 ГГц характеризується параметрами: $\varepsilon = 144$, $\text{tg } \delta_E = 0,6$, $\mu = 1$.

Визначити довжину хвилі, коефіцієнт ослаблення та характеристичний опір даного середовища.

Відповідь: 0,24 см, 758 м^{-1} , $29 \exp(j0,28)$ Ом.

3.11. У скільки разів зменшиться амплітуда плоскої електромагнітної хвилі з частотою 2 МГц при розповсюдженні у середовищі з параметрами $\sigma = 10^{-3}$ См/м, $\varepsilon = 2$, $\mu = 1$ на шляху довжиною 1 м?

Відповідь: у 1,083 раза.

3.12. Визначити товщину мідного екрана, який забезпечує ослаблення амплітуди електромагнітного поля у 10^4 разів на частотах 50 Гц та 50 МГц.

Відповідь: 9,271 см, 29,374 мкм.

3.13. Визначити товщину екрана, який забезпечує ослаблення амплітуди електромагнітного поля у 10^4 разів на частоті 50 Гц, якщо він виконаний з матеріалу з $\sigma = 5 \cdot 10^7$ См/м та $\mu = 900$. Порівняти отриманий результат із відповіддю до попередньої задачі.

Відповідь: 3,09 м.

3.14. Комплексна абсолютна діелектрична проникність аміаку (NH_3) при тиску $1,33 \cdot 10^2$ Па в околі частоти $f_0 = 23\,866$ МГц описується виразом

$$\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_0 \left(1 + \frac{5,4 \cdot 10^9}{f_0 - f + j2,7 \cdot 10^7} \right).$$

Визначити коефіцієнт ослаблення хвилі у такому середовищі на частотах 23 866 і 23866 ± 27 МГц.

Відповідь: 0,05 і $0,025 \text{ м}^{-1}$ відповідно.

3.15. У середовищі з параметрами $\epsilon = 2,25$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ розповсюджується плоска електромагнітна хвиля з амплітудою напруженості електричного поля 100 В/м.

Визначити густину потоку потужності, яку переносить хвиля у напрямку розповсюдження.

Відповідь: $10,894 \text{ Вт/м}^2$.

3.16. Амплітуда напруженості магнітного поля плоскої електромагнітної хвилі, що розповсюджується у середовищі з параметрами $\epsilon = 3,8$, $\mu = 1$, $\sigma = 2 \cdot 10^{-4}$ См/м, у площині $z = 0$ дорівнює 1 А/м.

Визначити густину потоку потужності електромагнітної хвилі на відстані z , рівній 1 м від початку координат.

Відповідь: $94,844 \text{ Вт/м}^2$.

3.17. Середнє значення вектора Пойнтинга плоскої електромагнітної хвилі в процесі розповсюдження зменшується на 10% на шляху довжиною 2 м. Визначити коефіцієнт ослаблення хвилі.

Відповідь: $0,025 \text{ м}^{-1}$.

3.18. Деякі сучасні лазери мають імпульсну потужність порядку 10^6 Вт.

Визначити площу поперечного перерізу пучка, при якому відбувається електричний пробій повітря. При розрахунках відмінністю електричних властивостей повітря та вакууму знехтувати, напруженість електричного поля, яке забезпечує пробій,

покласти рівною 30 кВ/см.

Відповідь: 0,838 см².

3.19. У середовищі з показником заломлення, залежним від частоти, розповсюджуються два вузькосмугових радіоімпульси з несучими частотами 10 і 20 ГГц.

Визначити різницю часів запізнення імпульсів на відстані 100 км від точки, де вони співпали за часом, якщо закон зміни показника заломлення записується у вигляді $n = n(\omega) = 10^{-10} \omega$.

Відповідь: імпульс із несучою частотою 20 ГГц буде випереджувати другий імпульс на 41,9 нс.

Розділ четвертий ХВИЛЕВОДИ

§ 4.1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Хвилевід являє собою порожню металеву трубу довільного перерізу, усередині якої розповсюджуються електромагнітні хвилі.

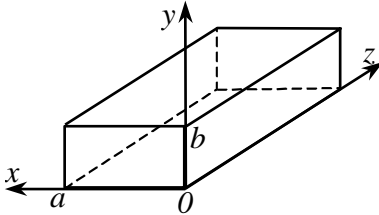


Рис. 4.1

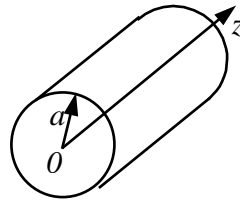


Рис. 4.2

Найбільш часто застосовують хвилеводи прямокутного (рис. 4.1) і круглого (рис. 4.2) перерізів, рідше — хвилеводи більш складного перерізу, наприклад П-подібні та Н-подібні.

У хвилеводах з ідеально провідними стінками й однорідним заповненням можуть розповсюджуватися хвилі електричного типу (Е), у яких $\dot{H}_z \equiv 0$, а $\dot{E}_z \neq 0$ (напрямок осі z збігається з поздовжньою віссю хвилеводу), і хвилі магнітного типу (Н), у яких $\dot{E}_z \equiv 0$, а $\dot{H}_z \neq 0$.

Аналіз хвиль у хвилеводах роблять за допомогою вирішення рівняння Гельмгольца для складових \dot{E}_z чи \dot{H}_z при рівності нулю тангенціальної складової вектора електричного поля на стінках хвилеводу.

Припустимо, що хвилевід заповнений діелектриком із відносною діелектричною проникністю ϵ і магнітною проникністю $\mu = 1$. Кожен конкретний тип хвилі у хвилеводі може розповсюджуватися в тому випадку, якщо

$$\lambda_0 / \sqrt{\epsilon} < \lambda_{\text{кр}}, \quad (4.1)$$

де λ_0 — довжина хвилі генератора; $\lambda_{\text{кр}}$ — критична довжина хвилі, що визначається розмірами і формою поперечного перерізу хвилеводу.

Для хвиль типу E_{mn} і H_{mn} у прямокутному хвилеводі

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}, \quad (4.2)$$

де a, b — розміри поперечного перерізу хвилеводу (см. рис. 4.1).

Для хвиль типу E_{mn} у круглому хвилеводі

$$\lambda_{\text{кр}} = 2\pi a / v_{mn}, \quad (4.3)$$

де a — радіус хвилеводу; v_{mn} — n -й корінь рівняння $J_m(x) = 0$, $J_m(x)$ — функція Бесселя. Для хвиль типу H_{mn} у круглому хвилеводі

$$\lambda_{\text{кр}} = 2\pi a / \mu_{mn}, \quad (4.4)$$

де μ_{mn} — n -й корінь рівняння $J'_m(x) = 0$, $J'_m(x)$ — похідна від функції Бесселя.

Фазова швидкість хвилі у хвилеводі визначається величиною *поздовжнього хвильового числа*:

$$h = \sqrt{\beta^2 \epsilon - g^2}, \quad (4.5)$$

де $\beta = 2\pi/\lambda_0$; $g = 2\pi/\lambda_{\text{кр}}$ — поперечне хвильове число.

Якщо виконується умова (4.1), то $\beta^2 \epsilon > g^2$, значення h дійсне і даний тип хвилі розповсюджується. Якщо умова (4.1) не виконується, то $\beta^2 \epsilon < g^2$, значення h уявне і даний тип хвилі згасає, не поширюючись. У цьому випадку формула (4.5) дозволяє визначити коефіцієнт ослаблення хвилі.

Для знаходження фазової швидкості та довжини хвилі у хвилеводі можна скористатися співвідношенням

$$h = 2\pi / \lambda_{\text{в}} = \omega / \mathfrak{V}_{\text{ф}}, \quad (4.6)$$

де $\lambda_{\text{в}}$ — довжина хвилі в хвилеводі.

З (4.6) одержуємо розрахункові формули для фазової швидкості, довжини хвилі й групової швидкості.

Фазова швидкість

$$\vartheta_{\phi} = \frac{c/\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2}} \quad (4.7)$$

Довжина хвилі у хвилеводі

$$\lambda_B = \frac{\lambda_0/\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2}}, \quad (4.8)$$

Групова швидкість

$$\vartheta_{гр} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2}, \quad (4.9)$$

де c — швидкість світла у вільному просторі.

Основним типом хвилі в прямокутному хвилеводі при $a > b$ є хвиля H_{10} , для якої $\lambda_{кр} = 2a$; найближчими вищими типами — хвилі H_{20} , H_{01} , H_{11} . Картина силових ліній поля найпростіших хвиль магнітного типу зображена на рис. 4.4.

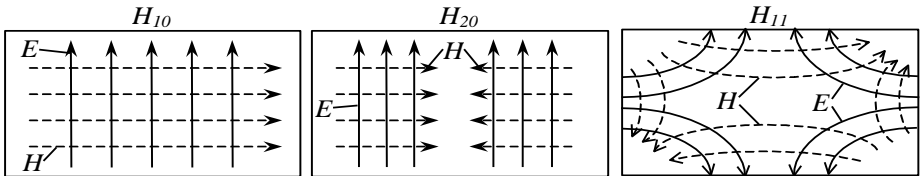


Рис. 4.4

Найбільше практичне значення має хвиля типу H_{10} у прямокутному хвилеводі. Складові векторів поля цієї хвилі описуються рівняннями:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= 0, \\ \dot{E}_y &= E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_z &= 0, \\ \dot{H}_x &= -\frac{h}{\omega\mu_a} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_z &= j \frac{\pi}{a} \frac{E_0}{\omega\mu_a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Характеристичним опором Z_c хвилеводу називається відношення поперечних складових векторів E і H . Для хвиль електричного типу

$$Z_{cE} = Z_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2}. \quad (4.11)$$

Для хвиль магнітного типу

$$Z_{cH} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2}}, \quad (4.12)$$

де Z_0 — характеристичний опір плоскої хвилі у вільному просторі.

Потужність, що переноситься хвилею будь-якого типу у хвилеводі, визначають інтегруванням вектора Пойнтинга по поперечному перерізу хвилеводу:

$$P_{cp} = \frac{1}{2} \int_S \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{I}_z \left[\dot{E} H^* \right] dS \right\}. \quad (4.13)$$

Підставляючи вираз для складових векторів поля (4.10) у (4.13), одержимо формулу для розрахунку потужності, яка переноситься хвилею типу H_{10} у прямокутному хвилеводі:

$$P = \frac{ab \sqrt{1 - [\lambda_0 / (2a)]^2}}{4Z_0} E_0^2, \quad (4.14)$$

де E_0 — максимальна амплітуда напруженості електричного поля у хвилеводі.

Аналогічно виводиться формула для розрахунку потужності, що переноситься хвилею типу H_{11} у круглому хвилеводі:

$$P = \frac{\pi a^2 E_0^2}{4,28 Z_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2}. \quad (4.15)$$

Максимальна потужність, яка переноситься у хвилеводі, визначається максимальною припустимою (пробивною) напруженістю електричного поля у хвилеводі. Для сухого повітря при атмосферному тиску $E_{max} = 30$ кВ/см.

Загасання хвиль у хвилеводах залежить від втрат у металевих стінках і в матеріалі, що заповнює хвилевід. Результуючий коефіцієнт ослаблення хвилі в хвилеводі дорівнює сумі коефіцієнтів ослаблення, викликаних утратами в металевих стінках і в діелектрику:

$$\alpha_{\text{общ}} = \alpha_{\text{М}} + \alpha_{\text{Д}}$$

Коефіцієнт ослаблення унаслідок втрат у металевих стінках для будь-якої хвилі в хвилеводі довільного перерізу

$$\alpha_{\text{М}} = \frac{1}{2} \frac{R_{\text{S}} \int_L |\dot{H}_{\tau}|^2 dl}{\int_L \operatorname{Re} |\dot{E} H^*|^2 dS}, \quad (4.16)$$

де $R_{\text{S}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\sigma}}$ — поверхневий опір металу; H_{τ} — складова магнітного поля, тангенціальна до поверхні металу.

Інтеграл у чисельнику виразу (4.16) беруть по контуру перерізу хвилеводу, інтеграл у знаменнику — по його поперечному перерізу.

Підставляючи співвідношення для складових векторів поля в загальний вираз (4.16), одержимо розрахункові формули для коефіцієнтів ослаблення конкретних типів хвиль у хвилеводах.

Для хвиль типу H_{10} у прямокутному хвилеводі

$$\alpha_{\text{М}} = \frac{R_{\text{S}} \left[1 + \left(\frac{\lambda_0}{2a} \right)^2 \frac{2b}{a} \right]}{Z_0 b \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a} \right)^2}}; \quad (4.17)$$

§ 4.2. ПРИКЛАДИ РОЗ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

4.1. Які типи хвиль можуть розповсюджуватися в круглому хвилеводі діаметром 3 см, заповненому діелектриком із відносною проникністю $\varepsilon = 3,2$? Частота коливань 10 ГГц.

Роз'язок. У даному хвилеводі можуть розповсюджуватися лише ті типи хвиль, для яких виконується умова $\lambda_{\text{д}} < \lambda_{\text{кр}}$, де $\lambda_{\text{д}} = \lambda_0 / \sqrt{\varepsilon} = c / (f \sqrt{\varepsilon})$ — довжина хвилі в однорідному безмежному діелектрику. У нашому випадку $\lambda_{\text{д}} = 1,675$ см. Критична довжина хвилі в круглому хвилеводі дорівнює $2\pi a / \nu_{\text{mn}}$ для хвиль типу E_{mn} і $2\pi a / \mu_{\text{mn}}$ для хвиль типу H_{mn} . Отже, для типів хвиль, що поширюються, повинні виконуватися умови $\nu_{\text{mn}} < 2\pi a / \lambda_{\text{д}}$, $\mu_{\text{mn}} < 2\pi a / \lambda_{\text{д}}$, $2\pi a / \lambda_{\text{д}} = 5,627$, яким задовольняють наступні типи хвиль: E_{01} , E_{02} , E_{11} , E_{21} , H_{01} , H_{11} , H_{12} , H_{21} , H_{31} , H_{21} .

4.2. У прямокутному хвилеводі перерізом 4×3 см розповсюджується хвиля типу H_{11} . Хвилевід заповнений пенополістиролом із діелектричною проникністю $\varepsilon = 1,15$. Частота коливань 8 ГГц.

Визначити фазову швидкість і довжину хвилі у хвилеводі.

Розв'язок. Знайдемо критичну довжину хвилі для коливання типу H_{11} у прямокутному хвилеводі:

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2}{\sqrt{(1/a)^2 + (1/b)^2}} = 4,8 \text{ см.}$$

Довжина хвилі генератора $\lambda_0 = c/f = 3,75$ см.

Фазова швидкість хвилі у хвилеводі

$$v_{\text{ф}} = \frac{c/\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}} = 4,084 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Довжина хвилі в хвилеводі

$$\lambda_{\text{в}} = \frac{\lambda_0/\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}} = 5,105 \text{ см.}$$

4.3. При якому діаметрі круглого хвилеводу в ньому може розповсюджуватися тільки один основний тип хвилі при частоті коливань 10 ГГц?

Розв'язок. Спочатку знайдемо довжину хвилі генератора

$$\lambda_0 = c/f = 3 \text{ см.}$$

Основним типом хвилі круглого хвилеводу є хвиля H_{11} її критична довжина

$$\lambda_{\text{кр}} = 2\pi a/1,841 = 3,413a,$$

звідки отримуємо умову існування хвилі типу H_{11} :

$$a > \lambda_0/3,41 = 8,79 \text{ мм.}$$

Найближчим вищим типом хвилі в круглому хвилеводі є хвиля E_{01} . Її критична довжина

$$\lambda_{\text{кр}} = 2\pi a/2,405 = 2,613a.$$

Щоб хвиля типу E_{01} не могла розповсюджуватися, повинна виконуватися умова

$$a < \lambda_0/2,61 = 11,48 \text{ мм.}$$

Отже, діаметр хвилеводу повинен бути в межах

$$17,58 \text{ мм} < a < 22,96 \text{ мм.}$$

4.4. Прямокутний хвилевід перерізом 23×10 мм служить для передачі надвисокочастотних імпульсів із прямокутною огинаючою. Тривалість імпульсів $\tau = 6$ нс, несуча частота $f_0 = 10$ ГГц. Довжина лінії $l = 50$ м.

Оцінити якісно величину спотворень імпульсів, викликаних дисперсією хвилеводу.

Роз'язок. Насамперед, відзначимо, що в прямокутному хвилеводі перерізом 23×10 м при частоті 10 ГГц може розповсюджуватися лише хвиля типу H_{10} . Її критична довжина $\lambda_{кр} = 2a = 4,6$ см і критична частота $l_{кр} = 3/\lambda_{кр} = 6,52$ ГГц.

Спотворення форми імпульсів у хвилевідній лінії передачі викликані різним часом групового запізнювання для різних складових спектра сигналу. Спектр прямокутного високочастотного імпульсу в області додатних частот описується формулою

$$S(\omega) = \frac{E_\tau}{2} \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}}{(\omega - \omega_0)\tau/2}$$

та має вигляд, зображений на рис. 4.4.

Припустимо, що ширина спектра дорівнює ширині його, головного пелюстка. Тоді крайні частоти спектра будуть рівні:
 $f_1 = f_0 - 1/\tau = 9,833$ ГГц,
 $f_2 = f_0 + 1/\tau = 10,167$ ГГц.

Різниця групового часу запізнення

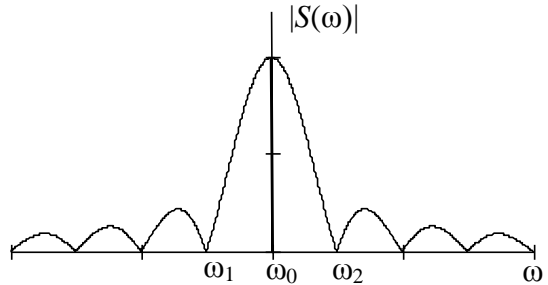


Рис. 4.4

$$\Delta t = \frac{l}{\mathfrak{G}_{гр}(f_1)} - \frac{l}{\mathfrak{G}_{гр}(f_2)}. \quad (4.18)$$

Використовуючи рівняння (4.9), одержимо

$$\Delta t = \frac{l}{c} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - (f_{\text{кр}} / f_1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - (f_{\text{кр}} / f_2)^2}} \right] = 5,4 \text{ нс.}$$

§ 4.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗ'ЯЗАННЯ

4.5. Які типи хвиль можуть розповсюджуватися в заповненому повітрям прямокутному хвилеводі з перерізом 10×4 см при частоті $f = 5$ ГГц?

Відповідь: $H_{10}, H_{20}, H_{30}, H_{01}, H_{11}, H_{21}, E_{11}, E_{21}$.

4.6. Які типи хвиль можуть розповсюджуватися у квадратному хвилеводі зі стороною 1 см при частоті 10 ГГц? Хвилевід заповнений діелектриком з відносною проникністю $\epsilon = 2,6$.

Відповідь: $H_{10}, H_{20}, H_{01}, H_{02}, H_{11}, E_{11}$.

4.7. Які типи хвиль можуть розповсюджуватися в заповненому повітрям круглому хвилеводі діаметром 3 см при частоті 7,5 ГГц?

Відповідь: $E_{01}, E_{11}, H_{01}, H_{11}, H_{21}, H_{31}$.

4.8. Прямокутний хвилевід перерізом 23×10 мм заповнений діелектриком з відносною проникністю $\epsilon = 2,25$. Частота коливань 8,4 ГГц.

Визначити величини \mathcal{S}_ϕ і λ_B .

Відповідь: $2,34 \cdot 10^8$ м/с, 2,78 см.

4.9. Визначити критичну довжину хвилі, критичну частоту й довжину хвилі в прямокутному хвилеводі для хвилі типу E_{11} . Розміри поперечного переріза 4×3 см. Частота коливань 10 ГГц.

Відповідь: 4,8 см, 6,25 ГГц, 3,84 см.

4.10. Визначити критичну частоту і фазову швидкість хвилі в круглому хвилеводі діаметром 5 см при частоті 5 ГГц.

Відповідь: 3,516 ГГц, $4,219 \cdot 10^8$ м/с.

4.11. Визначити діапазон частот, у межах якого в круглому хвилеводі діаметром 4 см може розповсюджуватися тільки основний тип хвилі.

Відповідь: 4,395—5,740 ГГц.

4.12. Визначити діаметр круглого хвилеводу, якщо фазова швидкість хвилі типу E_{01} при частоті поля 10 ГГц дорівнює $5 \cdot 10^8$ м/с.

Відповідь: 14,34 мм.

4.13. Довжина хвилі в хвилеводі при роботі на основному типі хвилі складає 4,5 см. Розміри поперечного переріза хвилеводу

$2,6 \times 1,3$ см.

Знайти частоту коливань, що передаються.

Відповідь: 8,82 ГГц.

4.14. Фазова швидкість хвилі типу H_{10} у прямокутному хвилеводі дорівнює $5c$, де c — швидкість світла.

Визначити розміри хвилеводу, якщо довжина хвилі у вільному просторі дорівнює 10 см.

Відповідь: $a = 5,1$ см; розмір b з умов задачі визначити не можливо.

4.15. Знайти групову швидкість хвилі типу H_{10} у прямокутному хвилеводі з перерізом 72×34 мм при частоті поля 3 ГГц.

Відповідь: $2,16 \cdot 10^8$ м/с.

4.16. У круглому хвилеводі розповсюджується хвиля типу E_{01} . Частота поля 10 ГГц, довжина хвилі у хвилеводі 4 см. Обчислити групову швидкість.

Відповідь: $2,25 \cdot 10^8$ м/с.

4.17. У хвилеводі, заповненому діелектриком із відносною проникністю $\epsilon = 2,25$, розповсюджується хвиля з фазовою швидкістю $3 \cdot 10^8$ м/с. Визначити групову швидкість.

Відповідь: $1,333 \cdot 10^8$ м/с.

4.18. Визначити характеристичний опір хвилі типу H_{10} у прямокутному хвилеводі перерізом 72×34 мм при частоті коливань 3 ГГц.

Відповідь: 523,9 Ом.

4.19. Визначити характеристичний опір хвилі типу E_{01} у круглому хвилеводі діаметром 30 мм при довжині хвилі генератора 3,2 см.

Відповідь: 217,7 Ом.

4.20. У круглому хвилеводі діаметром 5 см, заповненому діелектриком, розповсюджується хвиля типу H_{11} . Частота коливань 3 ГГц.

Визначити діелектричну проникність речовини, що заповнює хвилевід, якщо фазова швидкість хвилі дорівнює швидкості світла у вільному просторі.

Відповідь: $\epsilon = 2,37$.

4.21. Пристрій для виміру діелектричної проникності речовини являє собою прямокутний хвилевід перерізом 23×10 мм, заповнений діелектриком. Для виміру довжини хвилі у хвилеводі в середині його широкої стінки прорізана поздовжня щілина, уздовж якої переміщається зонд із детектором.

Хвилевід працює на основному типі хвилі.

Визначити діелектричну проникність досліджуваної речовини, якщо при частоті сигналу 10 ГГц довжина хвилі у хвилеводі дорівнює 22,6 мм.

Відповідь: $\varepsilon = 2,19$.

4.22. Визначити згасання хвилі типу H_{10} у відрізку прямокутного хвилеводу з перерізом 23×10 мм та довжиною 10 см на частоті 6 ГГц.

Відповідь: 46,4 дБ.

4.23. Яка максимальна потужність може бути переданою через прямокутний хвилевід перерізом 23×10 мм, що працює на частоті 10 ГГц? Хвилевід заповнений повітрям, граничне допустиме значення напруженості електричного поля 30 кВ/см.

Відповідь: 1,04 МВт.

4.24. У круглomu хвилеводі радіусом a розповсюджується хвиля типу H_{01} .

На якій відстані від осі хвилеводу напруженість електричного поля має максимальне значення?

Відповідь: $0,48a$.

4.25. Через лінію передачі, що являє собою прямокутний хвилевід перерізом 72×34 мм і довжиною 50 м, передаються надвисокочастотні імпульси з прямокутною огинаючою. Тривалість імпульсів 1 нс, несуча частота 3 ГГц.

Визначити час запізнення сигналу при проходженні через лінію.

Відповідь: 0,23 нс.

4.26. Хвилевідна лінія служить для передачі надвисокочастотних імпульсів, причому внаслідок дисперсії відбуваються спотворення форми імпульсів. Спотворення форми імпульсів прийнято вважати неприпустимо великими, якщо різниця часу запізнення для крайніх складових спектра сигналу перевищує тривалість імпульсу.

Визначити максимальну довжину хвилевідної лінії передачі перерізом $28,5 \times 12,6$ мм, через яку можуть бути передані високочастотні імпульси тривалістю 0,02 нс із несучою частотою 9380 МГц, за умови, що спотворення форми імпульсів не будуть виходити за допустимі межі.

Вказівка: крайніми частотами спектра прямокутного імпульсу вважати границі його головного пелюстка.

Відповідь: 1014 м.

4.27. Визначити загасання хвилі типу H_{10} на одиниці шляху в прямокутному хвилеводі перерізом 72×34 мм при частоті поля 3 ГГц. Матеріал стінок хвилеводу — мідь.

Відповідь: 0,02 дБ/м.

4.28. Для далекого хвилеводного зв'язку було запропоновано використовувати круглі хвилеводи, що працюють на хвилі типу H_{01} .

Визначити загасання хвилі типу H_{01} у хвилеводі з мідними стінками діаметром 50 мм при довжині хвилі генератора 8 мм.

Відповідь: 1,82 дБ/км.

Розділ п'ятий

Діелектричні хвилеводи.

§ 5.1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Поверхневими називають хвилі, що поширюються вздовж так званих *сповільнюючих структур* (ліній передачі поверхневих хвиль). Фазова швидкість цих хвиль менше швидкості світла. Існує велике число різноманітних видів ліній передачі поверхневих хвиль; найбільше поширення одержали діелектрична пластина, H -подібна метал-діелектрична лінія передачі, діелектричний стрижень, гребінчаста структура, діафрагмований хвилевід і спіраль.

Діелектрична пластина

Нескінченна діелектрична пластина (рис. 5.1) є найпростішою сповільнюючою структурою. Уздовж неї можуть розповсюджуватися хвилі типів E і H .

Поле хвилі типу E описується рівнянням Гельмгольца. Для складових векторів поля справджуються наступні рівності:

поза пластиною ($|x| > a$)

$$\begin{aligned} \dot{H}_{y1} &= j\omega\epsilon_0 p C e^{-px} e^{-jhz}, \\ \dot{E}_{x1} &= jhp C e^{-px} e^{-jhz}, \\ \dot{E}_{z1} &= p^2 C e^{-px} e^{-jhz}, \\ \dot{H}_{x1} = \dot{H}_{z1} = \dot{E}_{y1} &= 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

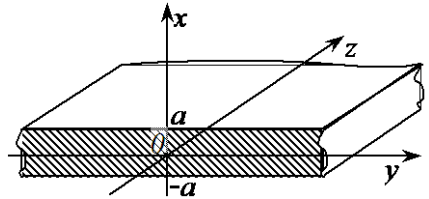


Рис. 5.1

де p — поперечне хвильове число в повітрі, причому

$$p^2 = h^2 - \omega^2 \epsilon_a \mu_0; \quad (5.2)$$

усередині пластини ($|x| < a$):

$$\begin{aligned} \dot{H}_{y2} &= j\omega \epsilon_a g (A \sin gx - B \cos gx) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_{x2} &= jhg (A \sin gx - B \cos gx) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_{z2} &= g^2 (A \cos gx + B \sin gx) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_{x2} &= \dot{H}_{z2} = \dot{E}_{y2} = 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

де g — поперечне хвильове число в діелектрику:

$$g^2 = \omega^2 \epsilon_a \mu_0 - h^2 \quad (5.4)$$

(ϵ_a — діелектрична проникність пластини).

На границях розподілу повітря і діелектрика $x = a$ і $x = -a$ тангенціальні складові поля повинні задовольняти граничним умовам:

$$\dot{E}_{z1} = \dot{E}_{z2}, \quad \dot{H}_{y2} = \dot{H}_{y1}. \quad (5.5)$$

Усі типи хвиль діелектричної пластини можна розбити на дві групи: парні хвилі E_1, E_3, E_6, \dots , для яких $A = 0, B \neq 0$ і поперечні складові поля описуються парними функціями координати x ; непарні хвилі E_2, E_4, E_0, \dots , для яких $A \neq 0, B = 0$ і поперечні складові поля описуються непарними функціями координати x .

Підставляючи вирази (5.1) і (5.3) у граничні умови (5.5), одержимо характеристичні рівняння:

для парних хвиль

$$pa = \frac{1}{\epsilon} ga \operatorname{tg} ga; \quad (5.6)$$

для непарних хвиль

$$pa = -\frac{1}{\epsilon} ga \operatorname{ctg} ga, \quad (5.7)$$

де ϵ — відносна діелектрична проникність пластини.

Крім того, хвильові числа p і g задовольняють рівняння

$$(pa)^2 + (ga)^2 = (\beta a)^2 (\epsilon - 1). \quad (5.8)$$

Аналіз хвиль типу Н роблять аналогічно. Вирішуючи рівняння Гельмгольца для складової H_z , одержимо рівняння для складових векторів поля:

поза пластиною

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_{y1} &= -j\omega\mu_0 p C e^{-px} e^{-jhz}, \\
 \dot{H}_{x1} &= jhp C e^{-px} e^{-jhz}, \\
 \dot{H}_{z1} &= p^2 C e^{-px} e^{-jhz}, \\
 \dot{E}_{x1} &= \dot{E}_{z1} = \dot{H}_{y1} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

всередині пластини

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_{y2} &= j\omega\mu_a g (-A \sin gx + B \cos gx) e^{-jhz}, \\
 \dot{H}_{x2} &= jhg (A \sin gx - B \cos gx) e^{-jhz}, \\
 \dot{H}_{z2} &= g^2 (A \cos gx + B \sin gx) e^{-jhz}, \\
 \dot{E}_{x2} &= \dot{E}_{z2} = \dot{H}_{y2} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

Підстановка рівнянь (5.9) і (5.10) у граничні умови (5.5) дає характеристичні рівняння:

$$pa = ga \operatorname{tg} ga - \text{для парних хвиль } (H_1, H_3, \dots); \tag{5.11}$$

$$pa = -ga \operatorname{ctg} ga - \text{для непарних хвиль } (H_2, H_4, \dots). \tag{5.12}$$

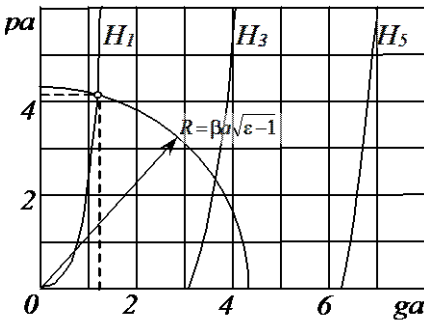


Рис. 5.2

Характеристичні рівняння часто вирішують графічно. Шукані значення pa і ga , наприклад, для парних хвиль типу H знаходять як координати точки перетину кривої, заданої рівнянням (5.11), з колом, що задається рівнянням (5.8) (рис. 5.2). Характеристичні рівняння вирішують і чисельними методами (наприклад методом половинного ділення).

Після того як знайдений роз'язок характеристичного рівняння, за допомогою рівностей (5.2) чи (5.4) можна визначити поздовжнє хвильове число h , а потім фазову швидкість і довжину хвилі в лінії.

Модифікаціями розглянутої структури, що сповільнює, є діелектрична пластинка на металевій підкладці (рис. 5.3) і H -образна метал-діелектрична лінія передачі (рис. 5.4).

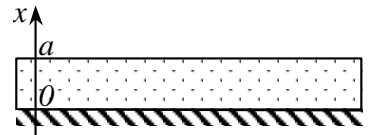


Рис. 5.3

Поле в діелектричній пластині на металевій підкладці повинне задовольняти граничним умовам на поверхні металу. З хвиль типу E у такій структурі можуть існувати тільки парні хвилі, а з хвиль типу

H — тільки непарні.

H -подібна метал-діелектрична лінія передачі (див. рис.5.4) являє собою діелектричну пластину, обмежену з двох сторін металевими площинами. Тут поле повинне задовольняти граничним умовам на поверхні металевих пластин:

$$E_x|_{y=0} = 0, E_z|_{y=b} = 0. \quad (5.13)$$

Основною хвилею H -подібної лінії передачі є хвиля магнітного типу H_{10} , вектор E якої має єдину складову, причому всі складові векторів поля не залежать від координати u . Ця хвиля цілком аналогічна основній хвилі магнітного типу діелектричної пластини; зокрема, вона має таку ж фазову швидкість, як і хвиля типу H_{10} діелектричної пластини.

Всі інші типи хвиль H -подібної лінії передачі мають одну чи кілька варіацій уздовж осі u . Характеристичні рівняння для цих типів хвиль виявляються більш складними.

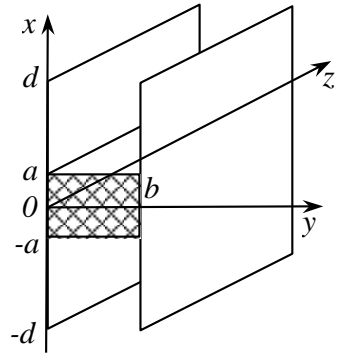


Рис. 5.4

§ 5.2. ПРИКЛАДИ РОЗ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

5.1. Знайти фазову швидкість двох нижчих хвиль магнітного типу, що розповсюджується уздовж діелектричної пластини товщиною 2 см з відносною проникністю $\epsilon = 2,9$. Довжина хвилі генератора 3,2 см. Побудувати графіки розподілу поперечних складових векторів поля в напрямку, перпендикулярному пластині.

Роз'язок. Визначимо фазову швидкість хвилі типу H_1 . Для цього розв'яжемо характеристичне рівняння (5.11) разом із (5.8). Обчислимо $\beta a \sqrt{\epsilon - 1} = 2,706$. Застосовуючи метод інтерполяції, знайдемо значення $pa = 2,456$ і $ga = 1,137$, звідки $p = 245,6 \text{ м}^{-1}$, $g = 113,7 \text{ м}^{-1}$. За допомогою формули (5.2) визначимо подовжнє хвильове число h :

$$h = \sqrt{\beta^2 + p^2} = 314,4 \text{ м}^{-1},$$

і нарешті, знайдемо фазову швидкість хвилі типу H_1 :

$$v_{\phi} = \omega / h = 1,874 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Аналогічним шляхом визначимо параметри хвилі типу H_2 :

$pa = 1,582$, $ga = 2,195$, $p = 158,2 \text{ м}^{-1}$, $g = 219,5 \text{ м}^{-1}$, $h = 252,15 \text{ м}^{-1}$,
 $\vartheta_\phi = 2,336 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Перейдемо до побудови графіків розподілу поперечних складових векторів поля. Розподіл поля уздовж осі x описується рівняннями (5.9), (5.10). Для хвилі типу H_1 , що є парною, у (5.10) слід покласти $A = 0$. Спростуючи запис виразів для складових поля й опускаючи множник e^{-jhz} , для хвилі типу H_1 одержимо

$$\begin{aligned} E_y &= Ce^{-px} - \text{поза пластиною,} \\ E_y &= B \cos gx - \text{усередині пластини.} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Коефіцієнти C і B характеризують амплітуду напруженості поля; вони зв'язані один з одним граничними умовами (5.5), звідки

$$Ce^{-pa} = B \cos ga. \quad (5.15)$$

Покладемо для визначеності $C = 1$, знайдемо B з умови (5.15) і, підставляючи обчислені раніше значення p і g , побудуємо відповідно до рівня (5.14) графік розподілу складової E_y (рис. 5.5). Складова H_x має такий же характер розподілу.

Побудова розподілу складових векторів поля хвилі типу H_2 робиться аналогічно. Покладемо в (5.10) $B = 0$ і, спростуючи рівняння для складових поля, одержимо

$$\begin{aligned} E_y &= Ce^{-px} - \text{поза пластиною,} \\ E_y &= B \sin gx - \text{усередині пластини.} \end{aligned} \quad (5.16)$$

При цьому коефіцієнти C і A задовольняють умові

$$Ce^{-pa} = A \sin ga. \quad (5.17)$$

Графік розподілу складової E_y , побудований на основі, рівнянь (5.16) і (5.17), приведений на рис. 5.5.

5.2. Визначити значення фазової швидкості хвиль електричного типу, що можуть розповсюджуватися в діелектричній пластині на металевій підкладці (див. рис. 5.3). Товщина пластини $a = 15 \text{ мм}$, відносна діелектрична проникність $\epsilon = 2,25$.

Частота поля 10 ГГц .

Роз'язок. У діелектричній пластині на металевій підкладці можуть розповсюджуватися тільки парні хвилі електричного типу E_1, E_3, \dots , у яких критична частота менше частоти поля. Це можливо при

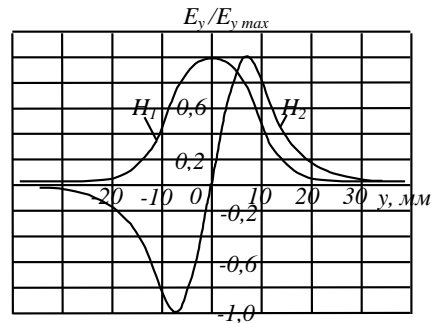


Рис. 5.5

виконанні умови (див. рис. 5.2) $\beta a \sqrt{\varepsilon - 1} > (n - 1) \pi/2$, де n — індекс хвилі.

Звідси

$$f_{\text{кр}} = \frac{(n-1)c}{4a\sqrt{\varepsilon-1}}.$$

Підставляючи чисельні дані, знайдемо значення критичних частот для основних типів хвиль:

для хвилі E_1 $f_{\text{кр}} = 0$, тобто хвиля може розповсюджуватися при будь-якій частоті поля;

для хвилі E_3 $f_{\text{кр}} = 8,944$ ГГц, тобто хвиля може розповсюджуватися при заданих умовах;

для хвилі E_5 $f_{\text{кр}} = 17,89$ ГГц (критична частота вище частоти поля), отже, хвиля не може розповсюджуватися.

Визначимо фазові швидкості хвиль E_1 і E_3 , вирішуючи характеристичне рівняння (5.6) разом із (5.8). Вирішуючи ці рівняння, одержуємо:

для хвилі E_1 $ga = 1,3827$, $pa = 3,2288$,

для хвилі E_3 $ga = 3,4722$, $pa = 0,5296$.

За допомогою формули (5.2) визначаємо поздовжнє хвильове число

$$h = \sqrt{\beta^2 + p^2}$$

і знаходимо фазову швидкість

$$\vartheta_{\phi} = \omega / h.$$

Підставляючи чисельні дані, одержуємо:

Для хвилі E_1 $\vartheta_{\phi} = 2,092 \cdot 10^8$ м/с,

Для хвилі E_3 $\vartheta_{\phi} = 2,958 \cdot 10^8$ м/с.

5.3. У діелектричній пластині товщиною 3 мм хвиля типу H_1 при частоті поля 12 ГГц має фазову швидкість 0,7 с.

Визначити відносну діелектричну проникність матеріалу пластини.

Розв'язок. Знайдемо поздовжнє хвильове число

$$h = \omega / \vartheta_{\phi} = 349,06 \text{ м}^{-1}.$$

За допомогою рівняння (5.2) визначимо значення параметра pa

$$pa = 0,9686.$$

Використовуючи метод інтерполяції, визначаємо, що такому значенню pa відповідає

$$R = \beta a \sqrt{\varepsilon - 1} = 1,289.$$

Звідси

$$\varepsilon = 1 + \left(\frac{1,289}{\beta a} \right)^2 = 2,644.$$

§ 5.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗ'ЯЗАННЯ

5.4. Які типи хвиль можуть розповсюджуватися уздовж діелектричної пластини товщиною 12 мм при частоті поля 10 ГГц? Діелектрична проникність матеріалу пластини $\varepsilon = 3$.

Відповідь: H_1, H_2, E_1, E_2 .

5.5. При якій товщині пластини з полістиролу уздовж неї може розповсюджуватися тільки основна хвиля магнітного типу H_1 ?

Довжина хвилі генератора 4,5 см.

Відповідь: $2a < 1,80$ см.

5.6. У якому діапазоні частот уздовж діелектричної пластини товщиною $2a = 20$ мм із відносною проникністю $\varepsilon = 3,2$ можуть одночасно розповсюджуватися хвилі E_1 і E_2 , а хвиля E_3 розповсюджуватися не може?

Відповідь: $5,056 \text{ ГГц} < f < 10,11 \text{ ГГц}$.

5.7. Визначити фазову швидкість хвилі типу H_1 , що розповсюджується уздовж діелектричної пластини товщиною 5 мм із відносною проникністю $\varepsilon = 2,9$. Довжина хвилі генератора 16 мм.

Відповідь: $2,065 \cdot 10^8$ м/с.

5.8. Визначити фазову швидкість хвилі типу E_1 , що розповсюджується в діелектричній пластині товщиною 12 мм із відносною проникністю $\varepsilon = 2,21$ при частоті поля 8 ГГц.

Відповідь: $2,726 \cdot 10^8$ м/с.

5.9. Уздовж полістиролової пластини товщиною 18 мм розповсюджується хвиля типу H_1 . Частота поля 6 ГГц.

У скільки разів зменшиться напруженість поля при віддаленні від пластини на 20 мм?

Відповідь: у 11,4 раза.

5.10. Знайти відносну проникність діелектричної пластини, вздовж якої розповсюджується хвиля типу E_1 із швидкістю $2 \cdot 10^8$ м/с при частоті поля 9380 МГц.

Відповідь: $\varepsilon = 3,96$.

5.11. У полістироловій пластині товщиною 20 мм

розповсюджується хвиля типу H_1 .

При якій частоті напруженість електричного поля на поверхні пластини буде в три рази менше, ніж у центрі?

Відповідь: 14,1 ГГц.

Розділ шостий ЛІНІЇ ПЕРЕДАЧІ З ХВИЛЯМИ ТИПУ Т

§ 6.1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Електромагнітні хвилі, вектори напруженості електричних і магнітних полів яких лежать у площині, перпендикулярній до напрямку розповсюдження, називають *поперечними електромагнітними хвилями* чи хвилями типу Т.

Хвиля типу Т на відміну від хвиль типів Н і Е розповсюджується в лінії при будь-якій частоті ($\omega_{\text{крТ}} = 0$), що важливо для практики.

Для хвиль типу Т поперечне хвильове число $g = 0$, тому поздовжнє хвильове число h виявляється таким самим, як і у випадку однорідної плоскої хвилі. Для лінії без втрат

$$h = \beta = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}, \quad (6.1)$$

Звідки

$$\vartheta_\phi = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}, \quad (6.2)$$

$$\lambda_B = \lambda. \quad (6.3)$$

Тут λ — довжина однорідної плоскої хвилі в діелектрику з параметрами ϵ_a , μ_a .

Характеристичний опір хвилі типу Т в лінії без втрат, що позначається $Z_{cТ}$ і дорівнює відношенню поперечної складової напруженості електричного поля до поперечної складової напруженості магнітного поля біжучої хвилі, збігається з аналогічною, величиною, обчисленою для однорідної плоскої хвилі в необмеженому просторі:

$$Z_{cТ} = Z_c = \sqrt{\mu_a / \epsilon_a}. \quad (6.4)$$

Лінії передачі з хвилею типу Т характеризуються хвильовим опором Z_B , який рівний відношенню комплексних амплітуд напруги та струму в режимі біжучих хвиль і виражається через питомі

індуктивність L_1 і ємність C_1 лінії в такий спосіб:

$$Z_B = \sqrt{L_1 / C_1}. \quad (6.5)$$

Фазова швидкість у лінії передачі з хвилею типу Т

$$\vartheta_\phi = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}. \quad (6.6)$$

Потужність, що переноситься хвилею через лінію передачі,

$$P = \frac{1}{2} \int_S \operatorname{Re} \left[\dot{\mathbf{E}} \mathbf{H}^* \right] dS, \quad (6.7)$$

чи

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}} \int_S |\dot{\mathbf{E}}|^2 dS, \quad (6.8)$$

де інтегрування ведеться по поперечному перерізі лінії.

Коефіцієнт ослаблення α хвилі в лінії передачі складається з коефіцієнта α_D , що враховує втрати в діелектрику, і коефіцієнта α_M , що описує втрати в металі:

$$\alpha = \alpha_D + \alpha_M, \text{ м}^{-1}. \quad (6.9)$$

Тут

$$\alpha_D = \frac{1}{2} \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} \operatorname{tg} \delta_E, \quad (6.10)$$

$$\alpha_M = \frac{1}{2} \frac{\int_l |\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2 dl}{\int_S \operatorname{Re} \left[\dot{\mathbf{E}} \mathbf{H}^* \right] dS}, \quad (6.11)$$

де R_S — поверхневий опір металу.

Інтегрування в чисельнику ведеться по контуру перерізу лінії, у знаменнику — по поперечному перерізу лінії.

Коаксіальні лінії передачі

Коаксіальна лінія передачі являє собою систему з двох співвісних металевих циліндрів із діаметрами d і D , розділених шаром діелектрика з проникностями ε_a і μ_a (рис. 6.1).

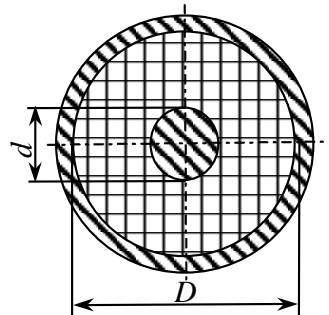


Рис. 6.1

Комплексна амплітуда вектора $\dot{\mathbf{E}}$ біжучої

хвилі у коаксіальній лінії передачі без втрат

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{U}}{\ln(D/d)} \frac{1}{r} e^{-j\beta z} \mathbf{1}_r, \quad (6.12)$$

де U — комплексна амплітуда напруги (різниці потенціалів) між внутрішнім і зовнішнім провідниками в зрізі $z = 0$.

Для лінії без втрат

$$Z_c = \sqrt{\mu_a / \varepsilon_a} = 120\pi \sqrt{\mu / \varepsilon}, \text{ Ом.} \quad (6.13)$$

Параметри коаксіальної лінії передачі на одиницю довжини:

$$L_1 = \mu_a / (2\pi) \ln(D/d), \text{ Гн/м,} \quad (6.14)$$

$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon_a}{\ln(D/d)}, \text{ Ф/м.} \quad (6.15)$$

Хвильовий опір коаксіальної лінії передачі

$$Z_B = 60 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln\left(\frac{D}{d}\right) = 138 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \lg\left(\frac{D}{d}\right), \text{ Ом.} \quad (6.16)$$

Потужність

$$P = \frac{U}{120} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu} \frac{1}{\ln(D/d)}}, \text{ Вт.} \quad (6.17)$$

Оскільки

$$U = E_{\max} \frac{d}{2} \ln(D/d), \text{ В,} \quad (6.18)$$

рівняння (6.17) можна представити у виді

$$P = \frac{E_{\max}^2 d^2}{480} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \ln(D/d), \text{ Вт.} \quad (6.19)$$

Коефіцієнт ослаблення хвилі типу Т в коаксіальній лінії передачі, що враховує втрати в діелектрику, визначається за формулою (6.10). Коефіцієнт ослаблення, обумовлений втратами в металі,

$$\alpha_M = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{R_{S_1} / d + R_{S_2} / D}{120\pi \ln(D/d)}, \text{ м}^{-1}, \quad (6.20)$$

де R_{S_1} і R_{S_2} — поверхневі опори металу внутрішнього і зовнішнього циліндрів відповідно.

У коаксіальній лінії передачі хвилі електричного й магнітного типів є вищими типами хвиль. Звичайно вони не використовуються для передачі, але можуть виникати як паразитні. Для придушення

хвиль вищих типів досить, щоб частота коливань задовольняла нерівності

$$\omega \leq \frac{4}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a} (d + D)}. \quad (6.21)$$

Смушкові лінії передачі

У техніці НВЧ широко застосовують скеровуючі системи, названі смушковими лініями передачі, які особливо зручні в друкованих та інтегральних схемах НВЧ. На рис. 6.2, *a* і *б* зображені смушкові лінії передачі несиметричного й симетричного типів.

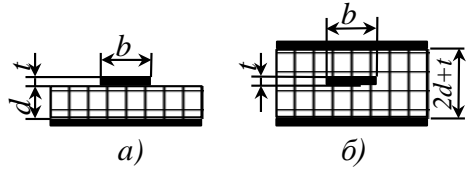


Рис. 6.2

Ці лінії або заповнені повітрям, або мають основу з твердого діелектрика.

Точна теорія смушкових ліній досить складна. Так звана квазі-Т-хвиля в цих лініях може існувати, якщо ширина струмонесучого провідника та відстань між ним і заземленою пластинною менше половини довжини хвилі в лінії передачі. При цьому електричне і магнітне поля, зосереджені в основному в просторі між провідником і заземленою пластинною. Електричне поле в поперечній площині може бути описано рівнянням Лапласа.

У смушкових лініях передачі з діелектричною основою хвилі типу Т не можуть розповсюджуватися в чистому виді через неоднорідність діелектрика. Однак теорія і досвід показують, що поля і потік потужності зосереджуються головним чином у діелектрику між струмонесучим провідником і заземленою пластинною. Тому можна допустиме припущення про однорідність діелектрика, що заповнює

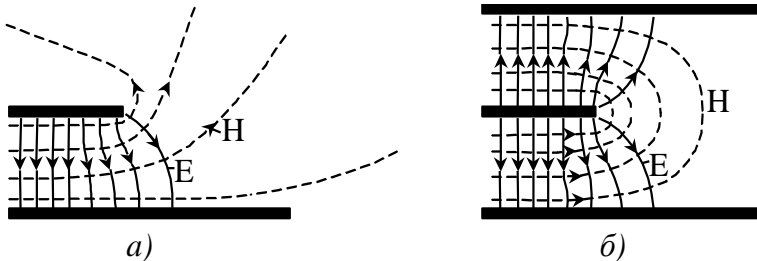


Рис. 6.3

всю лінію передачі.

Картини силових ліній електромагнітного поля в смужкових лініях передачі приведені на рис. 6.3, *a* і *б*. Для практичних розрахунків зручними є наступні наближені співвідношення, що добре узгоджуються з експериментальними даними.

Питомі ємності (Φ/m) для несиметричної смужковій лінії передачі (див. рис. 6.2,а) розраховують за формулами:

$$C_1 = 1,06 \cdot 10^{-11} \varepsilon (1 + b/d) \quad (t/d \ll 1, b/d > 0,6), \quad (6.22)$$

$$C_1 = 1,06 \cdot 10^{-11} \varepsilon (1 + b/d) \frac{1}{1 - t/a} \quad (b/d < 2), \quad (6.23)$$

$$C_1 = 1,06 \cdot 10^{-11} \varepsilon \left[1 + \frac{b}{d} \left(\frac{1}{1 - t/a} \right) \right] \quad (b/d > 2); \quad (6.24)$$

Хвильові опори з урахуванням товщини струмонесучого провідника для несиметричної лінії передачі розраховують за формулами:

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{314}{1 + b/d} (1 - t/d) \quad (b/d < 2), \quad (6.25)$$

$$Z_B = 314 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{1 + \frac{b}{d} \left(\frac{1}{1 - t/d} \right)} \quad (b/d > 2); \quad (6.26)$$

Хвильові опори без обліку товщини провідника визначаються співвідношеннями:

для несиметричної лінії передачі

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{314}{1 + b/d}; \quad (6.27)$$

для симетричної лінії передачі

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{216}{1 + b/d}. \quad (6.28)$$

Через несиметричну смужкову лінію передачі передається потужність

$$P = 8,44 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 d^2 \ln \frac{r_B}{r_A}, \text{ Вт.} \quad (6.29)$$

де E_0 — амплітуда напруженості поля в центрі лінії, В/м.

Значення коефіцієнтів r_A і r_B у залежності від відношення b/d визначають за таблицями у додатку-1.

При $b/d \geq 1$ у формулі (6.29) можна припустити, що

$$\ln \frac{r_B}{r_A} \approx r_B, \quad (6.30)$$

у результаті чого вона спрощується до:

$$P = 8,44 \cdot 10^{-4} \sqrt{\varepsilon/\mu} E_0^2 d^2 r_B, \text{ Вт.} \quad (6.31)$$

Коефіцієнт ослаблення, обумовлений втратами в провідних пластинах несиметричної смужкової лінії передачі,

$$\alpha_M = \frac{R_S}{120\pi d} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left| \frac{\ln(r_A k_H / 2)}{\ln(r_B / r_A)} \right|. \quad (6.32)$$

Тут коефіцієнт k_H визначають за формулою:

$$k_H \approx 2 \sqrt{2 \frac{t}{d} + 4 \frac{t}{d}}. \quad (6.33)$$

а значення r_A і r_B — за таблицями у додатку-1.

Коефіцієнт ослаблення, обумовлений втратами в провідних пластинах симетричної смужкової лінії передачі (при $t/d < 0,3$, $b/d > 1$),

$$\alpha_M = \frac{R_S}{120\pi d} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{7 - 50t/d + b/d}{3,2(0,1 + t/d)(4 + b/d)}, \text{ м}^{-1}. \quad (6.34)$$

У формулах (6.32), (6.34) R_S — поверхневий опір металу.

Коефіцієнт ослаблення хвилі типу Т у смужковій лінії передачі за рахунок втрат у діелектрику визначається співвідношенням (6.10).

§ 6.2. ПРИКЛАДИ РОЗ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

6.1. Знайти відношення між зовнішнім і внутрішнім діаметрами коаксіальної лінії передачі з хвилею типу Т, при якому буде мінімальне згасання, вважаючи, що втрати в діелектрику відсутні. Внутрішній і зовнішній циліндри виконані з одного матеріалу.

Роз'язок. Відповідно до рівняння (6.10) $\alpha = \alpha_M$, $\alpha_D = 0$. Коефіцієнт ослаблення α_M у коаксіальній лінії передачі визначаємо відповідно до формули (6.20). Оскільки $R_{S1} = R_{S2} = R_S$, з формули (6.20) знаходимо

$$\alpha_M = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{R_s}{120\pi} \frac{1/d + 1/D}{\ln(D/d)}.$$

Перетворимо останнє рівняння так, щоб до нього входило в явному виді відношення D/d :

$$\alpha_M = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{R_s}{120\pi D} \frac{(D/d + 1)}{\ln(D/d)}.$$

Позначивши $\frac{\sqrt{\varepsilon/\mu} R_s}{120\pi D} = A$, $\frac{D}{d} = x$, запишемо

$$\alpha = A \frac{1+x}{\ln x}.$$

Для знаходження екстремума необхідно вирішити рівняння

$$\frac{d\alpha}{dx} = A \frac{\ln x - \frac{1+x}{x}}{\ln^2 x} = 0$$

чи

$$\ln x = \frac{1+x}{x}.$$

Отримане рівняння є трансцендентним. З графічних побудов отримуємо корінь $x = 3,6$, звідки $D/d = 3,6$. Таким чином, мінімальне згасання хвилі типу Т в коаксіальній лінії передачі має місце при відношенні $D/d = 3,6$.

6.2. Розрахувати хвильовий опір, питомі ємність і індуктивність, а також граничну передану потужність у несиметричній смужковій лінії передачі з повітряним заповненням. Параметри лінії: ширина провідника $b = 5$ мм, відстань між провідником і заземленою пластиною $d = 1$ мм, товщина провідник $t = 0,025$ мм (див. рис. 6.2, а), граничне допустиме значення напруженості електричного поля в повітрі $E_{\text{пред}} = 30$ кВ/см.

Роз'язок. Хвильовий опір несиметричної смужкової лінії передачі визначається рівняннями (6.25) чи (6.26) у залежності від відношення b/d . У нашому випадку $b/d > 2$, тому

$$Z_B = 314 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} / \left[1 + \frac{b}{d} \left(\frac{1}{1-t/d} \right) \right], \text{ Ом.}$$

Смужкова лінія передачі заповнена повітрям, для якого $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$. Тоді

$$Z_B = 314 \sqrt{1 + \frac{5}{1} \left(\frac{1}{1 - 0,025/1} \right)} = 51,24 \text{ Ом.}$$

Хвильовий опір можна визначити і за формулою (6.27), тому що в розглянутому випадку $t/d = 0,025 \ll 1$:

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{314}{1 + b/d} = \frac{314}{1 + 5/1} = 52,333 \text{ Ом.}$$

Похибка при цьому не перевищує 2,5%. Питому ємність знаходимо за формулою (6.22):

$$C_1 = 1,06 \cdot 10^{-11} \varepsilon (1 + b/d) = 1,06 \cdot 10^{-11} (1 + 5/1) = 63,6 \text{ пФ/м,}$$

а питому індуктивність — за формулою

$$Z_B = \sqrt{L_1 / C_1},$$

звідки $L_1 = Z_B^2 C_1$, або після чисельних підстановок

$$L_1 = 0,173 \times 10^{-6} \text{ Гн/м.}$$

Граничне значення переданої потужності у несиметричній смужковій лінії передачі обчислюється за формулою:

$$P_{\text{пред}} = 16,88 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{\text{преда}}^2 d^2 \frac{t}{d} r_B, \text{ Вт.}$$

При відношеннях $b/d=5$ і $t/d = 0,025$ за таблицями додатку-1 знаходимо, що $r_B = 14,56$. Тоді $P_{\text{пред}} = 5,53 \text{ кВт.}$

§ 6.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗ'ЯЗАННЯ

6.3. Розрахувати питомі параметри та хвильовий опір коаксіального кабелю марки РК-75-9-12. Параметри кабелю: діаметр внутрішнього проводу 1,35 мм, діаметр зовнішнього провідника 9,0 мм, відносна проникність діелектрика $\varepsilon = 2,2$.

Відповідь: $L_1 = 0,379 \text{ мкГн/м, } C_1 = 64,4 \text{ пФ/м, } Z_B = 76,7 \text{ Ом.}$

6.4. Розрахувати хвильовий опір, погонні індуктивність і ємність несиметричної смужкової лінії передачі, заповненої діелектриком. Параметри лінії: ширина струмонесучої смужки $b = 1 \text{ мм}$, відстань між струмонесучою смужкою і заземленою пластиною $d = 1 \text{ мм}$, товщина струмонесучою смужки $t = 0,05 \text{ мм}$ (див. рис. 6.2, а). Діелектрик — фторопласт. Втратами в лінії знехтувати.

Відповідь: 26 Ом, 0,126 мкГн/м, 186,3 пФ/м.

6.5. Визначити хвильовий опір несиметричної смужкової лінії передачі, якщо відомо, що в якості діелектрика використовується

матеріал із відносною діелектричною проникністю $\epsilon = 2,55$, а питома ємність лінії 60 пФ/м.

Відповідь: 88,7 Ом.

6.6. Для коаксіальної лінії передачі з розмірами поперечного переріза $d = 5$ мм, $D = 11$ мм (див. рис. 6.1) обчислити частоту, до якої хвилі вищих типів не розповсюджуються. Діелектрик-повітря. Як зміниться значення частоти, якщо коаксіальну лінію заповнити діелектриком із $\epsilon = 2,1$?

Відповідь: $f = 11,94$ ГГц, зменшиться в 1,45 раза.

6.7. По коаксіальній лінії передачі з розмірами поперечного переріза $d = 12$ мм, $D = 28$ мм (див. рис. 6.1) на хвилі типу Т передається потужність 100 кВт. Діелектрик-повітря.

Визначити амплітуду струму в лінії.

Відповідь: 62,72 А.

6.8. По коаксіальній лінії передачі, діаметр внутрішнього циліндра якої $d = 2$ мм, на хвилі типу Т передається потужність 10 Вт. Хвильовий опір лінії 60 Ом. Відносна проникність діелектрика $\epsilon = 2,2$.

Знайти максимальні значення напруженостей електричного й магнітного полів у лінії.

Відповідь: $E_{r \max} = 23,36$ кВ/м, $H_{\phi \max} = 91,93$ А/м.

6.9. У коаксіальній лінії передачі з розмірами поперечного переріза $d = 9$ мм, $D = 21$ мм (див. рис. 6.1) розповсюджується хвиля типу Т.

Визначити граничну передану потужність, якщо пробій відбувається при напруженості електричного поля 30 кВ/см. Діелектрик-повітря.

Відповідь: $1,287 \cdot 10^6$ Вт.

6.10. В якості лінії передачі використовується коаксіальний кабель марки РК-75-4-11 довжиною 10 м із розмірами поперечного переріза $d = 0,72$ мм, $D = 4,8$ мм. Кабель виготовлений з міді. Діелектрик має параметри $\epsilon = 2,2$, $\text{tg } \delta_{\text{в}} = 5 \cdot 10^{-4}$. Частота переданих коливань 3 ГГц.

Визначити к. к. д. системи. Як зміниться к. к. д., якщо частоту переданих коливань збільшити в чотири рази.

Відповідь: 90%, 79%.

Розділ сьомий

ОБ'ЄМНІ РЕЗОНАТОРИ

§ 7.1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Об'ємний резонатор являє собою замкнуту порожнину, обмежену металевими стінками, усередині якої існують електромагнітні коливання.

Конфігурація об'ємного резонатора може бути довільною, однак

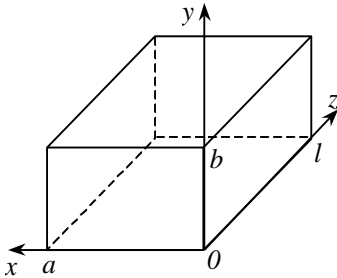


Рис. 7.1

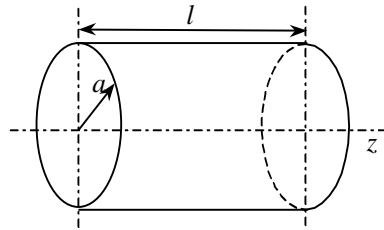


Рис. 7.2

найбільше практичне застосування знаходять прямокутний (рис. 7.1), циліндричний (рис. 7.2), коаксіальний (рис. 7.3) і квазістаціонарний торовидний (рис. 7.4) об'ємні резонатори. Усі вони, крім останнього, є власне кажучи закороченими на кінцях відрізками хвилеводів. У

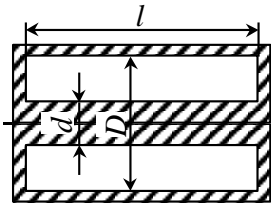


Рис. 7.3

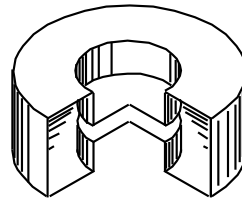


Рис. 7.4

таких резонаторах можуть існувати коливання типу Е, у яких $H_z = 0$, і коливання типу Н, у яких $E_z = 0$. Аналіз полів у резонаторах роблять шляхом роз'язання рівняння Гельмгольца для складових E_z і H_z при рівності нулю тангенціальної складової електричного поля на стінках резонатора.

У результаті отримуємо рівняння для резонансної частоти і для складових векторів поля в резонаторі.

Прямокутний об'ємний резонатор. Резонансна частота коливань

типу H_{mnp} чи E_{mnp}

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}, \quad (7.1)$$

де a, b, l — геометричні розміри резонатора (див. рис. 7.1).

Основним типом коливань у прямокутному резонаторі, що має мінімальну резонансну частоту, у залежності від співвідношення розмірів a, b , і l можуть бути H_{101} , H_{011} чи E_{110} . Наприклад, при $b < a$ і $b < l$ основним типом коливань є H_{101} , картина силових ліній поля якого зображена на рис. 7.5, а складові векторів поля описуються рівняннями

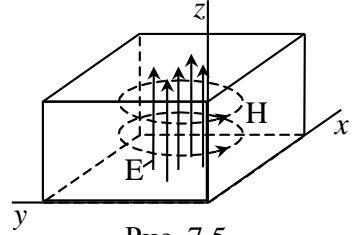


Рис. 7.5

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= 0, \\ \dot{E}_y &= -j\omega\mu_a C \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \\ \dot{E}_z &= 0, \\ \dot{H}_x &= -C \frac{\pi^2}{al} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right), \\ \dot{H}_y &= 0, \\ \dot{H}_z &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 C \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Картина силових ліній поля коливань H_{011} і E_{110} відрізняється лише орієнтацією векторів. Наприклад, вектор \mathbf{E} у коливання H_{011} орієнтований у напрямку вісі x , а в коливання E_{110} — у напрямку осі z . У резонаторі кубічної форми резонансні частоти цих трьох типів коливань збігаються (явище виродження).

Циліндричний об'ємний резонатор

Резонансна частота коливань типу H_{mnp}

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi p}{l}\right)^2}, \quad (7.3)$$

де ϵ_a, μ_a — абсолютні діелектричні проникності речовини, що

заповнює резонатор; μ_{mn} — n -й корінь рівняння $J_m(x) = 0$.

Індекс p , що визначає число варіацій поля уздовж осі z , приймає цілі, ненульові значення.

Основним коливанням типу Н у циліндричному резонаторі є H_{111} , картина силових ліній поля якого зображена на рис. 7.6.

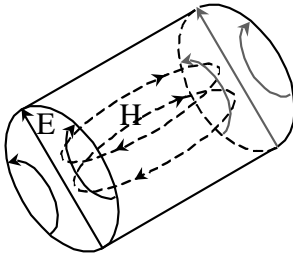


Рис. 7.6

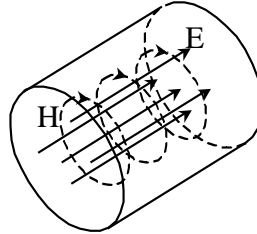


Рис. 7.7

Резонансна частота коливань типу E_{mnp}

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{\nu_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi p}{l}\right)^2}, \quad (7.4)$$

де ν_{mn} — n -й корінь функції Бесселя $J_m(x)$.

На відміну від коливань типу Н індекс p тут може приймати нульове значення.

Основним коливанням типу Е у циліндричному резонаторі є E_{010} , картина силових ліній поля якого зображена на рис. 7.7.

Особливістю цього коливання є те, що його резонансна частота

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \frac{2,4048}{a} \quad (7.5)$$

не залежить від довжини резонатора.

У загальному випадку, коли резонатор являє собою закорочений з обох кінців відрізок довільного хвилеводу, резонансну довжину хвилі визначають з умови

$$l = p \frac{\lambda_B}{2}, \quad (7.6)$$

де p — ціле число (поздовжній індекс); λ_B — довжина хвилі в хвилеводі (лінії передачі).

З рівняння слідує формула для резонансної частоти:

$$\omega_p = \frac{\pi p \vartheta_\phi}{l}, \quad (7.7)$$

де ϑ_ϕ — фазова швидкість хвилі в лінії передачі, на базі якої

виконаний резонатор.

Зокрема, для основного коливання типу T_1 об'ємного резонатора, який є закороченим з обох кінців відрізком коаксіальної лінії передачі (див. рис. 7.3),

$$\omega_p = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a} l}. \quad (7.8)$$

Добротність об'ємного резонатора визначають як відношення енергії електромагнітного поля, запасеної у резонаторі, до енергії, що втрачається за період власних коливань:

$$Q = \frac{\omega_p \int_V \mu_a |H|^2 dV}{R_s \oint_S |H_\tau|^2 dS}. \quad (7.9)$$

§ 7.2. ПРИКЛАДИ РОЗ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

7.1. Прямокутний об'ємний резонатор має наступні розміри: $a = 20$ мм, $b = 25$ мм, $l = 30$ мм.

Визначити резонансну довжину хвилі двох нижчих типів коливань. Як вони позначаються?

Роз'язок. У прямокутному резонаторі нижчими можуть бути коливання типів H_{101} , H_{011} і E_{110} , у яких один з індексів дорівнює нулю, а два інших — одиниці. Визначимо резонансну довжину хвилі цих типів коливань.

Запишемо формулу для резонансної довжини хвилі:

$$\lambda_p = c / f_p = c 2\pi / \omega_p, \quad (7.10)$$

де $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ — швидкість світла.

Підставляючи в (7.10) рівняння (7.1) для ω_p одержимо

$$\lambda_p = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2 + (p/l)^2}}. \quad (7.11)$$

Підставляючи чисельні дані, знайдемо резонансні довжини хвиль для Зазначених типів коливань:

$$H_{101} \lambda_p = 3,328 \text{ см,}$$

$$H_{011} \lambda_p = 3,841 \text{ см,}$$

$$E_{110} \lambda_p = 3,123 \text{ см.}$$

Таким чином, основним є коливання H_{011} , у якого значення λ_p найбільше, за ним слідує коливання H_{101} .

7.2. Визначити граничну енергію, що може бути накопичена в коаксіальному резонаторі (див. рис. 7.3) з розмірами $d = 10$ мм, $D = 40$ мм, $l = 80$ мм на основному типі коливань. Максимально допустима напруженість електричного поля 30 кВ/см.

Роз'язок. Електричне поле основної хвилі в коаксіальному резонаторі має тільки радіальну складову

$$E_r = \frac{A}{r} \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right) \quad (7.12)$$

де A — деякий коефіцієнт.

Підставляючи рівняння (7.12) у (7.13), знайдемо енергію, запасену в резонаторі:

$$W = \frac{\pi}{2} \varepsilon_a A^2 l \ln \frac{D}{d}. \quad (7.13)$$

Максимальна напруженість електричного поля згідно (7.12) існує в середині резонатора на поверхні внутрішнього провідника, тобто при $r = d/2$. Її значення дорівнює

$$E_{\max} = \frac{2A}{d},$$

звідки

$$A = \frac{d}{2} E_{\max}. \quad (7.14)$$

Підставляючи (7.14) у (7.13), одержимо формулу для розрахунку запасеної енергії:

$$W = \frac{\pi}{8} \varepsilon_a E_{\max}^2 d^2 l \ln \frac{D}{d}, \quad (7.15)$$

чи після чисельних підстановок

$$W = 0,3466 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

§ 7.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗ'ЯЗАННЯ

7.3. Визначити резонансні частоти коливань типів E_{010} і H_{111} у циліндричному резонаторі, діаметр і довжина якого однакові і рівні 5 см.

Відповідь: 4,593 і 4,622 ГГц відповідно.

7.4. Який тип коливань є основним у прямокутному резонаторі з розмірами $a = 2$ см, $b = 4$ см, $l = 3$ см? Визначити його резонансну частоту. Який тип коливань є найближчим вищим? Знайти його

резонансну частоту.

Відповідь: H_{011} , 6,25 ГГц; E_{110} , 8,38 ГГц.

7.5. Резонатор, що перелаштовується, утворений відрізком прямокутного хвилеводу перерізом 23×10 мм, усередині якого переміщається поршень (рис. 7.8).

Визначити межі переміщення поршня для перебудови резонатора в межах 8—12 ГГц. Тип коливання H_{101} .

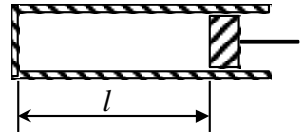


Рис. 7.8

Відповідь: $14,89 \text{ мм} \leq l \leq 32,37 \text{ мм}$.

7.6. При яким відношенні довжини циліндричного об'ємного резонатора до його радіуса резонансні частоти коливань типів E_{010} і H_{111} будуть однаковими?

Відповідь: $l / a = 2,03$.

7.7. Довжина циліндричного об'ємного резонатора вдвічі більше його діаметра. Резонансна частота коливання типу E_{011} дорівнює 6 ГГц.

Визначити діаметр резонатора.

Відповідь: 4,026 см.

7.8. Визначити розміри прямокутного об'ємного резонатора, три нижчі резонансні частоти якого рівні 10, 11 і 12 ГГц.

Відповідь: $24,2 \times 19,1 \times 16,5$ мм.

7.9. Прямокутний об'ємний резонатор із резонансною довжиною 3 см на коливанні типу H_{102} , утворений відрізком стандартного прямокутного хвилеводу перерізом 23×10 мм.

Визначити довжину резонатора.

Відповідь: 3,957 см.

7.10. Визначити резонансну частоту основного типу коливань коаксіального резонатора, поперечний переріз якого приведено на рис. 7.3. Дано: $D = 20$ мм, $d = 12$ мм, $l = 60$ мм.

Відповідь: 2,5 ГГц.

7.11. Незаповнений резонатор має резонансну частоту 6 ГГц.

Яка буде резонансна частота, якщо резонатор заповнити діелектриком із відносною проникністю $\epsilon = 2,7$?

Відповідь: 3,65 ГГц.

7.12. У циліндричному об'ємному резонаторі збуджується коливання типу E_{011} . Для дослідження картини силових ліній поля в стінках резонатора необхідно прорізати вузькі щілини.

Указати розташування щілин, що не зроблять істотного впливу на

поле цього коливання.

Відповідь: поздовжні щілини на бічній стінці і радіальні щілини на торцевих стінках.

7.13. Визначити резонансну частоту і добротність циліндричного об'ємного резонатора, що працює на коливанні типу H_{011} . Діаметр і довжина резонатора 5 см, провідність матеріалу стінок $6,1 \cdot 10^7$ см/м.

Відповідь: 7,93 ГГц, 37 450.

Розділ восьмий

ЗБУДЖЕННЯ ЗАМКНЕНИХ ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

§ 8.1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Збудження хвилеводів

Нехай у нескінченному хвилеводі джерела поля, що знаходяться в об'ємі V , обмеженому інтервалом $z_1 < z < z_2$ (рис. 8.1), задані функціями $\mathbf{J}_{\text{ст.Е}}$ а, $\mathbf{J}_{\text{ст.М}}$.

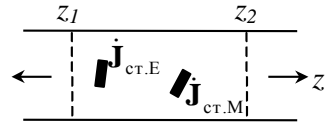


Рис. 8.1

Передбачається, що стінки хвилеводу ідеально провідні, а діелектрик, що заповнює хвилевід, не має втрат. Поле поза об'ємом V представляється у виді сукупності хвиль електричного й магнітного типів:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{C}_{-n} \dot{\mathbf{E}}_{-n} & (z < z_1), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \dot{C}_{+n} \dot{\mathbf{E}}_{+n} & (z > z_2), \end{cases} \quad \mathbf{H} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{C}_{-n} \dot{\mathbf{H}}_{-n} & (z < z_1), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \dot{C}_{+n} \dot{\mathbf{H}}_{+n} & (z > z_2), \end{cases} \quad (8.1)$$

Тут n — номер типу хвилі у хвилеводі (якщо під n розуміти два індекси, то підсумовування рядів проводять за обома індексами); $C_{\pm n}$ — коефіцієнти збудження; $\dot{\mathbf{E}}_{\pm n}$, $\dot{\mathbf{H}}_{\pm n}$ — комплексні амплітуди векторів поля n -го типу. Знак мінус означає хвилю, що розповсюджується в від'ємному напрямі вісі z .

Ставиться задача визначення коефіцієнтів збудження. Вимушене поле (8.1) задовольняє неоднорідним рівнянням Максвелла. Для того щоб вирішити задачу про вимушені коливання у хвилеводі, необхідно

володіти рішенням більш простої задачі про вільні поля, що задовольняють однорідним рівнянням Максвелла.

Застосовуючи лему Лоренца до електромагнітного поля (8.1) в об'ємі V та, використовуючи як допоміжне поле $\dot{\mathbf{E}}_{\pm n}$, $\dot{\mathbf{H}}_{\pm n}$, k -го типу хвиль, комплексні амплітуди якого необхідно визначити, знаходимо вирази для коефіцієнтів збудження:

$$\dot{C}_{\pm k} = \frac{1}{N_k} \int_V (\dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.Е}} \dot{\mathbf{E}}_{\mp k} - \dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.М}} \dot{\mathbf{H}}_{\mp k}) dV. \quad (8.2)$$

Тут

$$N_k = \int_S \left\{ [\dot{\mathbf{E}}_{+k} \dot{\mathbf{H}}_{-k}] - [\dot{\mathbf{E}}_{-k} \dot{\mathbf{H}}_{+k}] \right\} \mathbf{l}_z dS \quad (8.3)$$

— норма k -ї власної хвилі.

Збуджувана джерелом k -а хвиля переносить через кожен поперечний переріз активну потужність

$$P_{\Sigma} = \left| \dot{C}_k \right|^2 \frac{1}{4} |N_k|. \quad (8.4)$$

Збудження об'ємних резонаторів

Якщо об'ємний резонатор обмежений замкнутою ідеально провідною поверхнею S_0 , то роз'язок рівнянь Максвелла повинний задовольняти граничній умові

$$[\mathbf{l}_n \dot{\mathbf{E}}] = 0. \quad (8.5)$$

Будемо вважати, що вільні коливання резонатора відомі, тобто знайдені повна система векторних функцій $\dot{\mathbf{E}}_p$, $\dot{\mathbf{H}}_p$ і власні частоти ω_p . Тут індекс p означає номер типу коливань в об'ємному резонаторі. Власні коливання в об'ємному резонаторі задовольняють умові ортогональності:

$$\int_V \dot{\mathbf{E}}_p \dot{\mathbf{E}}_q dV = 0, \quad \int_V \dot{\mathbf{H}}_p \dot{\mathbf{H}}_q dV = 0 \quad (p \neq q) \quad (8.6)$$

(вважається, що власні частоти всіх типів коливань різні, чи іншими словами, у резонаторі відсутнє виродження типів коливань).

Норма власного коливання

$$N_p = \int_V \epsilon_a \dot{\mathbf{E}}_p^2 dV = - \int_V \mu_a \dot{\mathbf{H}}_p^2 dV. \quad (8.7)$$

Електромагнітне поле, збуджене в резонаторі, відшуковують у виді

рядів*

$$\dot{\mathbf{E}} = \sum_{q=1}^{\infty} \dot{A}_q \dot{\mathbf{E}}_q, \quad (8.8)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \sum_{q=1}^{\infty} \dot{B}_q \dot{\mathbf{H}}_q.$$

Амплітудні коефіцієнти для коливань типу p обчислюють по формулах

$$\dot{A}_p = j \frac{1}{(\omega^2 - \omega_p^2) N_p} \int_V (\omega \mathbf{J}_{\text{ст.Е}} \dot{\mathbf{E}}_p - \omega_p \mathbf{J}_{\text{ст.М}} \dot{\mathbf{H}}_p) dV, \quad (8.9)$$

$$\dot{B}_p = j \frac{1}{(\omega^2 - \omega_p^2) N_p} \int_V (\omega_p \mathbf{J}_{\text{ст.Е}} \dot{\mathbf{E}}_p - \omega \mathbf{J}_{\text{ст.М}} \dot{\mathbf{H}}_p) dV. \quad (8.10)$$

Якщо резонатор не має втрат, то власна частота ω_p — дійсна, і при частоті збудження $\omega = \omega_p$ коефіцієнти \dot{A}_p , \dot{B}_p і обумовлені ними поля звертаються в нескінченність. Для реального об'ємного резонатора, що володіє втратами, власна частота (ω_p — комплексна. При великих значеннях добротності Q_p об'ємного резонатора власна частота

$$\omega_p \approx \omega_p + j \frac{\omega_p}{2Q_p}, \quad (8.11)$$

де Q_p — добротність p -го типу коливань.

З огляду на, що значення Q_p велике, для практичних розрахунків у чисельнику приймають $\omega_p = \omega_p$. Тоді

$$\dot{A}_p = j \frac{\omega \int_V \mathbf{J}_{\text{ст.Е}} \dot{\mathbf{E}}_p dV - \omega_p \int_V \mathbf{J}_{\text{ст.М}} \dot{\mathbf{H}}_p dV}{(\omega^2 - \omega_p^2 - j\omega_p^2 / Q_p) N_p}, \quad (8.12)$$

$$\dot{B}_p = j \frac{\omega_p \int_V \mathbf{J}_{\text{ст.Е}} \dot{\mathbf{E}}_p dV - \omega \int_V \mathbf{J}_{\text{ст.М}} \dot{\mathbf{H}}_p dV}{(\omega^2 - \omega_p^2 - j\omega_p^2 / Q_p) N_p}$$

При $\omega = \omega_p$ коефіцієнти \dot{A}_p і \dot{B}_p рівні між собою.

Теорія збурень дозволяє розрахувати зміну власної частоти об'ємного резонатора при деформації його оболонки. Ця деформація може здійснюватися, наприклад, зануренням металевого тіла з

* Насправді, у ці ряди слід додати члени, що описують статичні поля джерел. Однак практично їхній внесок у поле, збуджене в резонаторі, невеликий.

обсягом V у резонатор. Власні частоти ω'_p збудженого резонатора можна розрахувати по відомих частотах ω_p і власним векторним функціям E_p, H_p незбуреного резонатора:

$$\omega'_p = \omega_p \sqrt{1 + \frac{\int_{V'} \frac{\mu_a |\dot{\mathbf{H}}_p|^2}{2} dV - \int_{V'} \frac{\varepsilon_a |\dot{\mathbf{E}}_p|^2}{2} dV}{\int_V \frac{\varepsilon_a |\dot{\mathbf{E}}_p|^2}{2} dV}}. \quad (8.13)$$

Тут $\int_{V'} \frac{\mu_a |\dot{\mathbf{H}}_p|^2}{2} dV$, $\int_{V'} \frac{\varepsilon_a |\dot{\mathbf{E}}_p|^2}{2} dV$ — максимальна магнітна й електрична енергії коливання в об'ємі V' до введення елемента, що збуджує $\int_V \frac{\varepsilon_a |\dot{\mathbf{E}}_p|^2}{2} dV$; - повна електромагнітна енергія p -ї хвилі в резонаторі до введення збурювання. Рівняння (8.13) справедливо при малих деформаціях системи.

§ 8.2. ПРИКЛАДИ РОЗ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

8.1. Прямокутний резонатор із розмірами a, b, l збуджується елементарним щілинним випромінювачем довжиною $l_{щ}$ на резонансній частоті коливань типу H_{101} . Щілина, розташована на передній стінці резонатора паралельно його основі (рис. 8.2). Координати щілини $(x_1, y_1, 0)$. Комплексна амплітуда напруги між краями щілини \dot{U}_0 . Добротність об'ємного резонатора $Q_{H_{101}}$ передбачається відомої.

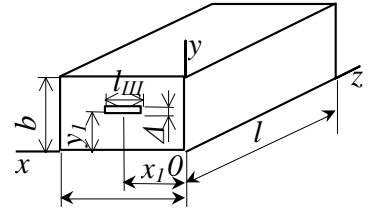


Рис. 8.2

Визначити комплексні амплітуди електромагнітного поля в резонаторі.

Роз'язок. Коефіцієнти збудження згідно (8.12) визначаються вираженням

$$\dot{A}_{H_{101}} = \dot{B}_{H_{101}} = \frac{Q_{H_{101}} \int_V \mathbf{j}_{ст.М} \dot{\mathbf{H}}_{H_{101}} dV}{\omega_{H_{101}} N_{H_{101}}}, \quad (8.14)$$

де

$$\dot{\mathbf{H}}_{H_{101}} = j \frac{a}{l} \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{l} z \mathbf{l}_x - j \cos \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{l} z \mathbf{l}_z \quad (8.15)$$

(див. розділ 7).

Власна частота коливання типу H_{101}

$$\omega_{H_{101}} = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{l^2}} \quad (8.16)$$

Тому що щілинний випромінювач еквівалентний магнітному диполю з поверхневою щільністю струму $\dot{\mathbf{j}}_{\text{ст.М}}$, то в чисельнику рівняння (6.14) інтеграл по обсязі потрібно замінити інтегралом по поверхні щілини $S_{\text{Щ}}$:

$$\int_V \dot{\mathbf{j}}_{\text{ст.М}} \dot{\mathbf{H}}_{H_{101}} dV = \int_{S_{\text{Щ}}} \dot{\mathbf{j}}_{\text{ст.М}} \dot{\mathbf{H}}_{H_{101}} dS.$$

Оскільки площа щілини мала (випромінювач елементарний), векторне поле $\dot{\mathbf{H}}_{H_{101}}$ можна вважати постійним і визначеним в точці $(x_1, y_1, 0)$.

З огляду на, що для однобічного щілинного випромінювача $I_{\text{ст.М}} = \dot{U}_{\text{Щ}} = U_0$, одержимо

$$\begin{aligned} \int_{S_{\text{Щ}}} \dot{\mathbf{j}}_{\text{ст.М}} \dot{\mathbf{H}}_{H_{101}} dS &= \dot{\mathbf{j}}_{\text{ст.М}} \Delta l_{\text{Щ}} \mathbf{l}_x \dot{\mathbf{H}}_{H_{101}} = \\ &= j \dot{I}_{\text{ст.М}} l_{\text{Щ}} \frac{a}{l} \sin \frac{\pi}{a} x_1 = j \dot{U}_0 l_{\text{Щ}} \frac{a}{l} \sin \frac{\pi}{a} x_1. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Норма коливання типу H_{101}

$$\begin{aligned} N_{H_{101}} &= - \int_V \mu_a \dot{\mathbf{H}}_{H_{101}}^2 dV = \int_0^l \int_0^b \int_0^a \mu_a \left(\frac{a^2}{l^2} \sin^2 \frac{\pi}{a} x \cos^2 \frac{\pi}{l} z + \right. \\ &\left. + \cos^2 \frac{\pi}{a} x \sin^2 \frac{\pi}{l} z \right) dx dy dz = \mu_a \left(\frac{a^2}{l^2} + 1 \right) \frac{abl}{4} = \mu_a (a^2 + l^2) \frac{ab}{4l} \end{aligned} \quad (8.18)$$

Підставляючи рівняння (8.17) і (8.18) у (8.14), одержимо

$$\dot{\mathbf{A}}_{H_{101}} = \dot{\mathbf{B}}_{H_{101}} = j \frac{4Q_{H_{101}} U_0 l_{\text{Щ}} \sin \frac{\pi}{a} x_1}{\omega_{H_{101}} \mu_a (a^2 + l^2) b}.$$

Комплексні амплітуди полів вимушеного коливання типу H_{101}

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= -j \frac{4Q_{H_{101}} a U_0 l_{\text{щ}}}{\pi(a^2 + l^2)b} \sin \frac{\pi}{a} x_1 \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{l} z \mathbf{l}_y, \\ \dot{\mathbf{H}} &= -\frac{4Q_{H_{101}} U_0 l_{\text{щ}} a}{\omega_{H_{101}} \mu_a (a^2 + l^2) b l} \sin \frac{\pi}{a} x_1 \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{l} z \mathbf{l}_x + \\ &+ \frac{4Q_{H_{101}} U_0 l_{\text{щ}}}{\omega_{H_{101}} \mu_a (a^2 + l^2) b} \sin \frac{\pi}{a} x_1 \cos \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{l} z \mathbf{l}_z. \end{aligned}$$

§ 8.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗ'ЯЗАННЯ

8.2. На рис. 8.3 зображений прямокутний хвилевід, у якому прорізани вузькі щілини.

За допомогою яких щілин при опроміненні їхнім зовнішнім полем можна збудити хвилю типу H_{10} (те ж, для хвилі E_{11})?

Відповідь: хвилю типу H_{10} можна збудити за допомогою щілин 1, 2, 4, а хвилю типу E_{11} — за допомогою щілин 2, 3.

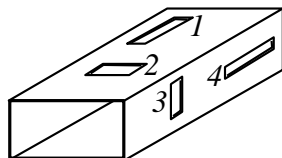


Рис. 8.3

8.3. У широкій стінці підлоги нескінченного прямокутного хвилеводу прорізана поперечна щілина (рис. 8.4), що опромінюється зовнішнім полем з довжиною хвилі λ_0 . Довжина щілини $l_{\text{щ}} \ll \lambda_0$, амплітуда напруги уздовж щілини постійна і дорівнює U_0 . Координати центру щілини (x_1, b, z_1) .

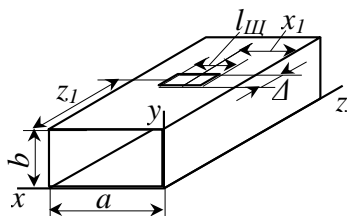


Рис. 8.4

Визначити комплексну амплітуду напруженості електричного поля усередині хвилеводу удаліні від щілини за умови, що $\lambda_{0/2} < a < \lambda_0$, $b < \lambda_{0/2}$. Хвилевід заповнений повітрям.

Відповідь: $\dot{\mathbf{E}} = \frac{2U_0 l_{\text{щ}}}{ab} \sin \frac{\pi}{a} x_1 \cosh h z_1 \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jhz} \mathbf{l}_y$, де

$$h = \frac{2\pi}{\lambda_{H_{10}}}, \quad \lambda_{H_{10}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}}.$$

8.4. У напівнескінченний круглий металевий хвилевід діаметром 6 см уведений тонкий штир довжиною 3 мм, як показано на рис. 8.5. Уздовж штиря протікає перемінний електричний струм, амплітуда

якого постійна по довжині і дорівнює 1 А. Частота коливань 3,75 ГГц.

Розрахувати передану по хвилеводу потужність за умови оптимального розташування збудливого штиря. Якою при цьому повинна бути відстань між штирем та закорочуючою стінкою?

Відповідь: 0,8483 Вт, 3,18 см.

8.5. Прямокутний резонатор із розмірами a , b , l збуджується тонким штирем на резонансній частоті коливання типу E_{110} (рис. 8.6). Добротність резонатора $Q_{E_{110}}$ відома.

Довжина штиря l_D , координати його підстави $(a/2, b/2, 0)$. Розподіл електричного струму по штирі вважати постійним ($l_D \ll \lambda_0$), амплітуда струму I_0 .

Визначити комплексну амплітуду напруженості електричного поля в резонаторі.

Відповідь:
$$\dot{\mathbf{E}} = -\frac{4I_0 l_D Q_{E_{110}}}{\omega_{E_{110}} \epsilon_a a b l} \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \mathbf{I}_z.$$

8.6. Вказати оптимальне розташування штиря для збудження коливання типу H_{102} у прямокутному об'ємному резонаторі довжиною l .

Відповідь: у середині верхньої чи нижньої стінки на відстані l від торця резонатора.

8.7. Вказати оптимальне розташування штиря для збудження коливання типу E_{012} у циліндричному об'ємному резонаторі.

Відповідь: у центрі торцевої стінки.

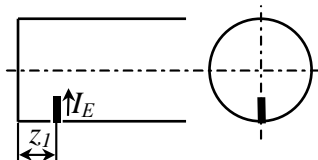


Рис. 8.5

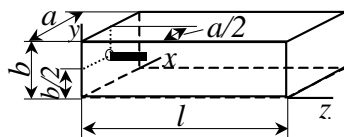


Рис. 8.6

Розділ дев'ятий РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ У РІЗНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

§ 9.1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Особливості розповсюдження електромагнітних хвиль у певному середовищі визначаються властивостями даного середовища. У електродинаміці для локального опису властивостей середовища

використовують матеріальні рівняння

$$\mathbf{D} = (\epsilon_a)\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = (\mu_a)\mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = (\sigma)\mathbf{E}.$$

Коефіцієнти (ϵ_a) , (μ_a) та (σ) у загальному випадку є тензорами і можуть залежати від ряду параметрів. Характер таких залежностей покладений в основу класифікації різних середовищ. Так, якщо властивості середовища залежать від напряму прикладених полів \mathbf{E} та \mathbf{H} , то такі середовища зветься анізотропними. Якщо коефіцієнти (ϵ_a) , (μ_a) та (σ) залежать від абсолютних величин \mathbf{E} та \mathbf{H} , то подібні середовища являються нелінійними. Розрізняють також неоднорідні середовища, в яких величини (ϵ_a) і (μ_a) є функціями координати обраної та точки середовища, та однорідні середовища, в яких ця залежність відсутня. Коефіцієнти (ϵ_a) , (μ_a) і (σ) можуть залежати і від частоти електромагнітних коливань ω . У цьому випадку середовища є дисперсійними.

Однорідні ізотропні іонізовані середовища

Іонізований газ за рахунок його властивостей часто відокремлюють як специфічне середовище, яке зветься *плазмою*. За складом газова плазма являє собою суміш нейтральних, від'ємно та додатньо заряджених частинок. У цілому плазма квазінейтральна, тобто концентрація від'ємно заряджених частинок (зазвичай електронів) у середньому дорівнює концентрації додатньо заряджених частинок (іонів).

Частинки, що складають плазму, взаємодіють як із зовнішніми електромагнітними полями, так і між собою. Взаємодія між частинками приводить до появи у плазмі різноманітних колективних рухів (коливань), що є характерною властивістю плазми як середовища. Найбільш прості коливання плазми пов'язані з кулонівською взаємодією заряджених частинок. Частота таких коливань зветься плазмовою частотою ω_0 . Для електронів

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2 n}{m \epsilon_0}},$$

де e та m – заряд і маса електрона; n – концентрація електронів у плазмі.

Акт взаємодії між двома частинками у плазмі називається *зіткненням*. Багато процесів у плазмі визначаються величиною v_{ij} – числом зіткнень за секунду зарядженої частинки сорту i з іншими

частинками сорту j . У газовій плазмі найбільш важливою характеристикою є частота зіткнень електронів з нейтральними молекулами газу $v_{em} = v$.

З макроскопічної точки зору плазма характеризується електродинамічними параметрами ε , μ , і σ . Власний магнетизм плазми незначний, і можна з великою ступінню точності вважати, що $\mu = 1$.

Якщо електричне поле відсутнє, то відносна діелектрична проникність і провідність плазми рівні відповідно:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + v^2}, \quad \sigma = \frac{\omega_0^2 v \varepsilon_0}{\omega^2 + v^2} \quad (9.1)$$

Якщо $v \ll \omega$ формули (9.1) спрощуються:

$$\varepsilon \approx 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \sigma \approx \frac{\omega_0^2 v \varepsilon_0}{\omega^2} \quad (9.2)$$

Поняття плазми може бути розповсюджено на електронно-дірковий газ у напівпровідниках. Електродинамічні параметри невиродженого напівпровідника з двома типами електропровідності, для якого ефективні частоти зіткнень електронів і дірок рівні v_n і v_p , Φ а діелектрична проникність решітки ε_p , можуть бути представлені формулами

$$\varepsilon = \varepsilon_p \left(1 - \frac{\omega_{0n}^2}{\omega^2 + v_n^2} - \frac{\omega_{0p}^2}{\omega^2 + v_p^2} \right), \quad (9.3)$$

$$\sigma = \frac{\omega_{0n}^2 v_n \varepsilon_0 \varepsilon_p}{\omega^2 + v_n^2} + \frac{\omega_{0p}^2 v_p \varepsilon_0 \varepsilon_p}{\omega^2 + v_p^2},$$

де $\omega_{0n} = \sqrt{\frac{e^2 n}{m_n^* \varepsilon_0 \varepsilon_p}}$, $\omega_{0p} = \sqrt{e^2 p / m_p^* \varepsilon_0 \varepsilon_p}$ - плазмові частоти

електронів та дірок відповідно; n і p - концентрації електронів і дірок; m_n^* та m_p^* - ефективні маси електрона та дірки.

Якщо у напівпровіднику існує декілько сортів частинок з різними ефективними масами, тоді це повинно бути відображено відповідним членами у формулі (9.3). Узагальненою електродинамічною характеристикою середовища є комплексна діелектрична проникність

$$\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - f \frac{\sigma}{\omega}. \quad (9.4)$$

Коефіцієнт розповсюдження плоскої монохроматичної хвилі у середовищі

$$\gamma = \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\varepsilon}} = \beta - j\alpha,$$

причому

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}\right)^2}}, \quad (9.5)$$

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{-\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}\right)^2}}.$$

Якщо активні втрати у плазмі незначні та виконується умова $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \ll \varepsilon$, тоді вирази (9.5) набувають вигляду

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon}, \quad \alpha = \frac{\omega}{c} \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon}} \quad (9.6)$$

Іноді коефіцієнти β і α виражають через дійсну та уявну частини коефіцієнта заломлення:

$$n = \sqrt{\tilde{\varepsilon}} = n' - jn''.$$

При проходженні плоскої електромагнітної хвилі через однорідний шар плазми товщиною L складові векторів електромагнітного поля послаблюються на величину

$$\Delta = 8,686 \int_0^L \alpha dz, \quad \text{дБ.} \quad (9.7)$$

При цьому додатковий зсув фази, викликаний наявністю плазми, визначається формулою

$$\partial\varphi = \int_0^L \alpha dz, \quad \text{дБ} \quad (9.8)$$

Однорідні анізотропні середовища

У анізотропних середовищах напрям прикладеного поля не співпадає з напрямом викликаного цим полем відгуку. Так, існують

середовища, в яких вектор \mathbf{E} та виникаючий під його впливом вектор електричної поляризованості \mathbf{P} не співпадають за напрямком. Існують також середовища, в яких вектор напруженості магнітного поля \mathbf{H} і вектор намагніченості \mathbf{M} відрізняються своїми напрямками. У обох випадках пари векторів \mathbf{D} і \mathbf{E} , \mathbf{B} і \mathbf{H} пов'язані між собою тензорами другого рангу.

Гіротропні середовища

Частковим випадком анізотропних середовищ є гіротропні середовища, для яких хоча б один із тензорів (ϵ) та (μ) має вигляд

$$(\epsilon) = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & -j\epsilon_{xy} & 0 \\ j\epsilon_{xy} & \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (\mu) = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & -j\mu_{xy} & 0 \\ j\mu_{xy} & \mu_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{pmatrix}.$$

Гіромагнітні властивості виявляють деякі середовища, розміщені у постійному магнітному полі. Так, для газової плазми у присутності постійного магнітного поля $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{I}_z$ складові тензора діелектричної проникності записуються у вигляді

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= 1 - \frac{\omega_0^2}{2\omega} \left[\frac{\omega - \omega_H}{(\omega - \omega_H)^2 + \nu^2} - \frac{\omega + \omega_H}{(\omega + \omega_H)^2 + \nu^2} \right], \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\omega_0^2}{2\omega} \left[\frac{\omega - \omega_H}{(\omega - \omega_H)^2 + \nu^2} - \frac{\omega + \omega_H}{(\omega + \omega_H)^2 + \nu^2} \right], \\ \epsilon_{zz} &= 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu^2}, \end{aligned} \quad (9.9)$$

де $\omega_H = \mu_0 \frac{|e|}{m} H_0 = \gamma H_0 = 2,21 \cdot 10^5 H_0$ (А/м) – частота ларморівської прецесії.

При врахуванні зіткнень складові тензора комплексної діелектричної проникності газової плазми матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{xx} &= 1 - \frac{\omega_0^2(\omega - j\nu)}{\omega[(\omega - j\nu)^2 - \omega_H^2]}, \quad \tilde{\epsilon}_{xy} = \frac{\omega_0^2 \omega_H}{\omega[(\omega - j\nu)^2 - \omega_H^2]}, \\ \tilde{\epsilon}_{zz} &= 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega - j\nu)}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Прикладом гіромагнітного середовища з тензором (μ) є ферит,

розміщений у постійному магнітному полі \mathbf{H}_0 . Складові тензора комплексної магнітної проникності фериту при $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{1}_z$ записуються наступним чином:

$$\tilde{\mu}_{xx} = 1 - \frac{\omega_H \omega_M}{(\omega - j\nu)^2 - \omega_H^2}, \quad \tilde{\mu}_{xy} = \frac{\omega_M (\omega - j\nu)}{(\omega - j\nu)^2 - \omega_H^2}, \quad \tilde{\mu}_{zz} = 1. \quad (9.11)$$

де $\omega_H = \gamma H_0$; $\omega_M = \gamma M_0$ (M_0 – намагніченість насичення фериту).

Складові тензора комплексної магнітної проникності, що описуються виразами (9.11), у загальному випадку містять дійсну та уявну частини:

$$\tilde{\mu}_{xx} = \mu'_{xx} - j\mu''_{xx}, \quad \tilde{\mu}_{xy} = \mu'_{xy} - j\mu''_{xy}.$$

Якщо втрати у фериті відсутні, то

$$\mu_{xx} = \mu'_{xx} = 1 - \frac{\omega_H \omega_M}{\omega^2 - \omega_H^2}, \quad \mu_{xy} = \mu'_{xy} = \frac{\omega \omega_M}{\omega^2 - \omega_H^2}, \quad \mu_{zz} = 1. \quad (9.12)$$

Залежність від частоти компонент xx та yy тензорів гіротропних середовищ має резонансний характер. Резонансна частота пропорційна напруженості магнітного поля H_0 , а ширина резонансної кривої визначається параметром ν .

Загальний розгляд розповсюдження електромагнітної хвилі у гіротропному середовищі зручно звести до двох граничних випадків – розповсюдженню хвилі вздовж певної вісі (як правило, вздовж напрямку постійного магнітного поля) та впоперек до неї.

При розповсюдженні плоскої хвилі вздовж постійного підмагнісуючого поля спостерігається *ефект Фарадея* – обертання площини поляризації лінійно поляризованої хвилі. Цей ефект пов'язаний з тим, що при повздовжньому (вздовж підмагнісуючого поля) розповсюдженні хвилі з правою круговою поляризацією поводять себе так само, як і хвилі, що розповсюджуються у середовищі з параметрами $\varepsilon_{\parallel} = \sqrt{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}$, $\mu_{\parallel} = \sqrt{\mu_{xx} - \mu_{yy}}$, а хвилі з лівою поляризацією – як хвилі у середовищі з параметрами $\varepsilon_{\parallel} = \sqrt{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}$, $\mu_{\parallel} = \sqrt{\mu_{xx} + \mu_{yy}}$. Коефіцієнти розповсюдження для таких хвиль різні

$$\gamma_{\parallel} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_{\parallel} \varepsilon_{\parallel}}, \quad \gamma_{\perp} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_{\perp} \varepsilon_{\perp}}. \quad (9.13)$$

Представляючи лінійно поляризовану хвилю у вигляді геометричної суми двох векторів із однаковими довжинами, які

обертаються у протилежних напрямках, можна знайти кут повороту площини поляризації для електромагнітної хвилі, що проходить. Якщо хвиля пройшла відстань z_0 у середовищі, що описується співвідношеннями (9.13), тоді цей кут дорівнює

$$\varphi = \frac{z_0}{2} (\gamma_{\text{п}} - \gamma_{\text{л}}) = \frac{\omega z_0}{2c} (\sqrt{\varepsilon_{\text{п}} \mu_{\text{п}}} - \sqrt{\varepsilon_{\text{л}} \mu_{\text{л}}}) \quad (9.14)$$

§ 9.2. ПРИКЛАДИ РОЗ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

9.1. Використовуючи рівняння неперервності, отримати вираз для плазмової частоти електронів у плазмі без зіткнень. При виводі вважати, що струм у плазмі переноситься тільки електронами з зарядом e та масою m . Концентрація електронів дорівнює n .

Роз'язок. Нехай ρ – об'ємна густина заряду в плазмі. Густина струму провідності \mathbf{J}_E пов'язана зі зміною об'ємної густини заряду рівнянням неперервності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J}_E.$$

Для достатньо швидких процесів, як, наприклад, у випадку, що розглядається, можна вважати, що струм переноситься тільки найбільш легкими частинками – електронами. Тому густина струму в плазмі $\mathbf{J}_E = en\mathbf{v}_{\text{ср}}$, де $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ – середня швидкість електронів. Рівняння руху “середнього” електрону у плазмі без зіткнень має вигляд

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E}.$$

З урахуванням виразу для густини струму провідності рівняння можна переписати наступним чином:

$$\frac{\partial \mathbf{J}_E}{\partial t} = -\frac{e^2 n \mathbf{E}}{m}. \quad (9.15)$$

Продиференціювавши рівняння неперервності по t і використавши вираз (9.15) для однорідної плазми, отримаємо

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{J}_E}{\partial t} = \operatorname{div} \frac{e^2 n \mathbf{E}}{m} = -\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}.$$

Враховуючи закон Гауса, знаходимо рівняння вільних коливань об'ємної густини заряду

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \omega_0^2 \rho = 0,$$

де $\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2 n}{m \epsilon_0}}$ -плазмова частота.

9.2. У зразку кремнію p -типу існують дірки двох сортів. Ефективна маса важких дірок $m_{pв}^* = 0,49m$ (m – маса електрона), легких - $m_{pл}^* = 0,16m$. Число зіткнень за секунду важких та легких дірок у з іншими частинками складає $v_{pв} = 9,2 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$ та $v_{pл} = 2,6 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$.

Роз'ясок. Оскільки даний напівпровідник містить два сорти носіїв заряду, відносна діелектрична проникність кремнію

$$\epsilon = \epsilon_p \left(1 - \frac{\omega_{0pв}^2}{\omega^2 + v_{pв}^2} - \frac{\omega_{0pл}^2}{\omega^2 + v_{pл}^2} \right),$$

а провідність

$$\sigma = \frac{\omega_{0pв}^2 v_{pв} \epsilon_0 \epsilon_p}{\omega^2 + v_{pв}^2} + \frac{\omega_{0pл}^2 v_{pл} \epsilon_0 \epsilon_p}{\omega^2 + v_{pл}^2},$$

де $\omega_{0pв}^2 = \frac{e^2 p_{в}}{m_{pв}^* \epsilon_0 \epsilon_p} = 5,55 \cdot 10^{25} \text{ с}^{-2}$, $\omega_{0pл}^2 = \frac{e^2 p_{л}}{m_{pл}^* \epsilon_0 \epsilon_p} = 2,80 \cdot 10^{25} \text{ с}^{-2}$ -

відповідно квадрат плазмової частоти важких та легких дірок;

$\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda} = 1,88 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ -частота сигналу.

Підставляючи числові данні у вирази для ϵ та σ , отримаємо $\epsilon = 9,90$; $\sigma = 194 \text{ См/м}$.

9.3. Плоска електромагнітна хвиля розповсюджується в однорідній ізотропній газовій плазмі.

Визначити відносну діелектричну проникність та провідність плазми, якщо коефіцієнти розповсюдження хвилі на частоті $0,48 \text{ ГГц}$ рівний $5 - j 2 \text{ м}^{-1}$.

Роз'ясок. Використовуючи формулу (9.5), представимо дійсну та уявну частини коефіцієнта заломлення через коефіцієнт фази β та коефіцієнт ослаблення α :

$$n' = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}\right)^2}} = \frac{\beta c}{\omega},$$

$$n'' = \sqrt{-\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}\right)^2}} = \frac{\alpha c}{\omega}.$$

Піднесемо перший та другий вираз до квадрату та віднімемо від першого отриманого співвідношення друге:

$$n'^2 - n''^2 = \varepsilon = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 (\beta^2 - \alpha^2). \quad (9.16)$$

Обрахуємо добуток

$$n'n'' = \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0} = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \alpha\beta.$$

та використаємо цей вираз для знаходження провідності

$$\sigma = 2\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \alpha\beta\omega\varepsilon_0. \quad (9.17)$$

За умовою задачі $\beta = 5$, $\alpha = 2$. Підставляючи ці значення до виразів (9.16) та (9.17), отримуємо $\varepsilon = 0,2078$, $\sigma = 5,28 \cdot 10^{-3}$ См/м.

9.4. Знайти значення частоти сигналу хвилі, що пройшла, при якій у газовій плазмі з параметрами $\omega_0 = 2 \cdot 10^8$ с⁻¹ та $\nu = 10^8$ с⁻¹ густина струму провідності дорівнює густині струму зміщення.

Р о з ' я з о к . Густина струму провідності у плазмі

$$J_{\text{пр}} = \sigma E = \frac{\omega_0^2 \nu \varepsilon_0}{\omega^2 + \nu^2} E.$$

Густина струму зміщення у плазмі

$$J_{\text{зм}} = \omega \varepsilon \varepsilon_0 E = \omega \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu^2}\right) \varepsilon_0 E.$$

Прирівнюючи значення густини струму провідності та густини зміщення, отримуємо кубічне рівняння відносно частоти сигналу

$$\omega^3 + \omega(\nu^2 - \omega_0^2) - \omega_0^2 \nu = 0.$$

У канонічній формі це рівняння має вигляд

$$\omega^3 + 3p\omega + 2q = 0.$$

де

$$p = \frac{v^2 - \omega_0^2}{3} = -10^{16}, \quad q = \frac{\omega_0^2 v}{2} = -2 \cdot 10^{24}.$$

Легко перевірити, що дійсний корінь останнього рівняння

$$\omega_1 = u + 9$$

де

$$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} = 1,55 \cdot 10^8; \quad 9 = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} = 0,64 \cdot 10^8.$$

Звідси знаходимо значення частоти сигналу, при якому $J_{\text{пр}} = J_{\text{зм}}$:
 $\omega = (1,55 + 0,64) \cdot 10^8 = 2,19 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$.

9.5. Дві плоскі лінійно поляризовані хвилі розповсюджуються у напрямі вісі x у монокристалі сапфіра (Al_2O_3), тензор діелектричної проникності якого

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

Визначити різницю фаз цих хвиль, що пройшли у сапфірі відстань у 1 см, якщо перша хвиля поляризована вздовж осі y , а друга – уздовж осі z . Частоти коливань однакові та дорівнюють 10 ГГц. На цій частоті $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 13,2$, $\varepsilon_{zz} = 11,4$.

Роз'я з о к. Хвиля, що характеризується вектором $\mathbf{E}_1 = E_1 \mathbf{e}_y \perp \mathbf{e}_z$, буде звичайною з коефіцієнтом фази

$$\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon_{xx}} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{13,2} = 7,609 \text{ рад/см.}$$

Хвиля, що характеризується вектором $\mathbf{E}_2 = E_2 \mathbf{e}_z \parallel \mathbf{e}_z$, буде незвичайною з коефіцієнтом фази

$$\beta_e = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon_{zz}} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{11,4} = 7,071 \text{ рад/см.}$$

Різниця фаз при проходженні звичайною та незвичайною хвилями відстані

$$\Delta\varphi = (\beta_0 - \beta_e)z_0 = 30,8^\circ$$

§ 9.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗ'ЯЗАННЯ

9.6. Концентрація електронів у газовій плазмі дорівнює 10^{10} см^{-3} , частота зіткнень електронів з молекулами 10^9 с^{-1} .

Визначити відносну діелектричну проникність та провідність плазми. Розрахунок провести для двох частот сигналу: $f_1 = 10^8$ Гц та $f_2 = 10^{10}$ Гц.

Відповідь: $\epsilon_1 = -21,8$, $\epsilon_2 = 0,992$, $\sigma_1 = 0,202$ См/м, $\sigma_2 = 7,12 \times 10^{-5}$ См/м.

9.7. Максимальна концентрація електронів в іоносфері Землі дорівнює 10^6 см⁻³, частота зіткнень електронів з частинками газу – 10^7 с⁻¹.

Визначити потужність, що поглинається в одиниці об'єму іоносферної плазми, якщо амплітуда напруженості електричного поля плоскої хвилі складає 1 В/м, а довжина хвилі 10 м.

Відповідь: 3,96 мкВт/м³.

9.8. У напівпровіднику антимоніду галію (GaSb) концентрація електронів складає $7,7 \cdot 10^{14}$ см⁻³, а концентрація дірок $2,5 \cdot 10^{14}$ см⁻³. Ефективні маси електрону та дірки рівні 0,05*m* та 0,5*m* відповідно. Ефективне число зіткнень електронів з іншими частинками дорівнює $1,7 \cdot 10^{12}$ с⁻¹, а дірок $3,8 \cdot 10^{12}$ с⁻¹.

Для випромінювання з довжиною хвилі 1 мм визначити дійсну та уявну частини комплексної діелектричної проникності напівпровідника. Відносна діелектрична проникність решітки антимоніду галію $\epsilon_p = 12,5$.

Відповідь: $\tilde{\epsilon} = 4,81 - j7,04$.

9.9. При зондуванні однорідної ізотропної газової плазми плоскою електромагнітною хвилею з лінійною поляризацією було виміряне питома згасання 8,68 дБ/м та додатковий зсув фаз на одиниці довжини – 10 рад/м.

Визначити концентрацію електронів та ефективну частоту зіткнень електронів з іншими частинками плазми, якщо довжина хвилі зонduючого сигналу 30 см.

Відповідь: $9,595 \cdot 10^9$ см⁻³, $3,70 \cdot 10^8$ с⁻¹.

9.10. Плоска електромагнітна хвиля падає вздовж нормалі з вакууму на кристал сапфіру (Al₂O₃) з тензором діелектричної проникності

$$(\epsilon) = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

Межа розділу повітря-діелектрик паралельна вісі кристалу (вісь *z*).

Знайти коефіцієнти відбиття звичайної та незвичайної хвиль на частоті 10 ГГц, на якій $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 13,2$ та $\epsilon_{zz} = 11,4$.

Відповідь: -0,567, -0,557.

9.11. З повітря на мідну пластину вздовж нормалі падає з частотою $f = 100$ МГц. Напруженість поля $H_1 = 1$ А/м. Визначити поле на межі пластини і потужність, яка поглинається пластинною (відносно 1 м^2 її площі).

Відповідь: напруженість магнітного поля: $H_\tau = 2H_1 = 2$ А/м; напруженість електричного поля: $E_\tau = 7,4 \cdot 10^{-3} \exp(j 45^\circ)$ В/м; потужність: $P = R_S |H_\tau|^2 = 10,4$ мВт/м².

9.12. Визначити фазові швидкості звичайної та незвичайної хвиль у поперечно намагніченому фериті при $f = 10$ ГГц; $\epsilon = 10$; $M_0 = 80$ кА/м; $M_z = 0,95$.

Відповідь: $v_0 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu_z}} = 97 \cdot 10^6$ м/с, $v_e = 108 \cdot 10^6$ м/с.

9.13. Знайти моди Бернштейна (поздовжня хвиля строго поперек магнітного поля) для виродженої електронної плазми.

Відповідь: $1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6\omega_{Le}^2 \Omega_e^2}{\pi^2 k^3 \mathfrak{F}_{Fe}^3} \cdot \frac{n^2}{\omega^2 - n^2 \Omega_e^2} J_0 \left(\frac{k \mathfrak{F}_{Fe}}{\Omega_e} \right) = 0$, де J_0 – функція

Беселя нульового порядку, Ω_e – ларморівська частота електронів, ω_{Le} – ленгмюрівська частота електронів, \mathfrak{F}_{Fe} – аналог \mathfrak{F}_{Te} для виродженої плазми.

9.14. Дослідити збудження високочастотних хвиль у напівобмеженій ізотропній плазмі моноенергетичних нерелятивістським електронним пучком із концентрацією N_b , що летить над її поверхнею зі швидкістю \mathfrak{F}_0 .

Відповідь: Спектр частот поверхневих хвиль, що збуджуються (при $\omega_{Le} \gg v_e$ - частоти зіткнень): $\omega = \frac{\omega_{Le}}{\sqrt{2}} \sim k_z \mathfrak{F}_0$; інкремент наростання

$(\omega \rightarrow \omega + j\delta)$: $\delta = \left(\frac{N_b}{2N_0} \right)^{1/3} \frac{(j + \sqrt{3})}{2} \omega$, ($\delta > v_e$).

Додаток-1

Значення коефіцієнтів r_A і r_B для різних відношень b/d і t/d , використовуваних при розрахунку несиметричної смужкової лінії передачі

Таблиця 1.1. Значення коефіцієнтів r_A і r_B при $t/d = 0,025$

b/a	r_B	r_A
1	5,1289	$1,0365 \cdot 10^{-1}$
1,5	6,4321	$4,5160 \cdot 10^{-2}$
2	7,6705	$2,0195 \cdot 10^{-2}$
2,5	8,8691	$9,1289 \cdot 10^{-3}$
3	10,0405	$4,1461 \cdot 10^{-3}$
3,5	11,1919	$1,8871 \cdot 10^{-3}$
4	12,3280	$8,5969 \cdot 10^{-4}$
4,5	13,4520	$3,9182 \cdot 10^{-4}$
5	14,5661	$1,7862 \cdot 10^{-4}$
5,5	15,6719	$8,1432 \cdot 10^{-6}$

Таблиця 1.2. Значення коефіцієнтів r_A і r_B при $t/d = 0,06$

b/a	r_B	r_A
1	5,8905	$1,3372 \cdot 10^{-1}$
1,5	7,3660	$4,9481 \cdot 10^{-2}$
2	8,7697	$2,2142 \cdot 10^{-2}$
2,5	10,1290	$1,0012 \cdot 10^{-2}$
3	11,4578	$4,5479 \cdot 10^{-3}$
3,5	12,7643	$2,0700 \cdot 10^{-3}$
4	14,0536	$9,4308 \cdot 10^{-4}$
4,5	15,3293	$4,2984 \cdot 10^{-4}$
5	16,5938	$1,9595 \cdot 10^{-4}$
5,5	17,8490	$8,9333 \cdot 10^{-5}$

Додаток-2

Корні функцій Беселя та їх похідних

Таблиця 2.1. Значення коренів функцій Беселя $J_m(x)$

m	n			
	1	2	3	4
0	2,405	5,520	8,654	11,792
1	3,832	7,016	10,173	13,324
2	5,136	8,417	11,620	14,796
3	6,380	9,761	13,015	16,223
4	7,588	11,065	14,373	17,616

Таблиця 2.2. Значення коренів похідних функцій Беселя $J'_m(x)$

m	n		
	1	2	3
0	3,832	7,016	10,174
1	1,841	5,331	8,536
2	3,054	6,705	9,965
3	4,200	8,017	11,403
4	5,317	9,284	12,626

Додаток-3

Електродинамічні параметри деяких матеріалів, що використовуються в техніці НВЧ

Таблиця 3.1. Параметри високочастотних діелектриків

Параметр	Матеріал			
	Поліетилен	Полістірол	Фторопласт	Плавлений кварц
ε	2,25	2,56	2,08	3,80
$\text{tg } \delta_E$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-5}$

Таблиця 3.2. Значення провідностей металів

Провідність	Матеріал			
	Срібло	Мідь	Латунь	Цинк
σ , См/м	$6,1 \cdot 10^7$	$5,7 \cdot 10^7$	$1,4 \cdot 10^7$	$1,7 \cdot 10^7$

Зміст

Передмова	3
Розділ перший ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ	3
§ 1.1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.....	3
§ 1.2. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗ'ЯЗАННЯ	7
Розділ другий РІВНЯННЯ МАКСВЕЛА	9
§ 2.1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.....	9
§ 2.2. ПРИКЛАДИ РОЗ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ.....	14
§ 2.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗ'ЯЗАННЯ	16
Розділ третій ПЛОСКІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ	18
§ 3.1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.....	18
§ 3.2. ПРИКЛАДИ РОЗ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ.....	23
§ 3.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗ'ЯЗАННЯ	26
Розділ четвертий ХВИЛЕВОДИ.....	29
§ 4.1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.....	29
§ 4.2. ПРИКЛАДИ РОЗ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ.....	33
§ 4.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗ'ЯЗАННЯ	36
Розділ п'ятий Діелектричні хвилеводи.	39
§ 5.1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.....	39
§ 5.2. ПРИКЛАДИ РОЗ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ.....	42
§ 5.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗ'ЯЗАННЯ	45
Розділ шостий ЛІНІЇ ПЕРЕДАЧІ З ХВИЛЯМИ ТИПУ Т	46
§ 6.1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.....	46
§ 6.2. ПРИКЛАДИ РОЗ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ.....	51
§ 6.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗ'ЯЗАННЯ	53
Розділ сьомий ОБ'ЄМНІ РЕЗОНАТОРИ.....	55
§ 7.1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.....	55
§ 7.2. ПРИКЛАДИ РОЗ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ.....	58
§ 7.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗ'ЯЗАННЯ	59
Розділ восьмий ЗБУДЖЕННЯ ЗАМКНЕНИХ ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ.....	61
§ 8.1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.....	61
§ 8.2. ПРИКЛАДИ РОЗ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ.....	64
§ 8.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗ'ЯЗАННЯ	66
Розділ дев'ятий РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ У РІЗНИХ СЕРЕДОВИЩАХ.....	67
§ 9.1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.....	67

§ 9.2. ПРИКЛАДИ РОЗ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ	73
§ 9.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗ'ЯЗАННЯ	76
Додаток-1 Значення коефіцієнтів r_A і r_B для різних відношень b/d і t/d , використуваних при розрахунку несиметричної смужкової лінії передачі	79
Таблиця 1.1. Значення коефіцієнтів r_A і r_B при $t/d = 0,025$	79
Таблиця 1.2. Значення коефіцієнтів r_A і r_B при $t/d = 0,06$	79
Додаток-2 Корні функцій Беселя та їх похідних	79
Таблиця 2.1. Значення коренів функцій Беселя $J_m(x)$	79
Таблиця 2.2. Значення коренів похідних функцій Беселя $J'_m(x)$	80
Додаток-3 Електродинамічні параметри деяких матеріалів, що використовуються в техніці НВЧ	80
Таблиця 3.1. Параметри високочастотних діелектриків	80
Таблиця 3.2. Значення провідностей металів	80
Зміст	81