

## 1. Спонтанні та вимушені переходи. Коефіцієнти Ейнштейна, співвідношення між ними.

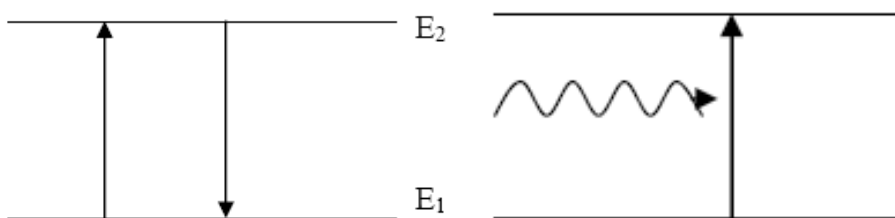
Нехай ми маємо дворівневу енергетичну систему. В такій системі можливі переходи з одного рівня на інший. Існують два типи переходів. **Спонтанний перехід** – це перехід системи з одного енергетичного рівня на інший при відсутності дії зовнішніх сил. **Вимушений перехід** – це перехід системи з одного енергетичного рівня на інший під дією зовнішніх сил. Вимушений перехід можливий після поглинання системою фотона. **Поглинання** – перехід системи в збуджений стан при поглинанні фотона. Візьмемо деякий об'єм  $V$  (нехай одиничний). Нехай кількість частинок в об'ємі  $n = n_1 + n_2$ , де  $n_1, n_2$  – кількість частинок на 1 та 2 рівнях. Кількість спонтанних переходів частинок  $Z_{21}^c = A_{21}n_2$ , де  $A_{21}$  – коефіцієнт Ейнштейна для спонтанного випромінювання  $[A_{21}] = [Z_{21}^c/n_2] = [(c \cdot m^3)/(1/m^3)] = [1/c]$ .

**Фізичний зміст:** ймовірність переходу за 1 часу. Коефіцієнт Ейнштейна для спонтанного випромінювання – величина обернена до середнього часу життя частинки на збудженому рівні ( $A_{21} = 1/\tau_c$ ). Кількість вимушених переходів частинок під час поглинання:  $Z_{21}^b = B_{21}n_1\rho_\nu$ , де  $\rho_\nu$  – спектральна об'ємна густина,  $B^{12}$  – коефіцієнт Ейнштейна для поглинання  $[B_{21}] = [Z_{21}^b/n_1\rho_\nu] = [1/c \cdot m^3 / (Дж \cdot c)] = [m^3 / (Дж \cdot c^2)]$ .

Можна ввести:  $B_{21}\rho_\nu = 1/\tau_b$ .

Коефіцієнт Ейнштейна для вимушеного випромінювання  $Z_{21}^b = B_{21}n_2\rho_\nu$ ,  $[B_{21}] = [Z_{21}^b/n_2\rho_\nu] = [1/c \cdot m^3 / (Дж \cdot c)] = [m^3 / (Дж \cdot c^2)]$ .

Можемо ввести деякий час  $B_{21}\rho_\nu = 1/\tau_b$ , де  $\tau_b$  – час життя частинки на



верхньому рівні, якщо знехтувати спонтанними процесами.

Якщо підсумуємо спонтанні та вимушені переходи з рівня 2 на 1, то  $Z_{21} = Z_{21}^b + Z_{21}^c$ , тоді можемо записати  $Z_{21}/n_2 = (A_{21}n_2 + B_{21}n_2\rho_\nu)/n_2$ , або  $1/\tau = 1/\tau_c + 1/\tau_b$  (але користуватися часами не настільки легко, як коефіцієнтами Ейнштейна).

**Співвідношення між коефіцієнтами Ейнштейна.** Розглянемо стан термодинамічної рівноваги  $Z_{21}dt = Z_{12}dt$

переписавши цей вираз через коефіцієнти Ейнштейна  $A_{21}n_2 + B_{21}n_2\rho = B_{12}n_1\rho$ , визначимо звідси

$$\rho = A_{21}n_2 / (B_{12}n_1 - B_{21}n_2) = A_{21} / (B_{12}n_1/n_2 - B_{21})$$

Запишемо розподіл Больцмана (він виконується, коли система знаходиться в термодинамічній рівновазі). Введемо статистичні ваги (або виродження)  $q_1$  та  $q_2$ .

$n_1/n_2 = q_1/q_2 \exp[(E_2 - E_1)/kT] = q_1/q_2 \exp[h\nu_{12}/kT]$ , підставимо це в вираз для  $\rho$ , тоді  $\rho = A_{21} / (B_{12} \cdot (q_1/q_2 \exp[h\nu_{12}/kT]) - B_{21}) = \frac{1}{3} \text{ формули Планка} = (8\pi h\nu^3/c^3) \cdot (\exp[h\nu_{12}/kT] - 1)^{-1}$ .

Формула повинна бути справедлива  
 будь-яких  $T$ , тому

$$B_{12} \cdot q_1/q_2 - B_{21} = 0,$$

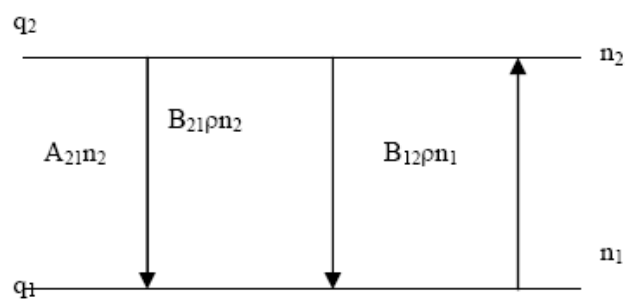
отже  $B_{21} = B_{12} \cdot q_1/q_2$ ,

Якщо покласти  $q_1 = q_2$ , то  $B_{21} = B_{12}$ .

$$A_{21}/(B_{12} \cdot (q_1/q_2 \exp[h\nu_{12}/kT]) - B_{12} \cdot q_1/q_2) = (8\pi h\nu^3/c^3) \cdot (\exp[h\nu_{12}/kT] - 1)^{-1}, \quad \text{тоді}$$

$$A_{21} = (8\pi h\nu^3/c^3) \cdot q_1/q_2 \cdot B_{12}.$$

Тут дуже важливим є те, що  $A \sim \nu^3$ , тому у видимому діапазоні  $A$  велике (а  $\tau$  мале)



для

## 2. Поглощения света двуровневой квантовой системой. Эффект насыщения поглощения.

Равновесная квантовая система поглощает энергию внешнего излучения, т.е. при равновероятности индуцированных переходов сверху вниз (с излучением энергии) и снизу вверх (с поглощением энергии) в расчете на одну частицу общее число переходов с нижних уровней на верхние превосходит число обратных переходов, потому что внизу частиц больше, чем сверху.

Действительно, изменение энергии внешнего поля излучения в единичном объеме квантовой системы определяется разностью энергий, излучаемых и поглощаемых при индивидуальных переходах вниз и вверх. Так как излучаемая мощность равна  $P_{\text{изл}} = n_2 B_{21} \rho(\nu)$  а поглощаемая  $P_{\text{погл}} = n_1 B_{12} \rho(\nu)$ , то скорость изменения плотности энергии составляет

$$\frac{dW}{dt} = n_2 B_{21} \rho(\nu) - n_1 B_{12} \rho(\nu) - n_2 A_{21}$$

что при термодинамическом равновесии в соответствии с распределением Больцмана отрицательно. Энергия внешнего поля поглощается.

Коэффициент поглощения определяется как:  $\alpha = n_1 B_{12} - n_2 B_{21}$

Рассмотрим несколько подробнее коэффициент поглощения в равновесном случае. Имеется двухуровневая система. В соответствии с распределением Больцмана для двухуровневой системы, находящейся при температуре  $T$ ,

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right)$$

где  $n = n_1 + n_2$  – плотность общего числа частиц на обоих уровнях энергии. В радиодиапазоне, как правило,  $\alpha \ll \alpha_0$  и ... (вид верхней формулы при этом приближении не очень то и важен)

В оптическом диапазоне

$$\alpha \approx n_1 B_{12} \rho(\nu)$$

Если использовать что  $g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$  и  $A_{21} = 8\pi^2 \nu^3 B_{21} / c^3$  (и то что  $c/\nu = \lambda$ ,  $A_{21} = 1/\tau_0$  где  $\tau_0$  – естественное, спонтанное, радиационное время жизни частицы на верхнем уровне) получим другой вид предыдущей формулы

$$\alpha = \frac{8\pi^2 \nu^3}{c^3} n_1 \frac{g_2}{g_1} \frac{1}{\tau_0} \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right)$$

Все что справа от  $n$  есть эффективное сечение взаимодействия частицы с резонансным электромагнитным полем – сечение поглощения (обозначается  $\sigma$ ).

Из двух предыдущих формул получаем:

---

Так как  $\sigma$  всегда превышает  $1/\lambda$ , сечение поглощения всегда меньше  $\lambda^2/2\pi$  (в оптическом диапазоне, как правило, значительно меньше). Характерные значения  $\sigma$  в зависимости от спектрального диапазона и конкретной квантовой частицы лежат в широком диапазоне ( $10^{-12}$  ...  $10^{-24}$  см<sup>2</sup>).

В предыдущем рассмотрении речь шла о так называемом линейном коэффициенте поглощения или коэффициенте поглощения малого сигнала, когда значение  $\alpha$  не зависит от интенсивности сигнала. Независимость коэффициента поглощения  $\alpha$  от интенсивности поглощаемого излучения соответствует в оптике закону Бугера-Ламберта-Бера. Этот закон в нашем рассмотрении получен в предположении, что поглощаемое излучение не вызывает отклонений распределения числа частиц по уровням энергии от термодинамически равновесного.

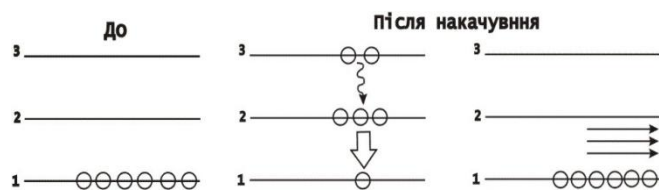
Однако поглощаемое системой частиц излучение обязательно нарушает тепловое равновесие в ней. В случае, когда вероятность переходов под влиянием внешнего поля становится сравнимой с вероятностью релаксационных переходов, равновесное распределение населенностей заметно искажается. При этом относительная доля энергии, поглощаемой системой, уменьшается, коэффициент поглощения падает, наступает так называемый эффект насыщения.

Некоторой эффективной характеристикой насыщения есть плотность потока энергии или интенсивности насыщения которая записывается как:

---

### 3. Трирівнева схема створення інверсії населеності квантових рівнів.

Схема функціонування трьохрівневої схеми



Накачка такого лазера здійснюється з 1 на 3 рівень, далі йде безвипромінювальний перехід з 3 на 2, і з 2 відбувається перехід 2-1 з випромінюванням, для того щоб все це ефективно функціонувало потрібно, щоб час життя на 3 рівні був значно менший ніж на 2 (метастабільний), тоді можна створити значну інверсію. Типовий представник – рубіновий лазер. Дуже суттєвим є безвипромінювальний перехід 3-2 якщо різниця енергій між цими рівнями порядку кТ, то передача енергії відбувається ефективно. Якщо ж різниця між ними суттєво більше кТ, то в процесі передачі беруть участь фонони в результаті чого тверде тіло розігрівається, а ефективність накачки падає. Для стаціонарної генерації важлива потужність накачки ( $B_{13}\rho_{13}$ ) необхідна для підтримання інверсної заселеності. Її необхідну потужність можна оцінити виходячи з часу життя метастабільного рівня (2). Вимогою для підтримки є виконання нерівності  $B_{13}\rho_{13} > A_{21}$  ( $A$ -число спонтанних випромінювань). Потужність вимушеного випромінювання рівна різниці між потужністю накачки і її пороговим значенням з врахуванням безвипромінювальних втрат в каналі накачування. Чим більше потужність накачки тим більша інверсна заселеність і тим потужніше випромінювання.

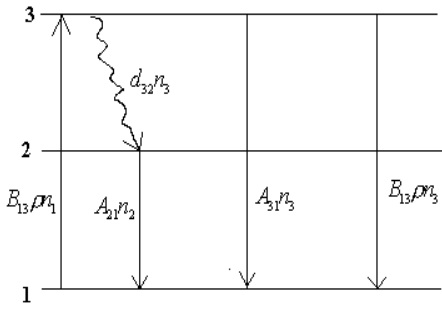
Маємо три рівні = 15 процесів. Суть: перевести систему на верхній рівень, потім відбувається швидка релаксація, потім створюємо інверсію. Розглянемо тільки 5 процесів. Релаксація за рахунок взаємодії з ґраткою. Вважатимемо, що генерації немає, тоді можна не враховувати вимуш. випромінювання 21, але повинні врахувати процес  $A_{31}$ , який є небажаним.

$$\begin{cases} \frac{dn_3}{dt} = B_{13}n_1 - B_{13}n_3 - A_{31}n_3 - d_{32}n_3 = 0 \\ \frac{dn_2}{dt} = d_{32}n_3 - A_{21}n_2 = 0 \\ \frac{dn_1}{dt} = \frac{d(n_1 - n_2 - n_3)}{dt} = -\frac{dn_2}{dt} - \frac{dn_3}{dt} \end{cases}$$

Розглянемо випадок, коли  $\rho \rightarrow \infty$ . Нам треба розгяд стац. рівняння. Система диф. рівнянь – кінетичні рівняння. Система алгебр. рівнянь ( $\frac{dn_{3,2}}{dt} = 0$ ) - балансні рівняння.

Розглядаємо алгебр. рівняння :  $n_1 \gg n_3$ , при  $\rho \rightarrow \infty$ ,

Схема функціонування трьохрівневої схеми:

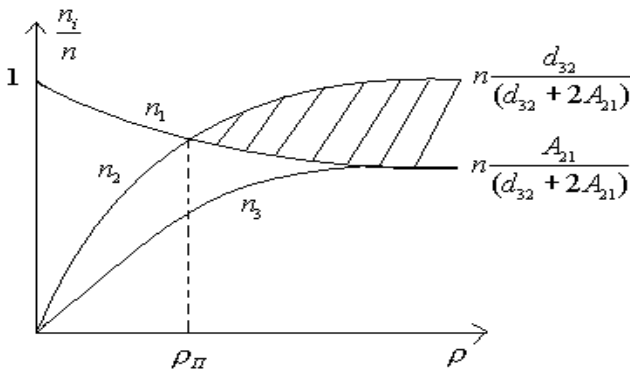


$$d_{32}n_1 = A_{21}n_2, \quad n_2 = n - n_1 - n_3, \quad d_{32}n_1 = A_{21}(n - 2n)$$

$$n_2 = \frac{d_{32}n}{d_{32} + 2A_{21}}; \quad n_1 = n \frac{A_{21}}{d_{32} + A_{21}} = n_3$$

Інверсія  $n_2 > n_1$  в заштрихованій області, за умов, що  $n \frac{d_{32}}{d_{32} + 2A_{21}} > n \frac{A_{21}}{d_{32} + A_{21}}$ ;

$d_{32} > A_{21}$  – умова інверсії ;  $\square \max = (n_2 - n_1)_{\max} = \frac{d_{32} - A_{21}}{d_{32} + 2A_{21}}$ .



Знайдемо  $\rho_{\text{порогове}}$  :  $n_1 = n_2$  ;  $n_3 = \frac{A_{21}n_2}{d_{32}}$  ;

$$B_{13}\rho n_1 = B_{12}\rho \frac{A_{21}}{d_{32}} n_2 + A_{31} \frac{A_{21}}{d_{32}} n_2 + d_{32} \frac{A_{21}}{d_{32}} n_2; \quad \frac{n_1}{n_2} = 1;$$

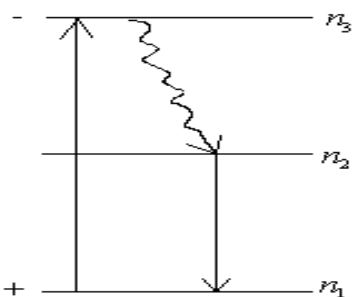
$$\rho_{\text{порогове}} = \frac{A_{21}(A_{31} + d_{32})}{B_{13}(d_{32} - A_{21})};$$

Щоб  $\rho_{\text{н}}^{(\text{пор})}$  не було від'ємне :

- 1)  $d_{32} \gg A_{21}$  релаксація з 2 на 3 має відбуватись набагато швидше, ніж спонтанне спустошення рівня 2
- 2)  $B_{13} \uparrow$  - коефіцієнт поглинання ( $k_v \uparrow$ ) має бути великим.
- 3)  $A_{21} \downarrow$  - якнайменшим.

Щоб було велике поглинання цей перехід повинен бути дозволеним, отже повинна бути парність.

Цей лазерний перехід заборонений, набагато легше створити інверсію. Коли ми досягаємо порогової генерації, то заселеності рівнів рівні між собою ( $n_1 = n_2$ ),  $n_3 \approx 0$  – швидка релаксація на рівень 2.



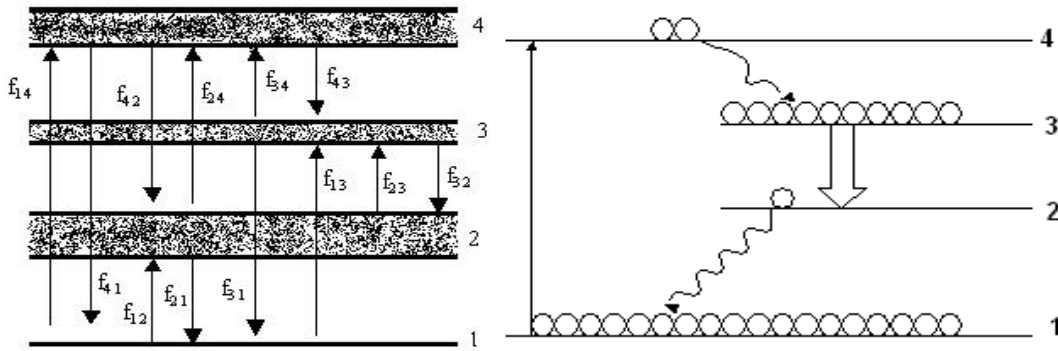
Недоліки: 1) треба закинути багато частинок і підтримувати заселеність рівня.

### Створення інверсії населеності:

$$n_2^{(cm)} = n \frac{B_{12}\rho + d_{12}}{B_{12}\rho + B_{21}\rho + A_{21} + d_{12} + d_{21}}; \rho \rightarrow \infty \quad \frac{B_{12}}{B_{12} + B_{21}} n - \frac{1}{2} n;$$

$$k_\nu = -(n_1 - n_2) B \frac{hc}{e} g; n_2^{cm} = \frac{1}{2} n$$

#### 4. Чотирирівнева схема створення інверсії населеності квантових рівнів.



За допомогою накачування частинки з основного стану 1, збуджуються на рівень 4. Кінетичні рівняння:

$$\frac{dn_4}{dt} = B_{14}\rho_n n_1 - B_{14}\rho_n n_4 - A_{41}n_4 - d_{43}n_4$$

$$\frac{dn_3}{dt} = -A_{32}n_3 + d_{43}n_4$$

$$\frac{dn_2}{dt} = A_{32}n_3 - d_{21}n_2$$

$$\frac{dn_1}{dt} = -B_{14}\rho_n n_1 + B_{14}\rho_n n_4 + A_{41}n_4 + d_{21}n_2$$

Розглядаємо стаціонарний випадок і те, що  $\rho \rightarrow \infty$ , маємо:

$$n_4 = \frac{A_{32}}{d_{43}} n_3$$

$$n_2 = \frac{A_{32}}{d_{21}} n_3$$

$$n_1 = n_4$$

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$$

$$\frac{n_3}{n} = \left(2 \frac{A_{23}}{d_{43}} + \frac{A_{23}}{d_{21}} + 1\right)^{-1} \equiv 1/F$$

$$\frac{n_1}{n} = \frac{n_4}{n} = \frac{A_{32}}{d_{43}} * 1/F$$

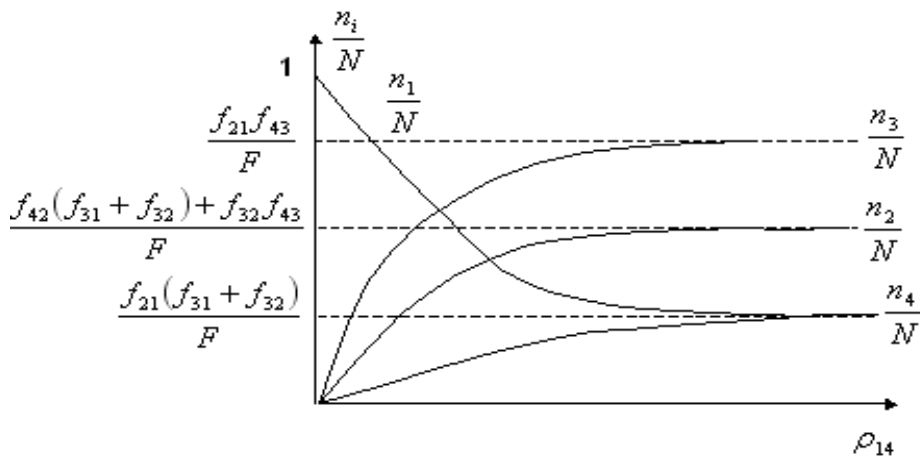
$$\frac{n_2}{n} = \frac{A_{32}}{d_{21}} * 1/F$$

Потім з великою імовірністю безвипромінювального переходу квантові частинки переходять на метастабільний стан 3. Переходи частинок з 3 в 2 дають люмінесценцію або, якщо створені необхідні умови, індуковане випромінювання. І нарешті, в результаті безвипромінювального переходу з 2 в 1, квантові частинки повертаються на основний стан 1. Отже, якщо робоче тіло підібране так, щоб  $h\nu_{12} \gg kT$ , то  $n_2$  при термодинамічній рівновазі дуже мале:

$$n_2 = N \exp(-E_2/kT)$$

накопичуватись. Схема безпорогова.  $d_{43} \gg A_{32}$  Коли температура вище нуля то з'являється поріг!





Тому в такій системі порівняно з трирівневою схемою, відносно легко отримати інверсний стан, оскільки досить загнати на рівень 3 незначну частину квантових частинок, як ми вже отримаємо інверсний стан, тому що рівень 2 практично вільний.

Інверсія можлива коли:  $d_{12} > A_{32}$  другий рівень повинен спустошуватись швидше ніж накопичуватися.

## 5. Типи лазерних резонаторів. Умова стійкості резонатора

**Плоский резонатор.** Плоским називають резонатор, утворений двома плоскими квадратними дзеркалами з розмірами  $2a \cdot 2a$ , що знаходяться на відстані  $L$  один від одного.

Власні частоти резонатора визначаються за формулою:

$$\nu_{mq} = \frac{c}{\lambda_{mq}} = \frac{c}{2} \left[ \frac{q}{L} + \frac{1}{2} \frac{(m^2 + n^2)}{q} \frac{L}{4a^2} \right]$$

Розподіл поля всередині резонатора з плоскими дзеркалами в різних перетинах, перпендикулярних оптичній осі, змінюється порівняно слабо. Це дозволяє досить ефективно використовувати активний обсяг робочої речовини. Відмінною рисою плоского резонатора є те, що фронт хвилі на його дзеркалі майже плоский. Скривлення фронту хвилі хоча і має, але воно мале. Це дає можливість одержати мале розходження променя, що виходить з такого резонатора.

**Конфокальний резонатор.** Конфокальним називають відкритий резонатор, утворений однаковими сферичними дзеркалами, осі і фокуси яких збігаються. Конфокальний резонатор має наступні особливості.

Власні частоти визначаються за формулою:

$$\nu_{mq} = \frac{\omega_{mq}}{2\pi} = \frac{c}{4L} (2q + 1 + m + n)$$

Розподіл фази по поверхні дзеркал однорідний, тобто відбиваючі поверхні є поверхнями рівних фаз. У порівнянні з плоским резонатором поле в конфокальному резонаторі більш щільно сконцентровано в його осі і спадає на краях значно швидше. Це приводить до того, що дифракційні втрати в конфокальному резонаторі значно менші, ніж для аналогічних типів коливань у плоскому резонаторі. У розподілі поля не спостерігається характерних для плоского резонатора перегинів. Основне TEM<sub>00</sub>-коливання має гаусів розподіл як у напрямку  $x$ , так і в напрямку  $y$ . Поле усередині резонатора найбільшою мірою сконцентровано поблизу загального фокуса дзеркал, тобто в центрі резонатора. Поверхні рівних фаз являють собою сферичні поверхні.

**Резонатори з довільними сферичними дзеркалами.** Це резонатори, що складаються з двох співвісних сферичних дзеркал радіусами  $R_1$  і  $R_2$  розташованих на відстані  $L$  друг від друга. Властивості таких резонаторів легко визначити, якщо знайдена відповідна конфокальна система, у якій дві синфазні поверхні збігаються з поверхнями дзеркал резонатора. Якщо резонатор утворений двома однаковими сферичними дзеркалами радіусами  $R_1 = R_2 = R$ , розташованими на відстані  $L$  друг від друга, то одержуємо, що довжина еквівалентного конфокального резонатора:

$$L_{\kappa} = \sqrt{L(2R - L)}$$

В узагальненому сферичному резонаторі частотне виродження мод звичайно зникає.

**Кільцевий резонатор.** Кільцевим називають відкритий резонатор, дзеркала якого забезпечують поширення електромагнітних хвиль по замкнутому контуру. В одне з плечей резонатора поміщають активний елемент, наприклад, газорозрядну трубку газового лазера. У кільцевому резонаторі може існувати стояча хвиля, утворена інтерференцією двох хвиль, що біжать у протилежних напрямках. Іноді режим стоячої хвилі, є енергетично менш вигідним, оскільки найбільш повна взаємодія

випромінювання з речовиною тут відбувається лише в пучностях світлового поля. У біжучої хвилі, поле в середньому більш однорідне, що дозволяє повніше використовувати активну речовину.

Крім того, якщо обертати кільцевий резонатор навколо осі, то довжина шляху для хвиль, що поширюються по напрямку і проти напрямку обертання, буде різною. Це може бути використане для виміру швидкості обертання і побудови лазерних гіроскопів.

**Складений резонатор.** Такий резонатор являє собою два (чи більш) зв'язаних між собою резонатора. Властивості такого резонатора аналогічні властивостям двох зв'язаних контурів. Складений резонатор можна використовувати для селекції аксіальних коливань. Додаткова спектральна селекція коливань у складеному резонаторі визначається тим, що найбільшою добротністю будуть володіти ті типи коливань, для яких умова резонансу задовольняється в кожній зі складових частин резонатора.

**Резонатор із бреггівським дзеркалом.** Іноді виникає необхідність плавно перебудувувати власну частоту резонатора і тим самим плавно змінювати частоту генерації лазера в межах контуру спектральної лінії активної речовини. Це можна здійснити, якщо одне з дзеркал зробити селективним, тобто з великим коефіцієнтом відображення у вузькому спектральному діапазоні. При цьому необхідно, щоб була можливість яким-небудь образом змінювати спектральний діапазон. Як селективний елемент можуть бути використані, наприклад, дифракційні ґратки, що встановлюють замість одного з дзеркал резонатора. Подібний резонатор називається резонатором із бреггівським дзеркалом. Дифракційні ґратки розташовуються під кутом до оптичної осі резонатора. Якщо на таке «дзеркало» падає плоска електромагнітна хвиля, що поширюється уздовж оптичної осі резонатора, то за рахунок дифракції на ґратках вона буде відбиватися назад точно в протилежному напрямку при виконанні умови Вульфа-Брегга:

$$b \sin \theta = m\lambda / 2,$$

де  $b$  — період дифракційних ґраток;  $\theta$  — кут між нормаллю до площини ґратки і оптичною віссю резонатора;  $m=1; 2; 3; \dots$  — порядок дифракції. Змінюючи кут  $\theta$ , можна змінювати довжину хвилі  $\lambda$ , що відповідає максимуму відбивної здатності дзеркала в напрямку оптичної осі. Такий резонатор застосовується, зокрема, для перебудови частоти генерації рідинних лазерів на органічних барвниках.

**Резонатор з розподіленим зворотним зв'язком.** Це особливий вид резонатора, у якому торцеві дзеркала взагалі можуть бути відсутніми, а позитивний зворотний зв'язок забезпечується розсіюванням на періодичних неоднорідностях, що утворюють строго періодичні ґратки. Важливо, щоб ці ґратки утворювалися просторовими періодичними змінами одного з параметрів, від якого залежать умови поширення світла. Це може бути коефіцієнт заломлення, коефіцієнт підсилення, товщина плівки чи кристала. Відстань  $b$  між неоднорідностями повинно задовольняти умові Вульфа – Брегга. Розподілений зворотний зв'язок використовується у деяких типах напівпровідникових лазерів.

### Умова стійкості резонатора:

$0 \leq g_1 g_2 \leq 1$  – умова стійкості резонатора, де  $g_1 = 1 - \frac{L}{R1}$ ,  $g_2 = 1 - \frac{L}{R2}$ .

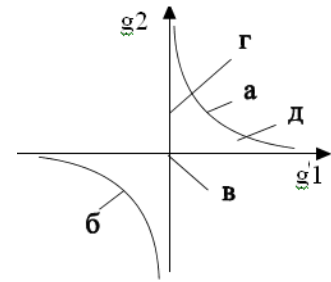
Намалюємо діаграму стійкості: Стійкий резонатор:

Недолік: 1. чим стійкіший, тим більше добротність мод, тобто їх багато;

2. заповнення резонатора полем – неоднакове:

в точці О поле зжате.

Переваги: полегшує юстування.



## 6. Моді відкритих оптичних резонаторів.

Мода резонатора – стац. конфігурація е/м поля, яка задовольняє р-ня Максвела і гран. умови.

поле –  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  – якщо хочемо записати поле, то записуємо його в такому вигляді:

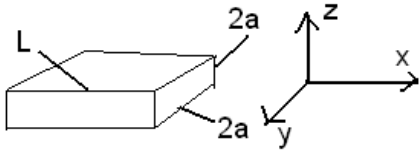
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 U(\vec{r}) \exp(i\omega_M t) - \text{стац. конфігурація.}$$

$\exp(i\omega_M t)$  – фазовий множник, який показує, що коливання гармонічні.

Т.я. відкритий резонатор, тому є втрати: - дифракційні. Р-ня (1) годиться, коли розглядаємо проміжок часу  $\Delta t$  великий порівняно з періодом коливань:  $\Delta t \gg T$ . Коли є втрати, то розподіл поля міняється з часом:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 U(\vec{r}) \exp\left(-\frac{t}{2\tau_p} + i\omega_M t\right), \quad i\omega_M t - \text{квазімода.}$$

$\tau_p$  – час життя фотона в резонаторі.



Знайдемо спектр. відстань між модами. Спочатку розглянемо закритий резонатор:

Запишемо, які можуть бути стоячі хвилі:

$$Lk_x = \pi l, \quad 2ak_y = \pi \mu, \quad 2ak_z = \pi \eta;$$

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \sqrt{\left(\frac{l}{L}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{2a}\right)^2}, \quad k = 2\pi\nu/c, \quad \text{показник заломлення} = 1$$

$l, \mu, \eta$  – цілі і можуть змінюватись.

Шавлов і Таунс припустили, що:

- відсутність бокових стінок не спотворює мод, а лише обмежує їх кількість і типи:

$l \gg \mu, \eta$ .

- існують моди, які мають маленькі проекції хв.векторів.

$$\text{Вважаємо, що } k_z = (l/L)^2 > k_x, k_y, \text{ тоді } \nu = \frac{c \cdot l}{2 \cdot L} \sqrt{1 + \frac{\mu^2 + \eta^2}{\left(\frac{L}{2a}\right)^2} \cdot \left(\frac{L}{l}\right)^2} \approx \frac{c}{2} \left( \frac{l}{L} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu^2 + \eta^2}{\left(\frac{L}{2a}\right)^2} \cdot \frac{\lambda}{2} \right)$$

$l$  – кількість напівхвиль. Це набір мод змінюється з шагом 1:

$\Delta l = 1$ ;  $\mu, \eta = \text{const.}$  – Це повздовжні моди – це моди, де поперечні індекси = 0:

$$\Delta \nu_l = \frac{c}{2L}. \text{ Оцінимо цю формулу: розглянемо резонатор } L=1\text{м, тоді } \Delta \nu_l = 150\text{МГц.}$$

Поперечні моди:  $\Delta \mu = 1$ ;  $l, \eta = \text{const.}$ ;  $\Delta \eta = 1$ ;  $\mu, l = \text{const.}$

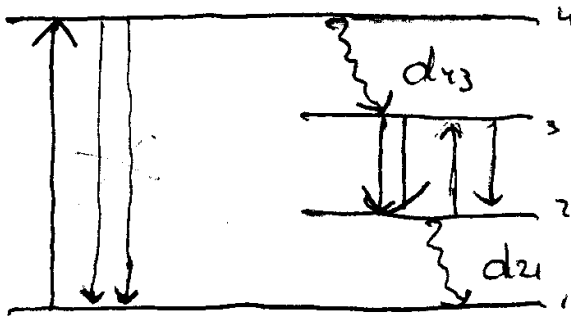
$$\Delta \nu_\mu = \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{L}{2a}\right)^2} \cdot \frac{\lambda}{2} \left[ \mu + 1 \right] + \mu^2$$

7. Зв'язок між інверсією населеності квантових рівнів і концентрацією фотонів у резонаторі лазера. Швидкісні рівняння.

Система швидкісних р-ндів для однофотонного лазера  
 Треба замалювати шиф. р-нд, які описують роботу лазера.

Постановка задачі:

Будемо розм. 4-но модовий лазер. Є мода, яка однорізно замовнює резонатор. Інші пар-ри не замовляють від координат (однор, точковий лазер) Р-нд замовляють від системи створ. інверсії. Будемо розм. 4-х рівневу систему.



Система ефективно працює, коли  $d_{43} \uparrow$  а  $d_{21} \downarrow$

1) Оскільки процес  $d_{43}$  дуже швидкий, то ці два процеси ігноруємо.

2)  $n_2 \approx 0$ , є ефективною спустошення.

3)  $n_4 \approx 0$ , оскільки  $d_{43}$  - ефективний процес. За таких надбачень, траси інакше перешагнутимо систему.

Стр1-Тут постановка задачі и приближения которые используются.

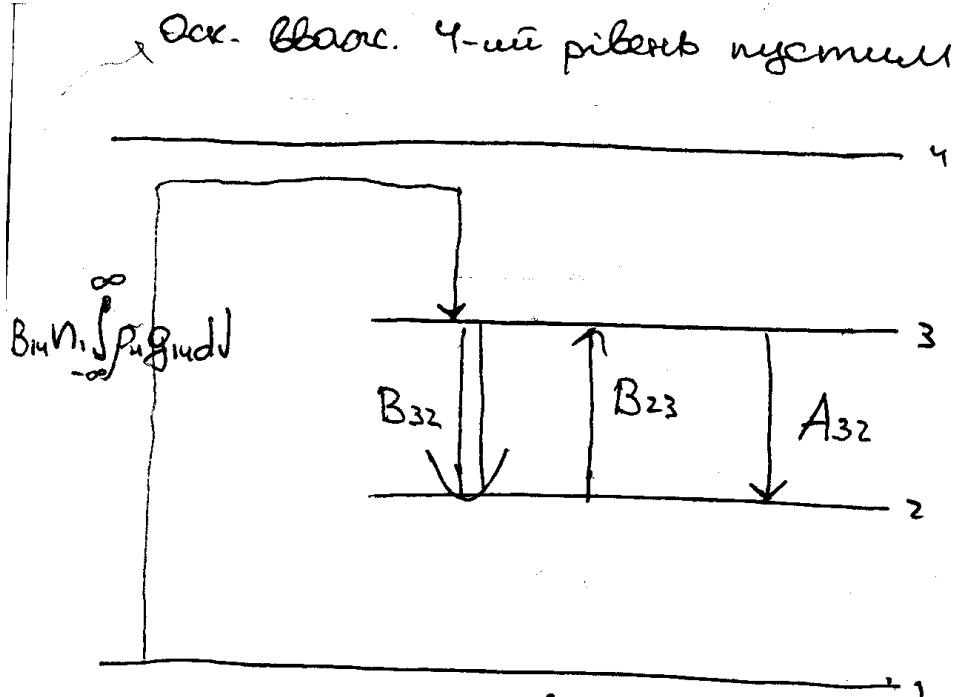
Стр2-Перерисовка схемы створення інверсії. Вводять формфактор и мощность накачки.

Стр3-Вводять поняття інверсія, спектральна енергія. Уравнение (1) в принципі уже показує зв'язок між інверсією і населеністю рівнів. Їго даліше расписывают и смотрят как изменяется концентрация фотонов резонаторе.

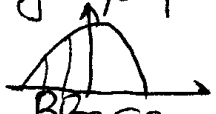
Стр4-Расписываем члены уравн(1) через коэф. Эйнштейна и спектральную объемную плотность мод. Проверяем как влияет спонтанное излучение. В самом низу стр. переходят к неким безразмерным величинам. Это просто типа для удобства и что бы сделать переменные универсальными. :  $W = P_n \tau_c \tau_p \tilde{V}$  - безрозмірна накачка,  $m = \tilde{m} \tau_c \tilde{V}$  - безрозмірна концентрація,  $n = \tilde{n} \tau_p \tilde{V}$  - безрозмірна інверсія,  $G = \tau_c / \tau_p$ ,  $\tau = t / \tau_c$ .

Стр5- вводят понятие накачки. В середине страницы безразмерные швидкісні

уравнения:  $\frac{dn}{dt} = W - nm - n$   
 $\frac{dm}{dt} = Gnm - Gm$



$g$ -фактор,  $\int g d\nu = 1$



Введем обозначения:  $P_H \equiv B_{14} n_1 \int_{-\infty}^{\infty} \rho_H g_{14} d\nu \approx B_{14} n \int \rho_H g_{14} d\nu$

$P_H$  - к-ть как мы накачиваем на внешний уровень в ор. объеме за ор. время

$$dn_3 = (n_1 B_{14} \int \rho_H g_{14} d\nu - n_3 B_{32} \int \rho_H g_{23} d\nu + n_2 B_{23} \int \rho_H g_{23} d\nu - n_3 A_{32}) dt \quad (1)$$

Потеряемость накачки:

$$P_H = n_1 B_{14} \int \rho_H g_{14} d\nu \approx n B_{14} \int \rho_H g_{14} d\nu \quad 1) \text{ и перешли элемент } \varphi\text{-ми (1)}$$

$$B_{23} = B_{32} \frac{g_3}{g_2}$$

~~и~~ элементы  $\varphi$ -ми (1) дадут взаимно-

$$- B_{32} (n_3 - n_2 \frac{g_3}{g_2}) \int \rho_H g_{23} d\nu$$

$$и \rightarrow n_3 A_{32} = \frac{n_3}{\tau_c}$$

Питання

$$\frac{dn_3}{dt} = P_H - B_{32} \left( n_3 - n_2 \frac{g_3}{g_2} \right) \int \rho_{\omega} g_{23} dV - \frac{n_3}{\tau_c}$$

↓  
різниця заселеності рівней за рах. кратності. Будемо наз. її інверсія.

Нехай  $n_2 \approx 0$  інверсію позначимо  $\tilde{n}$ , тоді  $n_3 \approx \tilde{n}$

$$\int \rho_{\omega} g_{23} dV = g_{23}(\nu_{\omega}) \int \rho dV$$

Якщо проінтегр. по частотам то отр. спектральну енергію:

$$\frac{d\tilde{n}}{dt} = P_H - B_{32} \tilde{n} g_{23} \tilde{m} h\nu - \frac{\tilde{n}}{\tau_c}$$

$\int \rho_{\omega} g_{23} dV = g_{23}(\nu_{\omega}) \cdot \tilde{m} h\nu$

Введемо позначення:  $\tilde{B} \equiv B_{32} g_{23} h\nu$  і отр. р-ція руху інверсії:

$$\frac{d\tilde{n}}{dt} = P_H - \tilde{B} \tilde{n} \tilde{m} - \frac{\tilde{n}}{\tau_c} \quad (1)$$

$\tilde{m}$  - концентр. фотонів в резонаторі, розширимо, як вона змінюється.

$$\frac{d\tilde{m}}{dt} = - \left( \frac{d\tilde{n}}{dt} \right)_{\text{вип. пер.}} = \tilde{B} \tilde{n} \tilde{m} - k \left( \frac{d\tilde{n}}{dt} \right)_{\text{спон. пер.}} - \frac{\tilde{m}}{\tau_p}$$

$k$  введемо для того, оск. не всі фотони погр. у моду.

$\tilde{m}/\tau_p$  - вихід фотонів з резонатор.  $\tau_p$  - ср. час життя фотонів в резонаторі.



$$k = \frac{1/V_L \text{ од'їем лазера}}{\left(\frac{8\pi V^2}{c^3}\right) \Delta\nu_{\text{лаз}}}$$

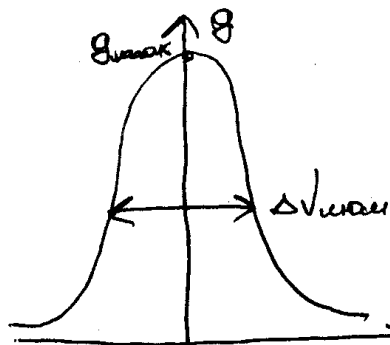
$$k = \frac{1}{\left(\frac{8\pi V^2}{c^3}\right) \Delta\nu_{\text{лаз}} V_L}$$

↪ спектральна од'їина зусишна мод.

$$-\left(\frac{d\tilde{n}}{dt}\right)_{\text{сп.пер}} = -\frac{\tilde{n}}{\tau_c} = \tilde{n} A_{32} = \tilde{n} B_{32} \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$$

$$-k \left(\frac{d\tilde{n}}{dt}\right)_{\text{сп.пер}} = \frac{1}{\frac{8\pi V^2}{c^3} \Delta\nu_{\text{лаз}} V_L} \tilde{n} B_{32} \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} =$$

$$= \frac{h\nu}{\Delta\nu_{\text{лаз}} V_L} \tilde{n} B_{32} \quad (\equiv)$$



$$\int g d\nu = g_{\text{max}} \Delta\nu_{\text{лаз}} = 1$$

$$\Delta\nu_{\text{лаз}} = \frac{1}{g_{\text{max}}} = \frac{1}{g(\nu_L)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{V_L} g_{23} B_{32} h\nu \tilde{n} = \tilde{B} \tilde{n} \frac{1}{V_L}$$

$$\frac{d\tilde{m}}{dt} = \tilde{B} \tilde{n} \left(\tilde{m} + \frac{1}{V_L}\right) - \frac{\tilde{m}}{\tau_p} \quad \begin{matrix} \text{Вспраме} \\ \text{(вплив фотонів)} \\ \text{з резонатору} \end{matrix} \quad (2)$$

↙ поправка для спонтанного випром.

Припустимо, що  $\tilde{m} = 0$  і при збільшенні інверсії  $\tilde{n} > 0$

$$\frac{d\tilde{m}}{dt} = \frac{\tilde{B} \tilde{n}}{V_L} > 0$$

Отже, погр. для спонт. випр. є досить важливою.

Перейдемо до безрозм. величин:

$$\tau = \frac{t}{\tau_c}; \quad t - \text{час, який іде } \psi$$

$$h = \tilde{n} \tilde{B} \tau_p; \quad m = \tilde{m} \tau_c \tilde{B}$$

$$W = P_H \tilde{B} \tau_p \tau_c - \text{накачка}$$

$$\frac{d\tilde{n}}{dt} = \frac{d\tilde{n}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tilde{n}}{d\tau} \frac{1}{\tau_c}$$

Домножимо:

$$\frac{d\tilde{n}}{dt} = -\tilde{B}\tilde{n}\tilde{m} - \frac{\tilde{n}}{\tau_c} + P_H \} B\tau_p$$

$$\frac{d\tilde{m}}{dt} = \tilde{B}\tilde{n}(\tilde{m} + \frac{1}{\tau_p}) - \frac{\tilde{m}}{\tau_p} \} B\tau_c$$

↖ нестимулює, тоді маємо

$$\frac{dn}{d\tau} = -nm - n + W$$

$$\frac{dm}{d\tau} = Gnm - Gm ; G = \frac{\tau_c}{\tau_p} \text{ деякий параметр}$$

Порогові умови генерації лазера та стаціонарний коєф. підсилення.

Трипускаємо, що є стаціон. стан (нар-ри пот-тів і інверсії не змін.)

~~$$\frac{dn}{d\tau} = 0$$~~

нестимулює  $\tau_c$  і (1) і (2) =  
ст-стаціон

$$1) \tilde{m} = 0$$

$$G_p - n\tilde{B} \tau_c \text{ (1) отр. } \tilde{P}_{st} = P_H \tau_c$$

$$2) \frac{dn}{d\tau} = 0 \Rightarrow$$

$$\tilde{P}_{st} = \frac{1}{B\tau_p} ; \tilde{m}_{st} = \frac{P_H - \frac{1}{\tau_p \tau_c B}}{1/\tau_p}$$

Побудуємо залежності від пот-ті накачування.

## 8. Порогові умови генерації лазера. Стаціонарний коефіцієнт підсилення.

Проаналізуємо друге рівняння Стаца-де-Марса:  $\frac{d\tilde{m}}{dt} = \tilde{B}\tilde{n}(\tilde{m} + \frac{1}{V_l}) - \frac{\tilde{m}}{\tau_p}$ , коли воно  $>0$ ,

то лазер генерує.  $\tilde{n} > \frac{\tilde{m}}{\tilde{m} + \frac{1}{V_l}} * \frac{1}{\tilde{B}\tau_p}$ , нехай  $\tilde{m}=0$ - похідна буде додатна, коли  $\tilde{n} > 0$ -

необхідна умова генерації, якщо  $\tilde{m}$  велике, тоді  $\tilde{n} > \frac{1}{\tilde{B}\tau_p}$  - достатня умова.

З'ясуємо фізичний зміст цих умов:

$$K^{(+)}\omega_{нор.} = K_\gamma \tilde{n} \tilde{B} \frac{1}{c} \mid \tilde{n} \equiv \tilde{n}_{нор.} \quad \square \quad \frac{1}{\tilde{B}\tau_p} \tilde{B} \frac{1}{c} = \frac{1}{\tau_p c} \Rightarrow K^{(+)}\omega_{нор.} = \frac{1}{\tau_p c};$$

$$\tau_p = \frac{1}{K_\gamma c}$$

підставимо  $\tau_p$ , отримаємо  $K^{(+)}\omega_{нор.} = K_\gamma$  коефіцієнт підсилення дорівнює

$$\text{коефіцієнту розподілених втрат: } K_\gamma = -\frac{1}{2L} \ln(R_1 R_2 - \frac{2}{N}).$$

му рівнянні.

$$\begin{cases} \tilde{m}_{см.} = 0; \tilde{n}_{см.} = P_n \tau_c; \\ \tilde{m}_{см.} \neq 0; \tilde{n}_{см.} = \frac{1}{\tilde{B}\tau_p}; \tilde{m}_{см.} = (P_n - \frac{\tilde{n}}{\tau_c}); \tilde{m}_{см.} = (P_n - \frac{1}{\tilde{B}\tau_p \tau_c}) \tau_p \end{cases}$$

Щоб була генерація, необхідна додатність пор.:

$$\begin{cases} P_{н.нор.} = \frac{1}{\tilde{B}\tau_p \tau_c} (W = 1) \\ n_{нор.} = \frac{1}{\tilde{B}\tau_p} = \tilde{n}_{см.} \end{cases} \quad \text{збільшуючи накачку досягли інверсії, але вона більше не}$$

зростає(стаціонарна інверсія в лазері дорівнює пороговій):

$$K^{(+)}\omega_{нор.} = K^{(+)}\omega_{см.} = K_\gamma$$

- 1) Стаціонарна інверсія дорівнює пороговій і не залежить від накачки;
- 2) Стаціонарний коефіцієнт підсилення дорівнює пороговому і не залежить від швидкості накачки;
- 3) Зобразимо графічно розв'язок. Як буде вести себе лазер при збільшенні накачки: Проаналізуємо, що буде тоді, коли лазер вийшов на стаціонарний режим генерації (похідна=0). знехтуємо спонтанною компонентою в другого

$$P_{н,пор.} = \frac{1}{\tau_c \tau_p \tilde{B}}$$

$$\begin{cases} -\tilde{B}\tilde{n}\tilde{m} - \frac{\tilde{n}}{\tau_p} + P_n = 0 \\ \tilde{B}\tilde{n}\tilde{m} - \frac{\tilde{m}}{\tau_p} = 0 \end{cases}$$

$$\hbar \omega \cdot B_{nm} \cdot \rho(\omega) \left( \frac{g_n}{g_m} N_m - N_n \right) = \frac{\omega}{Q}$$

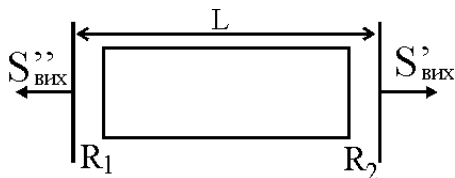
При умові маємо порогову умову самозбудження,  $\min$  (порогову) умову для інверсії населеності.

$$\frac{\pi^2 C^3 A_{nm}}{\omega^2} \left( N_m - \frac{g_m}{g_n} N_n \right) \cdot \rho(\omega) = \frac{\omega}{Q}$$

Енергія накачки, при якій досягається порогова умова для інверсії населеності називається пороговою енергією

накачування для генерації.

Порогова енергія накачування для генерації буде  $\min$  при максимальній добротності  $Q$ . Добротність  $Q$  буде максимальною при мінімальних втратах. Це визначається втратами в напівпрозорому дзеркалі, через яке виводиться випромінювання. Коефіцієнт відбиття дзеркала вибирається так, щоб він відповідав швидкості накачування, при якій досягається максимальна вихідна потужність. Моді, резонансні частоти яких розташовані близько до максимуму спектральних ліній, будуть самозбуджуватись. Лазер починає генерувати на аксіальній моді, частота якої найближча до максимуму спектральних ліній активної речовини. Енергія моди буде змінюватися по експоненціальному закону до моменту поки обмежеться ефективність насичення.



Якщо система накачки створює підсилення, що перевищує втрати, система повинна загенерувати. Стаціонарна генерація. Різниця населеностей постійна.

Тоді  $S_{вих} = W_{ген} - W_{втрат}$ . Генератор- як правило речовина в резонаторі.

$$S_{вих} = S'_{вих} + S''_{вих} - \text{„корисні” втрати. Тоді } dW_{ген} = B_{ij} U_{ij} h\nu_{ij} \left( n_i - \frac{g_i}{g_j} n_j \right) dV$$

елемент об'єму можна представити  $dV = \sigma d$  (2) тоді

$$dW_{ген} = B_{ij} U_{ij} h\nu_{ij} \left( n_i - \frac{g_i}{g_j} n_j \right) \sigma \cdot dz \quad (3)$$

Відомо що коефіцієнт підсилення визначається

$$K_{ij} = \frac{B_{ij} h\nu_{ij}}{\nu} \left( n_i - \frac{g_i}{g_j} n_j \right) \quad (4)$$

Перепишемо (3) з врахуванням (4)

$$dW_{ген} = \nu K_{ij} U_{ij} dV \quad (5)$$

## 9. Конкуренція мод у лазері. Причини виникнення багатомодової генерації.

Чому лазер може генерувати багато мод? Тому, що  $\Delta\nu_l \ll \Delta\nu_g$ , де  $\Delta\nu_l$  - міжмодова відстань.

По-різному відбуваються процеси в залежності від того чи спектральна лінія є однорідно розширеною або неоднорідно розширеною:

*Однорідна* - всі частинки мають однаковий контур.

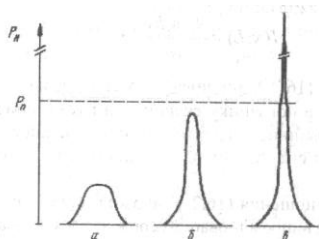
*Неоднорідна* - сумарний контур, який утворюється квантовими системами, в яких частинки мають різні контури.

Розглянемо спочатку **однорідний контур**:

Якщо рівень накачування забезпечує виконання порогової умови (

$K^{(+)}\omega_{пор.} = K^{(+)}\omega_{ст.} = K_\gamma$ ), то виникає генерація. При цьому підсилення в активному середовищі на частоті генерації стабілізується і при подальшому зростанні накачування не змінюється. У випадку однорідноуширеної смуги люмінесценції підсилення виявляється стабілізованим у межах всієї смуги. Тому, якщо генерація відбувається на моді резонатора, яка відповідає частоті максимуму смуги люмінесценції, то інші типи коливань у генерацію вийти не можуть. При цьому напівширина спектра генерації обумовлена шириною моди резонатора (якщо  $\Delta\nu_p > \Delta\nu_{c\Lambda}$ ) і не змінюється зі зростанням накачування.

На **рис** схематично показано розглянуті вище зміни спектра випромінювання активного елемента від рівня накачування для самої високодобротної моди: а)



люмінесценція, б) суперлюмінесценція, в) генерація (має місце одночастотна генерація, одномодова). Видно, що виникнення генерації характеризується появою дуже вузької лінії на фоні смуги спонтанного випромінювання. Збільшуючи накачку-збільшуємо висоту, досягаючи порогового значення-збільшуємо ще-буде підвищуватися

потужність, а контур вже не змінюється.

**Для неоднорідно уширеної смуги люмінесценції** стабілізація підсилення на частоті якої-небудь моди резонатора, взагалі кажучи, не призводить до стабілізації підсилення на інших модах.

Для частот, віддалених від моди генерації більш, як на однорідну ширину активних центрів, підсилення зростає зі збільшенням накачування до того часу, поки не виконуються порогові умови генерації на моді з цією частотою, після чого підсилення стабілізується і на цій частоті. Такий процес може продовжуватися до виходу в генерація мод резонатора, які лежать у межах всієї смуги люмінесценції робочого переходу (багаточастотна генерація). На **рис...а** показано поведінку коефіцієнта підсилення і спектра випромінювання для випадку, коли однорідна ширина активних

центрів менша міжмодового інтервалу. (це реалізується в He-Ne лазері). Другий граничний випадок на **рис ....б**,

однорідна ширина активних центрів перевищує міжмодовий інтервал, що характерно для скла активованого неодимом. Із збільшенням  $P_n$  буде збільшуватися к-сть мод. Багато мод за рахунок різних частинок. В He-неоновому лазері за рахунок ефекту Доплера. Генерація двох мод, симетрично розташованих відносно максимуму смуги люмінесценції, нестійка.

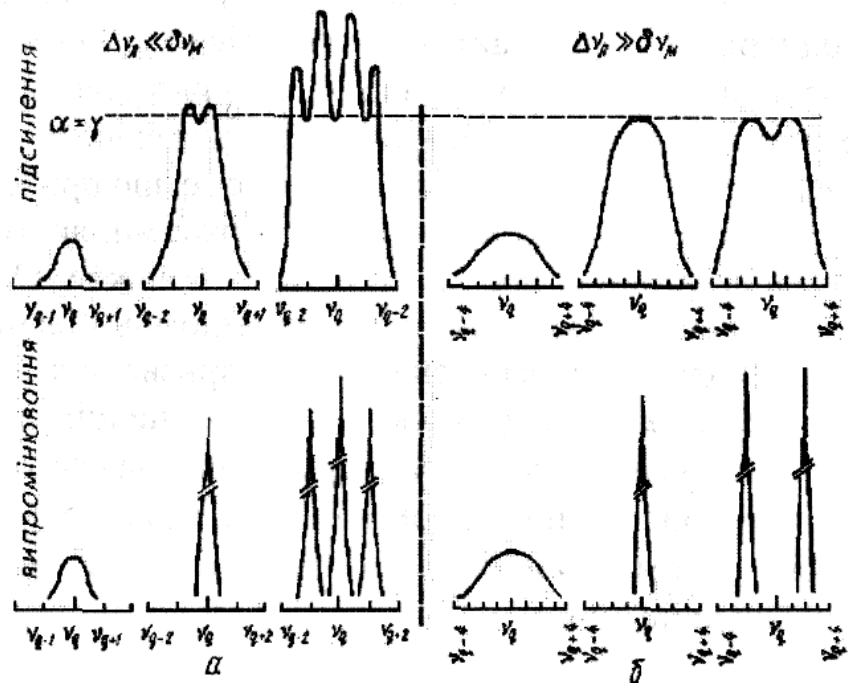
Більш потужна мода пригнічує слабшу.

Початкова різниця в потужності мод може обумовлюватися різними значеннями коефіцієнту відбиття від дзеркал і деякими іншими факторами.

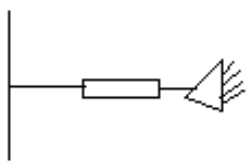
Тому відповідною зміною бази резонатора і коефіцієнтів відбиття від дзеркал можна придушити частину мод, підсилюючи при цьому інші. Таким чином можна керувати модовим складом генератора.

Оскільки стояча хвиля в резонаторі утворена двома зустрічними хвилями, то кожна з цих хвиль буде взаємодіяти з різними групами активних рухливих центрів. У випадку коли частота моди не збігається з частотою активного центру, то хвиля, що біжить вправо буде взаємодіяти з центрами, які рухаються вправо (і навпаки). Це призводить до виникнення двох провалів на контурі смуги люмінесценції, симетрично розташованих відносно її максимуму. Це явище отримало назву – ефект випалювання. Якщо частота моди збігається з частотою активного центру, то існує лише одна група центрів, які беруть участь у процесі підсилення. В цьому випадку вигорання відбувається тільки в центрі кривої підсилення-лембівський провал. Оскільки величина лембівського провалу дуже мала, то його положення фіксується досить точно. Тому його використовують для стабілізації частоти лазера.

За наявності декількох мод, їх вузли і пучності не збігаються і тому інверсна населеність у вузлах однієї моди є джерелом для другої. Це також є причиною виникнення багатомодової генерації.



## 10. Резонатори для одночастотної генерації та перестроювання частоти лазера.



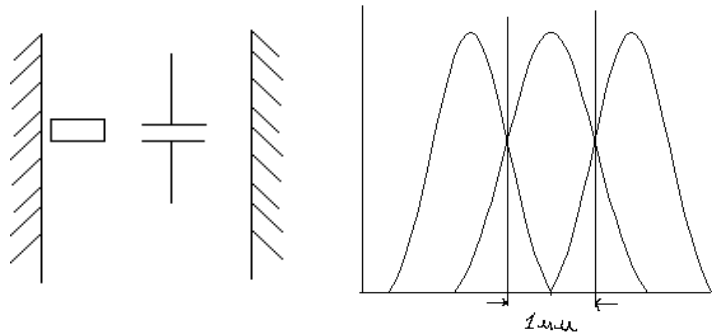
$$K_\gamma = f(V)$$

В лазер вводять додаткові елементи для того, щоб добитися одночастотної генерації

$\Delta V_{\text{нідс.}} = \Delta V_g \gg \Delta V_c$  Нам потрібно боротися з цим. Дифракційні втрати визначаються

числом Френеля:  $N = \frac{a^2}{L\lambda}$ , зменшуючи N, тобто поставивши діафрагму, ми можемо

виділити одну моду окремо:



можемо виділити основну моду.

Друга мода має вже два максимуми: Поставивши діафрагму шириною 1 мм. можемо виділити 1 моду. Щоб виділити в резонаторі

одну повздовжню моду, треба побороти співвідношення  $K_\gamma = f(V), \Delta V_g \gg \Delta V_c$

Нам потрібна зворотна умова  $\Delta V_c \gg \Delta V_{\text{нідс.}}$ . Ми знаємо:  $\Delta V_c = \frac{c}{2l} > \Delta V_{\text{нідс.}}$ , можемо

зміняти лише довжину резонатора, тобто  $L > \frac{c}{2\Delta V_{\text{нідс.}}}$ ,  $\Delta V_{\text{нідс.}} = 1,5$  Гц. Таким чином

$L < 10$  см (He-Ne). В неодимовому лазері  $\Delta V_{\text{нідс.}} = 150$  Гц,  $L = 1$  мм. Такі резонатори бувають лише у н/п лазерах. Тоді, цей метод виявляється неефективним. Як зняти таке протиріччя? Тобто, як створити такий резонатор, щоб відстань між модами була більша і резонатор довший?

Вводимо у резонатор *еталон Фабрі-Перо*:

Умова проходження випромінювання через еталон:

$$m\lambda_f = 2n_f d \cos \theta = m \frac{c}{\nu_f}, \text{ де } n_f - \text{показник заломлення}$$

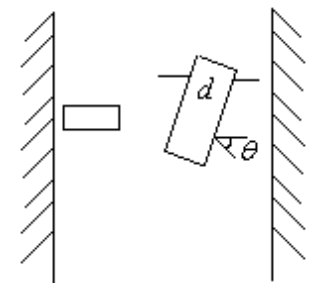
інтерферометра. Область дисперсії еталона:

$$\Delta \nu_f = m \frac{c}{2n_f d \cos \theta}. \text{ Отже, } \nu_f = m \Delta \nu_f \text{ роблячи інтерферометр тоненьким, ми}$$

збільшуємо інтервал між модами.

Які умови мають виконуватися, щоб лазер генерував, маючи в собі інтерферометр?

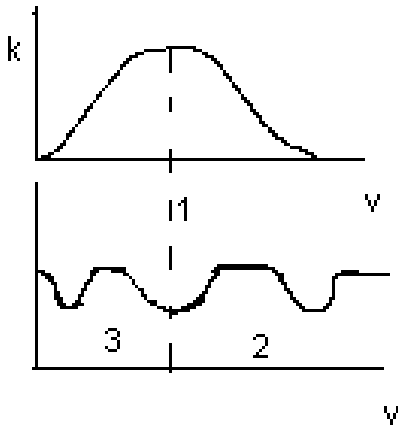
$$1) m \Delta \nu_f = l \Delta \nu_l; (\nu_f = \nu_l),$$



2) відстань  $v_f$  буде більша ніж  $v_{nidc}$ .  $\Delta v_f > \frac{1}{2} \Delta v_{nidc}$ ,

3)  $\delta v_f = \frac{c}{2n_f d \cos \theta} \pi \sqrt{R(1-R)} < \Delta v_l$ , апаратна функція інтерферометра.

Намалюємо коефіцієнт підсилення в залежності від частоти, а також функцію пропускання інтерферометра.



Першу умову досягти легко, другу умову можна забезпечити підбором товщини інтер-ра, третя умова досягається підбором коефіцієнта відбиття дзеркал. Коли контур підсилення дуже великий, інтерферометр не вирішує цих проблем. Як правило, в лазерах використовується попередня селекція мод.

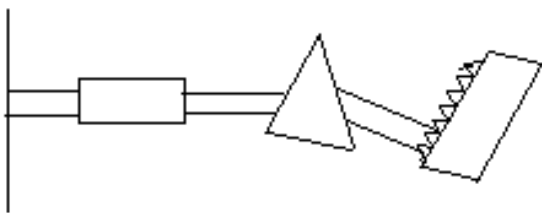
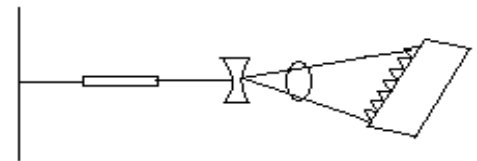
Резонатор з призмою. Суміщують з дзеркалом призму, наносячи на призму дзеркало: схема Літрова:

В багатьох випадках призми недостатньо тому, додають ґратку замість дзеркала.

р.з. ґратки:  $\frac{\lambda}{\delta \lambda} = mN$ , де N-кількість штрихів ґратки

(заг), m- порядок дифракції=1,2....

Нам треба розташувати на осі резонатора певний порядок дифракції для цього використовуємо телескопічну систему - тобто дві лінзи:

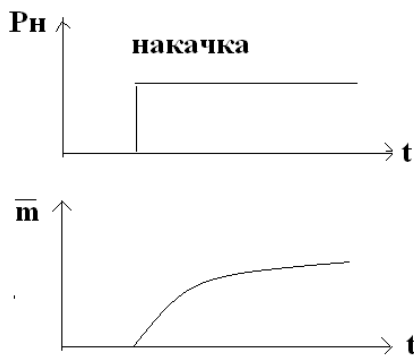


Але нам не потрібно розкладати пучок в двох напрямках, нам потрібно розглянути пучок в одному напрямку, для цього використовують схему:

Це призмове телескопічна система, призма стоїть під кутом Брюстера



# 11. Встановлення стаціонарного режиму роботи лазера. Вільна генерація.



Рівняння Стаці де Марса

$$\frac{dn}{dt} = w - n(m + 1)$$

$$\frac{dm}{dt} = Gm(n - 1)$$

$$\tau = \frac{t}{\tau_c} \quad G = \frac{\tau_c}{\tau_p}$$

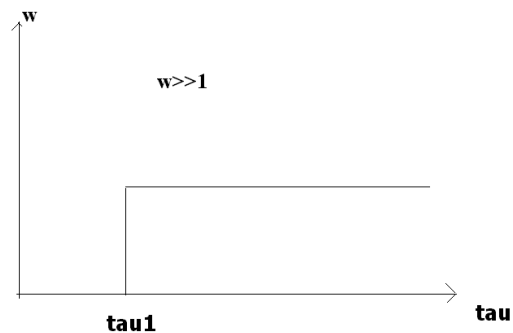
Де  $\tau_c$  – час життя частинки на рівні де відбуваються спонтанні переходи  $\tau_p$  – час життя фотона в резонаторі

$$\tilde{n}_{nor} = \tilde{n}_{cm} = \frac{1}{B\tau_p} \Rightarrow n_{nor} = n_{cm} = 1$$

$$P_{n,nor} = \frac{1}{\tilde{B}\tau_p\tau_c} \Rightarrow w = 1$$

$$\tilde{m}_{cm} = (P_n - P_{n,nor})\tau_p \Rightarrow m_{cm} = w - 1$$

$$n_{cm} = 1 \quad w_{nor} = 1 \quad m_{cm} = w - 1$$



Після подачі такої накачки, m невелике тому не впливає на рівень інверсії (немає генерації). Отже спочатку інверсія визначається тільки накачкою  $\frac{dn}{dt} = w$  яка зростає

$$\frac{dm}{m} = G(n - 1)d\tau = G(N\tau - 1)d\tau$$

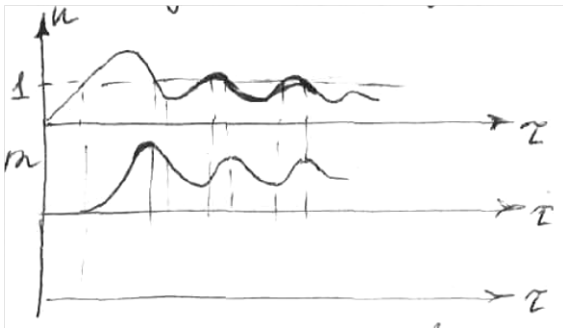
лінійно  $n = W\tau$ . Наростає лінійно інверсія. Для наростання концентрації фотонів

$$m = m_0 \exp\left(\frac{G\tau^2 w}{2}\right)$$

Концентрація фотонів через деякий час при досягненні деякого порогового рівня пне

стрімко експоненціально зростати. Накачка постійна, згодом це діє на саму інверсію.

При досягненні  $n_{nor} = 1$  починає розвиватися генерація по ехр, обмежує наростання інверсії Як тільки  $n=1$  спадає m.



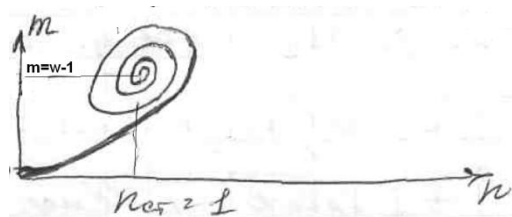
$m_{\text{макс}}$  при  $\frac{dm}{d\tau} = 0$  а це буде при  $n = 1$

з рівняння  $\frac{dm}{d\tau} = (n-1)m$

$$\frac{dm}{dn} = \frac{Gm(n-1)}{w - n(m+1)}$$

Тут немає часу затухання. Лазер виходить на стаціонарний режим генерації

### Вільна генерація



Рубіновий лазер ніколи не переходить в стаціонарний режим через деякі збурення, які відновлюють затухаючі коливання. Якщо лазер не переходить в стаціонарний режим то такий режим називається режимом вільної генерації.

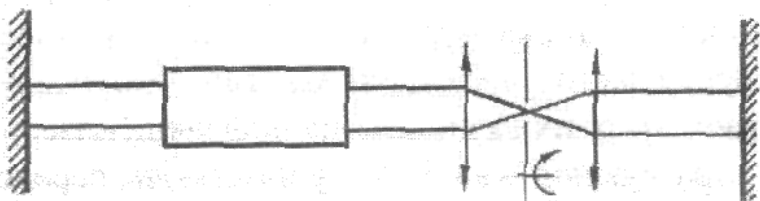
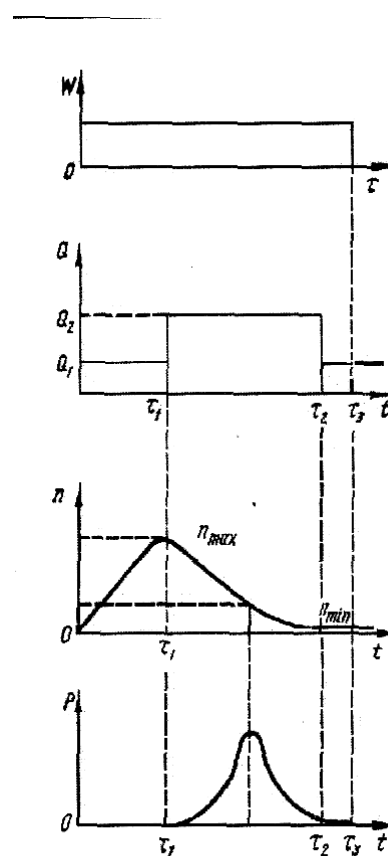
## 12. Лазери з модуляцією добротності резонатора. Методи модуляції добротності.

У режимі вільної генерації енергія та потужність окремого пічка не дуже великі – порядку 0,01-0,1 Дж і кількох кіловат. Підвищуючи накачування, можна лише незначно збільшити ці параметри випромінювання, вони визначаються перевищенням інверсної населенності порогового рівня. Величина ж перевищення цього рівня в режимі вільної генерації незначна. Причиною останнього є поле в резонаторі, яке наростає за короткий час, недостатній для досягнення високого перевищення порогового рівня інверсної населенності. Отже, якщо уникнути наростання поля в резонаторі, можна запасти в активному середовищі велику інверсну населенність. Саме це і покладено в основу функціонування лазерів з модуляцією добротності резонатора. (генерація гігантських імпульсів).

Принцип роботи лазера в режимі ГІ полягає в тому, що за допомогою відповідного пристрою, можна змінювати добротність резонатора в процесі дії імпульсу накачування. Процес генерації лазера з таким пристроєм полягає в тому, що на початку дії імпульсу накачування добротність резонатора низька. Тому поріг генерації, а отже і порогова інверсія населенності, великі. Це означає, що на метастабільному рівні накопичується частинок значно більше при тому ж накачуванні. Отримавши таким чином максимальну інверсію для низької добротності резонатора, миттєво включаємо пристрій, забезпечуючи високу добротність резонатора. В результаті виникає суттєве перевищення підсилення в лазері над втратами і випромінюється короткий і потужний імпульс світла:

Швидкість відкривання перемикача має бути набагато більшою від швидкості утворення лазерного імпульсу. У протилежному випадку буде генеруватися декілька імпульсів.

Методи модуляції добротності резонатора поділяються на *пасивні та активні*. До пасивних модулюючих пристроїв відносяться такі, що змінюють добротність  $\rho$  під дією самого поля випромінювання, яке збуджується в всередині резонатора, а до активних – такі, що змінюють величину втрат у резонаторі під дією зовнішнього керування сигналу. Дія пасивних вимикачів базується на здатності матеріалу змінювати свої оптичні властивості під впливом падаючого на них світла. Прості пасивні вимикачі – плівка з поглинаючого матеріалу, розташована в резонаторі лазера. В певний момент плівка випаровується, відкриваючи розміщене за нею дзеркало. При цьому втрати в резонаторі лазера різко падають і відбувається генерація гі. Недолік – незворотність процесів, що відбуваються.

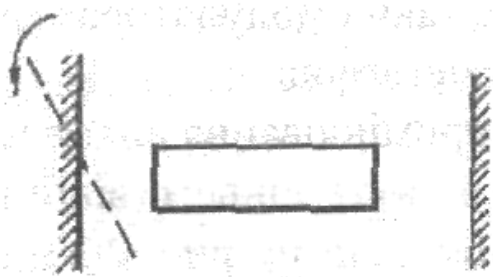


Тому частіше використовують активні методи модуляції добротності.

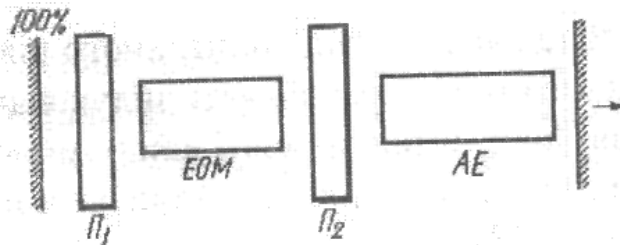
**Оптико-механічні** перемикачі засновано на принципі механічного відкриття глухого дзеркала резонатор у відповідний момент часу. Їх дія заснована на дифракції лазерного пучка на ультразвуковій хвилі.

**Дискові перемикачі** – металічний диск з одним чи декількома отворами або вирізом у вигляді сектора. Такий диск насаджується на вісь швидкісного двигуна і розташовується в резонаторі поблизу глухого дзеркала.

**Електрооптичні перемикачі.** Принцип їх дії заснований на використанні ефектів Покельса чи Керра.



(П1 та П2 – поляризатори, ЕОМ – електрооптичний модулятор, АЕ – активний елемент).

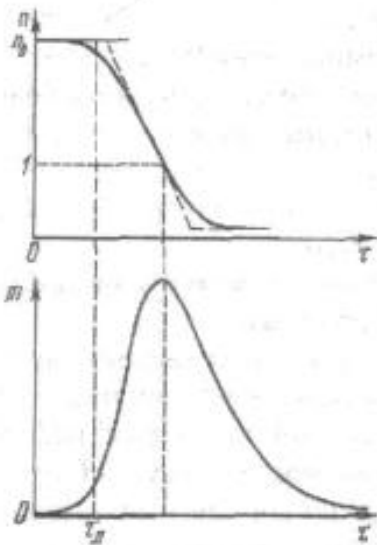


### 13. Режим генерації гігантських лазерних імпульсів. Зв'язок між параметрами резонатора, тривалістю та амплітудою імпульсів.

Режим генерації гігантських лазерних імпульсів спостерігається в лазерах з модуляцією добротності. Принцип роботи лазера в режимі ГІ полягає в тому, що за допомогою відповідного пристрою, можна змінювати добротність резонатора в процесі дії імпульсу накачування. Процес генерації лазера з таким пристроєм полягає в тому, що на початку дії імпульсу накачування добротність резонатора низька. Тому поріг генерації, а отже і порогова інверсія населеності, великі. Це означає, що на метастабільному рівні накопичується частинок значно більше при тому ж накачуванні. Отримавши таким чином максимальну інверсію для низької добротності резонатора, миттєво включаємо пристрій, забезпечуючи високу добротність резонатора. В результаті виникає суттєве перевищення підсилення в лазері над втратами і випромінюється короткий і потужний імпульс світла:

Розглянемо умови отримання ГІ й основні його характеристики:

почнемо з ідеалізованого випадку миттєвого вмикання добротності, коли перехід зі стану з малою добротністю резонатора до стану з високою добротністю резонатора відбувається миттєво



Тоді на момент часу  $\tau=0$  отримуємо активне середовище з високим коефіцієнтом підсилення, яке знаходиться в добротному резонаторі. Експеримент показує, що тривалість усіх інших процесів, які наступають за початковим моментом, набагато менша характерних часів зміни інверсної населеності під дією накачування і за рахунок спонтанних переходів.

Процес випромінювання ГІ описується вкороченою системою рівнянь  $\frac{1 + M(M+1)\delta^2/3}{1 + (M+1)^2\delta^2} = \frac{4M+1}{4M+2}$ ; Визначимо

тепер енергію ГІ:  $\frac{1}{n_0} = (1 - e^{-E})/E$ , звідси випливає, що

для  $n_0 \gg 1$  випромінювальна енергія збігається із

збереженою в середовищі, тобто:  $E \approx n_0$ , а це означає, що інверсною населеністю, яка залишилася можна знехтувати.

Тепер визначимо тривалість ГІ: швидкість наростання переднього фронту більша швидкості спадання заднього. Але оцінка тривалості ГІ, відношення його енергії до пікової потужності, дозволяє визначити нижню межу. Якщо  $n_0 \rightarrow \infty$ , то

$$E \rightarrow n, \tilde{m} \rightarrow Gn_0 \text{ і, отже, } \tau_u \rightarrow \frac{1}{G}. \text{ З ростом } n_0 \text{ крутизна залежності } n \text{ від } \tau$$

зростає. Чим вище  $n_0$ , тим швидше досягається максимальна величина  $\tilde{m}$ , але

скорочується фронт імпульсу. Це видно вже на лінійному етапі, де стала наростання поля залежить від  $n_o$  за законом  $[G n_o - 1]^{-1}$ , зменшуючись із ростом  $n_o$ . Спад імпульсу відбувається в умовах, коли відсутня інверсна населеність. На спаді імпульсу рівняння, яке описує поведінку випромінювання, набуває вигляду  $\frac{dm}{d\tau} = -Gm (1 - n_{ост})$ ,

де  $n_{ост}$  - інверсна населеність на кінці гігантського імпульсу. Таким чином, зі збільшенням  $n_o$  скорочується фронт гігантського імпульсу. Одночасно скорочується і тривалість спадання, так як зменшується залишкова інверсна населеність. Але, якщо тривалість фронту може скорочуватися необмежено, то тривалість спаду обмежена постійною часу  $G^{-1}$ , тобто часом життя фотонів у резонаторі, зумовленим втратами.

Визначимо тепер енергію ГІ:  $\frac{1}{n_o} = (1 - e^{-E}) / E$ , звідси випливає, що для  $n_o \gg 1$

випромінювальна енергія збігається із збереженою в середовищі, тобто:  $E \approx n_o$ , а це означає, що інверсною населеністю, яка залишилася можна знехтувати.

Тепер визначимо тривалість ГІ: швидкість наростання переднього фронту більша швидкості спадання заднього. Але оцінка тривалості ГІ, відношення його енергії до пікової потужності, дозволяє визначити нижню межу. Якщо  $n_o \rightarrow \infty$ , то

$E \rightarrow n, \tilde{m} \rightarrow Gn_o$ , отже,  $\tau_u \rightarrow \frac{1}{G}$ . З ростом  $n_o$  крутизна залежності  $n$  від  $\tau$

зростає. Чим вище  $n_o$ , тим швидше досягається максимальна величина  $\tilde{m}$ , але скорочується фронт імпульсу. Це видно вже на лінійному етапі, де стала наростання поля залежить від  $n_o$  за законом  $[G n_o - 1]^{-1}$ , зменшуючись із ростом  $n_o$ . Спад імпульсу відбувається в умовах, коли відсутня інверсна населеність. На спаді імпульсу рівняння, яке описує поведінку випромінювання, набуває вигляду  $\frac{dm}{d\tau} = -Gm (1 - n_{ост})$ , де

$n_{ост}$  - інверсна населеність на кінці гігантського імпульсу. Таким чином, зі

збільшенням  $n_o$  скорочується фронт гігантського імпульсу. Одночасно скорочується і тривалість спадання, так як зменшується залишкова інверсна населеність. Але, якщо тривалість фронту може скорочуватися необмежено, то тривалість спаду обмежена постійною часу  $G^{-1}$ , тобто часом життя фотонів у резонаторі, зумовленим втратами.

## 14. Лазери з синхронізацією мод

В режимі випромінення гігантського імпульсу його тривалість обмежена і не може бути меншою, ніж час життя фотонів у резонаторі. Але цей висновок справедливий для одного частотного гігантського імпульсу. Якщо ж встановити збудження у резонаторі багатьох повздовжніх мод і забезпечити між ними певні фазові співвідношення, то в сумі вони утворять імпульс, тривалість якого набагато менша від часу пробігу по резонатору.

Дійсно, в досить хорошому наближенні повздовжні моди знаходяться в резонаторі

еквідистантно.  $\lambda_l = \frac{2L}{l}$ ; ( $l$  - натуральне число) Час проходження резонатора

$$T = \Delta v^{-1} = 2L/c$$

Візьмемо якусь кількість мод і запишемо суму полів

$$E = \sum_{n=0}^{M-1} E_0 \cos(\omega_l + n\Delta\omega_l)t + \varphi_n \quad \text{де} \quad \Delta\omega_l = \frac{\pi c}{L}$$



Якщо  $\varphi_n$  для кожної моди своє, то це просто хаотичне поле. Нехай  $\varphi_n = const$  то отримаємо геометричну прогресію яку просумуємо:

$$I \propto |E|^2 = E_0^2 \frac{\sin^2(M \frac{\Delta\omega_l}{2} t)}{\sin^2(\frac{\Delta\omega_l}{2} t)} \quad \text{max коли} \quad \sin^2(\frac{\Delta\omega_l}{2} t) = 0$$

$$\frac{\Delta\omega_l}{2} \Delta t_{повт} = \pi$$

$$\Delta t_{повт} = \frac{1}{\Delta\omega_c} = \frac{2L}{c}$$

Період повторення фіксований, а тривалість залежить від кількості взятих мод, Треба щоб було багато мод, і потрібно їх фазувати (в одній фазі).

Для того беремо широкий контур підсилення (неоднорідний наприклад скло леговане) а тривалість імпульсу

$$\sin^2\left(\frac{M \Delta \omega_l}{2} t\right) = 0$$

$$\frac{M \Delta \omega_l}{2} \Delta t_{imn} = \pi$$

$$\Delta t_{imn} = \frac{1}{\Delta \nu_l M} = \frac{1}{\Delta \nu_{генерации}} = \frac{\Delta t_{повт}}{M}$$

отримуємо багато мод. Треба, щоб не конкурували моди.

Для забезпечення такого режиму генерації необхідно забезпечити ряд умов. Умова збудження великого числа мод і їх еквідистантність забезпечується використанням резонаторів, у яких немає паразитної селекції мод. У звичайному резонаторі (інтерферометр Фабрі-Перо)

паразитна селекція має місце (як правило треба ще враховувати ненульову товщину напівпрозорих дзеркал тощо). Резонатор без селекції мод можна побудувати наприклад так, як показано на рис. Завдяки скосу неактивних поверхонь дзеркал по відношенню осі резонатора під ктом 1-2 градуси і виготовленню активного елемента з торцями, зарізаними під кутом Брюстера. В такій системі виникає багатогодова генерація із спектральною шириною майже рівною напівширені смуги люмінесценції  $\Delta \nu$ . Але багатогодова генерація є необхідною, а не достатньою умовою для описаної генерації. Ще треба засинхронізувати моди. Цього можна досягнути як активними так і пасивними способами. Активні методи засновані на зовнішній дії на властивості резонатора (наприклад, модуляція втрат чи оптичної довжини з частотою  $\omega$ ). Пасивні – на використанні фототропних середовищ (фарбники тощо). Зупинимося на активних методах. Модуляція втрат як правило створюється акустичним методом. всередині резонатора на шляху променя розміщується елемент, прозорість якого змінюється в залежності від акустичних стоячих хвиль в ньому. Акустичні хвилі можна створювати за доп. п'єзокристалу. При модуляції оптичної довжини використовується той же принцип, що і у відповідному активному методі модуляції добротності. біля одного з дзеркал розміщують пластинку з такого ж матеріалу, що і саме дзеркало. Ця пластинка за допомогою п'єзоелемента може рухатися туди-сюди відносно поверхні. Але в деякі моменти вона настільки близько підходить до дзеркала, Що електро-магнітне поле проходить через межу їх розподілу. У будь-якому випадку частота модуляції повинна співпадати з різницею частот між модами:

$$\omega' = j \Delta \omega \quad (j\text{-натуральне число}).$$



## 15. Генерація другої оптичної гармоніки. Умова фазового синхронізму

Хвилі нелінійної поляризації виникають внаслідок взаємодії електромагнітних хвиль з матеріальним середовищем. В силу дисперсії середовища фазова швидкість перевипромінювальної хвилі  $E_{\omega_1+\omega_2}$  буде відрізнятися від фазової швидкості хвилі

поляризації  $P_{\omega_1+\omega_2}^H$ . Різниця фаз між цими двома хвилями дорівнює:

$\Delta\varphi = L(\kappa_{\omega_1+\omega_2} - (\kappa_{\omega_1} + \kappa_{\omega_2}))$ . Зі зміною шляху ця різниця фаз може привести як до підсилення перевипромінювальної хвилі, так і до її ослаблення. Таким чином, в нелінійному середовищі виконується енергообмін між вхідним і підсумковими хвилями, в міру їх розповсюдження через середовище. Для того, щоб хвилі накачування постійно передавали свою енергію пере випромінювальної хвилі від час проходження вздовж середовища необхідно, щоб у них різниця фазових швидкостей не змінювалась, зокрема була рівною нулю. Умова незмінності фаз між цими хвилями є:

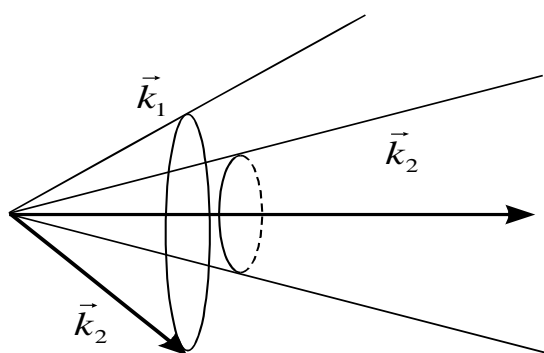
є:  $k_{\omega_1+\omega_2} = \kappa_{\omega_1} + \kappa_{\omega_2}$  – Це і є **умова фазового синхронізму**

Інтенсивність другої гармоніки залежить від інтенсивності накачування і розміру кристалу.  $I_{2\omega} = f(I_{\omega})$  Це означає що умова фазового синхронізму забезпечує синфазну взаємодію пере випромінювальних хвиль.

$$\begin{cases} \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 = \hbar\omega_3 \\ \hbar\vec{k}_1 + \hbar\vec{k}_2 = \hbar\vec{k}_3 \end{cases}$$

Внаслідок розсіяння із збуджуючого кванта утворюється 2 кванти меншої енергії. За законами збереження: , тому коли розсіяне світло розділене в конусі по частотам.

Візьмемо, що кванти з частотами  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  розповсюджуються в одному напрямку. Це реалізується за допомогою резонатора в параметричному генераторі.

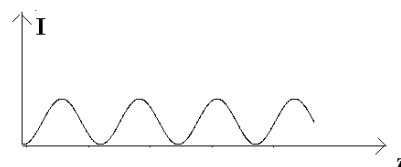
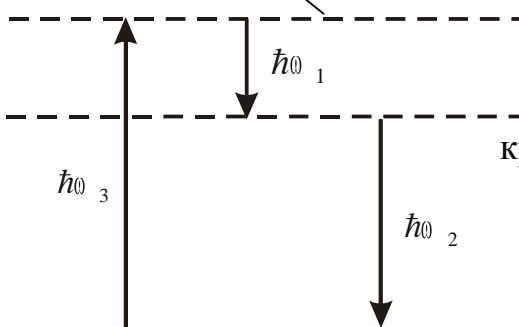


Генерує він тоді, коли квантів з частотами  $\omega_1$  і  $\omega_2$  народжується більше, ніж втрачається:

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 = \omega_k \\ \frac{\omega_1}{c} n_0(\omega_1) + \frac{\omega_2}{c} n_0(\omega_2) = \frac{\omega_k}{c} n_e(\omega_k) \end{cases}$$

$\omega_3 = \omega_H$  – накачка.

Щоб забезпечити виконання обох законів збереження використовуються анізотропні кристали. Розв'язок:



$$\omega_1 = \frac{\omega_H (n_0(\omega_2) - n_e(\omega_H, \theta))}{n_0(\omega_2) - n_0(\omega_1)}$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_H (n_e(\omega_H, \theta) - n_0(\omega_1))}{n_0(\omega_2) - n_0(\omega_1)} .$$

$$n_0(\omega_2) \geq n_0(\omega_1)$$

$$n_0(\omega_2) \geq n_0(\omega_H)$$

Розв'язок існує якщо:  $n_e(\omega_H) \geq n_0(\omega_1)$

При генерації другої гармоніки зникають 2 вихідних фотони монохроматичного випромінювання і народжується фотон вдвічі більшої частоти. Закон збереження

енергії  $2\hbar\omega_1 = \hbar\omega_3$  і закон збереження імпульсу  $2\hbar\vec{k}_1 = \hbar\vec{k}_3$

$$\Delta k = 0, \quad k_{\omega_1 + \omega_2} = k_{\omega_1} + k_{\omega_2} \quad \text{— умова фазового синхронізму}$$

Отже, показники заломлення мають співпадати, показники заломлення залежать від частоти, тому виконати таку умову важко. Але її можна виконати застосувавши кристал.

$$2k_{\omega} = k_{2\omega} \quad 2 \frac{2\pi}{\lambda_{\omega}} = \frac{2\pi}{\lambda_{2\omega}}$$

$$\lambda_{2\omega} = \frac{\lambda_{\omega}}{2}$$

$$\frac{2n_{\omega}}{\lambda_{\omega, \text{вакуумі}}} = \frac{1n_{2\omega}}{\lambda_{2\omega, \text{вакуум}}} \quad n_{\omega} = n_{2\omega}$$