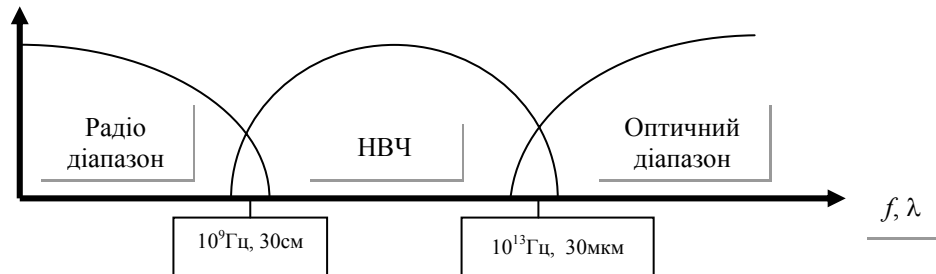


Лекція 1

Існують локаційні пристрої, які повинні працювати на $\lambda \sim \text{мм}$, $\nu \sim 100 \text{ ГГц}$. Оскільки $\lambda \sim 1 \text{ м}$ мають малу роздільну здатність, а оптичний діапазон швидко поглинаються постає необхідність вивчення НВЧ діапазону.

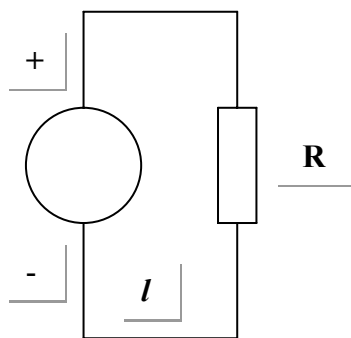


Перші НВЧ прилади виникли під час 2-ї світової війни при створенні РЛС. Застосування НВЧ електроніки:

1. Малопотужна електроніка: НВЧ телебачення – супутникове, мобільні телефони, комп'ютери.
2. Потужна електроніка: НВЧ - піч, РЛ – електроніка.

Фізичні причини виділення діапазону НВЧ

D – розмір об'єкта. При $D \ll \lambda$ - закон Кірхгофа, Ома, $D \gg \lambda$ - використовуються закони променевої оптики, $D \sim \lambda$ - НВЧ діапазон, диференційна інтерференція. Отже в НВЧ не можемо користуватись законами Кірхгофа і геометричної оптики. Закони Кірхгофа мають місце до якихось частот та швидкості розповсюдження інформації – швидкості світла.



Розглянемо малюнок. Даний ланцюг можна розрахувати за допомогою закону Ома, поки генератор – постійного струму. Розглянемо змінну напругу: електрон почне рух тоді, коли сигнал про потенціал дійде до нього: $t = l/c$. Якщо частота генератора така, що $t = T/2$, то в той час, як електрон рухається в одну сторону, генератор вже сформував зворотній потенціал, тобто існують струми в різних напрямках. Отже не можна використовувати звичайні закони.

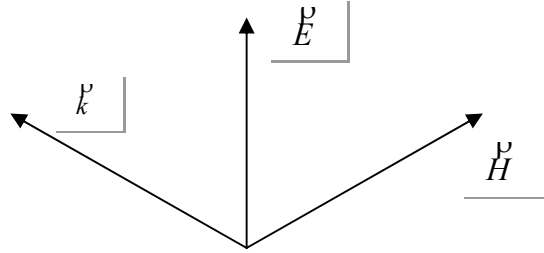
Описаний ефект – ефект запізнення.

1. $\frac{l}{c} = \frac{T}{2}$ на частоті $f = 10^{10} \text{ Гц} = 10 \text{ ГГц}$, $\lambda = 3 \text{ см}$ при таких f працюють РЛС. На частоті 10 ГГц при $l = 1,5 \text{ см}$ ніяких законів Кірхгофа, Ома вже застосовувати не можна.
2. *Виникнення випромінювання.* При змінному струмі можливе випромінювання, на його характеристики впливає відстань між дротами по відношенню до λ . 50 ГГц : $\sim 100 \text{ км}$. Тому зі збільшенням частоти основна енергія знаходиться поза провідником у вигляді поля.
3. При високій частоті – густина струму розподілена нерівномірно, електрони рухаються в скін шарі товщиною $\sim 1 \text{ мкм}$. Тому опір потрібно рахувати іншими законами.

Найбільш розвинутий *оптичний діапазон НВЧ*.

Рівняння Максвела 2-ого порядку описують всі електромагнітні явища:

$$(*) \begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$



де \vec{j} - густина струму, \vec{E} - напруженість ЕП, \vec{H} - напруженість МП, \vec{B} - індукція МП, \vec{D} - індукція ЕП, ρ - густина заряду, $j_{нов}$ - поверхневий струм.

Поки що монополь Дірака не виявлено.

Знаки розставлено відповідно до положення векторів \vec{E} , \vec{H} та напрямку розповсюдження хвилі \vec{k} - утворюють праву трійку. Це – не всі рівняння Максвела, у такій формі їх іноді називають рівняннями Герца.

Рівняння записано в СГСЕ. В системі СІ не буде c , 4π - це зручно, але в СІ опір вільного простору скінчений, що немає фізичного змісту.

Ці диференційні рівняння в частинних похідних другого порядку неоднорідні. Хоча з точки зору математики рівняння Максвела лінійні. Але лінійні рівняння ніколи не описують підсилення, генерації і т.д. Електромагнітні процеси нелінійні. Нелінійність обумовлюється речовиною, яку описують рівняння: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 E + \epsilon_2 E^2$. Народження електрону - позитивної пари в вакуумі – нелінійний процес. Крім цього можна генерувати гармоніки, 1 з 10^{50} фотонів зливаються і дають новий фотон.

$$J = \int j_{нов} ds, \quad j_{нов} \text{ (A/cm}^2\text{)}, \text{ поверхневий струм - } J = \int j_{нов} dy, \quad j_{нов} \text{ (A/cm)}.$$

Матеріальне рівняння – рівняння неперервності. $\frac{d\rho}{dt} = -\operatorname{div} \vec{j}$. Ніякого струму не може бути якщо заряд не виноситься.

div - що виноситься

rot - що залишається в середині.

$\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ - це рівняння в частинних похідних, тому дуже важливі граничні та початкові умови. Всі фізичні поля неперервні з точки зору фізики.

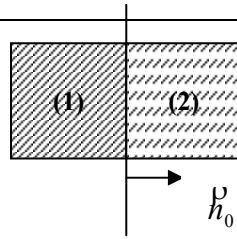
$$\text{Граничні умови: } E_t^{(1)} = E_t^{(2)}, \quad B_n^{(1)} = B_n^{(2)}.$$

$$\text{Магнітне поле всередині металу (має уявні розриви): } H_t^{(1)} - H_t^{(2)} = \frac{4\pi}{c} j_{нов}.$$

Не буває нульової товщини тому всередині металу буде плавний перехід, тому що поля неперервні.

В векторному вигляді:

$$\begin{cases} \vec{E}_1 \times \vec{n}_0 - \vec{E}_2 \times \vec{n}_0 = 0 \\ \vec{H}_1 \times \vec{n}_0 - \vec{H}_2 \times \vec{n}_0 = \frac{4\pi}{c} j_{\text{нов}} \\ \vec{D}_1 \vec{n}_0 - \vec{D}_2 \vec{n}_0 = 4\pi \rho \\ \vec{B}_1 \vec{n}_0 - \vec{B}_2 \vec{n}_0 = 0 \end{cases}$$



Якщо змінимо граничні умови, то все повністю змінюється. \vec{E}, \vec{H}, k - права трійка. Тому знак "-" в $\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

У рівняннях в комплексній формі цього немає. Мінус там може бути в 1-му і 2-му рівнянні в системі (*).

Граничні умови в металі: $j = \sigma E, \sigma = \infty, \text{щоб } j \neq 0, E \rightarrow \frac{0}{\infty}$.

Гранична умова в ідеальному металі: $E_t = 0, B_n = 0, H_n = 0$ (для нетензорного середовища). $\vec{H}_1 \times \vec{n}_0 = \frac{4\pi}{c} j_{\text{нов}}$ - для \forall металу.

Якщо присутнє H_t , то за рахунок сили Лоренца виникає струм. Для напівпровідника:

У застосуванні граничних умов головне те, що ми не розв'язуємо рівняння в середині матеріалу, а розв'язуємо рівняння лише на поверхні.

Лекція 2

Класифікація електромагнітних явищ

Існують загальні підходи для спрощення:

1. Рівняння стаціонарного електромагнітного поля. Іноколи можна розглядати постійні струми. При цьому в рівнянні (*) зникають похідні:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} & \text{div} \vec{B} &= 0 \\ \text{rot} \vec{E} &= 0 & \text{div} \vec{D} &= 4\pi\rho \end{aligned}$$

Приклад використання: розрахунок наводок.

2. Розглянемо систему рівнянь у **вакуумі**, де $\sigma = 0$. Рівняння магнітостатики:

$$\left\{ \begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \text{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \right., \quad \text{рівняння електростатики:} \quad \left\{ \begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= 0 \\ \text{div} \vec{D} &= 4\pi\rho \end{aligned} \right. \quad \text{Рівняння}$$

магнітостатики має місце і там, де $E \rightarrow 0$. Рівняння Максвелла нехвильове. Хвильовим воно стає в однорідному ізотропному середовищі. Звідси $E = -\nabla\varphi$ тобто $\text{div} \varepsilon \nabla\varphi = 4\pi\rho$ звідки одержуємо рівняння **Лапласа**:

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon} \quad (\text{з урахуванням заряду}), \quad \text{Пуасона: } \Delta\varphi = 0 \quad (\text{без}).$$

3. **Квазістатичне наближення**: $D/\lambda \ll 1$, D - розмір об'єкту. Тоді рівняння Максвелла спрощуються. Розглянемо метал: там просторові переходи дуже швидко зростають (швидке затухання) тобто частинними похідними можна знехтувати.
4. Для монохроматичного лінійного поля можна використати **метод комплексних амплітуд**: позбавляємося частинних похідних тобто спрощуємо рівняння Максвелла. Рівняння ЕМП в комплексній формі будемо розглядати лише для лінійних рівнянь, хоча існує метод і для нелінійних.

Розглянемо рівняння:
$$\left\{ \begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \text{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \right. \quad \text{Зробимо наступну}$$

заміну: $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} (h e^{i\omega t} + h^* e^{-i\omega t}) = \text{Re}(h e^{i\omega t}) = \text{Re}(h^* e^{-i\omega t})$, та аналогічно $j = \frac{1}{2} (j_0 e^{i\omega t} + j_0^* e^{-i\omega t})$. Підставивши отримаємо:

$$\text{rot}(h e^{i\omega t} + h^* e^{-i\omega t}) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{e} e^{i\omega t} + \vec{e}^* e^{-i\omega t}) + \frac{4\pi}{c} (j_0 e^{i\omega t} + j_0^* e^{-i\omega t}), \quad \text{прирівнявши}$$

коефіцієнти отримуємо:
$$\left\{ \begin{aligned} \text{rot} \vec{h} &= \frac{i\omega}{c} \vec{e} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0 \\ \text{rot} \vec{e} &= -\frac{i\omega}{c} \vec{h} \end{aligned} \right. \quad \text{- ми спростили рівняння. Для}$$

того, щоб записати лінійне ДР у комплексних амплітудах, потрібно: а) замість дійсних змінних записати комплексні змінні; б) замість похідних по часу треба записати $i\omega$. Для того щоб знайти розв'язок рівняння, потрібно розв'язати спрощене рівняння, а потім знайти реальну частину від одного з виразів: $H = \text{Re}(h e^{i\omega t})$ або $H = \text{Re}(h^* e^{-i\omega t})$. Часто рівняння записують з

урахуванням того, що хвильовий вектор $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, де $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$.

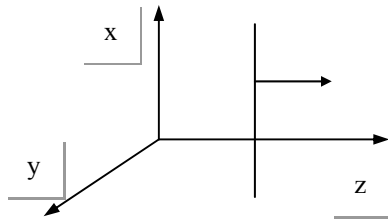
Надалі ми будемо працювати в комплексних амплітудах.

Було б зручно звести рівняння Максвелла до хвильових, але це можна зробити лише у деяких випадках, які і розглянемо.

Плоскі хвилі

Розглядатимемо плоскі хвилі в однорідному ізотропному середовищі.

Задача: знайти характеристики плоскої хвилі в такому середовищі.



Розв'язок:

1. Обираємо декартову систему координат;
2. Рівняння Максвелла: $\Delta U + k^2 \epsilon \mu U = 0$; де $U = \{H_x, H_y, \dots, E_z\}$. У плоскої хвилі на хвильовому фронті амплітуда і фаза однакова. Нехай хвиля розповсюджується в напрямку z , то $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$. Отримаємо

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0 \quad (\text{з } \Delta E_x + k^2 E_x = 0).$$

Розв'язок отриманого рівняння осцилятора: $E_x = C_1 e^{-ikz} + C_2 e^{ikz}$.

Перейдемо до справжньої компоненти поля: $E_x^{cnp} = \text{Re}(E_x e^{i\omega t}) = \text{Re}(C_1 e^{-ikz} e^{i\omega t}) = C_1 \cos(\omega t - kz)$ де $\omega t - kz = \text{Const}$ - рівняння хвильового фронту (фаза = Const). Цей фронт розповсюджується зліва направо. Якби ми взяли замість $C_1 e^{-ikz}$ компоненту $C_2 e^{ikz}$, то одержали б $\omega t + kz = \text{Const}$ - фронт, що рухається справа наліво.

Розглянемо $\text{rot} \vec{E} = -ik\mu \vec{H}_0$.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = j \frac{\partial E_x}{\partial z} = -ik\mu H_y = j(-ik\mu H_y).$$

$-ik\mu H_y = C_1(-iK)E_x$; $H_y = E_x \frac{K}{k\mu}$, тобто маємо дійсно праву трійку $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$.

Оскільки $K = k\sqrt{\epsilon\mu}$, то $E_x = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_y$, $\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \rho$ (*).

Таким чином у плоскій хвилі E і H залежні величини: якщо одне з них задане, то друге визначається лише середовищем (див. *). Це в СГСЕ, в інших системах по іншому. Наприклад, в СІ у вакуумі $\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377$ (Ом) - опір вільного простору (хвильовий опір простору).

Затухання електромагнітних хвиль (ЕМХ).

Нехай вздовж осі Z розповсюджується ЕМХ:

$$Ae^{-ikz} = Ae^{-ik\sqrt{\epsilon\mu}z} = Ae^{-i\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon\mu}z} \approx Ae^{-ik\sqrt{\epsilon}z}; \quad \text{тут} \quad \omega t - k\sqrt{\epsilon\mu}z = \text{Const}; \quad \omega t = k\sqrt{\epsilon\mu}z;$$

$$\frac{\omega}{k\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{\omega c}{\omega\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

Розглянемо в середовищі, де $\mu = 1$, (найрозповсюженіший випадок); $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$. Тоді

$$Ae^{-ikz} = Ae^{-ik\sqrt{\epsilon' - i\epsilon''}z} = Ae^{-i(K' - iK'')z} = \begin{bmatrix} K' = \text{Re } K \\ K'' = \text{Im } K \end{bmatrix} = Ae^{-K'z} e^{-K''z}.$$

З'явилася дійсна величина $-K''z$ в експоненті. Тобто кожна хвиля затухає.

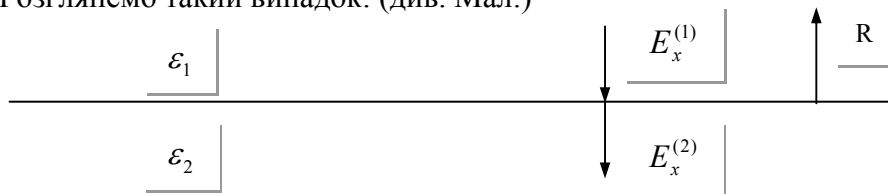
Лекція 3

Затухання у металі, скін – шар.

У попередньому пункті ми записали ЕМХ як $Ae^{ik\sqrt{\epsilon'-i\epsilon''}z}$, для металу $\epsilon = -\frac{4\pi\sigma}{\omega}$, тоді маємо $Ae^{ik\sqrt{\epsilon'-i\epsilon''}z} = Ae^{ik_0\sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\omega}}z}$. Оскільки $\sqrt{-i}\sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\omega}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\omega}}$, то $K' = \frac{\sqrt{2}}{2}, K'' = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\omega}}$. В металі хвиля затухає як $e^{-K''z} = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\omega}}z}$. Глибина, на якій хвиля спадає в e раз називається скін – шаром. $\frac{\omega}{c} \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\omega}} \delta = 1 \Rightarrow \delta = \frac{2c}{\sqrt{8\pi\sigma\omega}}$. Для постійного поля $\delta \rightarrow \infty$.

Перехід хвилі з одного середовища в інше.

Розглянемо такий випадок: (див. Мал.)



Це – гранична задача електродинаміки.

Для її розв'язку необхідно:

1. Розв'язати рівняння Максвела у кожному середовищі.
2. Прирівняти розв'язки на границі.
3. З отриманих алгебраїчних рівнянь одержати всі характеристики ЕМП.

Спочатку обираємо повну систему рівнянь Максвела, однак оскільки обидва середовища – однорідні ізотропні, можна використати векторне рівняння Максвела: $\Delta \vec{U} + k^2 \epsilon \mu \vec{U} = 0$.

Межа – пряма, тому обираємо декартову СК: $\Delta E_x + k^2 \epsilon \mu E_x = 0$. У даних середовищах буде:
$$\begin{cases} \Delta E_x^{(1)} + k^2 \epsilon_1 E_x^{(1)} = 0 \\ \Delta E_x^{(2)} + k^2 \epsilon_2 E_x^{(2)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x^{(1)} = Ae^{-ik\sqrt{\epsilon_1}z} \\ E_x^{(2)} = De^{-ik\sqrt{\epsilon_2}z} \end{cases}$$

Нехай $A \equiv 1$, тоді
$$\begin{cases} H_y^{(1)} = \sqrt{\epsilon_1} E_x^{(1)} = \sqrt{\epsilon_1} e^{-ik\sqrt{\epsilon_1}z} \\ H_y^{(2)} = D\sqrt{\epsilon_2} e^{-ik\sqrt{\epsilon_2}z} \end{cases}$$

Запишемо граничні умови:

$$\begin{cases} E_x^{(1)}|_{z=0} = E_x^{(2)}|_{z=0} \\ H_x^{(1)}|_{z=0} = H_x^{(2)}|_{z=0} \end{cases}$$

Підставивши одержимо: $\begin{cases} 1 = D \\ \sqrt{\epsilon_1} = \sqrt{\epsilon_2} D \end{cases}$ - система несумісна. Ми не врахували те, що існує також відбита хвиля у середовищі (1):

$E_x = R \cdot e^{ik\sqrt{\varepsilon_1}z}$; $H_y = \sqrt{\varepsilon_1} R \cdot e^{ik\sqrt{\varepsilon_1}z}$. При відбитті трійка векторів залишається правою, тому напрямок вектора \vec{H} змінюється, тому у виразі для H_y - мінус:

$$H_y^{(2)} = \sqrt{\varepsilon_1} e^{-ik\sqrt{\varepsilon_1}z} - \sqrt{\varepsilon_1} R \cdot e^{ik\sqrt{\varepsilon_1}z}.$$

Підставивши одержимо:

$$\begin{cases} 1 + R = D \\ \frac{1}{\rho_1}(1 - R) = \frac{D}{\rho_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \\ D = \frac{2\rho_2}{\rho_2 + \rho_1} \end{cases}$$

Таким чином, найбільша (повна) передача енергії в друге середовище при $\rho_2 = \rho_1$ - коефіцієнт відбиття $R = 0$. По аналогії з електротехнікою величини ρ називають опорами.

Лекція 4

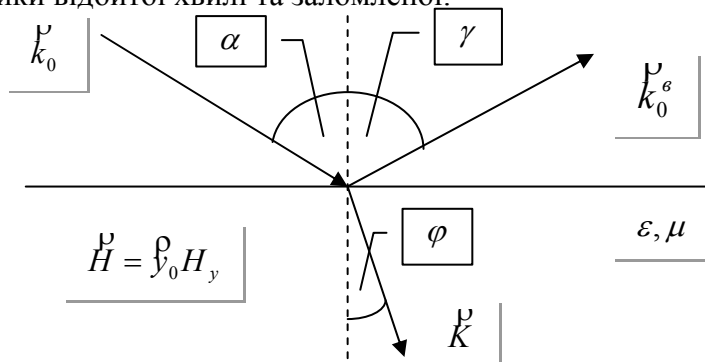
Узагальнена плоска хвиля.

Для рівняння $\Delta U + k^2 U = 0$ загальний розв'язок $e^{-ik\rho}$ (можна перевірити підстановкою). Таким чином хвиля розповсюджується в багатьох напрямках:

$e^{-ik\rho}$ - хвиля в напрямку \vec{k} .

e^{-ikz} - хвиля в напрямку \vec{z} .

Задача: Нехай хвиля падає під кутом α до поверхні середовища, знайти характеристики відбитої хвилі та заломленої.



Розв'язок: Вважаємо, що $\vec{H} = \vec{y}_0 H_y$. Раніше ми показали, що розв'язком рівнянь Максвелла є узагальнене рівняння хвилі. Тоді для даних хвиль:

$$H_y = \begin{cases} \text{над.} & e^{-ik_0 \rho} = e^{-i(k_{ox}x + k_{oy}y + k_{oz}z)} \Rightarrow e^{-i(k_{ox}x + k_{oz}z)} \\ \text{від.} & R \cdot e^{-ik_0^e \rho} = R \cdot e^{-i(k_{ox}^e x + k_{oz}^e z)} \\ \text{зал.} & D \cdot e^{-ik \rho} = D \cdot e^{-i(K_x x + K_z z)} \end{cases}$$

(ми розглянули плоску задачу в XOZ).

Гранична умова: $H_{yn} + H_{e} = H_{yt}|_{z=0}$. Тоді $e^{-ik_{ox}x} + R \cdot e^{-ik_{ox}^e x} = D \cdot e^{-iK_{ox}x}$, де $k_0 = \omega/c$; $k_0^e = \omega/c = k_0$; $K = k_0 \sqrt{\epsilon \mu}$; коефіцієнти D, R не повинні залежати від x . В цьому випадку $k_{ox} = k_{ox}^e = K_x$ (*). Тоді $1 + R = D$ (**).

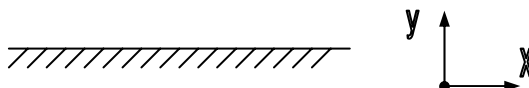
Виходячи з (*), маємо $\alpha = \gamma$. (очевидно якщо відкласти відрізки на малюнку). Аналогічно $\frac{k_0}{\sqrt{\epsilon}} \frac{1}{\sin \varphi} = \frac{k_0}{\sin \alpha}$.

$\alpha = \gamma$ - перший закон Снеліуса.

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \text{ - другий закон Снеліуса.}$$

Наближені граничні умови Леонтовича.

Розглянемо ідеальну металеву поверхню. Для неї граничні умови: $E_{\tau_1} = E_{\tau_2} = 0$; $B_{n_1} = B_{n_2} = 0$. Однак, тут $\sigma = \infty$, $\rho = 0$ - не враховувалися втрати в металі. Їх врахував Леонтович:



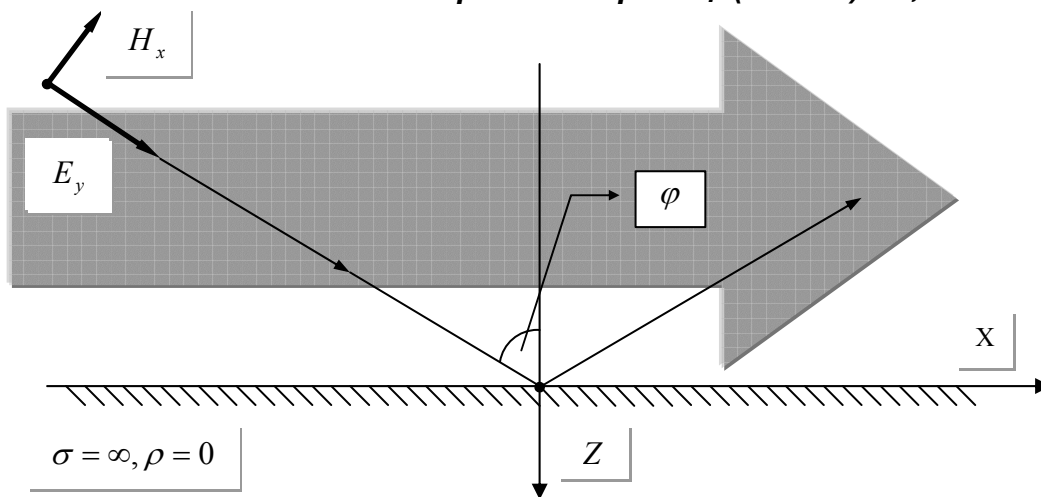
1. Нехай хвиля падає під кутом до поверхні. Леонтович вважав, що якби хвиля не падала, вона йде нормально до поверхні. Це можна пояснити тим, що в металі $\varepsilon \sim 10^6$, тому кут заломлення дуже малий: $\varphi \rightarrow 0$. Це наближена умова.

2. Леонтович вважав, що в металі розповсюджується звичайна електромагнітна хвиля, в якій $H_y = \frac{1}{\rho_M} E_x$, де

$$\rho = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{-i\omega}{4\pi\sigma}} = \rho' + i\rho'' . \text{ Ця рівність зберігається і на межі металу.}$$

У вакуумі $\frac{E_x}{H_y} = \rho$, при цьому $E_x \neq 0$; $E_x = \rho H_y$. Це і є наближена гранична умова.

Відбивання від ідеально провідної границі (метал) ТЕ, ТМ хвилі.



$$E_{yn} = e^{i\vec{k}_0 \vec{r}} = e^{i(k_x x + k_z z)} = e^{i(x \sin \varphi + z \cos \varphi)} - \text{падаюча хвиля (індекс "п")}. \text{ Обираємо}$$

знак "+" для $i\vec{k}_0 \vec{r}$. Тоді $E_{y\phi} = \dots = -e^{ik(-z \cos \varphi + x \sin \varphi)}$. Сумарне поле над металом

$$E_{\Sigma}|_{z < 0} = E_{yn} + E_{y\phi} = e^{ik(z \cos \varphi + x \sin \varphi)} - e^{ik(-z \cos \varphi + x \sin \varphi)} = e^{ikx \sin \varphi} (e^{ikz \cos \varphi} - e^{-ikz \cos \varphi}) =$$

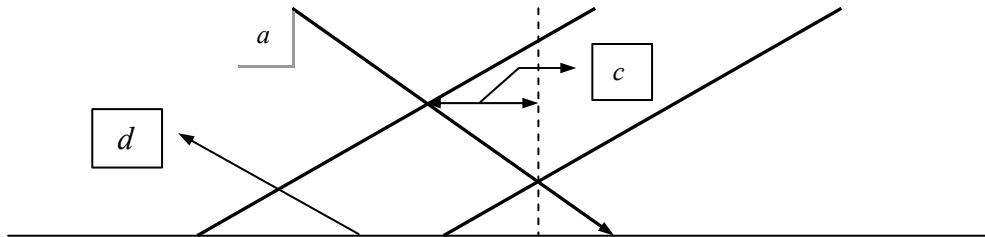
$$= e^{i(k \sin \varphi)x} 2i \sin(kz \cos \varphi) = A(z) e^{iKx}.$$

Таким чином, сумарна хвиля розповсюджується в напрямку \vec{k} . Отже в результаті розв'язку рівняння Максвелла ми маємо хвилю, що падає, і хвилю, що відбита. Сума цих полів дає нову хвилю, що розповсюджується вздовж \vec{k} і є сумою цих двох хвиль. Падаюча і відбита хвиля називаються *парціальними*; Сумарна зветься *неоднорідною плоскою хвилею*. Неоднорідна плоска хвиля теж є розв'язком рівняння Максвелла.

Властивості неоднорідної плоскої хвилі:

1. Ця хвиля має поздовжні компоненти полів: якщо з'являється а) $H \parallel x$ - H -хвиля (ТЕ); б) $E \parallel x$ - H -хвиля (ТМ).

2. Її амплітуда вздовж хвильового фронту змінюється: $A(z) = 2\text{Sink}z\text{Cos}\varphi$ - через це її називають неоднорідною. Плоскою називають тому, що фронт \perp до напрямку розповсюдження (\hat{x}).
3. $K = k\text{Sin}\varphi = \beta < k \Rightarrow$ довжина сумарної хвилі $>$ вихідних. Фазова швидкість цієї хвилі $> c$, оскільки в той час, коли вихідна хвиля a проходить, сумарна хвиля проходить $d > a$. За цей же час енергія переноситься на відстань $c < a$ - групова швидкість $< c$.



Висновок: Існують неоднорідні плоскі хвилі: $A(z)e^{-i\beta x}$; $\beta \neq k_0 = \frac{\omega}{c}$; $\beta < k_0$;

$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$. Існують компоненти E_x , H_x .

Лекція 5

Рівняння Максвела для Т, ТЕ, ТМ хвиль.

Для однорідного ізотропного середовища в декартовій СК:
 $\Delta E_x + k^2 E_x = 0, E_x = \{E_x \dots H_z\}$.

Т - хвиля розповсюджується зі швидкістю світла, $k = k_0 = \frac{\omega}{c}$. Для неї
 $E_x \sim e^{-ik_0 x}$. Підставимо в рівняння Максвела: $\Delta_{\perp} E_x - k_0^2 E_x + k_0^2 E_x = 0$;

оскільки $\Delta E_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x$, таким чином для Т - хвилі:
 $\Delta_{\perp} E_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x$, $-ik_0(-ik_0) = -k_0^2 E_x$

$\Delta_{\perp} E_x = 0$ - рівняння Лапласа. Для ТЕ та ТМ: $E_z \sim e^{-i\beta z}$, $\beta \neq k_0$ (хвиля розповсюджується в напрямку z). $\Delta_{\perp} E_z - \beta^2 E_z + k_0^2 E_z = 0$.

Маємо $\Delta_{\perp} E_z + (k^2 - \beta^2) E_z = 0$ - для ТЕ, ТМ.

Ми отримали систему рівнянь Максвела:

$$T: \Delta_{\perp} E_x = 0$$

$$E: \Delta_{\perp} E_z + (k^2 - \beta^2) E_z = 0$$

$$H: \Delta_{\perp} H_z + (k^2 - \beta^2) H_z = 0$$

$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

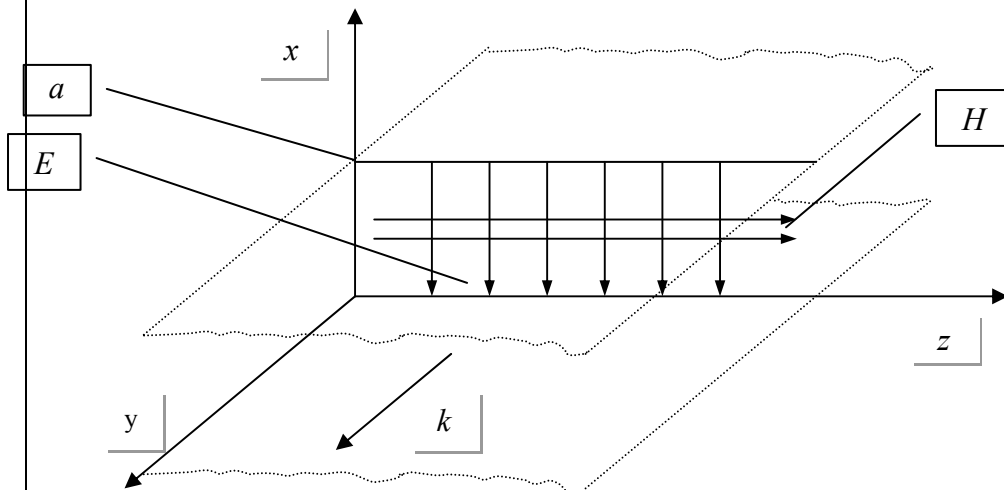
Т - хвиля існує там, де є розв'язок рівняння Лапласа (електрика). Ми знаємо, що рівнянням Лапласа описується електростатичне поле, наприклад у конденсаторі. Тому якщо існує електростатичне поле, то може існувати і Т - хвиля. Таким чином вона може існувати у конденсаторі, коаксіальному кабелі.

Оскільки одне рівняння і однакові граничні умови для електростатичного поля і Т - хвиля, то їх силові лінії співпадають.

Для того, щоб розв'язати задачу про хвилю, треба знайти:

1. Картину полів;
2. Сталу розповсюдження (швидкість);

Знайдемо ЕМ - поля між \parallel пластинами:



Тут може існувати Т – хвиля, бо існує розв’язок рівняння Лапласа для конденсатора. Картина полів зображена на малюнку, таким чином ми розв’язали задачу без викладок. А чи може у цій системі розповсюджуватися Е чи Н хвиля? Для того щоб відповісти на це запитання, необхідно розв’язати задачу (розрахувати картину полів і знайти β):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_z + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_z + \left(k^2 - \frac{\beta^2}{g^2}\right) E_z = 0 \\ E_z = 0 \Big|_{x=0}^{x=a} \end{cases}, \text{ будемо вважати, що } \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_z = 0. \text{ Ми}$$

-граничні умови у металі

отримали задачу Коші:
$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_z + g^2 E_z = 0 \\ E_z = 0 \Big|_{x=0}^{x=a} \end{cases} .$$
 Її розв’язок $E_z = A \text{Sin}g x + B \text{Cos}g x$.

$$E_z(x) = B = 0; E_z(a) = A \text{Sin}ga = 0 \Rightarrow g_n = \frac{\pi n}{a}.$$

$$E_z(x) = A \text{Sin} \frac{\pi n x}{a}. \quad g^2 = k^2 - \beta^2 = \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \Rightarrow \beta = \sqrt{k^2 - \frac{\pi^2 n^2}{a^2}} = \frac{2\pi}{\lambda_{xв}}.$$

довжина хвилі у хвилі у хвилеводі.

Очевидно, що $\beta = 0$ при $k = \frac{2\pi}{\lambda_{кр}} = \frac{\pi n}{a}$; тобто існує деяка критична довжина хвилі $\lambda_{кр}$ - така, що при $\lambda > \lambda_{кр}$ хвиля не буде розповсюджуватися у хвилеводі: при $\lambda < \lambda_{кр}$: $\beta^2 < 0$, β - уявне, тобто присутнє затухання.

$$\lambda_{кр} = \frac{2a}{n}; \text{ нижня } \lambda_{кр} = 2a.$$

Таким чином у хвилевід знайде Т – хвиля з будь-яким λ і Е – хвиля лише з $\lambda < \lambda_{кр} = 2a$. Можна отримати, що $\lambda_{xв} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}}$. Якщо зменшувати a , то

$\lambda_{xв}$ збільшується. Також змінюється $\lambda_{xв}$ при зміні λ_0 . Існує критична частота, коли $\lambda_{xв} = \infty$, тоді хвиля не розповсюджується. λ_0 - довжина Т – хвилі у вільному просторі $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}$, $\lambda_{xв} - \beta = \frac{2\pi}{\lambda_{xв}}$;

Таким чином, в результаті розв’язку рівняння Максвела ми знайшли лише одну компоненту хвилі (E_z). Однак для побудови картини необхідно знайти всі інші компоненти (у ТЕ та ТМ хвиль може бути не більше п’яти компонент). Скористаємося рівняннями Максвела: будемо виходити з $\text{rot} \vec{E} = -ik \vec{H}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -ikH_z \quad (1) & \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -ikE_z \quad (1') \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -ikH_y \quad (2) & \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -ikE_z \quad (2') \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -ikH_z \quad (3) & \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= -ikE_z \quad (3') \end{aligned}$$

Аналогічно для $rot \vec{H}$, таким чином, для неоднорідної хвилі ми отримали повний розв'язок: $E_z = \text{Re} \left(A \sin \frac{n\pi x}{a} e^{-i\beta z} e^{i\omega t} \right)$. Розглянемо пари:

$$\begin{aligned} (1)-(1'): & \begin{cases} -g^2 E_y = i\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} - ik \frac{\partial H_z}{\partial z} \\ -g^2 H_x = -ik \frac{\partial E_z}{\partial y} + i\beta \frac{\partial H_z}{\partial z} \end{cases} \\ (2)-(2'): & \begin{cases} -g^2 E_x = -i\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + ik \frac{\partial H_z}{\partial z} \\ -g^2 H_y = ik \frac{\partial E_z}{\partial x} + i\beta \frac{\partial H_z}{\partial z} \end{cases} \end{aligned}$$

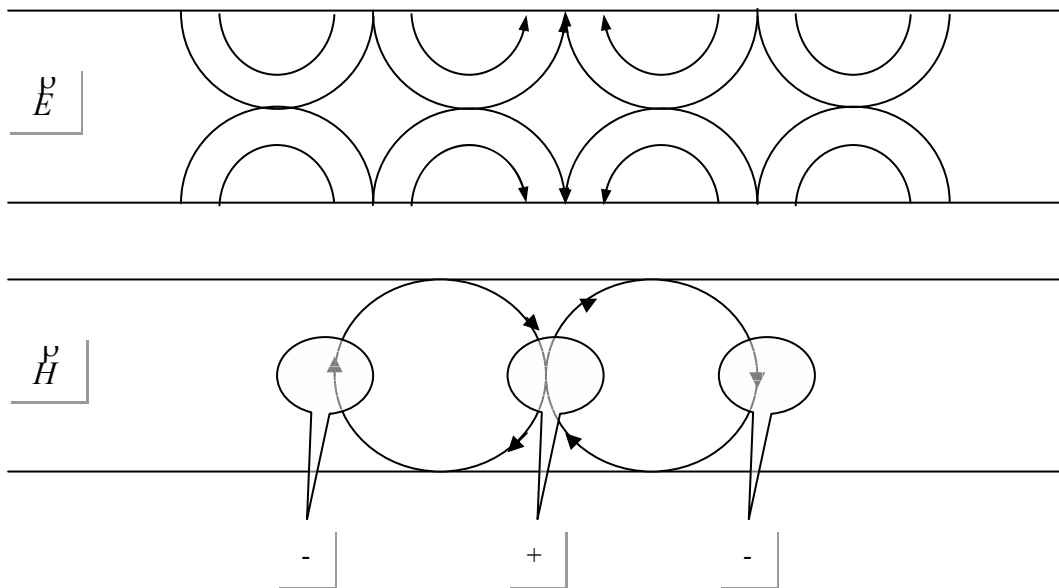
В нашій E – хвилі обов'язково $H_z = 0$,

$$E_x \sim \cos \frac{n\pi}{a} x$$

тоді з системи легко отримати інші компоненти: $E_y = 0$. Таким чином

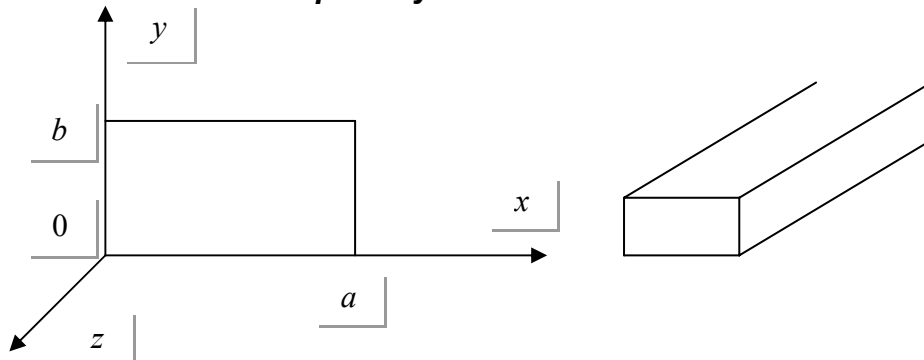
$$H_y \sim \cos \frac{n\pi}{a} x$$

маємо картину полів ТМ (E – хвилі). Для ТЕ – хвилі – аналогічно.



Лекція 6

Прямокутний хвильовід.



В середині металевого проводу не може бути електростатичних полів.

Можуть бути лише E, H . $\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + (k^2 - \beta^2)H_z = 0$. Граничні умови:

$$H_y|_{y=0,b} = 0; E_y|_{x=0,a} = 0; E_x|_{y=0,b} = 0; \text{ Нехай } H_z = H(x)Y(y); \text{ тоді}$$

$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + (k^2 - \beta^2)XY = 0; X''Y + Y''X + g^2 XY = 0 \quad | \div XY;$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -g^2; \frac{X''}{X} = -g_x^2; \frac{Y''}{Y} = -g_y^2 \Rightarrow g_x^2 + g_y^2 = g^2.$$

$$X = A \cdot \text{Cos}g_x x + B \cdot \text{Sin}g_x x; Y = C \cdot \text{Cos}g_y y + D \cdot \text{Sin}g_y y \text{ таким чином}$$

$$H_z = (A \cdot \text{Cos}g_x x + B \cdot \text{Sin}g_x x)(C \cdot \text{Cos}g_y y + D \cdot \text{Sin}g_y y). -g^2 E_y = i\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} - ik \frac{\partial H_z}{\partial x}.$$

$$\text{Тут } E_z = 0; \text{ звідси } \frac{\partial H_z}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \text{ Аналогічно } \frac{\partial H_z}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0.$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = (-g_x A \cdot \text{Cos}g_x x + g_x B \cdot \text{Sin}g_x x)(C \cdot \text{Cos}g_y y + D \cdot \text{Sin}g_y y)$$

$$x = 0: Bg_x(\dots) = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ за симетрією } D = 0.$$

$$x = a: -Ag_x \text{Sin}g_x a(\dots) = 0 \text{ отже } H_z = A' \text{Cos}g_x x \cdot \text{Cos}g_y y.$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} \Big|_{y=b} = A' \text{Cos}g_x x (-g_y \text{Sin}g_y b) = 0 \Rightarrow g_y = \frac{\pi m}{b}; g_x = \frac{\pi n}{a}.$$

$$\text{Розв'язок: } H_z = A \cdot \text{Cos} \frac{m\pi}{a} x \cdot \text{Cos} \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-i\beta z}; \text{ де } \beta = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2},$$

можна також знайти E_x, E_y, H_x, H_y , але $E_z = 0$.

Ця задача в частинних похідних має безліч розв'язків H_z^{mn} . Загальна хвиля буде $H_z = \sum_{m,n} H_z^{mn}$. Розглянемо один з розв'язків: $m = 1, n = 0$ -це хвиля

$$H_z^{10} \rightarrow H_{10}.$$

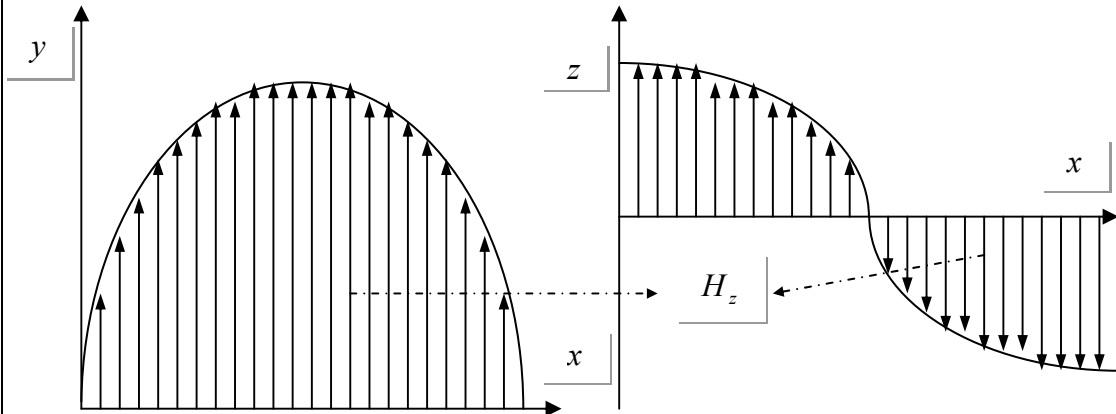
Отримаємо $H_z^{H_{10}} = \text{Cos} \frac{\pi}{a} x \cdot e^{-i\beta z}$. Інші компоненти:

$$H_x^{H_{10}} = i \frac{\lambda_{xp}}{\lambda_{x6}} \text{Sin} \frac{\pi}{a} x \cdot e^{-i\beta z}$$

$$E_y^{H_{10}} = i \frac{\lambda_{xp}}{\lambda_{x6}} \text{Sin} \frac{\pi}{a} x \cdot e^{-i\beta z}, \text{ тут } \lambda_{xp} = 2a.$$

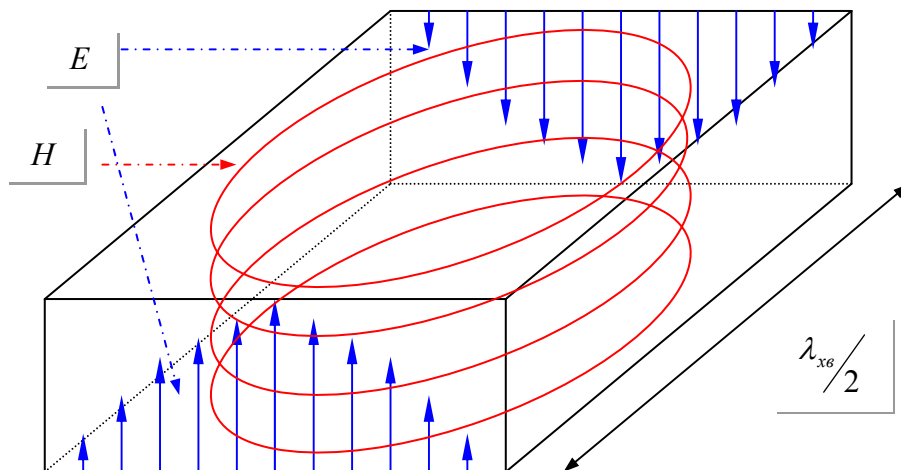
$$H_y^{H_{10}} = E_x^{H_{10}} = E_z = 0$$

У хвильоводі будуть розповсюджуватися хвилі з $\lambda < 2a$.

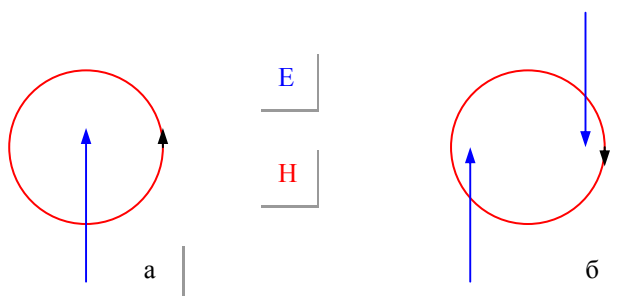


Визначимо фізичний зміст індексів: розглянемо E_y . $m=1$ - по x одна півхвиля. Таким чином, перший індекс m означає скільки варіацій має поле в напрямку x . Другий індекс n - вздовж y .

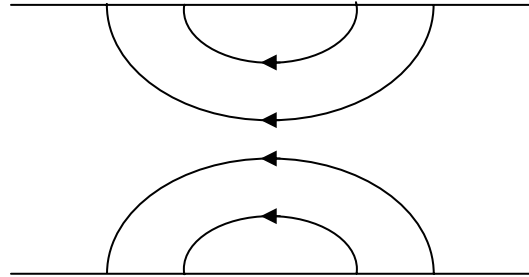
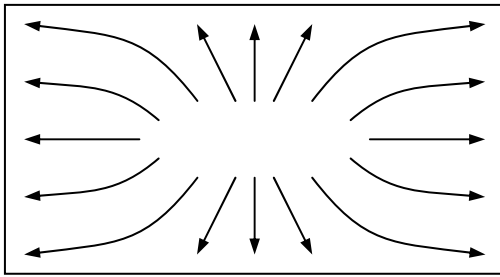
Розглянемо типову картину полів у хвильоводі для H_{10} :



Оскільки хвиля рухається з певною швидкістю, H зсунуте в часі на $T/4$ (в формулі це $i = \sqrt{-1}$), тому маємо картину не а) а б).



Для хвилі E_{11} :



Для хвилі E_{10} завдяки граничним умовам на стінках $E_z = 0$, а по певній координаті (там, де індекс = 0) це поле однорідне, тоді $E = 0$ буде всюди, тобто цієї хвилі не буде.

Лекція 7

Хвильовий опір хвильовода.

Для Т – хвилі: $\frac{E_t}{H_t} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 1$ (для вакууму). Для ТЕ, ТМ хвиль введення хвильового опору не є однозначною задачею, бо існує кілька компонент. Домовились відносити опір до поперечної компоненти: $z_{H_{01}} = \frac{E_y}{H_x} = \frac{\lambda_{x0}}{\lambda_0} > 1$.

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}}$$

Електродинамічні потенціали

Векторний і скалярний потенціали вводяться наступним чином: $\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$; $\vec{E} = -\text{grad} \Phi - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$. У першому рівнянні, очевидно, \vec{A} можна задавати з точністю до grad . При цьому рівняння Максвела:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \text{grad} \rho + \frac{4\pi}{c^2} \mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \\ \nabla^2 \vec{H} - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{\varepsilon} \text{rot} \vec{j} \end{aligned}$$

Тоді отримаємо рівняння для ЕД потенціалів:

$$\begin{cases} \Delta \vec{A} + k_0^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \Delta \Phi + k_0^2 \Phi = -4\pi \rho \end{cases}$$

Рівняння для Т, ТЕ, ТМ хвиль різні. Щоб звести їх до одного виду, використовуючи потенціали $E_z = (k^2 - \beta^2) \chi(x, y) e^{-i\beta z}$, $H_z = (k^2 - \beta^2) \Psi(x, y) e^{-i\beta z}$, де χ - електрична скалярна функція, Ψ - магнітна скалярна функція. Якщо для Т – хвилі $E_z = 0$ завжди, то $\chi \neq 0$, а E_z перетворюється в нуль завдяки $(k^2 - \beta^2) = 0$. Рівняння для χ, Ψ :

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} \chi + (k^2 - \beta^2) \chi &= 0 \\ \Delta_{\perp} \Psi + (k^2 - \beta^2) \Psi &= 0 \end{aligned}$$

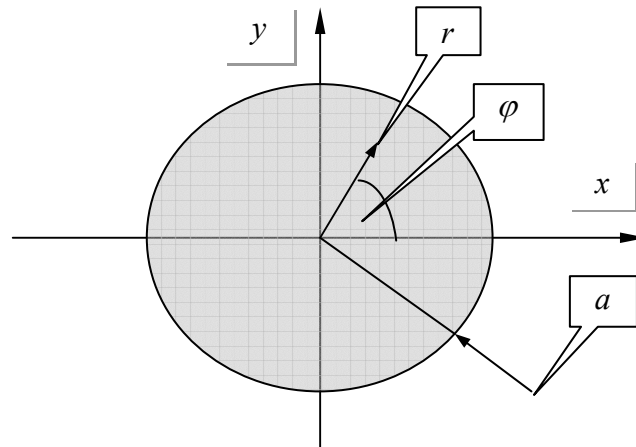
При цьому компоненти

$$\begin{aligned} E_x &= \left(-i\beta \frac{\partial \chi}{\partial x} - ik\mu \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) e^{-i\beta z} \\ H_y &= \left(-ik_0 \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial x} - i\beta \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) e^{-i\beta z} \end{aligned}$$

Інші компоненти можна отримати методом, який розглядався раніше. Для циліндричної СК: $E_{\varphi} = \left(ik\mu \frac{\partial \Psi}{\partial r} - i\beta \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right) e^{i\beta z}$.

Круглий хвильовід.

Очевидно, будемо користуватися циліндричною СК (r, φ, z) :



Шукатимемо хвилю H . Можна розв'язати $\Delta_{\perp} H_z + (k^2 - \beta^2) H_z = 0$, однак ми розв'яжемо рівняння для скалярних потенціалів: $\Delta_{\perp} \Psi + (k^2 - \beta^2) \Psi = 0$. З урахуванням вигляду оператора Лапласа у циліндричній системі координат одержимо: $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = -(k^2 - \beta^2) \Psi = -g^2 \Psi$.

Використаємо метод відокремлення змінних:

$$\Psi = R(r)\Phi(\varphi);$$

$$\ddot{R}\Phi + \frac{1}{r}\dot{R}\Phi + \frac{1}{r^2}\ddot{\Phi}R = -g^2 R\Phi \quad \Bigg| : \frac{R\Phi}{r^2}$$

$$r^2 \frac{\ddot{R}}{R} + r \frac{\dot{R}}{R} + \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} = -g^2 r^2. \text{ Звідки очевидно, що:}$$

а) $\frac{\Phi''}{\Phi} = -m^2 \Leftrightarrow \Phi'' + m^2 \Phi = 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = A \cdot \cos(m\varphi + \alpha)$, тут α - будь-який кут повороту, залежить лише від вибору координат (з'явився через симетрію задачі). Оберемо $\alpha = 0$.

б) $r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + r^2 g^2 = m^2$ - ЛДР зі змінними коефіцієнтами, тому звичайним шляхом його розв'язувати неможливо; потрібно застосувати спеціальні функції. Приведемо рівняння до стандартного вигляду: заміною $x = gr$ воно зводиться до рівняння Бесселя:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) R = 0.$$

Його розв'язками є циліндричні функції (функції Бесселя):

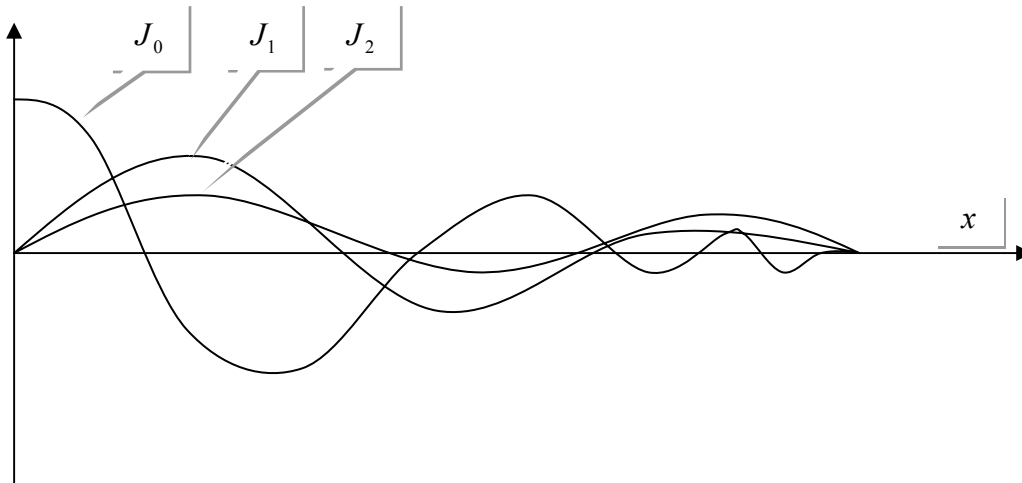
$$R_m(x) = A_1 J_m(x) + A_2 N_m(x) \quad (*)$$

Функції Неймана $N_m(0) \rightarrow \infty$, а тому очевидно, що $A_2 = 0$, тому що поле при $r = 0$ повинно бути скінченим. Таким чином, якщо в задачі існує точка $x = 0$, то розв'язок завжди береться у вигляді (*), де $A_2 = 0$, тобто у вигляді функції Бесселя: $R_m(x) = J_m(x)$.

Таким чином, $\Psi_m = A_m \cos m\varphi J_m(gr)$, $\Psi = \sum_m A_m \cos m\varphi J_m(gr)$.

Скористаємося граничними умовами. Оскільки $H_z = g^2 \Psi(x, y)$; а $E_\varphi(a) = 0$; то можна записати: $E_\varphi = -ik\mu \frac{1}{g^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} = ik\mu \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial \Psi(a)}{\partial r} = 0$. Отже, $J'_m(ga) = 0$ - це є умова для визначення g . Корені цього рівняння аналітично не отримуються, але їх можна знайти чисельно:

x_{01}	x_{02}	x_{03}	...
x_{11}	x_{12}	x_{13}	...
x_{21}	x_{22}	x_{23}	...
...



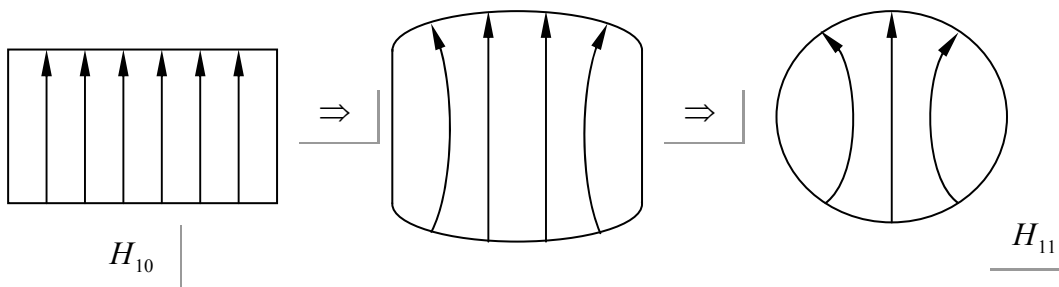
$g_{mn} a = x_{mn}$, де m - номер хвилі, n - номер рядку.

$\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}$	1	2
0	3.83	-
1	1.84	-

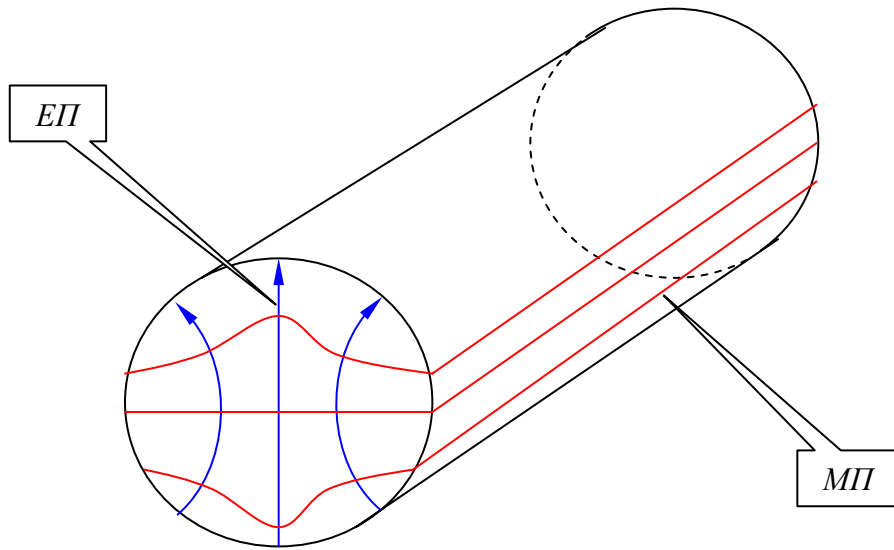
Отже, $\beta_{mn}^2 = k^2 - g_{mn}^2$. Таким чином, для хвилі H_{01} : $g_{01} = \frac{3.83}{a}$. Критична довжина хвилі у хвилеводі визначається з умови $\beta = 0 \Rightarrow k_{кр}^2 - g^2 = 0 \Rightarrow k_{кр} = \frac{2\pi}{\lambda_{кр}} = g \Rightarrow k_{кр}^{01} = \frac{2\pi a}{3.83} = 1.64a$. Аналогічно

$$H_{11} : \lambda_{кр}^{11} = \frac{2\pi a}{1.84} = 3.41a.$$

Тепер знайдемо картину хвиль. Для цього скористаємося топологічними перетвореннями:



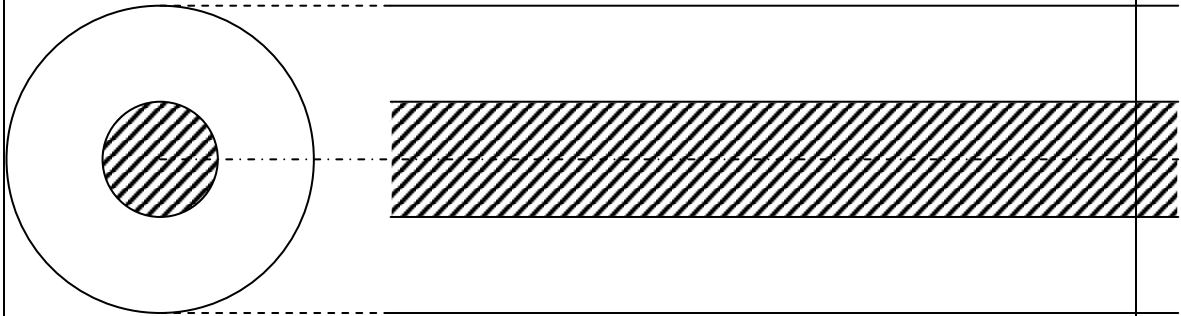
Перетворюючи H_{10} в декартову СК, одержали H_{11} в циліндричній СК.



Перший індекс – змінна по φ , другий – змінна по r . Таким чином у круглому хвильоводі “головною”, “найкращою” є хвиля H_{11} (в той час як у квадратному - H_{10}).

Лекція 8

Коаксіальна лінія.



Тут можуть розповсюджуватись хвилі Т (бо тут можна утворити конденсатор), ТЕ, ТМ. $\Delta_{\perp} \Psi = 0$, $\Delta_{\perp} U = 0$, $\Delta_{\perp} E_{\rho} = 0$.

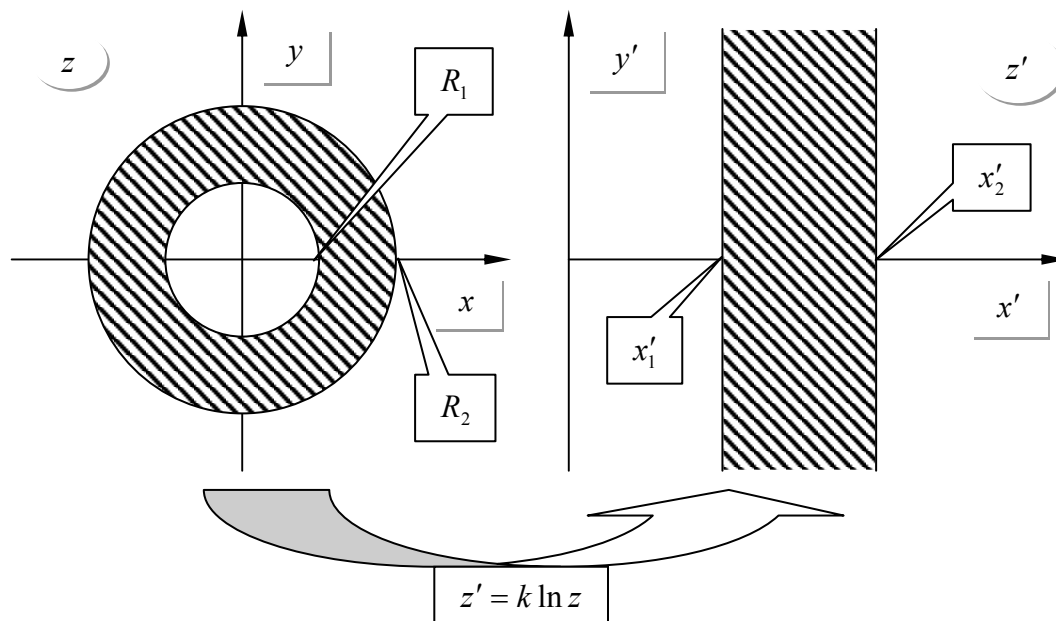
$$\Delta_{\perp} H_z + (k^2 - \beta^2) H_z = 0 \quad - \text{TE}$$

$$\Delta_{\perp} E_z + (k^2 - \beta^2) E_z = 0 \quad - \text{TM}$$

Розглянемо хвилю Т. Нам необхідно розв'язати рівняння $\Delta_{\perp} U = 0$. Зробимо це методом конформних відображень. Його можна застосувати для аналітичних функцій (тих, що задовольняють рівнянню Лапласа), яким і є поле Т-хвиль.

Для того, щоб скористатись методом КВ, необхідно:

1. Знайти відображення, яке переводить нашу область, де існує ЕМ – поле, у плоский конденсатор;
2. Розв'язати рівняння Лапласа у плоскому конденсаторі;
3. Зворотнім конформним перетворенням знов перейти в нашу область – це і буде розв'язок задачі:



Метод конформних відображень можна застосувати для Т – хвилі, бо вона є розв'язком рівняння Лапласа: $\Delta U = 0$, $\nabla_{\perp}^2 U = 0$. Доведемо, що відображення $z' = k \ln z$ перетворює циліндричний конденсатор в плоский: $z' = x' + iy'$,

$z' = k \ln(x + iy) = k \ln(\rho e^{i\varphi}) = k \ln \rho + ki\varphi$, тобто $x' = k \ln \rho$, $y' = k\varphi$. Таким чином, якщо $\rho = Const \Rightarrow x' = Const$. $\rho = R_1 \Rightarrow x'_1 = k \ln R_1$, $\rho = R_2 \Rightarrow x'_2 = k \ln R_2$, $\varphi = \forall \Rightarrow y' = \forall$.

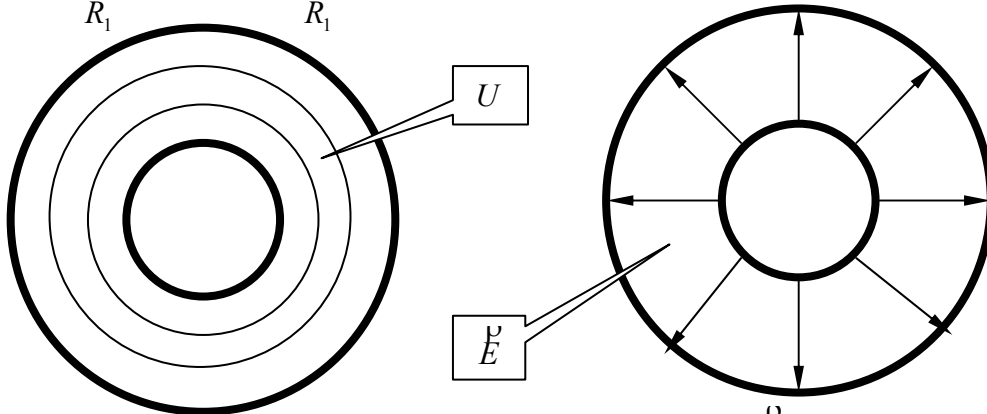
Таким чином, можна перетворити межу циліндричної області в межу плоскої. Тому й область z перетворюється в область z' . Розв'язок задачі в плоскому конденсаторі: $\begin{cases} \Delta_{\perp} U = 0 \\ U(x = x_1) = U_1; \quad U(x = x_2) = U_2; \end{cases}$ має вигляд:

$U = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{x'_2 - x'_1}(x' - x'_1)$. Поклавши $U_1 = 0$ (скориставшись тим, що потенціал

визначається з точністю до константи), маємо: $U = \frac{U_2}{x'_2 - x'_1}(x' - x'_1)$.

Скориставшись зворотнім перетворенням, одержимо:

$$U = \frac{U_2}{k \ln \frac{R_2}{R_1}} k \ln \frac{R}{R_1} = \frac{U_2 \ln \frac{R}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$



Знайдемо поле: $\vec{E} = -\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial \rho}$, $\vec{E} = \frac{U_2}{\rho \ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{\rho}{\rho}$. Хвильовий опір:

$z_0 = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 1(\text{CYSE}) = 120\pi(\text{Om}) \approx 377(\text{Om})$. Проте такий опір не

вимірюється. Більш практичне означення хвильового опору: $z = \frac{U}{J}$ -

відношення напруг лінії до струмів у цій лінії. Знайдемо z для Г - лінії, використавши інтегральні рівняння Максвела:

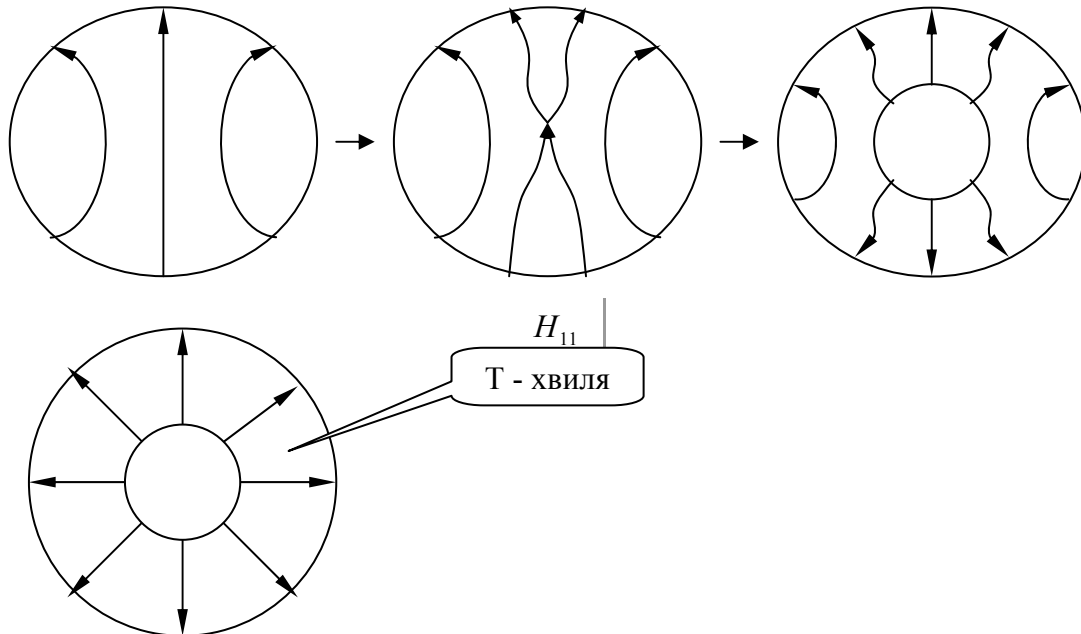
$$\begin{cases} \oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J \Rightarrow \oint \vec{H} d\vec{l} = \oint \vec{E} d\vec{l} - \text{в розрахунку на одиницю довжини} \\ \oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi q; \quad \frac{4\pi}{c} J = 4\pi q \end{cases}, \text{ тут } q -$$

заряд, C - ємність на одиницю довжини. З урахуванням $q = UC$ можна

записати: $z = \frac{1}{cC}$. $z = 60 \ln \frac{R_2}{R_1} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} (Om)$. Окрім Г – хвилі, в коаксіальному кабелі

може існувати ще й ТЕ чи ТМ хвиля:
$$\begin{cases} \nabla_{\perp}^2 H_z + (k^2 - \beta^2) H_z = 0 \\ E_{\varphi}|_{r=R_1, R_2} = 0 \end{cases}$$

Картина хвиль:



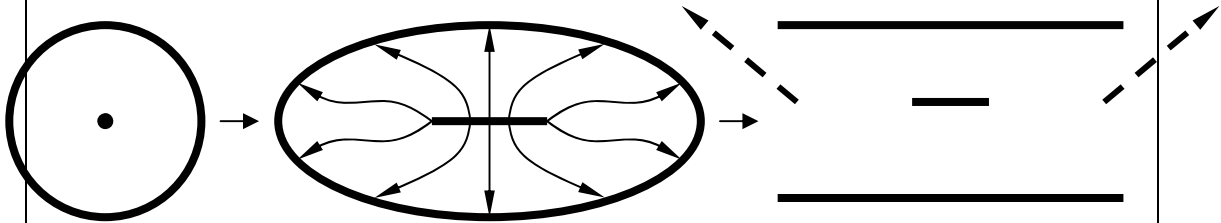
$\lambda_{крH_{11}} = \pi(R_1 + R_2)$. Наприклад, для $R_1=1\text{мм}$, $R_2=6\text{мм}$: $\lambda_{крH_{11}} \sim 2.2\text{см}$.

Лекція 9

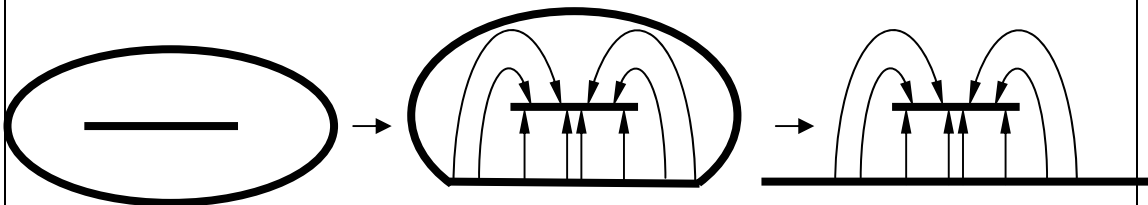
Лінії передач для інтегральних схем.

В інтегральній електроніці використовуються в основному плоскі лінії.

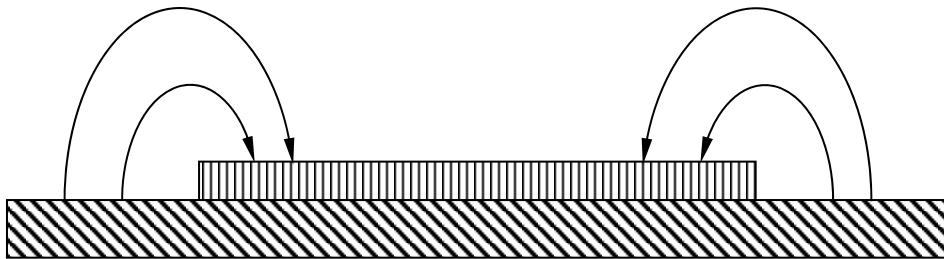
1. Симетрично – смужкова лінія (ССЛ): вона відкрита, тому має втрати.



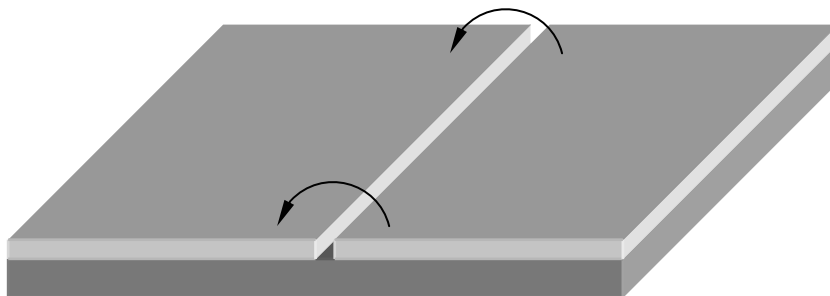
2. Не симетрично – смужкова лінія (НСЛ):



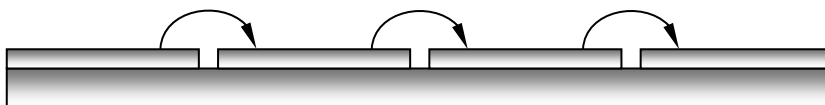
3. Мікросмушкова лінія (microstrip line) – МСЛ. Тут ємність дуже велика, енергія сконцентрована. Підкладка з діелектрика ϵ' . Лінія двоповерхова – це не дуже зручно.



4. Щілинна лінія (slot line). Вона є одноповерховою:

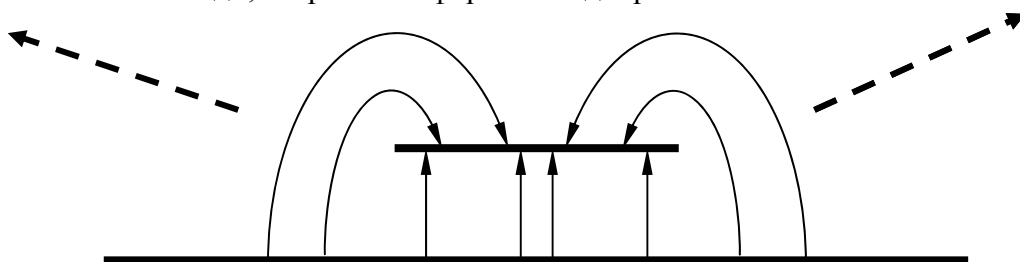


5. Компланарний хвильовід – все в одній площині.

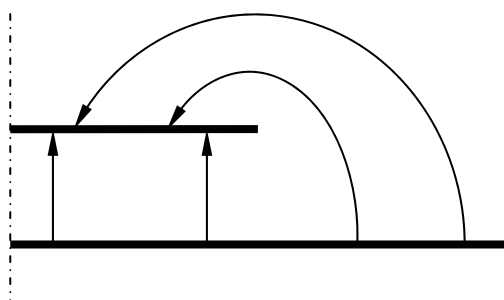


Поля в несиметрично – смушковій лінії.

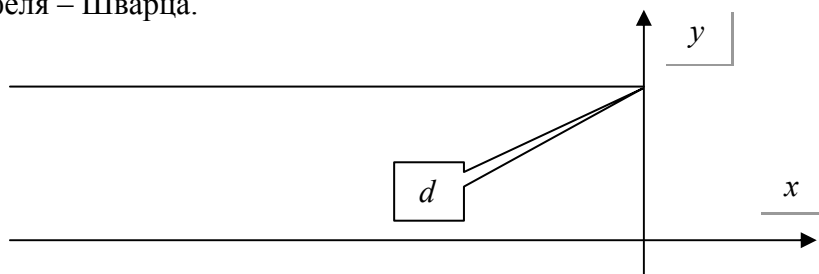
Складність розв'язання цієї задачі полягає в тому, що граничні умови тут – нерегулярні; не можна покласти, що на поверхні $E = 0$. Використовують наближені методи; зокрема конформних відображень.



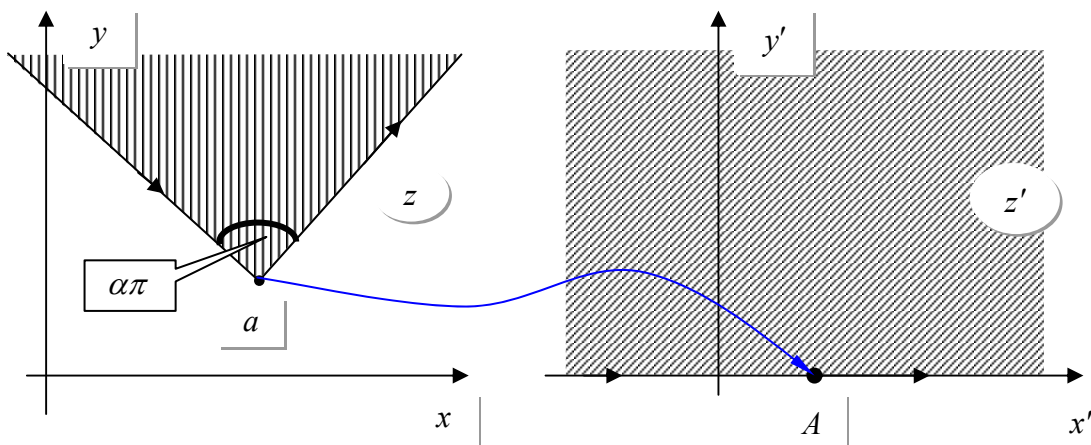
Наближення: Існує Т – хвиля (нехтуємо випромінюванням). Використаємо симетрію задачі. Цікавимося випромінюванням на краю.



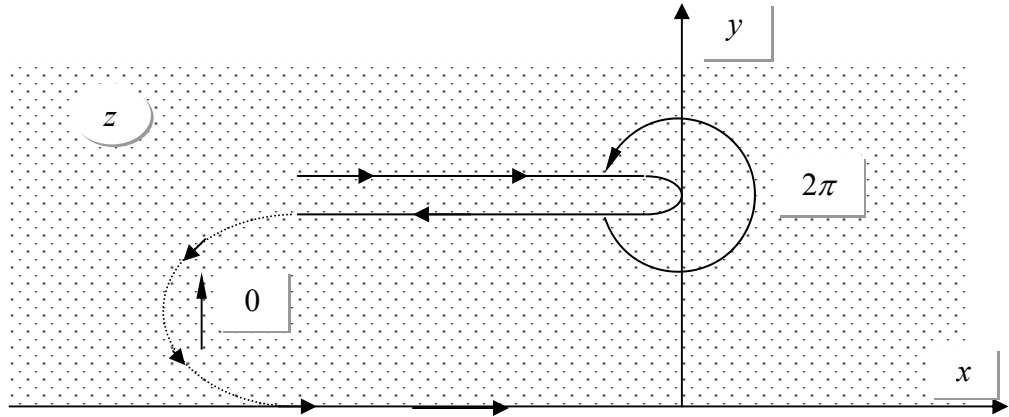
Треба розв'язати задачу: знайти розв'язок рівняння Лапласа у верхній площині з напівнескінченим розрізом. Використаємо метод конформних відображень: тут застосовується інтегральне конформне перетворення Кристофеля – Шварца.



Розглянемо ламану лінію, що в точці a змінює напрямок на кут $\alpha\pi$:

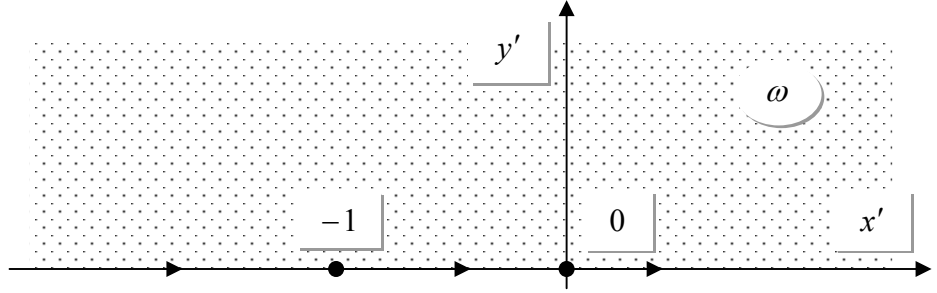


$\frac{dz}{d\omega} = (\omega - A)^{\alpha-1}$. Якщо є два зломи, то $\frac{dz}{d\omega} = \frac{c}{(\omega - \omega_1)^{\gamma_1}(\omega - \omega_2)^{\gamma_2}}$, де $\gamma_1 = 1 - \alpha_1$, $\gamma_2 = 1 - \alpha_2$, $\omega_1 \equiv A_1, \omega_2 \equiv A_2$. В нашій конкретній задачі ламану можна подати у вигляді:



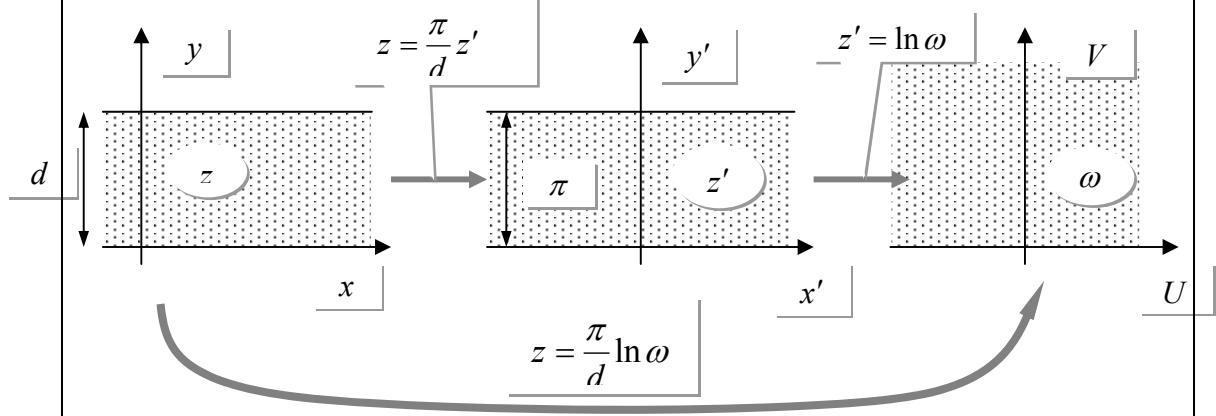
Кут відраховується проти годинникової стрілки від наступного напрямку до попереднього. $\alpha_1 = 2; \gamma_1 = 1 - 2 = -1$ $\frac{dz}{d\omega} = \frac{c}{(\omega - \omega_1)^{-1}(\omega - \omega_2)^1} = c \frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2}$,
 $\alpha_2 = 0; \gamma_2 = 1 - 0 = 1$

перенесемо точки: $z \quad \omega$
 $-\infty \rightarrow 0$
 $id \rightarrow -1$



Проінтегрувавши отримаємо шукане перетворення: $z = c(\omega + \ln \omega) + C_1$.

Константи C та C_1 визначаються з умов: $id = c \left(-1 + \ln \frac{-1-i\pi}{-1} \right) + C_1$, отже $C_1 = id - C(i\pi - 1)$. Умовою $-\infty \rightarrow 0$ ми не можемо скористатися, бо одержимо ∞ . Використаємо фізичні міркування:



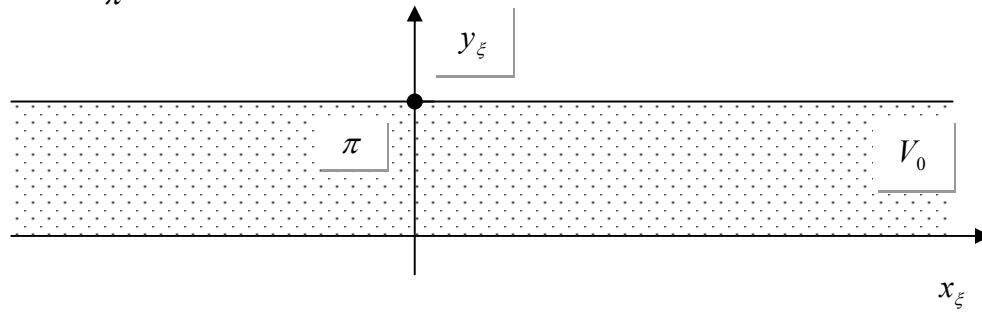
Загальний вид відображення $z = \frac{d}{\pi} \ln \omega + C$; бо область інваріанта відносно зсуву вздовж ОХ (трансляційна симетрія).

Зрозуміло, у нашій задачі область при $z \rightarrow -\infty \Rightarrow \omega = 0$. При $\omega \rightarrow 0$ перетворення набуває вигляду: $z = C \ln \omega + C_1$. Порівнюючи з $z = \frac{d}{\pi} \ln \omega + C_1 \Rightarrow C = \frac{d}{\pi}$, $C_1 = id - \frac{d}{\pi}(i\pi - 1) = \frac{d}{\pi}$. Отже шукане перетворення: $z = \frac{d}{\pi}(\omega + \ln \omega + 1)$.

Для того, щоб знайти розв'язок у верхній півплощині, необхідно перетворити її в конденсатор, використовуючи перетворення зворотне до \ln : $\omega = e^\xi$. Тоді відображення, що перетворить вихідну область (z) (край конденсатора) у конденсатор (ξ), має вигляд: $z = \frac{d}{\pi}(e^\xi + \xi + 1)$.

Тепер необхідно розв'язати рівняння у плоскому конденсаторі та скористатись зворотнім перетворенням: $V = \frac{V_0}{\pi} y_\xi$, $y_\xi = \frac{\pi}{V_0} V$.

$$z = x + iy = \frac{d}{\pi}(e^{x_\xi + iy_\xi} + x_\xi + iy_\xi + 1).$$



Таким чином:
$$\begin{cases} x = \frac{d}{\pi}(e^{x_\xi} \cos y_\xi + x_\xi + 1) \\ y = \frac{d}{\pi}(e^{x_\xi} \sin y_\xi + y_\xi) \end{cases}$$

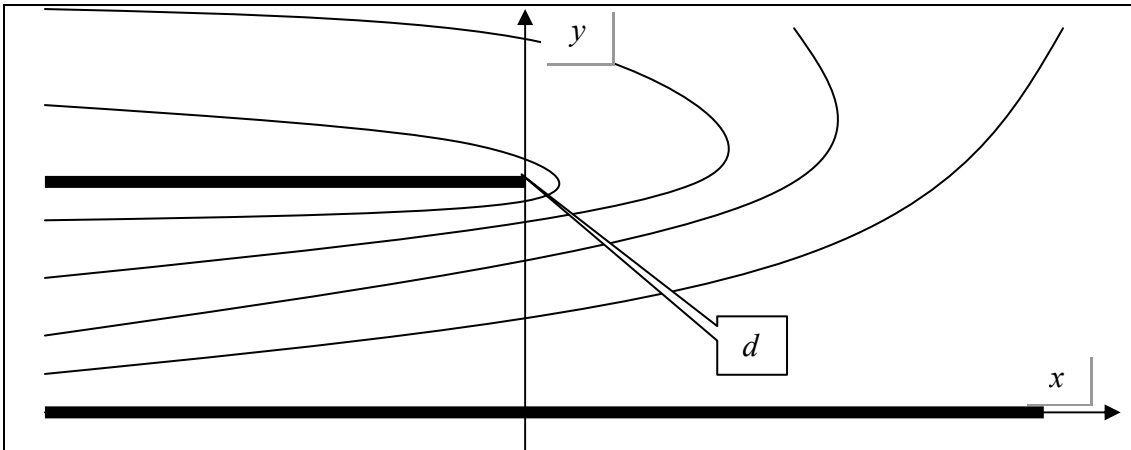
Запишемо рівняння екіпотенційних поверхонь:

$$\begin{cases} x = \frac{d}{\pi} \left(e^{x_\xi} \cos \frac{\pi}{V_0} V + x_\xi + 1 \right) \\ y = \frac{d}{\pi} \left(e^{x_\xi} \sin \frac{\pi}{V_0} V + \frac{\pi}{V_0} V \right) \end{cases}$$

ЕПП $V = 0$ переходить в $x = \frac{d}{\pi}(e^{x_\xi} + x_\xi + 1), y = 0$.

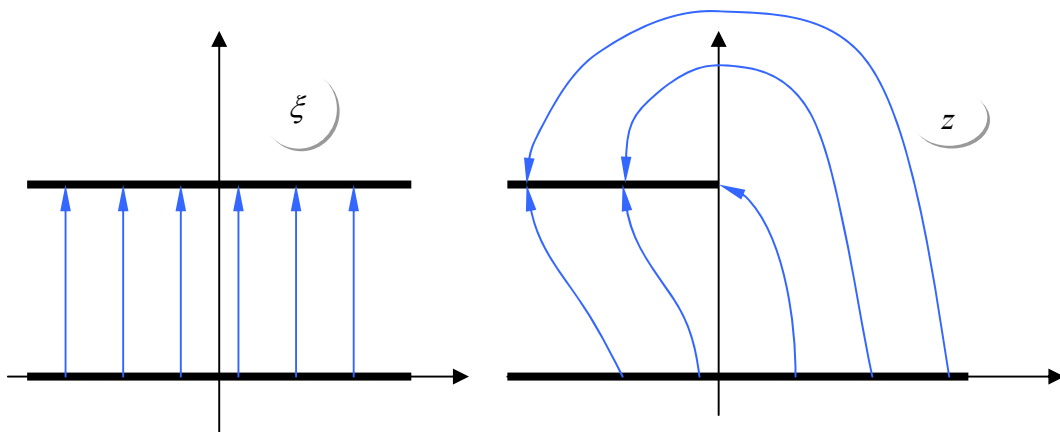
ЕПП $V = V_0$ переходить в $x = \frac{d}{\pi}(-e^{x_\xi} + x_\xi + 1), y = d$.

Таким чином, отримаємо таку картину екіпотенціальних поверхонь:



Тепер знайдемо електричні силові лінії. Ці лінії перпендикулярні ЕП, однак ми знайдемо їх в аналітичний спосіб. Очевидно, в (ξ) такі силові лінії, як на малюнку. Знайдемо образ цих ліній у просторі (z) . Наприклад,

$$\begin{cases} x_\xi = 0 \\ y_\xi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{d} \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_\xi = 0 \\ y_\xi = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = d \end{cases}. \text{ Отримаємо картину ЕП в } (Z):$$



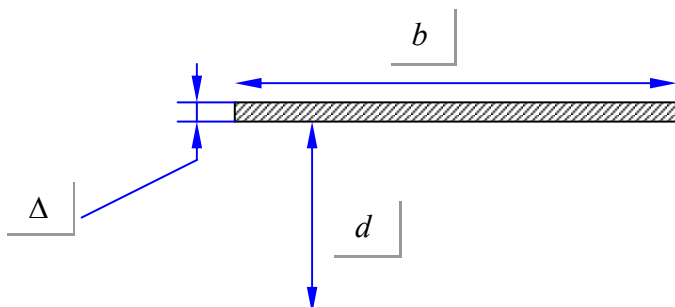
Часто важливо знайти напруженість поля в певній точці: $E = -gradU$.

$$E_x = -\frac{1}{dx/dV} = \frac{1}{-d/\pi e^{x_\xi} \pi/V_0 \sin \frac{\pi V}{V_0}}; \quad E_y = -\frac{1}{dy/dV} = \frac{1}{-d/\pi e^{x_\xi} \pi/V_0 \cos \frac{\pi V}{V_0} + d/V_0}$$

Лекція 10

Реальний смужковий несиметричний хвильовід.

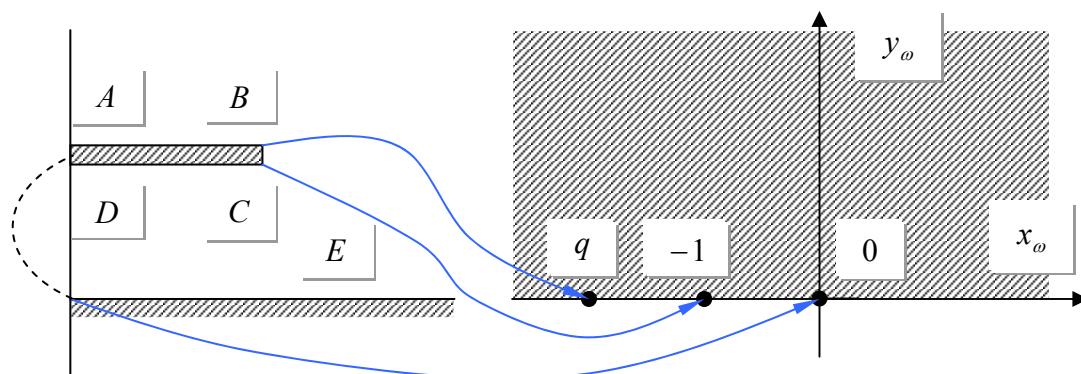
У попередній задачі ми нехтували всіма розмірами – розглядали ідеальний випадок. Тепер розглянемо реальний: скористаємося тими самими моделями: нехай розповсюджується Г – хвиля, а ми розглядаємо одну половину (симетрія).



Використаємо конформні відображення:

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{c}{(\omega - \omega_1)^{\gamma_1} (\omega - \omega_2)^{\gamma_2} (\omega - \omega_3)^{\gamma_3}}.$$

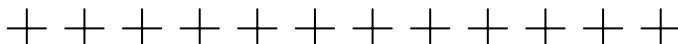
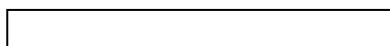
Тут $\gamma_1 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$, $\gamma_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $\gamma_3 = 1$, $\omega_1 = -q$, $\omega_2 = -1$, $\omega_3 = 0$.



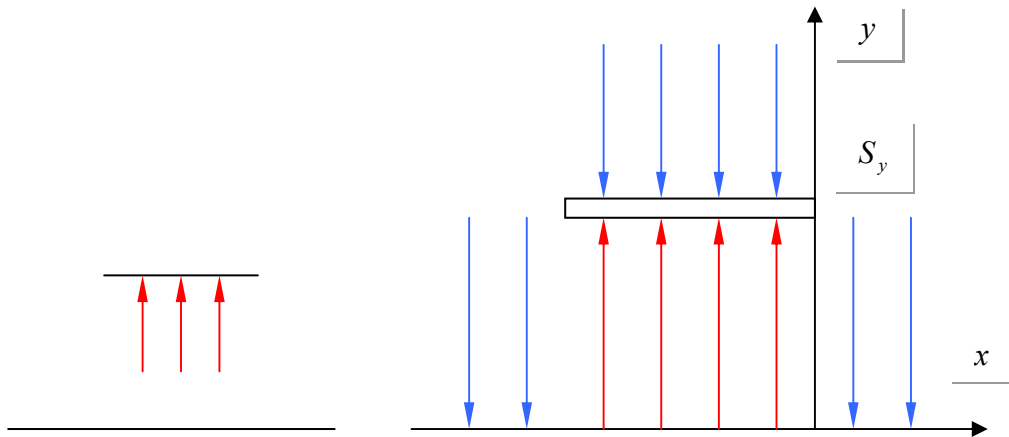
Точка q визначається обраним масштабом; ми знайдемо її потім з граничних умов. Таким чином ми маємо: $\frac{dz}{d\omega} = \frac{c\sqrt{\omega+q}\sqrt{\omega+1}}{\omega}$.

Проінтегрувавши, маємо: $z = \frac{d}{\pi} \left[e^\xi + \xi + 1 - \sqrt{\frac{2\Delta}{d}} (e^\xi + 1) \right]$.

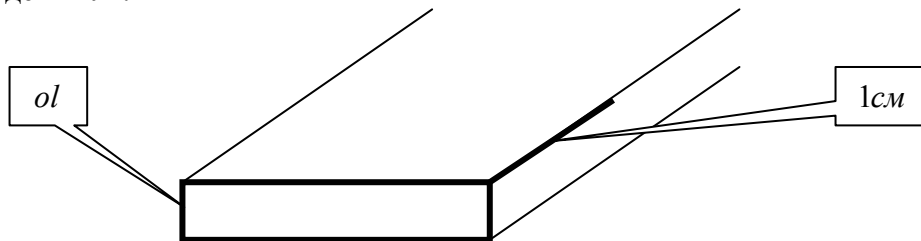
Лінія з втратами



Нехай існують лише втрати в металі. Для їх розрахунку потрібно знайти струм J . Для цього можна використати вектор Умова-Пойтінга. Треба розрахувати потік енергії з лінії в метал. Знайдемо частину S_y :



$$S = \frac{c}{2\pi} \operatorname{Re} [E H^*] = \frac{c}{2\pi} \operatorname{Re} [E_x H_z^* - E_z H_x^*].$$
 Оскільки ми розглядаємо Т – хвилю, то $E_z = H_z = 0$; тому втрат енергії немає (це для ідеальної хвилі). Щоб наблизити задачу до реальної, потрібно використати граничні умови Леонтовича: $E_z = \rho H_x = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_x$; $\varepsilon = \frac{4\pi\sigma}{\omega}$. Тоді все рівно $H_z = 0$ але друга складова зберігається: $S_y = \operatorname{Re} \left(\frac{c}{8\pi} |H_x|^2 \rho \right)$. Підставивши, одержимо:

$$S_y = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{2}} (1+i) \sqrt{\frac{\mu\omega}{4\pi\sigma}} |H_x|^2 = \frac{c}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mu\omega}{4\pi\sigma}} |E_y|^2, \text{ тут } \frac{H_x}{E_y} = \rho - \text{ середовище куди іде хвиля.}$$


Тепер знайдемо повну потужність, що входить у метал: це $\iint S_y dS$, але можна розрахувати на одиницю довжини хвильовода. Для цього розрахуємо S по контуру ol , і це буде потужність на 1 см.

$$P_{\text{втр.од.дов.}} = \oint S_y dl = \frac{c}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mu\omega}{4\pi\sigma}} \oint |E_y|^2 dl = \frac{dP_z}{dz}. \quad \text{Тоді втрати}$$

характеризуються $P_z = P_{z_0} e^{-2\beta''z}$ - потужність, що розповсюджується в лінії. Вона зменшується з відстанню: $\frac{dP_z}{dz} = -2\beta''P_z$.

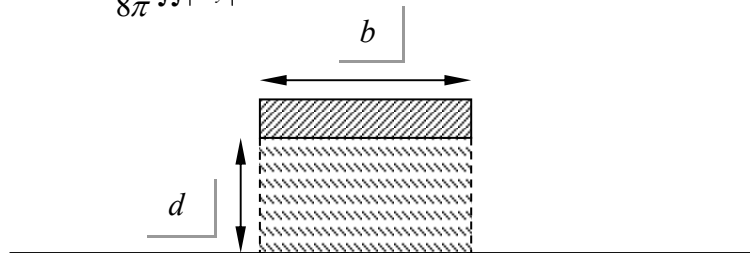
$$\text{Стала затухання: } \beta'' = -\frac{dP_z/dz}{2P_z} \quad (*).$$

Ми знаємо $\frac{dP_z}{dz}$, знайдемо P_z . Для цього запишемо вектор Умова-Пойтінга для хвилі, що розповсюджується в хвилеводі:

$$S_z = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [E \times H^*] = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} E H^* = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} E_y E_y^* \rho = \frac{c}{8\pi} |E_y|^2.$$

Ця хвиля розповсюджується по всій площині $z = 0$, тому $P_z = \iint S_z dS'$. Ми одержали в (*) знак “-“. Однак ми не будемо ставити його (оскільки при зміні напрямку знак змінюється, то вважатимемо просто $\beta'' \geq 0$ завдяки симетрії задачі). Таким

чином: $\beta'' = \frac{\frac{c}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mu\omega}{4\pi\sigma}} \oint |E_y|^2 dl}{2 \frac{c}{8\pi} \iint |E_y|^2 dS}$. Оцінимо цю величину:



Введемо наближення: будемо враховувати поле лише у заштрихованій ділянці, оскільки тут більша частина (тому, що ця потужність зумовлена ємністю, а вона сконцентрована в цій ділянці).

$$\beta'' = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mu\omega}{4\pi\sigma}} |E_y|^2 b}{2 |E_y|^2 db} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mu\omega}{4\pi\sigma}} \frac{1}{2d}$$

- характеризує якість лінії, але частіше

використовують добротність лінії: $Q = \frac{\beta'}{2\beta''}$, де $\beta' = \frac{2\pi}{\lambda_{xв}}$ (по аналогії з

добротністю КК: $Q = \frac{f_0}{2\Delta f_0}$).

Для

- Хвильоводів - $Q \sim 10^3$;
- Коаксіальних кабелів - $Q \sim 10^2$;
- Мікросмужкових ліній - $Q \sim 200 \div 300$.

Оцінимо довжину хвилевода, в якому хвиля затухає в e разів при $Q \sim 10^3$:

$$\beta'' z_0 = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{\beta''} = \frac{2Q}{\beta'} = \frac{2Q\lambda}{2\pi} \sim Q\lambda.$$

Крім втрат у метали, існують і інші

механізми – для них теж можна обчислити β'' , яке додається до нашого.

Наприклад, це витрати на випромінювання (радіаційні): $\beta''_{\text{вип}} = \frac{320}{z_{\lambda}} \left(\frac{\pi d}{\lambda^2} \right)^2$. Де

z_{λ} - опір лінії. Існують також діелектричні втрати (розглянемо нижче); найкращий діелектрик – тефлон.

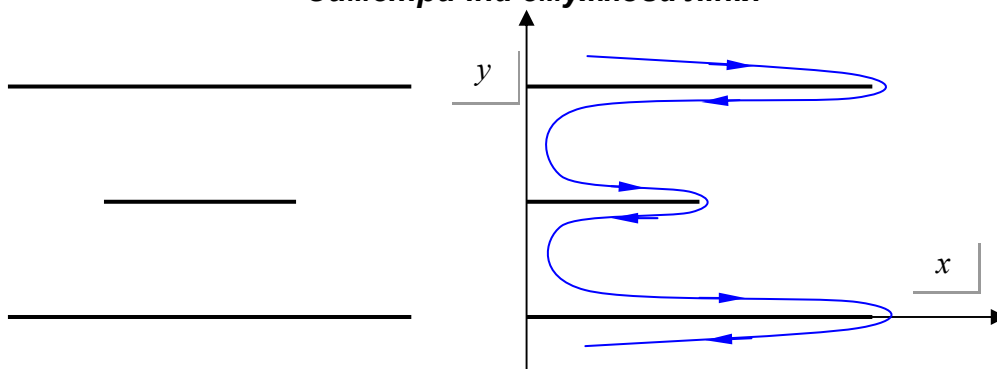
Розглянемо хвильовий опір лінії: $z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 120\pi(\text{Om})$; або

$z_{\lambda} = \frac{U}{J} = \frac{1}{cC} = \frac{33[\text{Om}]}{C \left[\frac{n\Phi}{\text{см}} \right]}$, де C – ємність лінії. Обчисливши її, одержимо:

$z_{\lambda} = \frac{311}{1 + b/d} [\text{Om}]$.

Лекція 11

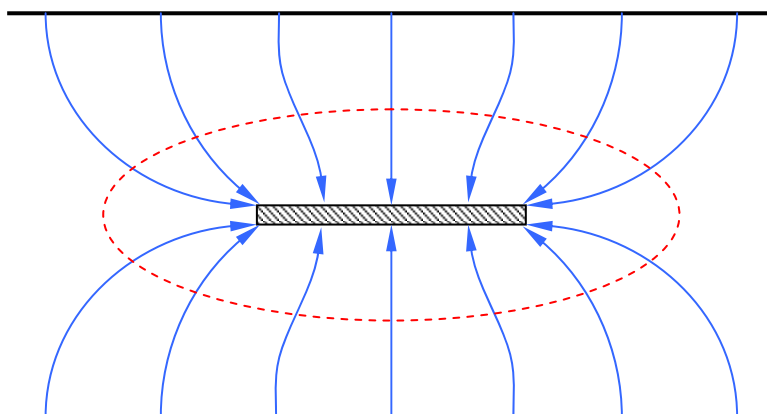
Симетрична смужкова лінія



Скористаємося тими самими наближеннями:

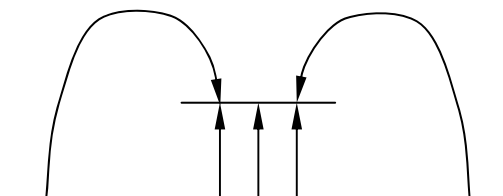
1. Т – хвиля; \Rightarrow рівняння Лапласа \Rightarrow конформні відображення.
2. Розглянемо половину (симетрія).

Застосуємо перетворення Кристофеля-Шварца. Далі – аналогічно попереднім задачам. Розв'язавши, одержимо картинку полів:



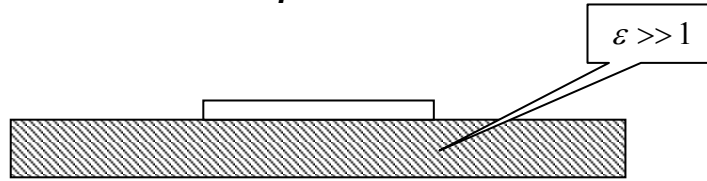
Її параметри: $z_n = \frac{200}{1 + b/d} \left(1 - \frac{\Delta}{d}\right)$. Тут z_n менше, ніж у попередній лінії,

оскільки ємність тут більша. Однак, тут z_n менше не в 2 рази, оскільки у попередньому хвильоводі ємність враховувалась і до верхньої сторони верхньої смужки, і до нижньої (див. Мал.), тому там ємність більша, ніж у звичайному конденсаторі.



Довжина хвилі для симетрично смужкової лінії $\lambda_{xв} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon}}$, якщо всі три смужки знаходяться в середовищі ϵ .

Відкриті лінії.



Тут смужка на шарі діелектрику. Тоді:

- Зверху - $\lambda_{x\epsilon} = \lambda_0$.
- Знизу - $\lambda_{x\epsilon} = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon}$.

Тому використовують деяке ефективне ϵ : $\lambda_{x\epsilon} = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_{eff}}$, треба знайти частину енергії, яка йде по діелектрику. Нехай ця частина W_1 в $W = W_1 + W_2$.

Тоді: $\epsilon_{eff} = \frac{\epsilon W_1 + W_2}{W_1 + W_2}$. Часто використовують таку наближену формулу:

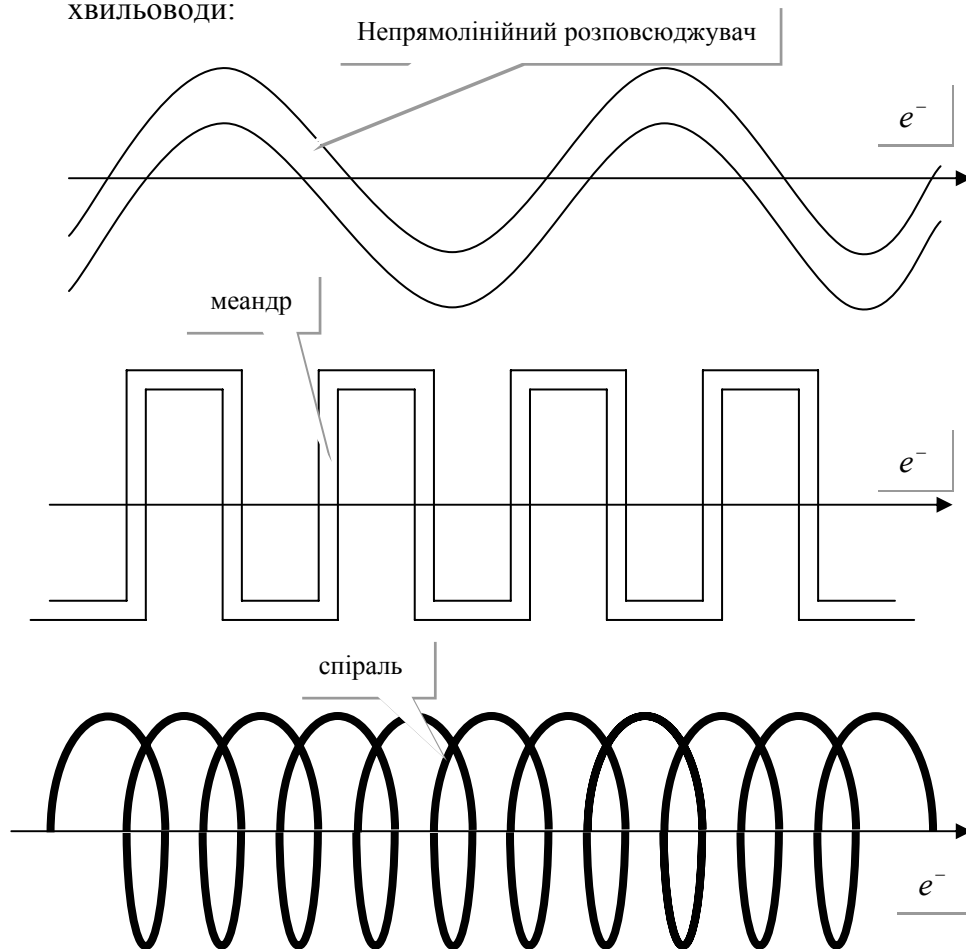
$$\epsilon_{eff} = \frac{\epsilon + 1}{2} + \frac{\epsilon - 1}{2} \left(1 + \frac{10b}{d} \right)^{-1/2}.$$

Лекція 12

Повільні хвилі.

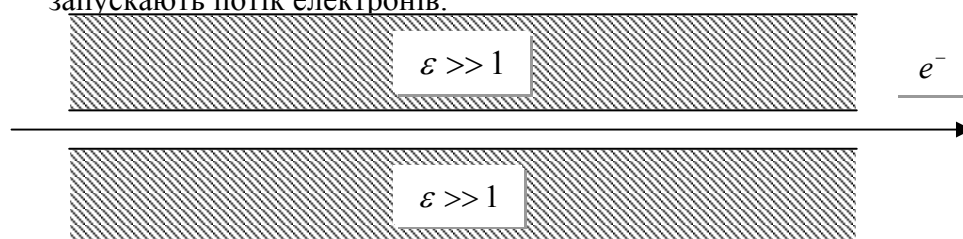
Для багатьох електричних приладів необхідно отримати хвилю, що рухається зі швидкістю $\ll c$. Це зокрема стосується приладів, у яких відбувається передача енергії та інформації від хвилі іншим носіям. Однак, згідно Ейнштейну, хвилі у вакуумі рухаються зі швидкістю світла, а будь-який інший носій (наприклад e^-) не може рухатися зі швидкістю $\sim c$.

1. Для створення уповільнених хвиль використовуються різні спеціальні хвильоводи:

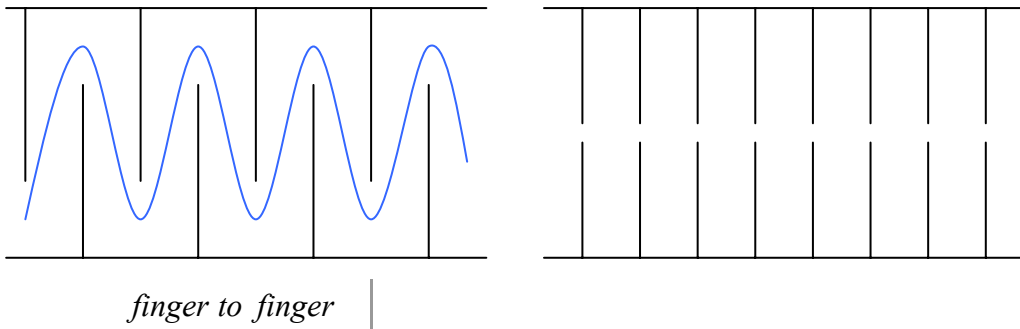


Передача енергії від електричного потоку до ЕМ – поля називається ефектом Вавилова-Черенкова. Він виникає, коли швидкості електричного потоку та ЕМ – хвилі рівні.

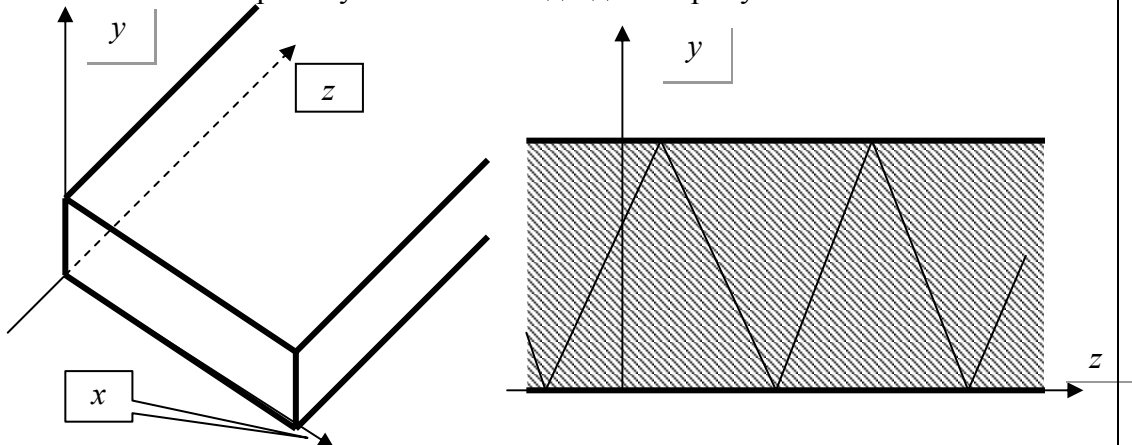
2. $V = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$. Метод передачі енергії: в діелектрику – вузький канал, куди запускають потік електронів.



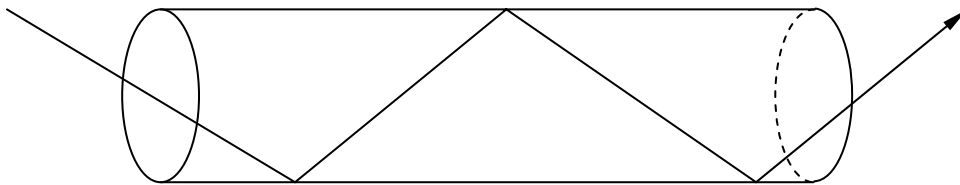
3. Метод уповільнення: використовуються дифракційні ефекти.



Розглянемо прямокутний хвильовід з діелектрику:



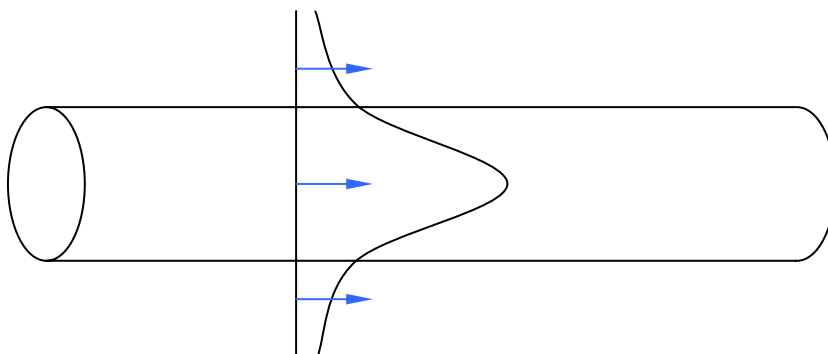
Розповсюдження хвилі в бруську з діелектриком – за рахунок повного відбиття. Це – відкриті діелектричні хвильоводи (бо немає металевих стінок) або світловоди. На практиці використовуються круглі волокна (див. мал.) – fiber-glass.



Досягнення полягає в тому, що немає металу, яким обумовлена більшість втрат. Ця лінія також є уповільнюючою, бо:

1. $\epsilon > 1$
2. непрямолінійне розповсюдження хвилі, $V_{zp} < c$.

Хвиля існує не лише в хвильоводі, але й в металі, бо хвильовід – відкритий.



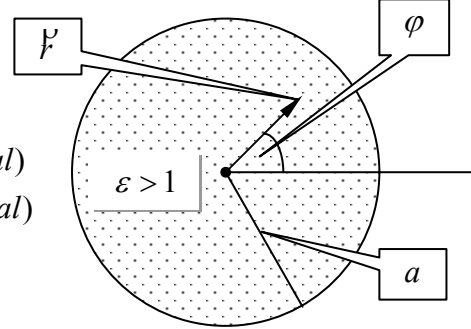
Висновки Ейнштейна про те, що фотон у вакуумі рухається зі швидкістю $V = c$, стосується вільного нескінченного простору, тому за межами хвильовода неподалік від нього поле ϵ , і воно рухається зі швидкістю $V < c$; проте на ∞ поля бути не може через експоненційне спадання поля.

З інших міркувань: хвиля не виходить з діелектрику, тому, що всередині швидкість $V < c$ тобто імпульс $p < mc^2$; і згідно з законом збереження імпульсу хвиля не може вийти з хвильоводу, бо за його межами імпульс має бути $p = mc^2$. Єдина умова виходу хвилі з хвильоводу – тоді, коли швидкість хвилі в хвильоводі стане рівною c (імпульси всередині і зовні – однакові).

Розрахуємо поле у fiber-glass: шукаємо хвилю E або TM.

$$\Delta_{\perp} E_z^l + (k_0^2 - \beta^2) E_z^l = 0; \quad r \geq a \text{ (external)}$$

$$\Delta_{\perp} E_z^i + (k_0^2 \epsilon - \beta^2) E_z^i = 0; \quad r < a \text{ (internal)}$$



Розв'язки обох рівнянь (для зовнішнього та внутрішнього середовища) необхідно прирівняти при $r = a$ (на границі): $E_z^l(r = a) = E_z^i(r = a)$; $E_z^l(r \rightarrow \infty) = 0$.

В циліндричній СК: $\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + g^2 E_z = 0$. Запишемо рівняння для скалярної функції: $E_z = (k^2 - \beta^2) \chi e^{-i\beta z}$. Розглянемо симетричні розв'язки:

$$\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} = 0 \cdot \begin{cases} \frac{\partial^2 \chi^i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi^i}{\partial r} + (k_0^2 \epsilon + \beta^2) \chi^i = 0; & r \leq a \\ \frac{\partial^2 \chi^l}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi^l}{\partial r} + (k_0^2 + \beta^2) \chi^l = 0; & r \geq a \end{cases}$$

$$\chi^i(r) = AJ_0(gr), \quad g^2 = k^2 - \beta^2 = k_0^2 \epsilon - \beta^2$$

$$\chi^l(r) = BJ_0(g_0 r) + CN_0(g_0 r), \quad g_0^2 = k_0^2 - \beta^2$$

Якщо область містить точку $r = \infty$; то розв'язок зручно брати у вигляді функцій Ханкеля, бо саме в базисі $\{H_m^{(1)}, H_m^{(2)}\}$ є функція, що експоненційно прямує до нуля при $r \rightarrow \infty$.

$$H_0^{(1)} = \sqrt{\frac{2i}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{gr}} e^{-igr} \text{ - йде в } \infty \text{ з хвильовода, } H_0^{(1)} = \sqrt{\frac{2i}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{gr}} e^{-igr} \text{ - йде з } \infty$$

в хвильовід.

Отже, розв'язок треба брати у вигляді:
$$\begin{cases} \chi^l = BH_0^{(2)}(g_0 r) \\ \chi^i = AJ_0(gr) \end{cases}$$

$$H_{\varphi}^i(a) = H_{\varphi}^l(a) \Rightarrow g^2 \chi^i = g_0^2 \chi^l|_{r=a}, \text{ тобто } Ag^2 J_0(ga) = Bg_0^2 H_0^{(2)}(g_0 a).$$

$$E_z^i(a) = E_z^l(a)$$

Граничні умови для похідних $H_\varphi = -ik\varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial r}$. Врахуємо

$\frac{\partial}{\partial x} Z_0(ax) = \frac{\partial}{\partial x} Z_1(ax)$ для $Z \equiv J$ або $Z \equiv H$; $Z - \forall$ циліндрична функція. Тоді

$\varepsilon g A J_1(ga) = g B H_1^{(2)}(ga)$. Таким чином з граничних умов одержали:

$$\begin{cases} A g^2 J_0(ga) = B g_0^2 H_0^{(2)}(ga) \\ A \varepsilon g J_1(ga) = B g H_1^{(2)}(ga) \end{cases} \text{ Це - лінійна однорідна система відносно } A \text{ та } B.$$

Вона має розв'язок за умови $\det = 0$: $g^2 J_0(ga) g H_1^{(2)}(ga) = g_0^2 H_0^{(2)}(ga) \varepsilon g J_1(ga)$.

$$g^2 = k^2 - \beta^2 = k^2(1 - \varepsilon) + g_\varepsilon^2.$$

Розв'язок позначається $g_\varepsilon a = C_{0n}$ (перший індекс в C_{0n} - нуль, бо брали $m = 0$).

Знайдемо сталу розповсюдження: $g_\varepsilon^2 = k^2 \varepsilon - \beta^2$, тоді одержуємо:

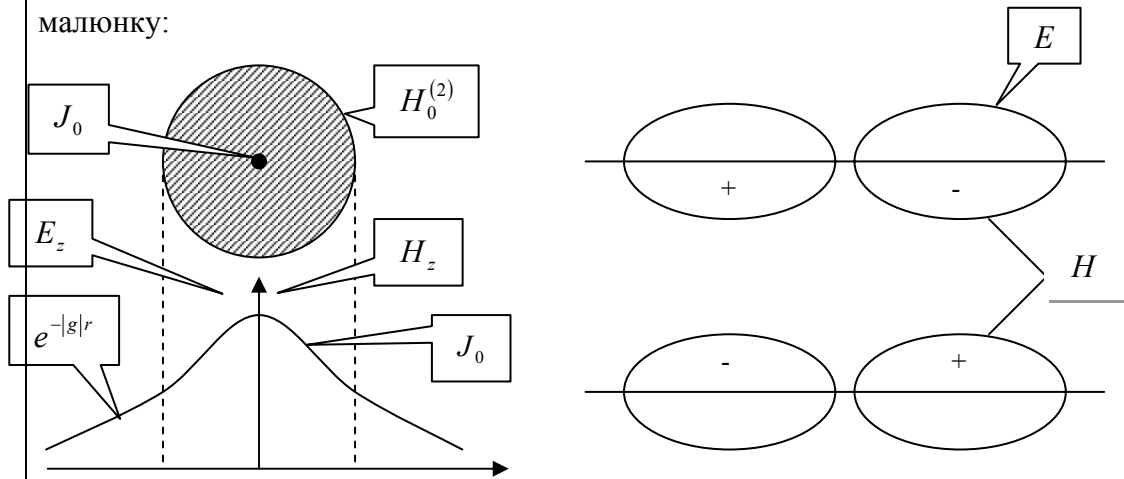
$$\beta^2 = k^2 \varepsilon - g_\varepsilon^2 = k^2 \varepsilon - \left(\frac{C_{0n}}{a} \right)^2.$$

Тут також існує критична довжина хвилі, яка відповідає $\beta = 0$: $k_{кр1} = \frac{C_{0n}}{\sqrt{\varepsilon} a}$. Однак існує більш жорстка умова - умова того, щоб хвиля не пішла

з хвильоводу: $g = 0$: $k_{кр} = \frac{2\pi}{\lambda_{кр}} = \frac{C_{0m}}{a\sqrt{\varepsilon - 1}}$. Умовою визначення критичної хвилі у

відкритих системах є не рівність сталої розповсюдження $\beta = 0$, а більш жорстка умова $g = 0$. Це - умова невиткання хвилі з хвильоводу. Фізично вона є законом збереження імпульсу (коли імпульси зовні і всередині співпадають, з'являється можливість для виткання хвилі).

Приблизна картина розподілу E_z та H_z у хвильоводі та зовні показана на малюнку:



Ця картина - для E_{01} ($m = 0$, 1 - номер кореня).

Лекція 13

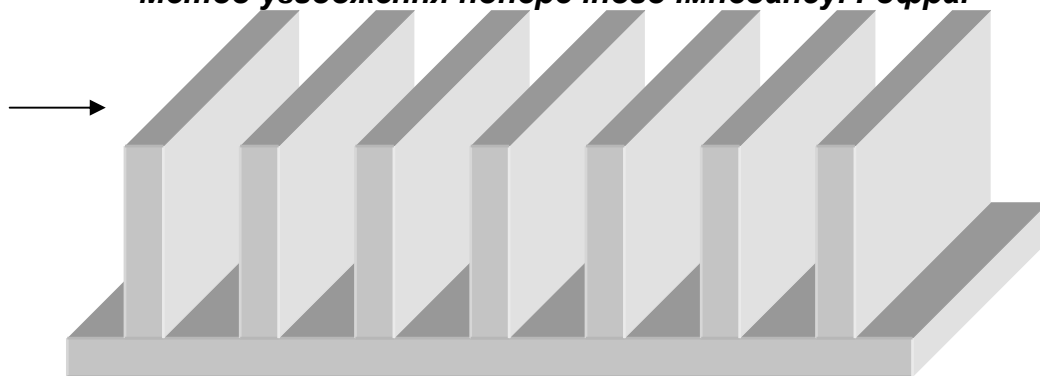
Гібридні хвилі.

Раніше ми розглядали всі види хвиль (E , H чи T) окремо. Однак у загальному випадку хвиля є суперпозицією E , H , T – повний розв’язок рівняння Максвела.

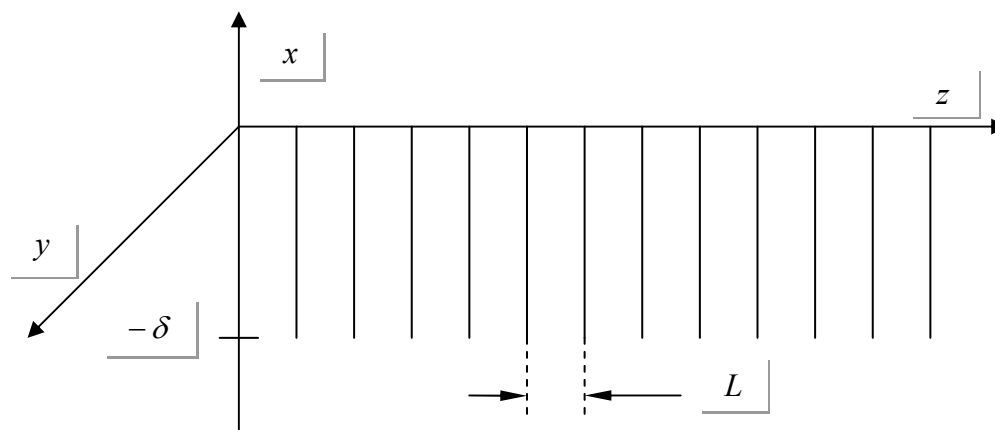
Гібридна хвиля – це хвиля, яка має всі компоненти; це суперпозиція E , H , T .

У випадку розглянутому вище, хвильовода (стержня), ми маємо три граничні умови і дві константи в рівняннях, а тому рівняння в загальному випадку не буде мати розв’язків. Однак, тут нам потрібно розглядати не тільки E_z , H_φ , E_φ , а і хвилю H_z : $\Delta_\perp H_z + (c^2 - \beta^2)H_z = 0 \Rightarrow H_z H_\varphi E_\varphi$. Тепер поле описується чотирма константами і відповідно чотирма граничними умовами.

Метод узгодження поперечного імпедансу. Гофра.



Покажемо, що ця система – уповільнююча. Розглянемо модель:



Уявимо, що в цій системі дійсно існує хвиля, близька до хвилі біля круглого хвильовода. Нехай це буде E – хвиля, що розповсюджується в напрямку z . По аналогії зі стержнем $E_z = Ve^{-igx} (\sim H_0^{(2)})$. Виходячи з цього, можна знайти інші компоненти: $H_y = -\frac{ik}{g^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{ik}{g^2} (-ig)E_z = -\frac{k}{g} E_z$.

Це – компоненти зовні. Що буде всередині? Всередині будуть стоячі хвилі: $E_z^i = ae^{-ikx} + be^{ikx}$. Це – дві T -хвилі (пряма і відбита).

Можна розглянути таке рішення для E_z^i всередині: $E_z^i = A \cdot \text{Sink}(x + \delta)$.

Тоді $H_y^i = \frac{1}{ik} \frac{\partial E_z^i}{\partial x} = -iA \cos k(x + \delta)$.

Пом'якшимо умову (це метод узгодження поперечного імпедансу) так, щоб неперервні були відношення полів.

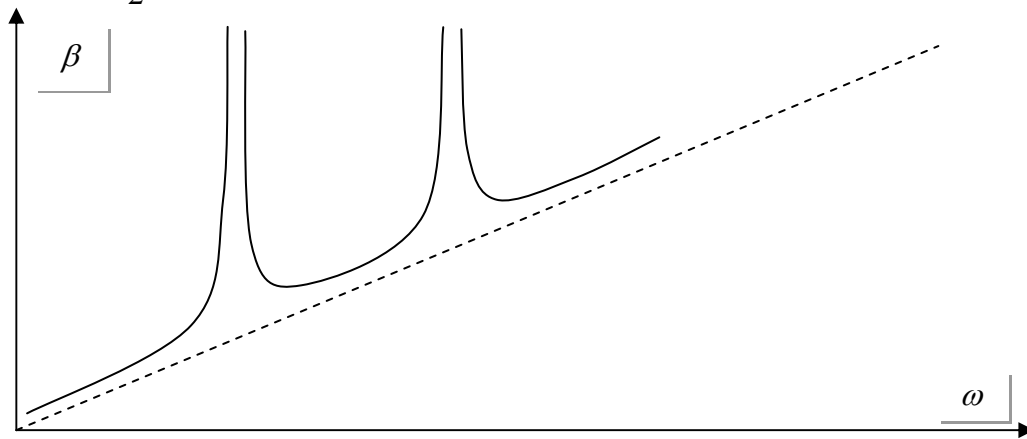
$$\frac{E_z^i}{H_y^i} = \frac{E_z^l}{E_y^l}$$

Тоді $-\frac{g}{k} = i \cdot \text{tg}(k\delta)$.

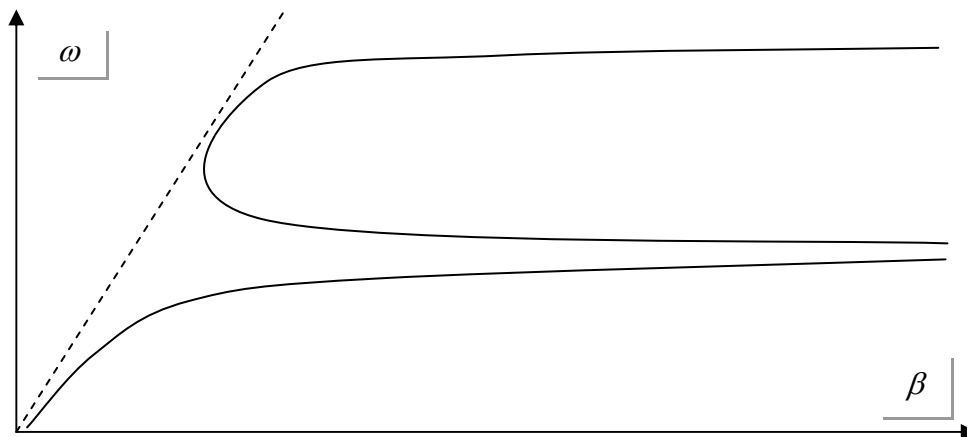
Поперечна стала розповсюдження хвилі $g = -ik \cdot \text{tg}(k\delta)$.

Тоді $\beta^2 = k^2 - g^2 = k^2 - k^2 \text{tg}^2 k\delta = k^2(1 + \text{tg}^2 k\delta)$. $\beta^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (1 + \text{tg}^2 k\delta)$. В

точках $k\delta = \frac{\pi}{2} + \pi n$ отримаємо ∞ .



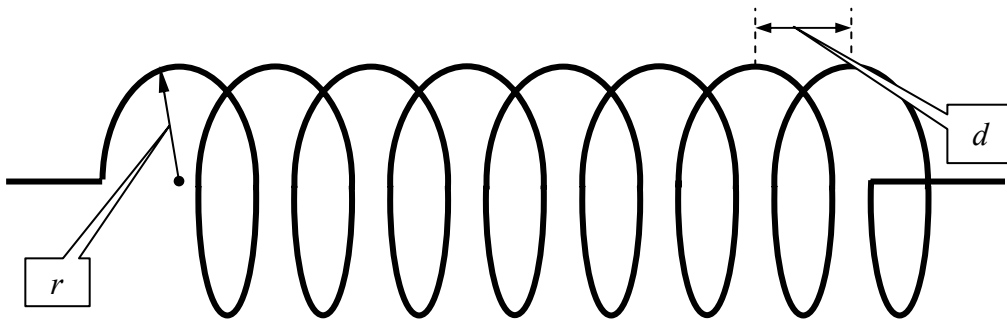
Іноді будують фотонну криву:



Маємо ділянку, де $V_\phi = \frac{\omega}{k} < c, V_{gp} = \frac{d\omega}{dk} < c$, тобто маємо уповільнення.

Це – звичайний резонатор для ЕМ – хвилі. При розрахунках у нас e^{-igx} переходило в $e^{-|g|x}$, а це можливо при $\text{tg}(k\delta) < 0$. Це – ще одна умова.

Спіраль.



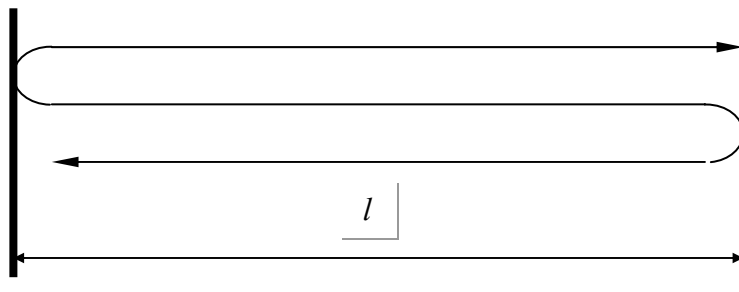
Тут $V = \frac{c}{2\pi r/d} = \frac{c}{n}$, $n = \frac{2\pi r}{d}$. Така система по своїй конструкції

уповільнює, з коефіцієнтом уповільнення n . Але тут теж є резонансні ефекти, що призводять до уповільнення, якщо $2\pi r = n\lambda$.

Лекція 14

Об'ємні резонатори.

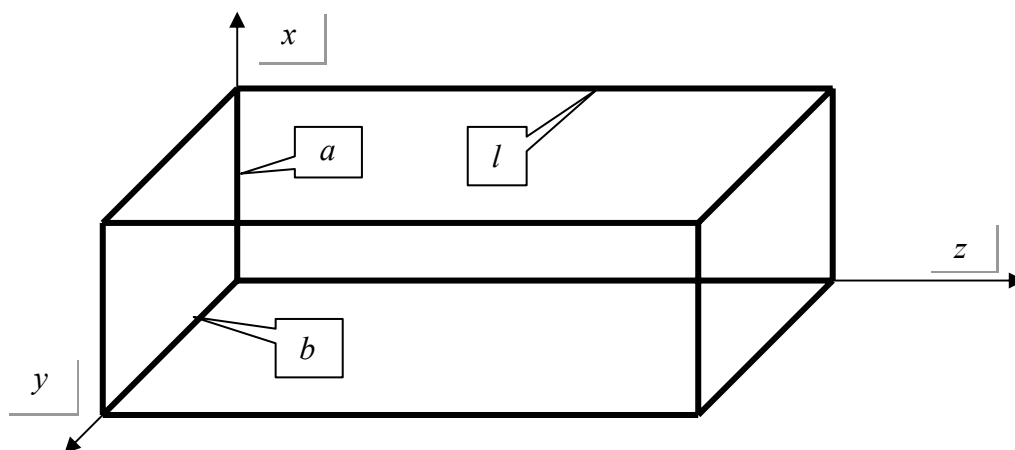
У них хвиля “б’ється” між стінками (див. Мал.):



$\lambda = n \frac{\lambda_{xв}}{2}$, тоді хвиля, що заходить у резонатор, і відбита, будуть у фазі;

тобто це – умова резонансу.

Розв’яжемо рівняння Максвела для даної системи – знайдемо коливання, що існують у цій коробці.



$$\begin{aligned} H : \nabla_{\perp}^2 H_z + (k_0^2 - \beta^2) H_z &= 0 \\ E : \nabla_{\perp}^2 E_z + (k_0^2 - \beta^2) E_z &= 0 \end{aligned} .$$

З урахуванням граничних умов на бокових стінках (стінках хвильовода): $H_z = H_0 \cos \frac{n\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{a} y e^{-i\beta z}$. Накладемо ще дві граничні умови: $H_z = 0|_{z=0,l}$ звідки одержимо $H_0 = 0$ - неправильно. Це тому, що не врахували відбиття від торців; правильно буде записати:

$$H_z = H_0 \cos \frac{n\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{a} y e^{-i\beta z} + H'_0 \cos \frac{n\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{a} y e^{i\beta z} .$$

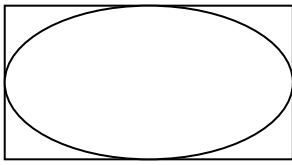
Тоді при накладанні умови $H_z = 0|_{z=0,l}$ одержимо $H_0 + H'_0 = 0 \Rightarrow H_0 = -H'_0$.

$$H_z = H_0 \cos \frac{n\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{a} y [e^{-i\beta z} - e^{i\beta z}] .$$

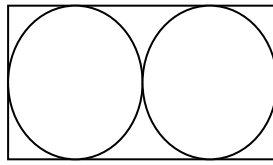
Розглянемо $H_z = 0|_{z=0,l}$, одержимо $e^{-i\beta l} - e^{i\beta l} = 0 \Rightarrow \sin \beta l = 0$. Тоді

$$\beta l = \pi p = \frac{2\pi}{\lambda_{xв}} l \Rightarrow \lambda_{xв} = \frac{2l}{p} .$$

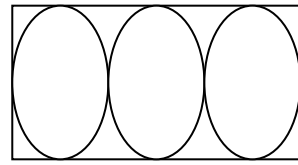
Типи коливань: (останній індекс – кількість півхвиль)



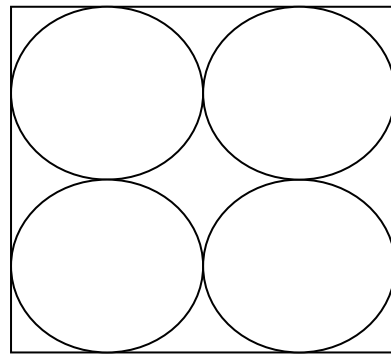
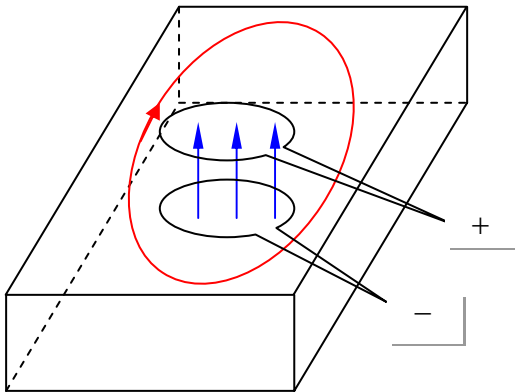
H_{101}



H_{102}

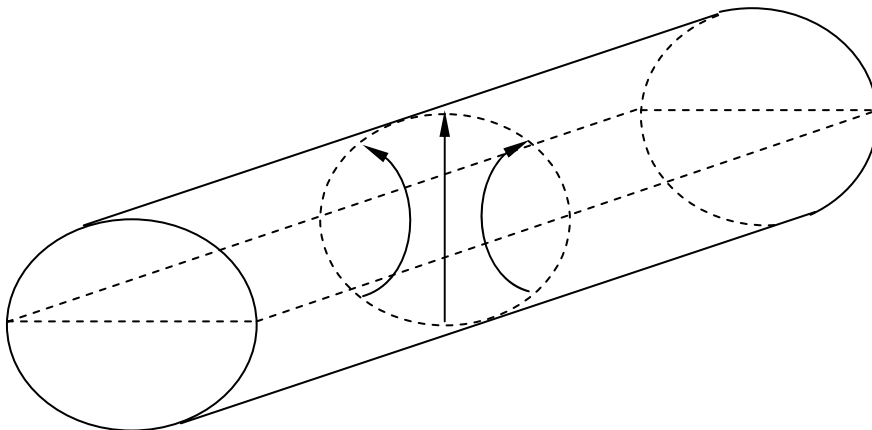


H_{103}

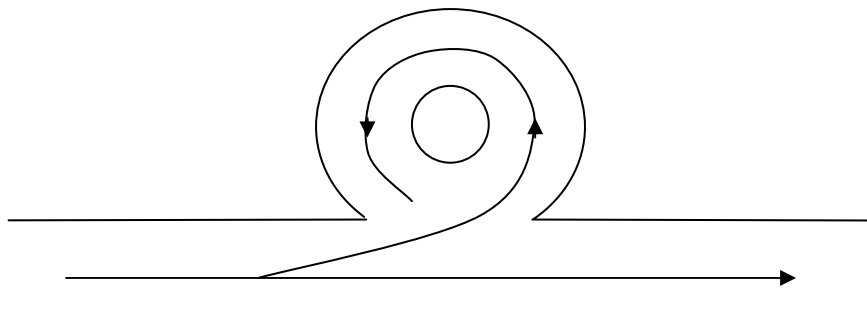


H_{202}

В круглому резонаторі:

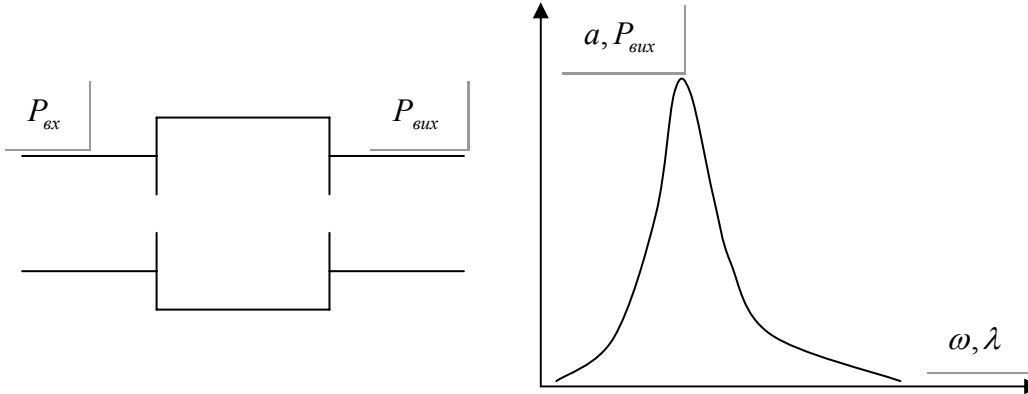


Існує дуже багато типів резонаторів. Наприклад, резонатор хвилі, що біжить, такий резонатор ще називають кільцевим. Резонанс: $2\pi r = n\lambda_{xв}$.



Добротність резонаторів Q .

Для будь-якого резонатора звичайно існує АЧХ, яка має ширину.



Напівширина $\Delta\omega$ вимірюється для $P_{вих}$ на 0.5; а для вихідної амплітуди – на 0.7 висоти контуру. $\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$. Хвиля затухає із декрементом δ : $W = W_0 e^{-2\delta t}$, $a = a_0 e^{-\delta t}$. Доведемо, що $\delta = \Delta\omega$. Це випливає з розв'язку рівняння: $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t$. Втрати $\frac{dW}{dt} = -2\delta W = \frac{\omega W}{Q}$ - тут добротність $Q = \frac{\omega}{2\delta}$.

Втрати можуть бути в металі, на випромінювання в діелектрику:

$$P_{вт} = P_m + P_\epsilon + P_d$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_m} + \frac{1}{Q_\epsilon} + \frac{1}{Q_d}$$

Підрахуємо добротність, пов'язану з втратами у діелектрику:

$$a = a_0 e^{-i\omega_0 t} = a_0 e^{-i\omega_0 \sqrt{\epsilon} t}$$

$$\omega'_0 : l = \frac{\lambda_{x\epsilon}^0}{2}$$

$$\omega_0 : l = \frac{\lambda_{x\epsilon}^0}{2} = \frac{\lambda_{x\epsilon}^0}{2\sqrt{\epsilon}}$$

Таким чином, $\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{\epsilon}$ (ω'_0 - коливання резонатора з діелектриком, ω_0 - порожнього).

$$a = a_0 e^{-i\omega_0 \sqrt{\epsilon'} - i\epsilon'' t}, \text{ де } \sqrt{\epsilon' - i\epsilon''} = \sqrt{\epsilon' \left(1 - i \frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)} = \sqrt{\epsilon'} (1 + i \cdot tg \delta)^{1/2} = \sqrt{\epsilon'} \left(1 + \frac{1}{2} i \cdot tg \delta\right),$$

отже $a = a_0 e^{-i\omega_0 \sqrt{\epsilon'} \left(1 + \frac{1}{2} i \cdot tg \delta\right)} = a_0 e^{-i\omega'_0 t \left(1 + \frac{1}{2} i \cdot tg \delta\right)} = a_0 e^{i\omega'_0 t} e^{-\frac{\omega'_0}{2} tg \delta \cdot t}$. Таким чином ми одержали $a = a_0 e^{-\frac{\omega'_0}{2} tg \delta \cdot t}$, $\delta_{diel} = \omega'_0 \frac{1}{2} tg \delta \Rightarrow Q_d = \frac{1}{tg \delta}$. Для розрахунку Q в металі треба знайти потік енергії (як у смужковому резонаторі).

Лекція 15

Відкриті резонатори.

Це резонатори на основі відкритих ліній передач. Вони мають електромагнітний контакт з відкритим простором. Звичайно використовуються в лазерах сферичні діелектричні резонатори. Нас цікавлять шари діелектрика для лінії $\sim \lambda$. Тут не можна використовувати геометричні наближення, потрібно розв'язувати рівняння Максвелла.

Розв'яжемо рівняння Максвелла для сферичного діелектричного резонатора. Тут потрібно використати ССК:

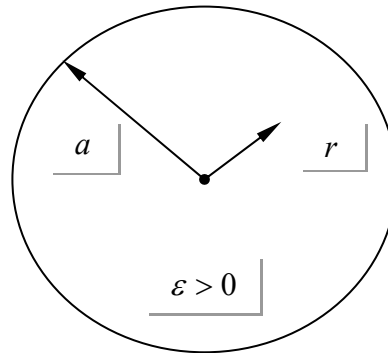
$$\Delta \bar{H} + k^2 \varepsilon \bar{H} = 0, \quad \Delta E + k^2 \varepsilon \bar{E} = 0.$$

В сферичній СК не можна перейти до скалярних рівнянь звичайним чином.

Використовують заміну: $E_r = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + k^2 \varepsilon \mu U$,

$$E_\Theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \Theta}, \quad E_\varphi = \frac{1}{r \sin \Theta} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi}, \quad H_r = 0,$$

$$H_\Theta = -\frac{i k \varepsilon}{r \sin \Theta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad H_\varphi = \frac{i k \varepsilon}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial \Theta}.$$



Це – ТМ чи Е – заміна, оскільки $H_r = 0$. Аналогічно можна зробити Н – заміну:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_r = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + k^2 \varepsilon \mu V \\ E_r = 0 \\ \dots \end{array} \right.$$

Ми будемо використовувати Е – заміну, перейшовши до потенціалу U , в результаті одержимо: $\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right] + k^2 \varepsilon \mu U = 0$.

Щоб отримати саме хвильове рівняння, де була б ще й похідна $\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$,

необхідно зробити заміну: $\begin{cases} V = rV' \\ U = rU' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta U' + k^2 \varepsilon \mu U' = 0 \\ \Delta V' + k^2 \varepsilon \mu V' = 0 \end{cases}$. Потенціали V' та U'

називають потенціалами Дебаю. Вони мають методичне значення. Розв'яжемо простіше рівняння для U та V - методом відокремлених змінних:

$$U(r, \Theta, \varphi) = R(r)Y(\Theta, \varphi) \text{ тоді } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial Y}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda Y = 0 \\ \left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \left(\varepsilon \mu k^2 - \frac{\lambda}{r^2} \right) R = 0 \quad r \leq a \right. \\ \left. \frac{d^2 R}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{\lambda}{r^2} \right) R = 0 \quad r \geq a \right] \end{array} \right.$$

Рівняння для Y - це рівняння Лежандра. Його розв'язки - поліноми Лежандра. Рівняння для R можна звести до рівняння Бесселя заміною $x = kr\sqrt{\varepsilon\mu}, r \leq a \Rightarrow \frac{d^2 R}{dx^2} + \left(1 - \frac{\lambda}{x^2}\right)R = 0$. Це рівняння для сферичних функцій Бесселя (або функцій Бесселя напівцілого вигляду). Стандартний вигляд рівняння: $\frac{d^2 R}{dx^2} + \left(1 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2}\right)R = 0$, його розв'язки ($\lambda = \nu(\nu+1)$):

$$R = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{\nu+1/2}(x), r \leq a = \Psi_\nu(x)$$

$$R = \sqrt{\frac{\pi x'}{2}} H_{\nu+1/2}^{(2)}(x'), r \geq a = h_\nu^{(2)}(x')$$

Таким чином розв'язки:

$$U^i = A \Psi_\nu(k\sqrt{\varepsilon\mu}r) P_\nu(\cos\Theta) \quad r \leq a$$

$$U^e = B h_\nu^{(2)}(kr) P_\nu(\cos\Theta) \quad r \geq a$$

Щоб використати граничні умови, необхідно виразити E_φ, E_Θ через U .

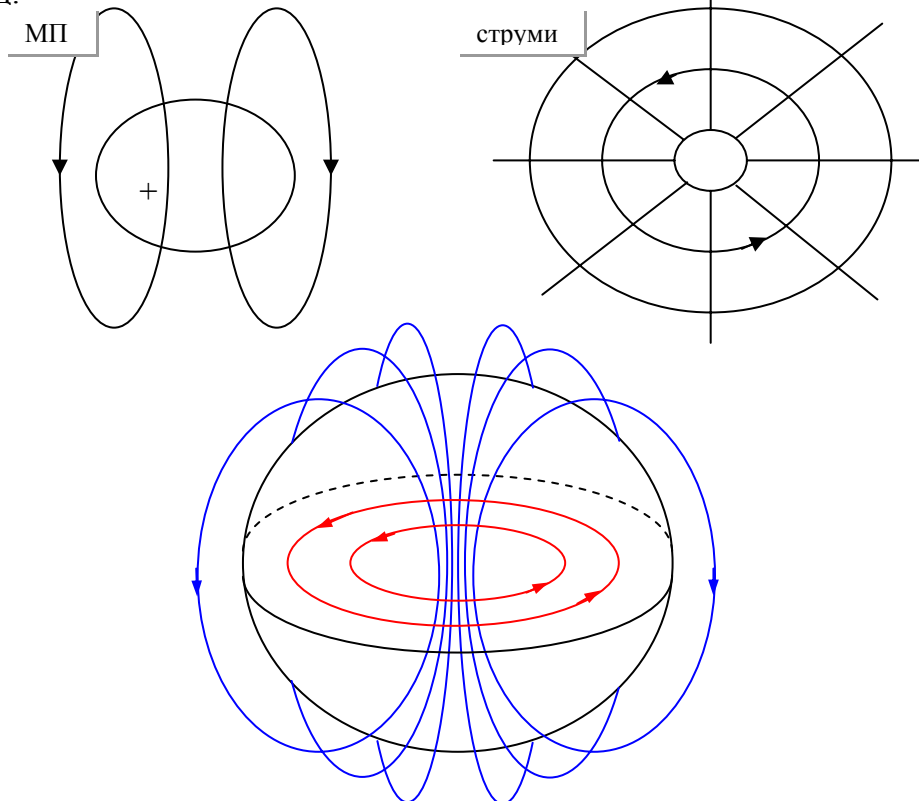
$$E_\varphi^i = E_\varphi^e|_{r=a}, \quad E_\Theta^i = E_\Theta^e|_{r=a}$$

отримаємо два рівняння для A та B , причому A і B будуть відмінні від нуля лише тоді, коли \det системи рівна нулю. Користуючись виразами для E_φ та E_Θ ,

отримаємо: $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\Psi_\nu'(k\sqrt{\varepsilon\mu}a)}{\Psi_\nu(k\sqrt{\varepsilon\mu}a)} = \frac{h_\nu^{(2)'}(ka)}{h_\nu^{(2)}(ka)}$ з цього рівняння отримаємо

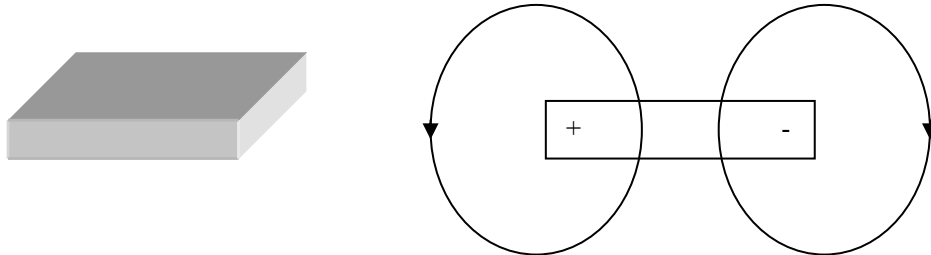
$k \in \{k_{рез1}, k_{рез2}, \dots\}$. Для $\varepsilon, \mu \gg 1$: $k_{рез1} \sqrt{\varepsilon\mu}a = \pi \Rightarrow \lambda_{x_{рез}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = D = 2a$. Поле має

вигляд:



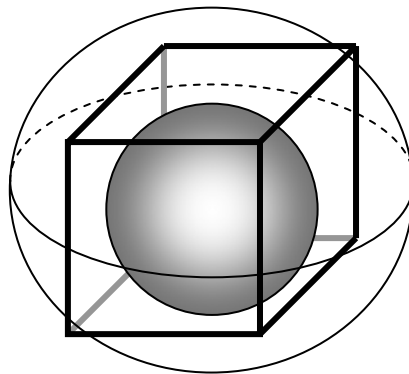
Таким чином, поля тут ідуть таким же чином, як і в кільці, по якому біжить струм.

Це була строга, точна теорія резонаторів сферичної форми. Проте, їх важко виготовляти, вони незручні у використанні. Використовують:

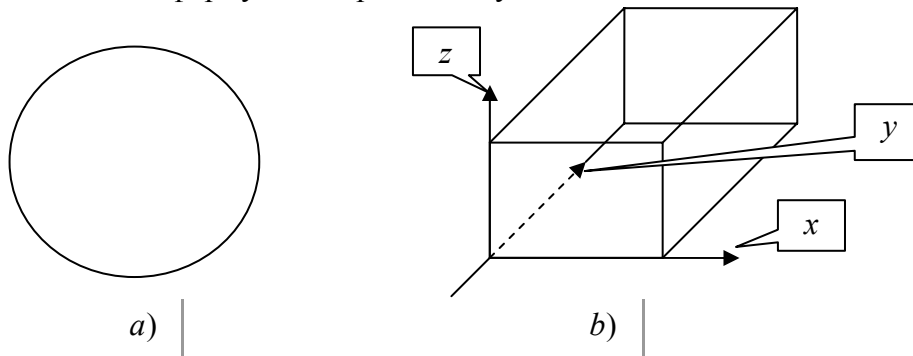


Розрахувати таку систему неможливо, бо немає регулярних граничних умов (наприклад при $x = 0$).

Можна вважати, що резонансна частота є проміжним значенням між резонансною частотою у вписаній та описаній кулі.



Відмінність формування граничних умов:



a) - регулярна гранична умова $E^i = E^e \Big|_{r=a}$

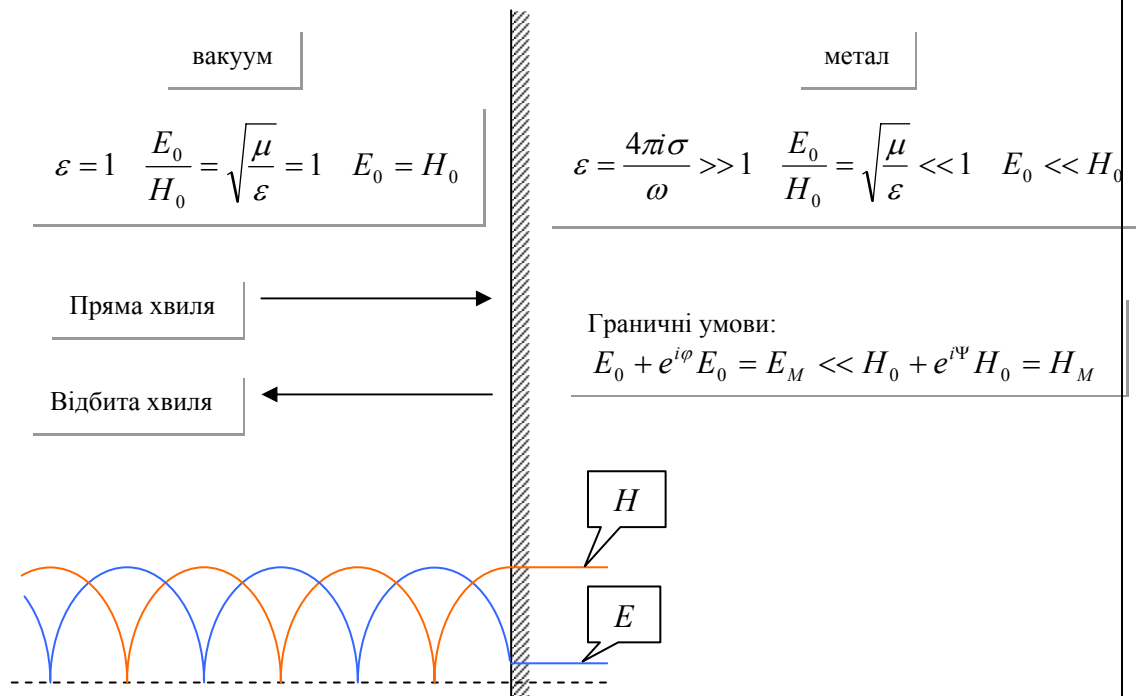
b) - нерегулярна гранична умова $E^i = E^e \Big|_{\substack{x=0 \\ 0 < y < a \\ 0 < z < a}}$

Коли є металева поверхня, можна записати $E_\tau \Big|_{y=0} = 0$. Це так звані електричні стінки.

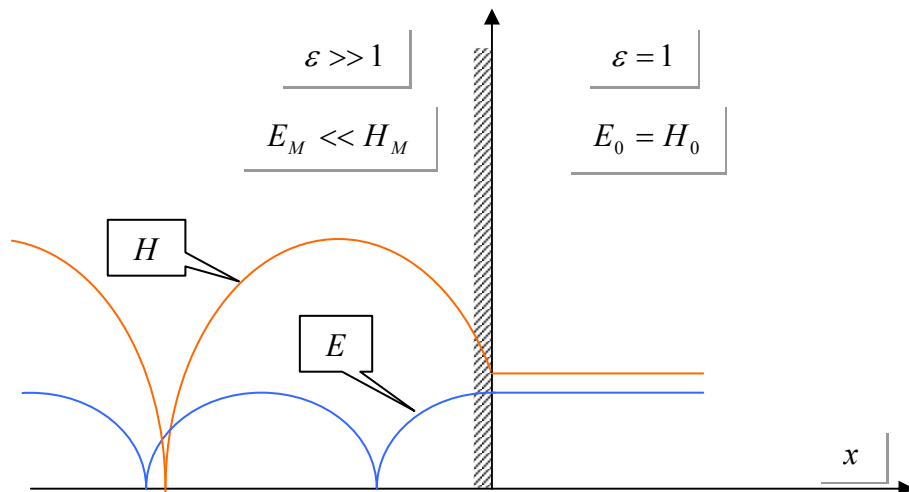
Лекція 16

Метод магнітної стінки.

Він застосовується при аналізі діелектричних резонаторів.



Обернена ситуація – хвиля виходить з металу (або діелектрика) в вакуум.



Зліва – стояча хвиля, справа – біжуча, звичайна, зі сталою амплітудою.

Тільки таким чином можна досягти виконання умов: $E_M \ll H_M$, $E_0 = H_0$; якщо на границі ЕП має максимум, а МП – мінімум (вузол).

В середині з великим ε ЕП сильно поглинається, а МП залишається сталим.

Магнітна стінка виникає при виході хвилі з діелектрика з $\varepsilon \gg 1$. Це означає, що на межі $H_\tau = 0$ (на відміну від електричної стінки, яка утворюється при виході хвилі, де $E_\tau = 0$).

Метал: $E_r = 0$.

Діелектрик $\varepsilon \gg 1$: $H_r = 0$.

Самостійно: Знайти умови існування хвилі, частоти за аналогією з задачею для металу.

Вимушені коливання.

Лема Лоренца і теорема взаємності.

В лінійних полях немає взаємодії між полями. Однак, існують випадки, коли лінійні поля впливають одне на одне. Уявимо, що є два незалежних ЕМ-процеси:

$$\begin{aligned} \times H_2 \Big| \text{rot} \overset{\rho}{E}_1 &= ik\mu \overset{\rho}{H}_1 & \text{rot} \overset{\rho}{H}_1 &= -ik\varepsilon \overset{\rho}{E}_1 + \frac{4\pi}{c} \overset{\rho}{j}_1 \times (-E_2) \\ \times H_1 \Big| \text{rot} \overset{\rho}{E}_2 &= ik\mu \overset{\rho}{H}_2 & \text{rot} \overset{\rho}{H}_2 &= -ik\varepsilon \overset{\rho}{E}_2 + \frac{4\pi}{c} \overset{\rho}{j}_2 \times (-E_1) \end{aligned}$$

$$\overset{\rho}{H}_2 \text{rot} \overset{\rho}{E}_1 - \overset{\rho}{E}_1 \text{rot} \overset{\rho}{H}_2 = ik(\varepsilon \overset{\rho}{E}_1 \overset{\rho}{E}_2 + \mu \overset{\rho}{H}_1 \overset{\rho}{H}_2) - \frac{4\pi}{c} \overset{\rho}{j}_2 \overset{\rho}{E}_1 \quad (*)$$

$$\overset{\rho}{H}_1 \text{rot} \overset{\rho}{E}_2 - \overset{\rho}{E}_2 \text{rot} \overset{\rho}{H}_1 = ik(\varepsilon \overset{\rho}{E}_1 \overset{\rho}{E}_2 + \mu \overset{\rho}{H}_1 \overset{\rho}{H}_2) - \frac{4\pi}{c} \overset{\rho}{j}_1 \overset{\rho}{E}_2 \quad (**)$$

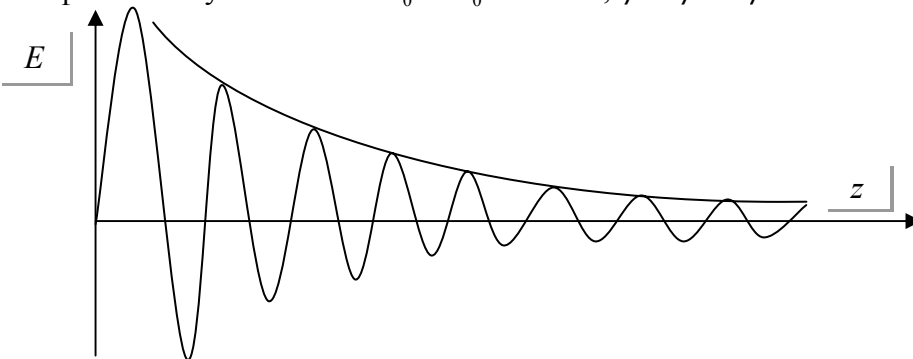
$$\text{div}[\overset{\rho}{A}\overset{\rho}{B}] = \overset{\rho}{B} \text{rot} \overset{\rho}{A} - \overset{\rho}{A} \text{rot} \overset{\rho}{B}$$

(*)-(**) $\Rightarrow \text{div}[\overset{\rho}{E}_1 \overset{\rho}{H}_2] - \text{div}[\overset{\rho}{E}_2 \overset{\rho}{H}_1] = \frac{4\pi}{c} (\overset{\rho}{j}_1 \overset{\rho}{E}_2 - \overset{\rho}{j}_2 \overset{\rho}{E}_1)$ - диференціальний вигляд леми Лоренца.

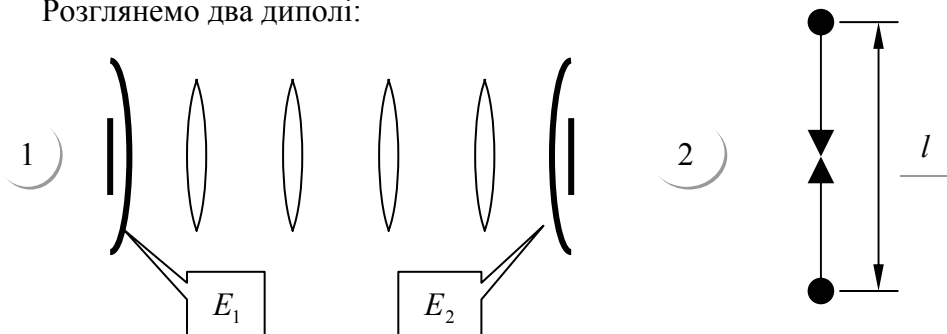
$\oiint \{[\overset{\rho}{E}_1 \overset{\rho}{H}_2] - [\overset{\rho}{E}_2 \overset{\rho}{H}_1]\} \rho dS = \frac{4\pi}{c} \int_V (\overset{\rho}{j}_1 \overset{\rho}{E}_2 - \overset{\rho}{j}_2 \overset{\rho}{E}_1) dV$ - лема Лоренца. (поля не незалежні, а залежать одне від одного).

Розглянемо ситуацію, коли $s \rightarrow \infty, r \rightarrow \infty$: $\int_{V \rightarrow \infty} (\overset{\rho}{j}_1 \overset{\rho}{E}_2 - \overset{\rho}{j}_2 \overset{\rho}{E}_1) dV = 0$, бо на ∞

всі фотони затухають. $E = E_0 = E_0 e^{-i\beta'z} e^{-\beta''z}$, $\beta = \beta' + i\beta''$.



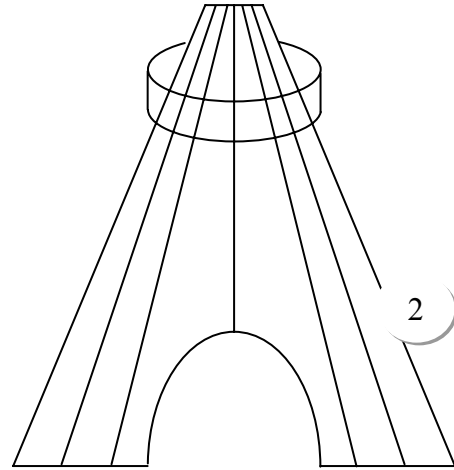
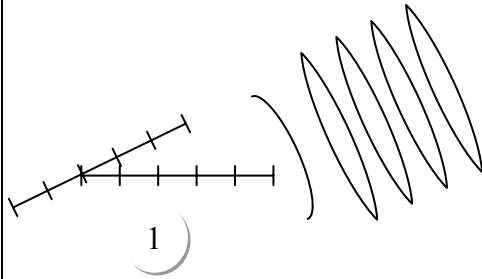
Розглянемо два диполі:



$$\int j_1 E_2 dV = \int j_1 \delta(r - r_1) E_2 dV = j_1 E_2(r_1) = eV E_2(r_1) = e \frac{dl}{dt} E_2(r_1) = ei\omega e E_2(r_1) = i\omega p_1 \overset{p}{E}_2(r_1)$$

$\overset{p}{p}_1 \overset{p}{E}_2(r_1)$ - енергія першого диполя у полі $\overset{p}{E}_2$.

$\overset{p}{p}_1 \overset{p}{E}_2(r_1) = \overset{p}{p}_2 \overset{p}{E}_2(r_2)$ - теорема взаємності.



Приймач не тільки приймає, але й випромінює. Для того, щоб десь збудити поле, потрібно, щоб це поле збуджувало струм в нашій антені тобто потрібно розмістити антену в центрі, де поле найбільше.

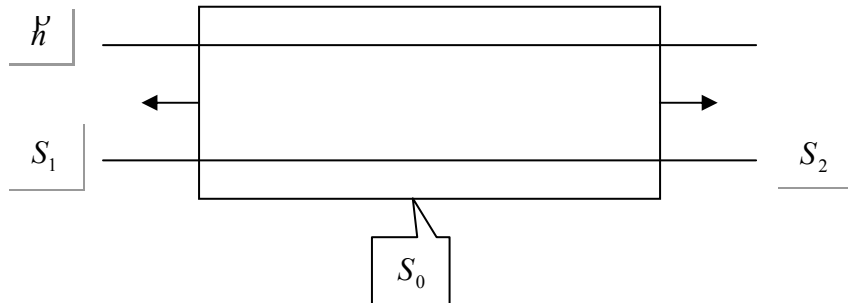
Збудження хвиль у хвильоводі.

У хвильоводі можуть існувати лише E та H – хвилі.

Лекція 17

Ортогональність власних хвиль у хвильоводі.

Запишемо лему Лоренца для цього випадку. (β - стала розповсюдження.)



У вигляді хвилі візьмемо властивість хвилі у хвильоводі:
 $E_1, H_1 \rightarrow E_{H_{10}}, H_{H_{10}}; E_{H_{20}}, H_{H_{20}} \rightarrow H_s, E_s$ - позначення.

$$S = \{H_{01}, H_{02}, \dots, H_{11}, \dots, E_{11}, E_{12}, \dots, E_{nm}\}$$

$$\oint \mathbf{J} = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_0} = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = \iint_{S_1} \{[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{s'}] - [\mathbf{E}_{s'} \mathbf{H}_s]\} \rho dS + \iint_{S_2} \{[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{s'}] - [\mathbf{E}_{s'} \mathbf{H}_s]\} \rho dS = 0$$

бо розглядаємо власні хвилі і зовнішніх струмів немає. Таким чином:

$$-\iint_{S_1} \{[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{s'}] - [\mathbf{E}_{s'} \mathbf{H}_s]\} \rho dS + \iint_{S_2} \{[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{s'}] - [\mathbf{E}_{s'} \mathbf{H}_s]\} \rho dS = 0 \Rightarrow \iint_{S_1} = \iint_{S_2}$$

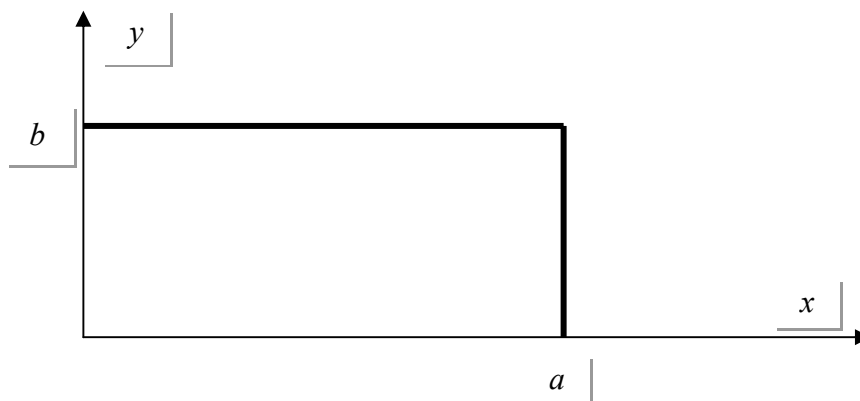
Незалежно від поверхні $\iint_{S_{\perp}} \left\{ \left[\begin{matrix} \rho & \rho \\ \sim e^{-i\beta_s z} & \sim e^{-i\beta_{s'} z} \end{matrix} \right] - [\mathbf{E}_{s'} \mathbf{H}_s] \right\} \rho dS = \text{Const} = \frac{4\pi}{c} N_s \delta_{s-s'}$

Для того, щоб це була константа, необхідно $\beta_s + \beta_{s'} = 0 \Rightarrow \beta_s = -\beta_{s'} \Rightarrow s' = s$. Сталість не буде залежати від z , коли хвиля йде \rightarrow , і також хвиля йде \leftarrow ; для всіх інших хвиль $= 0$.

$$\int_0^{2\pi} \text{Cos} m \varphi \text{Cos} n \varphi d\varphi = \begin{cases} 0, m \neq n \left(\text{або } e^{i\beta z} e^{-i\beta z} = \text{Const} \right) \\ N, m = n \left(\dots \right) \end{cases}$$

$$\iint_{S_1} \{[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{s'}] - [\mathbf{E}_{s'} \mathbf{H}_s]\} \rho dS = \frac{4\pi}{c} N_s \delta_{s-s'}$$

Підрахуємо норму хвилі (співвідношення ортогональне) для хвилі $S = H_{10} \rightarrow z; S' = H_{10} \leftarrow z$.



$$H_x^{H_{10}} = \pm i \frac{\lambda_{kp}}{\lambda_{x6}} \text{Sin} \frac{\pi}{a} x \cdot e^{i\beta z}, \quad E_y^{H_{10}} = i \frac{\lambda_{kp}}{\lambda_0} \text{Sin} \frac{\pi}{a} x \cdot e^{-i\beta z}.$$

$$- \iint_{S_1} \left\{ \left[i \frac{\lambda_{kp}}{\lambda_0} \text{Sin} \frac{\pi}{a} x \cdot e^{-i\beta z} \left(-i \frac{\lambda_{kp}}{\lambda_{x6}} \text{Sin} \frac{\pi}{a} x \cdot e^{i\beta z} \right) \right] - \left[i \frac{\lambda_{kp}}{\lambda_{x6}} \text{Sin} \frac{\pi}{a} x \cdot e^{i\beta z} \left(i \frac{\lambda_{kp}}{\lambda_0} \text{Sin} \frac{\pi}{a} x \cdot e^{-i\beta z} \right) \right] \right\} dx dy =$$

$$= -2 \int_0^a \int_0^b \frac{(\lambda_{kp})^2}{\lambda_{x6} \lambda_0} \text{Sin}^2 \frac{\pi x}{a} dx dy = -2b \frac{(\lambda_{kp})^2}{\lambda_{x6} \lambda_0} \int_0^a \text{Sin}^2 \frac{\pi x}{a} dx = -ab \frac{(\lambda_{kp})^2}{\lambda_{x6} \lambda_0}$$

- це N_S . Доведемо ортонормованість. Уявимо, що є деякий хвильовід і струми (див. Мал.)



$\begin{matrix} \vec{E} = \sum C_s \vec{E}_s \\ \vec{H} = \sum C_s \vec{H}_s \end{matrix} \Big| \vec{E} = \sum C_{-s} \vec{E}_{-s} \\ \vec{H} = \sum C_{-s} \vec{H}_{-s}$. Звернемося до леми Лоренца. Будемо вважати, що: $\{\vec{E}_1, \vec{H}_1\} \rightarrow \{\vec{E}, \vec{H}\}$, $\{\vec{E}_2, \vec{H}_2\} \rightarrow \{\vec{E}_{-s}, \vec{H}_{-s}\}$ - зворотна власна хвиля.

$$\oint_{S_1+S_2+S_0} = \iint_{S_1} + \iint_{S_2}$$

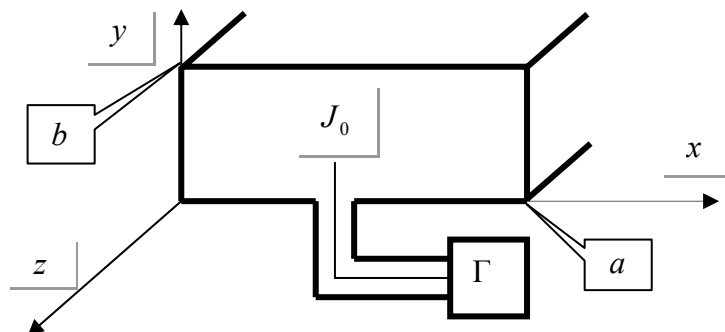
$$\iint_{S_1} = \iint_{S_1} \{ [\vec{E} \vec{H}_{-s}] - [\vec{E}_{-s} \vec{H}] \} dS = \iint_{S_1} \left\{ \left[\sum_{S'} (C_{-s'}, \vec{E}_{-s'}) \vec{H}_{-s} \right] - \left[\vec{E}_{-s} \sum_{S'} (C_{-s'}, \vec{H}_{-s'}) \right] \right\} dS =$$

$$= \iint_{S_1} \left\{ \left[\sum_{S'} (C_{-s'}, \vec{E}_{-s'}) \vec{H}_{-s} \right] - \left[\vec{E}_{-s} \sum_{S'} (C_{-s'}, \vec{H}_{-s'}) \right] \right\} dS = 0$$

$$\iint_{S_2} \left\{ \left[\sum_k (C_k, \vec{E}_k) \vec{H}_{-s} \right] - \left[\vec{E}_{-s} \sum_{S'} (C_k, \vec{H}_k) \right] \right\} dS = C_s \frac{4\pi}{c} N_s$$

$$C_s \frac{4\pi}{c} N_s = - \frac{4\pi}{c} \int j_i E_2 dV$$

$C_s = f(j)$ - формула для визначення коефіцієнтів через струми.



Нехай, наприклад, у прямокутному хвильоводі через отвір у точці $(x_1, 0, z_1)$ введений стержень, по якому від генератора Γ йде струм J_0 . Необхідно розрахувати амплітуду хвилі H_{10} . $C_{H_{10}} = \frac{1}{N_{H_{10}}} \int j E_{H_{10}} dV$, де

$$j = J_0 \delta(x - x_1) \delta(z - z_1), \quad E_{H_{10}} = i \frac{\lambda_{kp}}{\lambda_0} \text{Sin} \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z}. \quad \text{Отже}$$

$$C_{H_{10}} = -\frac{\lambda_{xв} \lambda_0}{ab \lambda_{kp}^2} \int J_0 \delta(x - x_1) \delta(z - z_1) i \frac{\lambda_{kp}}{\lambda_0} \text{Sin} \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z} dx dy dz = -\frac{\lambda_{xв}}{ab \lambda_{kp}} J_0 \text{Sin} \frac{\pi x_1}{a} e^{-i\beta z_1} h$$

$$E_{y_{H_{10}}} = \left(-\frac{i \lambda_{xв}}{ab \lambda_{kp}} J_0 \text{Sin} \frac{\pi x_1}{a} e^{-i\beta z_1} h \right) i \frac{\lambda_{kp}}{\lambda_0} \text{Sin} \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta z}, \text{ бачимо, що амплітуда хвиль}$$

максимальна, якщо $x_1 = \frac{a}{2}$, і дорівнює нулю, коли стержень коло стінки: $x_1 = 0$.

Лекція 18

Збудження об'ємних резонаторів.

1. Доведемо ортонормованість власних функцій резонатора.

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E}_S &= ik_S \mu \vec{H}_S \quad (1) \\ \text{rot} \vec{H}_S &= ik_S \varepsilon \vec{E}_S \quad (2) \end{aligned}, \quad j = 0, \text{ бо задача про власні коливання розв'язується}$$

без струмів. Для другого коливання:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E}_{S'} &= ik_{S'} \mu \vec{H}_{S'} \quad (3) \\ \text{rot} \vec{H}_{S'} &= ik_{S'} \varepsilon \vec{E}_{S'} \quad (4) \end{aligned}$$

$$(1) \times H_{S'} + (4) \times E_S : \text{div} [\vec{E}_S \vec{H}_{S'}] = ik_S \mu \vec{H}_S \vec{H}_{S'} + ik_{S'} \varepsilon \vec{E}_S \vec{E}_{S'},$$

$$(3) \times H_S + (2) \times E_{S'} : \text{div} [\vec{E}_{S'} \vec{H}_S] = ik_{S'} \mu \vec{H}_{S'} \vec{H}_S + ik_S \varepsilon \vec{E}_{S'} \vec{E}_S.$$

Проінтегрувавши обидві рівності по всьому об'єму та врахувавши властивості div векторного добутку, отримаємо:

$$\int k_S \varepsilon \vec{E}_S \vec{E}_{S'} dV = - \int k_S \mu \vec{H}_S \vec{H}_{S'} dV,$$

$$\int k_{S'} \varepsilon \vec{E}_{S'} \vec{E}_S dV = - \int k_{S'} \mu \vec{H}_{S'} \vec{H}_S dV.$$

Враховуючи, що $k_S = \frac{\omega_S}{c}$ та позначивши $\int \varepsilon \vec{E}_S \vec{E}_{S'} dV = x$; $\int \mu \vec{H}_S \vec{H}_{S'} dV = y$

маємо лінійну однорідну систему відносно x, y з коефіцієнтами ω_S та $\omega_{S'}$:

$$\begin{cases} \omega_{S'} x + \omega_S y = 0 \\ \omega_S x + \omega_{S'} y = 0 \end{cases}. \text{ Система має нетривіальні розв'язки якщо } \det = 0;$$

$$\omega_{S'}^2 - \omega_S^2 = 0 \Rightarrow \omega_{S'} = \omega_S. \quad \text{Тоді} \quad x = -y, \quad \text{тобто}$$

$$\int \varepsilon \vec{E}_S \vec{E}_{S'} dV = - \int \mu \vec{H}_S \vec{H}_{S'} dV = \dots = 4\pi N_S \delta_{SS'}. \quad \text{Таким чином маємо}$$

ортонормованість власних функцій резонатора з нормою $4\pi N_S \delta_{SS'}$, яку легко знайти.

2. Знайдемо поля \vec{E} та \vec{H} всередині резонатора при наявності струмів.

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = ik \mu \vec{H} \\ \text{rot} \vec{H} = ik \varepsilon \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{cases} \text{ - рівняння Максвела.}$$

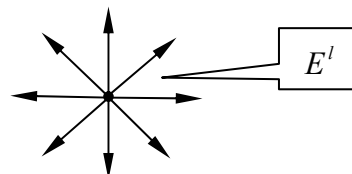
Псевдовектор в математиці – вектор, що змінює свій напрямок при інверсії системи координат (напрямок, векторний добуток). У фізиці псевдовектор змінює напрямок при інверсії часу ($t \rightarrow -t$). Наприклад, при інверсії часу електрон починає обертатися в протилежному напрямку, а відповідно змінює і напрямок МП.

Таким чином, МП – псевдовектор, ЕП – вектор. Звідси можна зробити висновок, що гамільтоніан не може містити $\vec{H}, \vec{H}^3, \dots$ (щоб він був інваріантний до інверсії часу). Ще один висновок – що немає *магнітного п'єзо ефекту*.

Існує ще одна класифікація:
соленоїдальні та потенціальні.

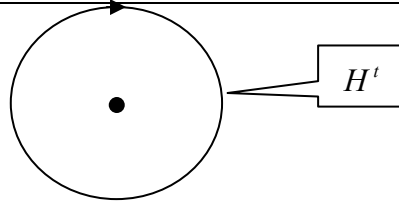
Потенціальний (поздовжній):

$$\text{rot} \vec{E}^l = 0 \text{ - немає вихорів.}$$



Соленоїдальний (поперечний):

$\text{div} H^t = 0$ - немає вузлів.



Записавши $E = \sum C_s \overset{P}{E}_s$ ми зробили помилку, бо не врахували потенційні поля, пов'язані з електростатичними полями зарядів, що збуджують струми.

Отже, $\overset{P}{H} = \overset{P}{H}^t + \overset{P}{H}^l$, $\overset{P}{E} = \overset{P}{E}^t + \overset{P}{E}^l$, де $\overset{P}{H}^t = \sum B_s \overset{P}{H}_s$, $\overset{P}{E}^t = \sum B_s \overset{P}{E}_s$.

Взагалі то, $\overset{P}{H}^l = 0$, бо магнітних зарядів не існує. Проте, є припущення про існування магнітних зарядів – монополі Дірака; тоді $\overset{P}{H}^l \neq 0$.

$$\text{rot} \overset{P}{E} = \text{rot}(\overset{P}{E}^t + \overset{P}{E}^l) = \text{rot} \overset{P}{E}^t + \text{rot} \overset{P}{E}^l = 0 + \text{rot} \sum A_s \overset{P}{E}_s = \sum A_s i k_s \mu \overset{P}{H}_s,$$

$$\text{rot} \overset{P}{H} = \text{rot} \overset{P}{H}^t = \dots = \sum B_s (i \epsilon k_s) \overset{P}{E}_s.$$

Підставимо в рівняння Максвела:

$$\begin{cases} (a) \quad \sum A_s i k_s \mu \overset{P}{H}_s = i k \mu \sum B_s \overset{P}{H}_s \\ (b) \quad -\sum B_s i k_s \epsilon \overset{P}{E}_s = -\left(i k \sum A_s \overset{P}{E}_s + \overset{P}{E}^l \right) + \frac{4\pi}{c} j. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Прирівнявши} \\ \text{відповідні} \end{array}$$

коєфіцієнти при базисних функціях $\overset{P}{H}_s$ та $\overset{P}{E}_s$, одержимо $A_s k_s = B_s k$ - з рівняння а). Оскільки $\text{div} \text{rot} \overset{P}{H} = 0$, то $\text{div} \left(-\left(i k \epsilon \sum [A_s \overset{P}{E}_s + \overset{P}{E}^l] \right) + \frac{4\pi}{c} j \right) = 0$.

$$\text{div} \overset{P}{E}_s = 0 \Rightarrow \text{div} \left(\frac{4\pi}{c} j - i k \epsilon \overset{P}{E}^l \right) = 0. \quad \text{div} j = \frac{\partial \rho}{\partial t}; \quad \rho = \rho_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = i \omega \rho.$$

Таким чином, для гармонічних полів: $\text{div} j = -i \omega \rho$. Тоді $-\frac{4\pi}{c} i \omega \rho - \text{div} (i k \omega \overset{P}{E}^l) = 0$. Використаємо $\overset{P}{E}^l = -\text{grad} \varphi$, $\text{div} \overset{P}{E}^l = -\Delta \varphi$.

$k \epsilon \Delta \varphi - \frac{4\pi}{c} \omega \rho = 0$, $\Delta \varphi = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho$ бо $k = \omega/c$. Таким чином, довели строге рівняння Пуансона для електростатичної частини полів.

Проінтегруємо (b) по V , попередньо помноживши на E_s :

$$\int E_s dV \left(\sum (-i k_s B_s \overset{P}{E}_s) = -i k \epsilon \sum A_s E_s + \frac{4\pi}{c} j - i k \epsilon E^l \right)$$

$$\int dV i \epsilon \sum (k A_s - k_s B_s) \overset{P}{E}_s \overset{P}{E}_{s'} = \int dV \frac{4\pi i}{c} j E_s \int i k \epsilon E$$

$$i \epsilon \left(\begin{array}{c} k A_{s'} - k_{s'} B_s \\ \frac{\omega}{c} \quad \frac{\omega_{s'}}{c} \end{array} \right) 4\pi N_{s'} = \frac{4\pi}{c} \int j E_s dV.$$

В результаті отримуємо: $\begin{cases} \omega A_{s'} - \omega_{s'} B_{s'} = \frac{1}{N_s i \epsilon} \int j E_s dV = \epsilon \\ \omega_{s'} A_{s'} - \omega B_{s'} = 0 \end{cases}$, маємо систему

двох рівнянь з двома невідомими. Амплітуда $A_{s'} = \frac{\epsilon \omega}{\omega^2 - \omega_{s'}^2}$.

Ми отримали формулу для резонансного збудження. Тут не враховано дисипацію, тому можливо $A_{S'} \rightarrow \infty$. Якщо дисипацію врахувати наступним чином: $\omega_{S'} \rightarrow \omega_{S'} + i\omega_r$, то отримаємо Лоренцівську резонансну криву:

$$A_{S'} = \frac{\varepsilon\omega}{\omega^2 - \omega_S^2 + 2i\omega_S\omega_r}.$$

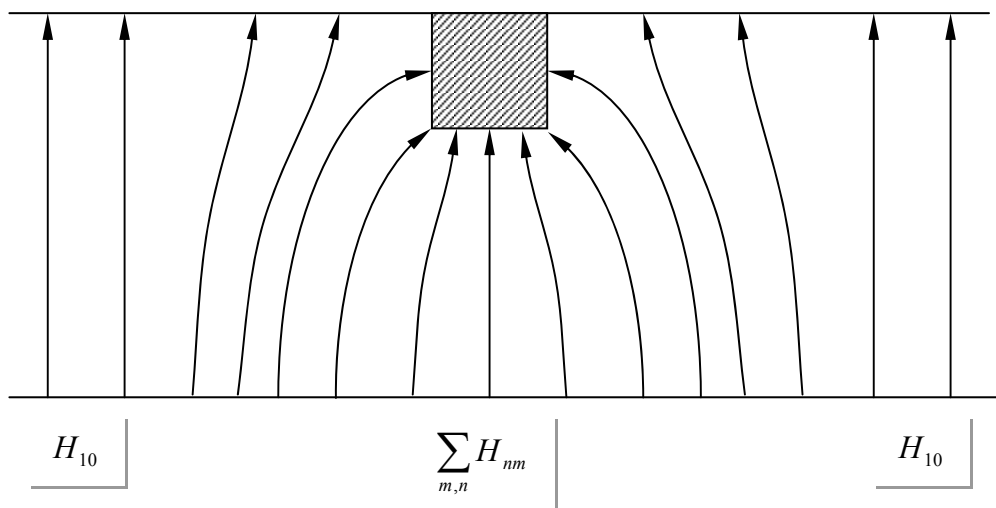
Лекція 19

Неоднорідності у хвильоводі.

Неоднорідності є в будь-якому хвильоводі, вони мають різний характер. Для цих систем поля можна розбити на:

1. Дальню зону (де не відчувається неоднорідність).
2. Близню зону (неоднорідність відчувається суттєво).

Наприклад, якщо буде заклепка на стінці хвильовода, то:

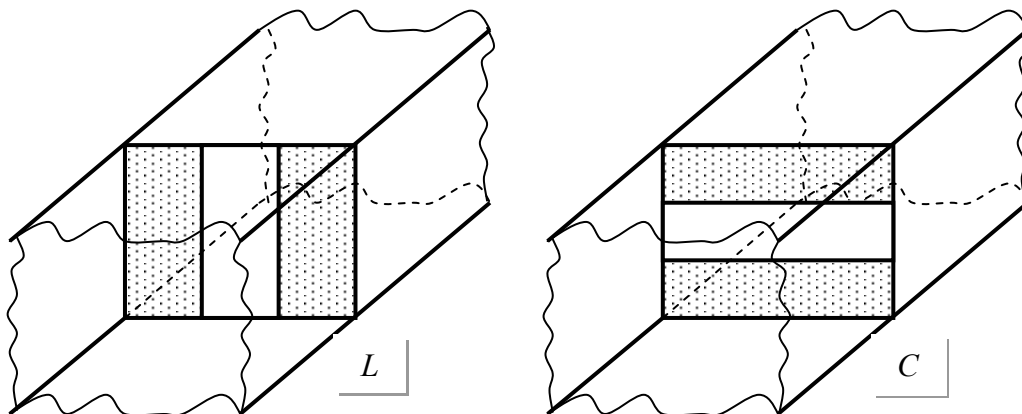


По хвильоводу буде розповсюджуватися лише одна хвиля λ_{xg} за рахунок вибору розмірів. Отже, біля неоднорідності буде зона з енергією, яка не розповсюджується. Тому це деякий еквівалент індуктивності або ємності.

Нам необхідно:

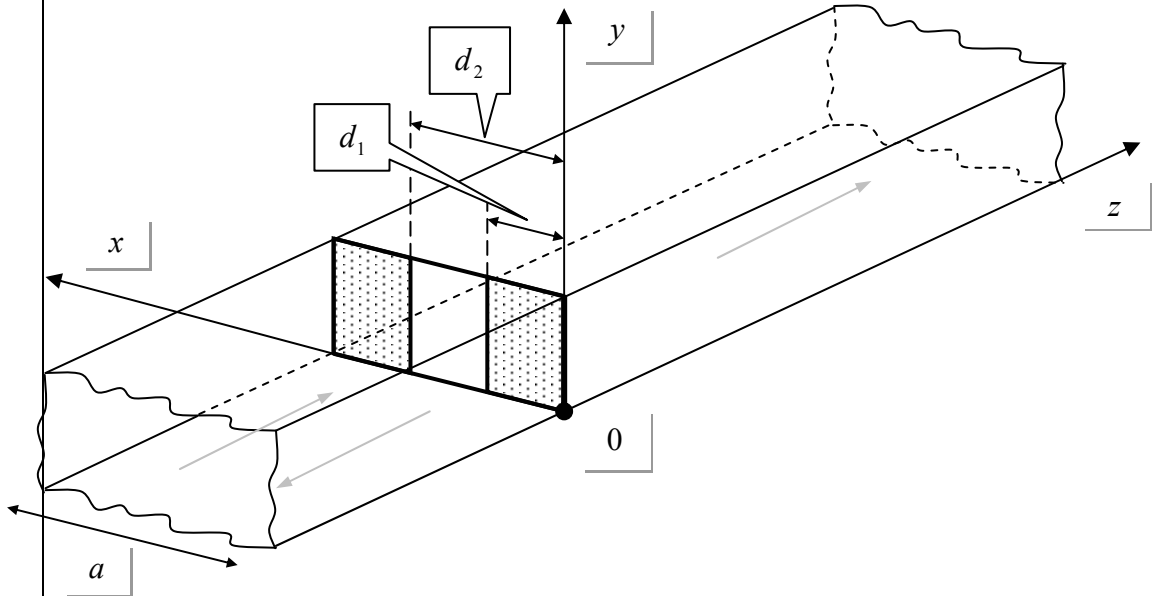
1. Розв'язати рівняння Максвела і знайти Γ (коефіцієнт відбиття) і T (коефіцієнт прозорості), далі в позначеннях p та t .
2. $\Gamma = \frac{z - z_0}{z + z_0}$, де z_0 - лінія, z - перешкода, тобто отримуємо z знаючи Γ .
 $z = z'_0 + iz''_0$.

Розглянемо неоднорідність яка називається *Діафрагма*. Вона може бути індуктивна чи ємнісна у залежності від опору.



Діафрагма.

Ми розглянемо лише індуктивну діафрагму, для іншої – аналогічно.



Припущення:

1. діафрагма нескінченно тонка і розташована у площині $z = 0$.
2. Симетрія задачі така, що крім хвилі Н інших хвиль не існує.

Тоді можна записати, що при $z < 0$:

$$E_y^{(1)} = \text{Sin} \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_1 z} + p \text{Sin} \frac{\pi x}{a} e^{i\beta_1 z} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \text{Sin} \frac{m\pi x}{a} e^{i\beta_m z}, \text{ тобто хвиля є сумою прямої,}$$

відбитої (p – коефіцієнт відбиття) хвилі та вищих хвиль, що виникають на діафрагмі. Всі інші компоненти розраховуються за допомогою системи рівнянь Максвелла:

$$H_x^{(1)} = \frac{i}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_y^{(1)}}{\partial z} = \frac{i}{\omega\mu_0} \left[-i\beta_1 \text{Sin} \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_1 z} + i\beta_1 p \text{Sin} \frac{\pi x}{a} e^{i\beta_1 z} + i \sum_{m=1}^{\infty} a_m \beta_m \text{Sin} \frac{m\pi x}{a} e^{i\beta_m z} \right]$$

$$H_z^{(1)} = -\frac{i}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_y^{(1)}}{\partial x} = \frac{-i}{\omega\mu_0} \left[\frac{\pi}{a} \text{Cos} \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_1 z} + \frac{\pi}{a} p \text{Sin} \frac{\pi x}{a} e^{i\beta_1 z} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{\pi m}{a} \text{Cos} \frac{m\pi x}{a} e^{i\beta_m z} \right]$$

Таким чином, ми маємо всі компоненти поля зліва від діафрагми. Тепер запишемо хвилю справа ($z > 0$): $E_y^{(2)} = t \cdot \text{Sin} \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_1 z} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{Sin} \frac{m\pi x}{a} e^{-i\beta_m z}$, де t - коефіцієнт пропускання (діафрагма генерує в обох напрямках).

$$H_x^{(2)} = \frac{i}{\omega\mu_0} \left[-i\beta_1 t \cdot \text{Sin} \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_1 z} - \sum_{m=1}^{\infty} i b_m \beta_m \text{Sin} \frac{m\pi x}{a} e^{-i\beta_m z} \right]$$

$$H_z^{(2)} = \frac{-i}{\omega\mu_0} \left[\frac{\pi}{a} \text{Cos} \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_1 z} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{\pi m}{a} \text{Cos} \frac{m\pi x}{a} e^{-i\beta_m z} \right]$$

Таким чином ми розв'язали рівняння Максвелла, не розв'язуючи їх. (Зуваження: ми не враховували електростатичних полів). Тепер запишемо розв'язки справа та зліва, наклавши граничні умови при $z = 0$ (всі поля повинні бути неперервні):

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq d_1 : E_y^{(1)} = E_y^{(2)} = 0; H_z^{(1)} = H_z^{(2)} = 0 \\ d_2 \leq x \leq a \end{cases}$$

$$d_1 \leq x \leq d_2 : E_y^{(1)} = E_y^{(2)} = \Psi(x); \begin{matrix} H_z^{(1)} = H_z^{(2)} \\ H_x^{(1)} = H_x^{(2)} \end{matrix}$$

Розглянемо:

1. Граничні умови для H_z : $H_z^{(1)} = H_z^{(2)} = \begin{cases} 0, x \in [0, d_1] \cup [d_2, a] \\ -\frac{i}{\omega\mu_0} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, x \in [d_1, d_2] \end{cases}$

$$\frac{-i}{\omega\mu_0} \left[\frac{\pi}{a} (1+p) \cos \frac{\pi x}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{\pi m}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \right] = \begin{cases} -\frac{i}{\omega\mu_0} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ 0 \end{cases}, \text{ помножимо це}$$

рівняння на $\cos \frac{\pi x m}{a}$ і проінтегруємо від 0 до a , в результаті

$$\text{одержимо: } 1+p = \frac{2}{\pi} \int_{d_1}^{d_2} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \cos \frac{\pi \eta}{a} d\eta; \quad (*), \quad a_m = \frac{2}{m\pi} \int_{d_1}^{d_2} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \cos \frac{m\pi \eta}{a} d\eta.$$

Роблячи те саме для поля справа від діафрагми $H_z^{(2)}$, одержимо:
 $t = 1+p, b_m = a_m.$

2. Підставляючи t, a_m, b_m в рівняння для H_x і провівши аналогічні розрахунки, отримаємо наступне рівняння:

$$(**) \quad ip\beta_1 \sin \frac{\pi x}{a} = -i \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2\beta m}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{a} \int_{d_1}^{d_2} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \cos \frac{m\pi \eta}{a} d\eta.$$

Таким чином, маємо систему інтегральних рівнянь (*) та (**), можемо знайти p та $\Psi(x)$.

$$\Psi(\varphi) = AC \cdot \sin \varphi; \quad \cos \frac{\pi \eta}{a} = C \cdot \cos \varphi + D; \quad \text{де}$$

$$C = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi d_1}{a} - \cos \frac{\pi d_2}{a} \right); \quad D = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi d_1}{a} + \cos \frac{\pi d_2}{a} \right).$$

$$A = 1+p \left(1 - i \frac{a\beta_1}{\pi} \right).$$

Фізичні міркування: Ψ повинна бути \cos чи \sin в межах діафрагми.

$$p = \frac{1}{1 + i \frac{a\beta_1}{\pi} \frac{c^2}{1-c^2}}$$

Знайдемо z : оскільки $p = \Gamma = \frac{z-z_0}{z+z_0} = \frac{z-1}{z+1}$; то буде

$$z = \frac{1+p}{1-p} = \frac{1 + i \frac{a\beta_1}{\pi} \frac{c^2}{1-c^2} - 1}{1 + i \frac{a\beta_1}{\pi} \frac{c^2}{1-c^2} + 1} = jL\omega; \quad c \rightarrow 0 (d_1 \rightarrow d_2) \Rightarrow \omega L = \frac{a\beta_1}{2\pi} = \frac{c^2}{1-c^2}.$$

Таким чином, це дійсно індуктивна діафрагма.



Лекція 20

Струми і напруги в техніці НВЧ.

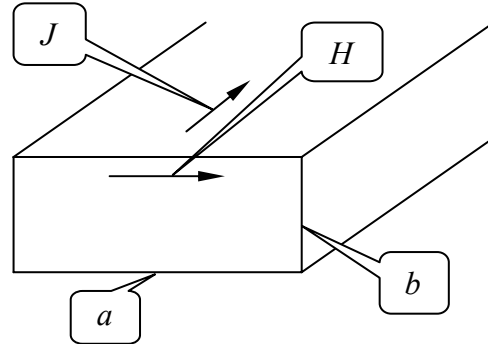
$$p = \operatorname{Re} \iint [\vec{E} \times \vec{H}] dS = UJ = \frac{U^2}{z} = J^2 z \text{ тобто від полів неможливо однозначно}$$

перейти до струмів та напруг у техніці НВЧ – нестрога процедура. Існує декілька варіантів цього переходу.

$$J = \int_0^a H_x dx = -\frac{2i\beta a^2}{\pi^2} H_{0z} e^{-i\beta z}$$

$$U = \int_0^b E_y \left(\frac{a}{2}\right) dy = -\frac{i\mu\omega a}{\pi} b H_{0z} e^{-i\beta z}$$

$$p = \frac{H_{0z}^2}{4} \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{4} ab \left(\frac{\lambda_{kp}}{\lambda_{x\phi}}\right)^2.$$



Це – незалежні визначення, які не дають $P = UJ$. Опір хвильовода теж можна визначити по-різному: $z_{pU} = \frac{U^2}{p}$, $z_{pJ} = \frac{p}{J^2}$, $z_{UJ} = \frac{U}{J}$. Ми будемо

користуватись: $z_{UJ} = \frac{\pi b}{2 a} \frac{120\pi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{kp}}\right)^2}}$. Бачимо, що додаються ще параметри

хвильовода $\frac{\pi b}{2 a}$.

Нормовані струми і напруги.

По аналогії з КМ $E = a a^*$, можна ввести $p = \frac{1}{2} |a|^2$. Будемо вважати $a = \frac{U}{\sqrt{z}} = J \sqrt{z}$ - напів-напруга, напів-струм.

Стоячі хвилі в лініях передачі.

Хвиля у прямому напрямку з напругою $V_1: V_1 e^{i(\omega t - \beta z)}$. Струм $J_1 e^{i(\omega t - \beta z)} = \frac{V_1}{z_0} e^{i(\omega t - \beta z)}$. Відбита хвиля: $V_2 e^{i(\omega t + \beta z)}$; $J_2 e^{i(\omega t + \beta z)} = -\frac{V_2}{z_0} e^{i(\omega t + \beta z)}$, (мінус – бо струм у зворотному напрямку). Очевидно, загальні напруга і струм: $V = V_1 + V_2$, $J = J_1 + J_2$. Повні напруга і струм складаються з парціальних напруг і струмів хвиль, які існують в хвильоводі. У кожній точці відношення $\frac{V}{J} = \frac{V_1 + V_2}{J_1 + J_2} = z$ називається повним імпедансом лінії передачі.

Підрахуємо повний імпеданс лінії передачі:

$$z = \frac{U}{J} = \frac{V_1 e^{i(\alpha t - \beta z)} + V_2 e^{i(\alpha t + \beta z)}}{\frac{V_1}{z_0} e^{i(\alpha t - \beta z)} + \frac{V_2}{z_0} e^{i(\alpha t + \beta z)}}; \quad z = z_0 \frac{1 + \frac{V_2}{V_1} e^{2i\beta z}}{1 - \frac{V_2}{V_1} e^{2i\beta z}} \quad (*)$$

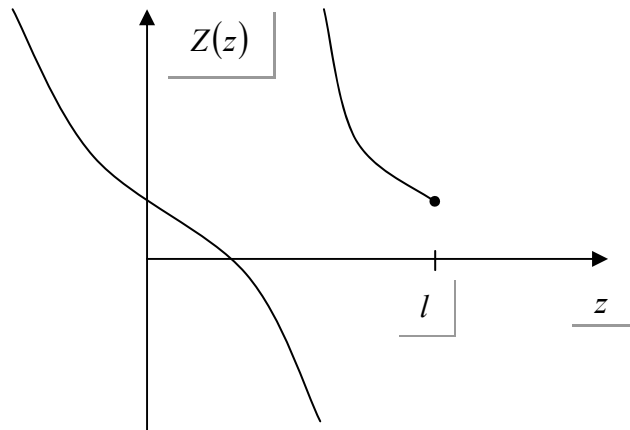
Таким чином, повний опір залежить від координат. Опір в точці l (в точці

навантаження): $z(l) = z_l = z_0 \frac{1 + \frac{V_2}{V_1} e^{2i\beta l}}{1 - \frac{V_2}{V_1} e^{2i\beta l}}$. Тоді $\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_l - z_0}{z_l + z_0} e^{-2i\beta l} = \Gamma = |\Gamma| e^{i\varphi}$ (**),

де Γ - коефіцієнт відбиття, $\Gamma = 0$ при $z_l = z_0$. Підставляючи (**) в (*),

одержимо: $Z(z) = z_0 \frac{z_l + iz_0 \operatorname{tg} \beta(l - z)}{z_0 + iz_l \operatorname{tg} \beta(l - z)}$ (***)

Отримали вираз для опору в будь-якій точці. Якщо $z = l$, тобто ми розглянули точку знаходження навантаження, маємо опір z_l .



В залежності від відстані до опору змінюється опір лінії. Це суттєва відмінність НВЧ від звичайної електроніки.

Для того, щоб взяти опір в будь-якій точці, необхідно знати опір хоча б в одній точці лінії передачі. Якщо лінія закорочена в l , то $Z(z) = iz_0 \operatorname{tg} \beta l$ шлейфа.

$z = 0$ від точки КЗ буде на відстанях, кратних $\lambda/2$.

Існує метод визначення опору без КЗ.

Введемо коефіцієнт стоячої хвилі. до хвилі, що біжить, відбита хвиля додається чи віднімається: $V_{\max} = |V_1| + |V_2|$, $V_{\min} = |V_1| - |V_2|$,

$$r = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{|V_1| + |V_2|}{|V_1| - |V_2|} = \frac{1 + \frac{|V_2|}{|V_1|}}{1 - \frac{|V_2|}{|V_1|}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \text{ - коефіцієнт стоячої хвилі.}$$

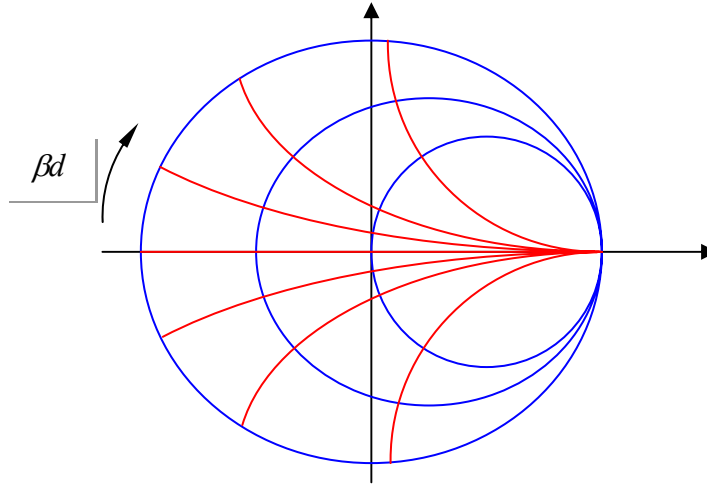
Визначимо опір в точці \min : $V = V_1 e^{-i\beta z} + V_2 e^{i\varphi} e^{i\beta z} \rightarrow e^{i\beta z} + V_2 e^{i\varphi} e^{i\beta z}$,
 $J = \frac{1}{z_0} (e^{i\beta z} + V_2 e^{i\varphi} e^{i\beta z})$. Очевидно, \max : $e^{i\varphi} = 1$, \min : $e^{i\varphi} = 0$.


Отже: $z_{\min} = \frac{V_{\min}}{J_{\min}} = z_0 \frac{1 - |V_2|}{1 + |V_2|} = \frac{z_0}{r}$, $z_{\max} = z_0 r$.


Нехай $d = z - l$ - відстань між z та мінімумом, тоді буде

$$Z(z) = z_0 \frac{\frac{z_0}{r} + iz_0 \operatorname{tg} \beta d}{z_0 + i \frac{z_0}{r} \operatorname{tg} \beta d}, \text{ звідки } Z(d) = Z(z) = z_0 \frac{1 - r \operatorname{tg} \beta d}{r - i \operatorname{tg} \beta d} \quad (****).$$

Існує діаграма з розрахованими опорами (див. Мал.): по куту відкладається βd , по радіусу - r . $z = R + ix$.



Однакові значення R з'єднані лініями – 

Однакові значення x з'єднані лініями – 

На цих лініях вказано значення активного та реактивного опорів. В центрі кола $z = z_0$.

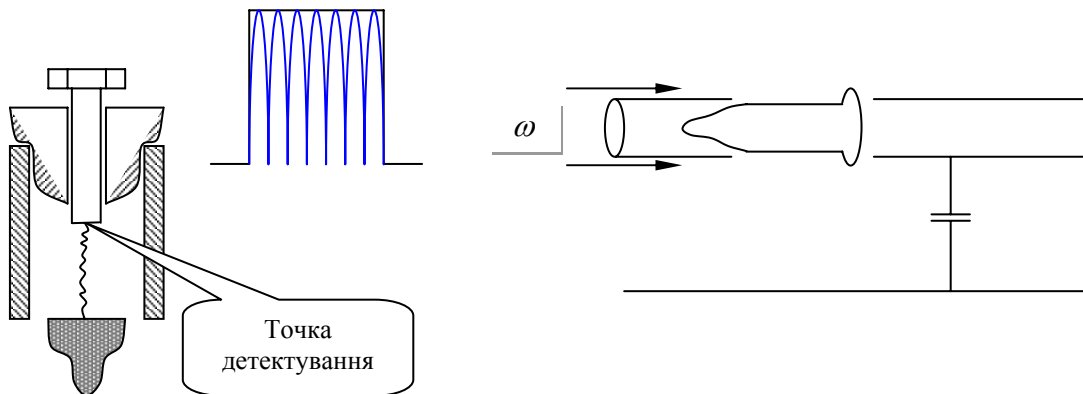
Лекція 21

Виявлення сигналів НВЧ.

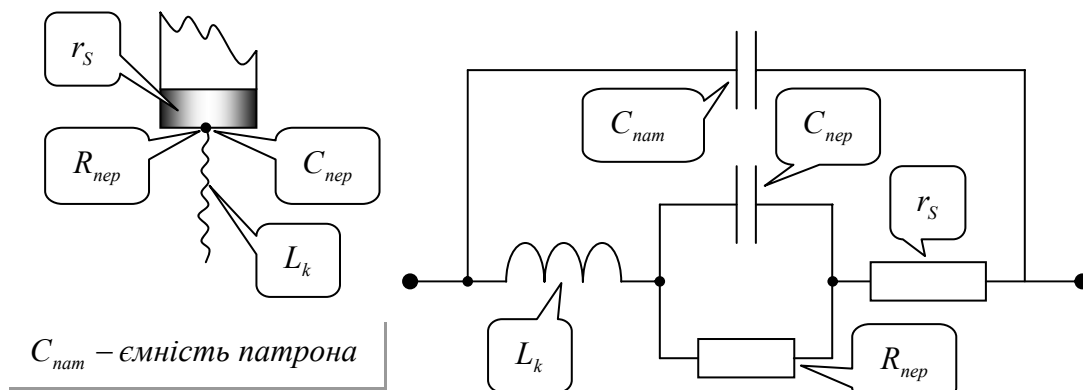
Звичайний осцилограф використати неможливо – вони працюють на частотах до 1ГГц. Зараз використовують напівпровідникові детектори.

Кристалічні детектори: квадратичний детектор.

Вони реєструють 10^{11} ГГц так само як і 100Гц. Такий детектор (див. Мал.) вставляється одним боком в один хвильовід, а другим у інший (див. Схему):



Еквівалентна схема діода-детектора:



C_{nam} – ємність патрона

Ідеальна частота $f_{кр} \approx \frac{1}{2\pi r_s C_{nep}}$, оскільки лише r_s та C_{nep} покращити не можна. Зараз досягли $f_{кр} = 10^{12}$ Гц.

Залежність струму НП діоду від напруги:

$$J = J_s \left(e^{\frac{eV}{kT}} - 1 \right) = J_s \left(1 + \frac{eV}{kT} + \frac{1}{2} \left(\frac{eV}{kT} \right)^2 - 1 \right) = J_s \left(\frac{eV}{kT} + \frac{1}{2} \left(\frac{eV}{kT} \right)^2 \right).$$

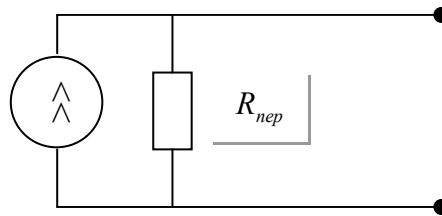
$$i = J_s \frac{1}{2} \left(\frac{eV}{kT} \right)^2 = J_s \frac{1}{2} \left(\frac{e}{kT} \right)^2 (V_0 \cos \omega t)^2 = J_s \frac{1}{2} \left(\frac{e}{kT} \right)^2 V_0^2 (1 + \cos 2\omega t)^2$$

(нас цікавить квадратичний детектуючий елемент).

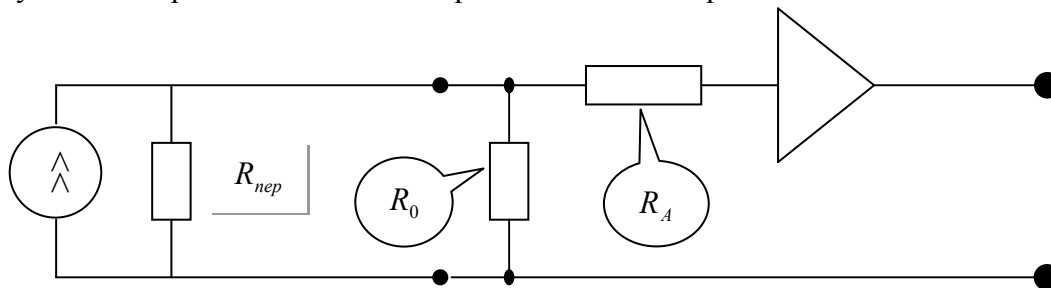
Метод комплексних амплітуд тут застосувати не можна, бо втратимо ефект детектування. $i = J_s \frac{1}{4} \left(\frac{e}{kT} \right)^2 V_0^2$.

Отримаємо потужність $P_{НВЧ} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R_{неп}}$. $J = J_0 \frac{eV}{kT}$; $\frac{J}{V} = \frac{J_S e}{kT} = \frac{1}{R_{неп}}$;
 $2R_{неп} P_{НВЧ} = V_0^2$; $2P \frac{kT}{J_S e} = V_0^2$. Тоді $i = J_S \frac{1}{4} \left(\frac{e}{kT} \right)^2 2P \frac{kT}{J_S e} = \frac{1}{2} \frac{e}{kT} P = \beta P$. В
 результаті ми можемо зобразити діод генератором струму: $i = \beta P$.

Звичайне значення $\beta = 20 \frac{A}{Вт}$.
 $\beta = 1 \div 5$ вважається гарним параметром. Це і є квадратичний детектор, оскільки струм пропорційний потужності.



Визначимо потужність, яку цей діод може зареєструвати: знайдемо чутливість приймача на базі квадратичного детектора.



R_0 - для узгодження з підсилювачем, R_A - описує шуми підсилювача.
 Напряга шумів: $U_{\omega}^2 = 4kT\Delta f(R_0 + R_A)$, напряга сигналу: $U_C = \beta P R_0$.

$$\frac{U_C}{U_{\omega}} = \frac{\beta P R_0}{\sqrt{4kT\Delta f(R_0 + R_A)}} - \text{формула Найквіста.}$$

Найквіст довів, що ширина смуги Δf пропорційна кількості електронних ступенів вільності. У відповідності з цим виведена формула для потужності шумів: $P_{ш} = kT\Delta f$.

$$\text{Якість детектора } M = \frac{\beta R_0}{\sqrt{R_0 + R_A}} \sim 10^2. \quad \frac{U_C}{U_{\omega}} = \frac{PM}{\sqrt{4kT\Delta f}}$$

$$\text{Визначимо } P_{\min} \text{ з того, що } \frac{U_C}{U_{\omega}} = \sqrt{2} - \text{тоді } P_{\min} = \frac{\sqrt{8kT\Delta f}}{M} \sim 10^{-9} \text{ Вт.}$$

Лекція 22

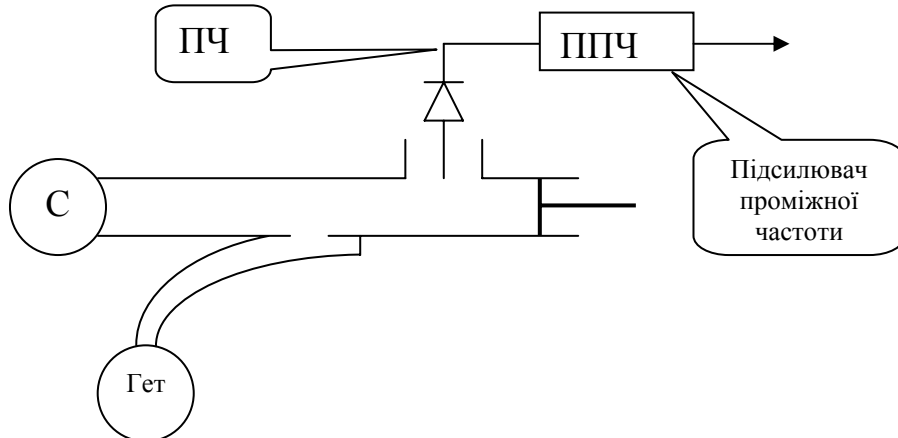
Лінійний детектор, змішувач.

$J = J_S \left(e^{\frac{eV}{kT}} - 1 \right)$; $V = V_C \cos(\omega_C t + \varphi_C) + V_{zem} \cos(\omega_{zem} t + \varphi_{zem})$. Якщо розписати

квадратний член, то одержимо:

$$i_{nc} \sim V_C \cos(\omega_C t + \varphi_C) \cdot V_{\Gamma} \cos(\omega_{\Gamma} t + \varphi_{\Gamma}) \sim V_C V_{\Gamma} \cos[(\omega_C - \omega_{\Gamma})t + (\varphi_C - \varphi_{\Gamma})]$$

$$i \sim V_C^2 - \text{постійний струм, тобто } i_{nc} = A V_C V_{\Gamma} \cos[\Omega_{\Gamma} t + (\varphi_C - \varphi_{\Gamma})].$$

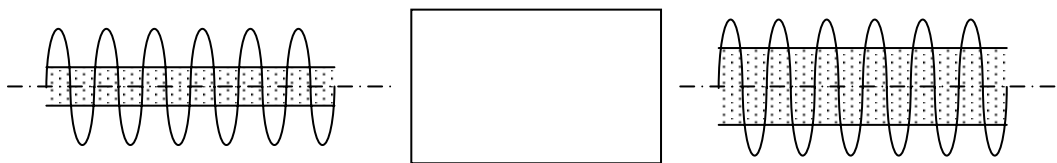


Принципова схема супергетеродинного приймача НВЧ – діапазону. Відгук пропорційний квадрату сигналу.

Розглянемо характеристики приймача:

1. Втрати перетворення: $L = \frac{P_{НВЧ}}{P_{ПЧ}} > 3dB$, бо існують втрати на дзеркальні канали, тощо. У діапазоні 40ГГц типове значення $L \sim 6 \div 7dB$.

2. Шум-фактор (класичне визначення): $F = \frac{\left(\frac{P_C}{P_{ш}} \right)_{ex}}{\left(\frac{P_C}{P_{ш}} \right)_{вих}}$.



Шум завжди підсилюється більше ніж сигнал, тому F показує, у скільки

разів шум підсилюється більше, ніж сигнал. $F = \frac{\left(\frac{P_C}{P_{ш}} \right)_{ex}}{\left(\frac{P_C}{P_{ш}} \right)_{вих}} = \frac{1}{g} \frac{P_{ш\ вих}}{P_{ш\ ex}} \geq 1$, бо

немає схем в яких $F < 1$. $F = \frac{1}{g} \frac{P_{ш\ вих}}{P_{ш\ ex}} = \frac{1}{g} \frac{g P_{ш\ ex} + P_{ш\ вих}^0}{P_{ш\ ex}} = 1 + \frac{P_{ш\ вих}^0}{g P_{ш\ ex}} = 1 + \frac{P_{ш\ вих}^0}{P_{ш\ ex}}$, де

$P_{ш\ вих}^0$ - шум, згенерований всередині.

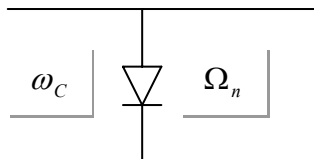
Позначено $P_{u\text{ вх}}^0 = \frac{P_{u\text{ вих}}^0}{g}$ - ми виносимо джерело струму за підсилювач.

Погано в формулі те, що F залежить від $P_{u\text{ вх}}$, тобто від оточуючого середовища. Домовились, що $P_{u\text{ вх}} = kT_0\Delta f, T_0 = 293\text{K}$. Тоді для добрих приймачів: $F = 1 + \frac{kT_e\Delta f}{kT_0\Delta f}$, де T_e - еквівалентна температура входу (шуму)

приймача. Тоді $F = 1 + \frac{T_e}{T_0}$.

Знайдемо мінімальну потужність, яку приймає приймач $P_{u\text{ вх}\Sigma} = P_{u\text{ вх}} + P_{u\text{ вх}0} = 2FP_{u\text{ вх}}$ - шум-фактор. Він показує, у скільки разів еквівалентні шуми більше, ніж зовнішні шуми.

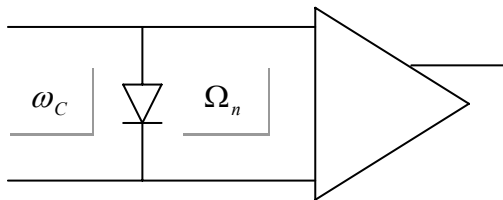
Визначимо F для змішувача:



$$F = \frac{\left(\frac{P_c}{P_u}\right)_{\text{вх}}}{\left(\frac{P_c}{P_u}\right)_{\text{вих}}} = \frac{P_{c\text{ вх}}}{P_{u\text{ вх}}} \frac{P_{u\text{ вих}}}{P_{c\text{ вих}}} = \frac{P_{\text{НВЧ}}}{P_{\text{ПЧ}}} \frac{P_{u\text{ вих}}}{P_{c\text{ вих}}} = L \frac{P_{u\text{ вих}}}{P_{c\text{ вих}}} =$$

$$= L \frac{T_c}{T_0} = Ln_u \sim 1$$

- бо це пасивний прилад. Для наступної схеми можна записати:

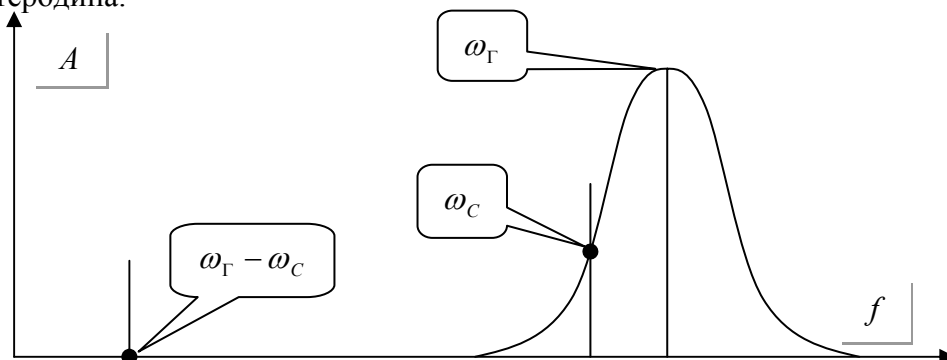


звідки $F = L(n_u + F_{\text{ПЧ}} - 1)$ - врахуємо шуми подальших каскадів. В середньому $F_{\text{норм}} = L(n_u + 0,41)$.

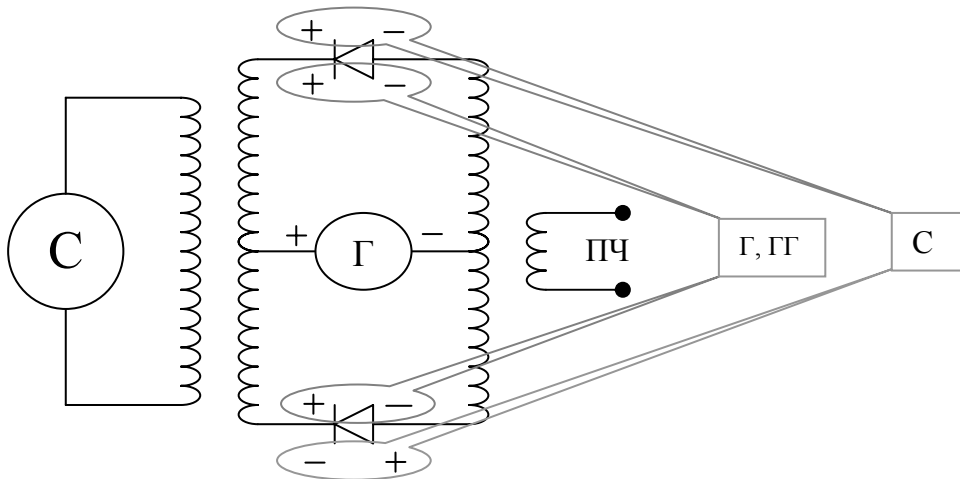
$P_{\text{min}} = 2FkT_0\Delta f = 10^{-13}$ Вт. $P_{\text{min}} = 2FkT_0\Delta f$, бо впевнений прийом при P в 2 рази меншій, ніж максимальній.

Балансний змішувач.

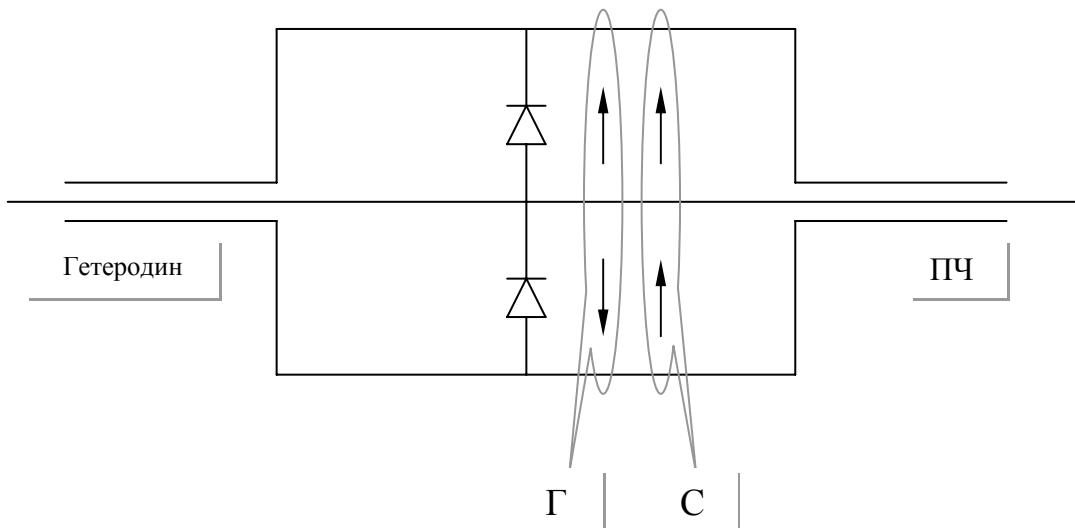
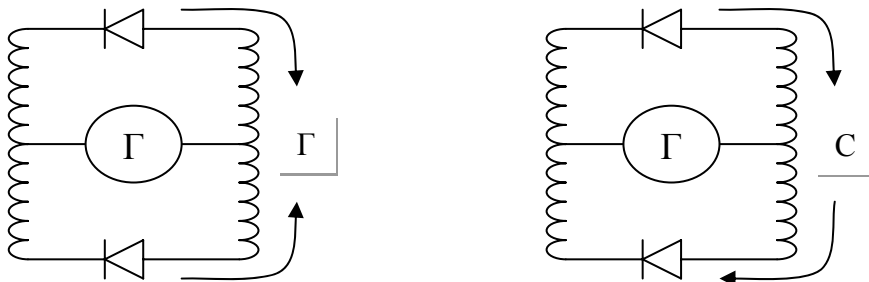
Якщо уявити, що у генератора є деякий контур, то при перекритті ω_c та ω_Γ може виникнути биття генератора з самим собою навіть при відсутності сигналу. Балансний змішувач бореться саме з цим – він знищує гармоніки гетеродина.



Розглянемо його схему:



ГГ – гармоніка гетеродина. На двох діодах сигнал має різні полярності. Струм проміжної частоти залежить від фази на діоді. Отже струм від гетеродина буде в один бік, і на котушці приймача перетвориться в нуль. Сигнал струму буде фіксуватися окремо.



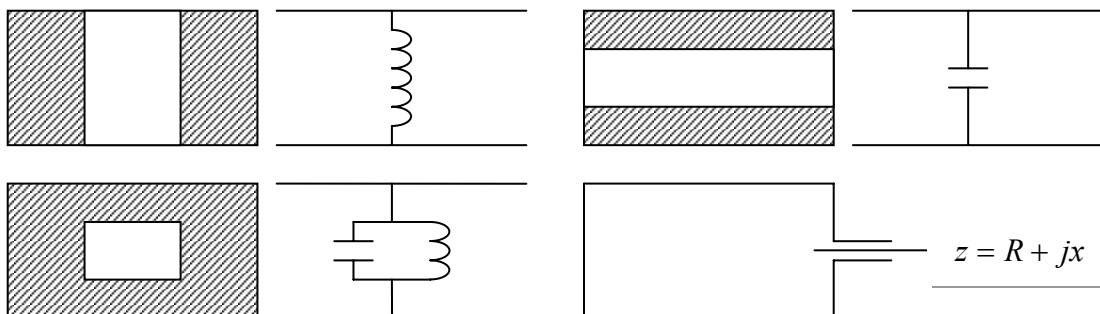
Керування параметрами НВЧ за допомогою діодів.

1. *pin* - діод – використовується для керування амплітудою НВЧ.
- 2.

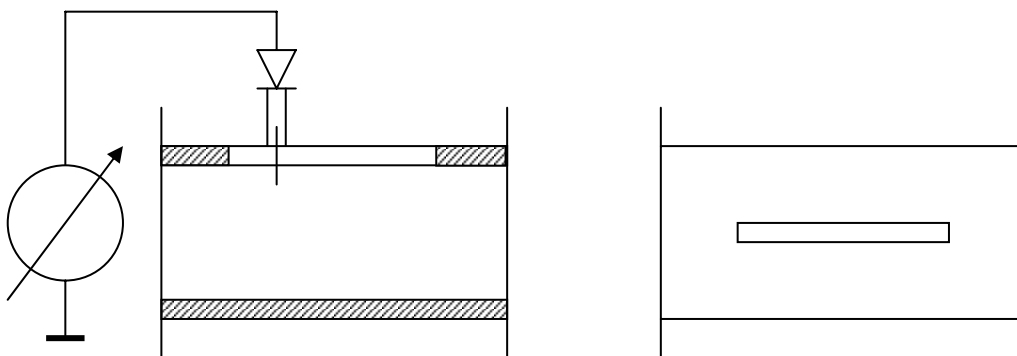
Лекція 23

Вимірювання опорів.

Узгодження опорів – задача про проходження хвиль між перешкодами без відбиттів. Однак, спочатку треба виміряти ці опори.



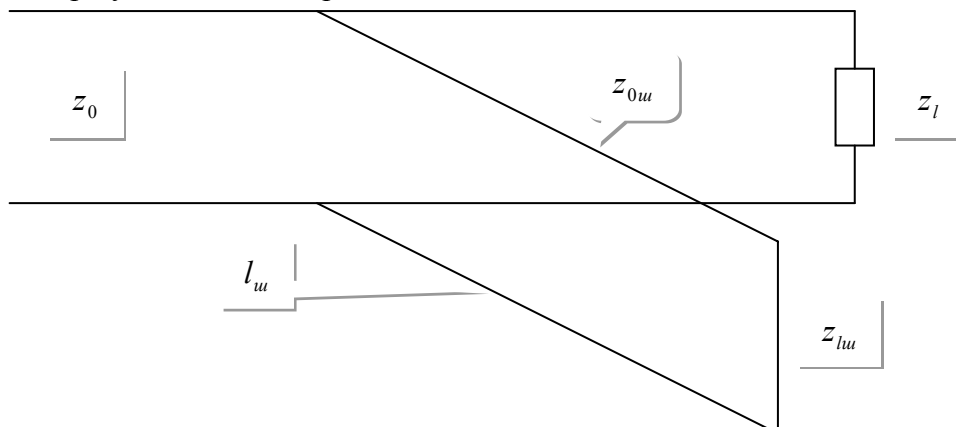
Метод виміральної лінії: вимірвальна лінія – це зонд, який переміщується в середині хвильовода і реєструє відповідні струми (пучності чи мінімуми).



Крім того, визначаються координати мінімуму і вимірюються відстані від мінімуму до навантаження, звідки: $z = z_0 \frac{1 - i \operatorname{tg} \beta d}{z - i \operatorname{tg} \beta d}$. Підключаємо між генератором і навантаженням вимірвальну лінію, потім визначаємо z .

Узгодження опорів.

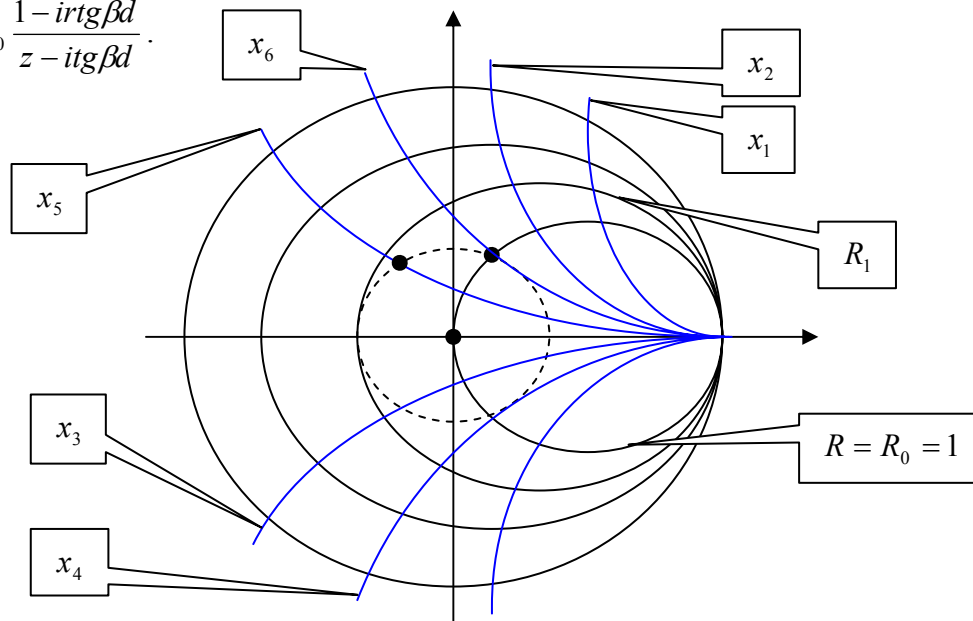
Треба зробити, щоб стержень в хвильоводі забирав максимум енергії. Це можливо при узгодженні опорів.



Нехай в лінію з опором z_0 підключили навантаження z_l . $z_0 \neq z_l$, тому частина енергії відбивається. Можна паралельно підключити лінію з закороткою, яку можна рухати вздовж лінії. Це шлейфовий трансформатор або тромбон. Опір шлейфа: $z_u = z_{0u} \frac{z_{lu} + iz_{0u} \operatorname{tg} \beta \cdot l_u}{z_{0u} + iz_u \operatorname{tg} \beta \cdot l_u}$, $\Gamma = \frac{z_l - z_0}{z_l + z_0}$. Ми ставимо закоротку на кінці шлейфу, $z_{lu} = 0$, тоді $z_u = iz_{0u} \operatorname{tg} \beta \cdot l_u$. Таким чином ми можемо ввести в лінію будь-який реактивний опір (закоротка не вносить активного опору).

Нехай $z_l = R_1 + jx_5$. Визначимо опір лінії у довільній точці z :

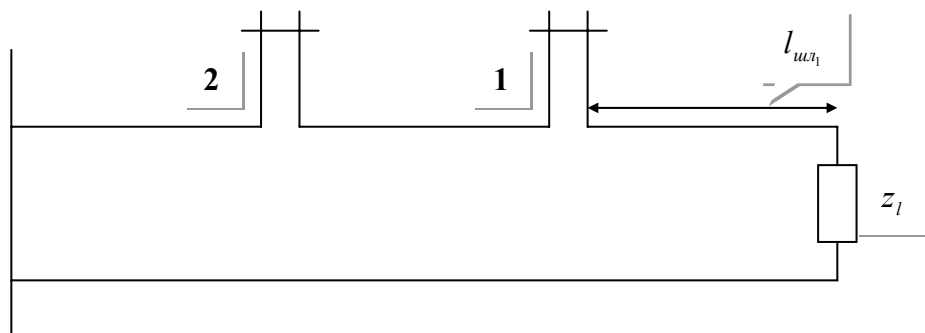
$$z = z_0 \frac{1 - i \operatorname{tg} \beta d}{z - i \operatorname{tg} \beta d}$$



На діаграмі ці опори розташовані на колі з центром в $(0,0)$ та радіусом $\sqrt{R_1^2 + x_5^2}$ (опір $R_1 + jx_5$) – це коло відповідає незмінному КСХ, він дійсно постійний для лінії. В точці перетину кола з $R = R_0$ маємо $z = R_0 + ix_0$. Цій точці відповідає певна точка на хвильоводі. Якщо в цій точці підключити шлейф, то реактивний опір можна міняти як завгодно. Також можна зробити так, що $z = R_0 = 1$ - тоді не буде відбиття.

Фізично шлейф компенсує відбиту хвилю, тобто створює таку ж за амплітудою і протилежну за фазою.

Розглянемо схему з двома шлейфами:

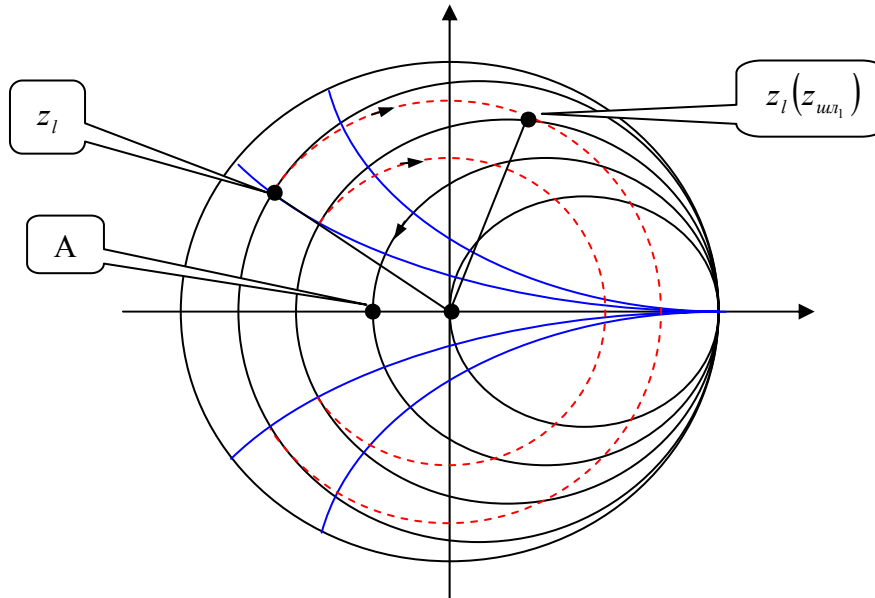


Знайдемо опір у місці підключення першого шлейфу, зумовлений z_l .

Для цього йдемо по пунктирному колу (див. Діаграму нижче) на відстані, відповідній $l_{шл_1}$.

Ми можемо змінювати шлейфом реактивний опір, залишаючи активний постійним.

Знову зсуваємося на відстань між двома шлейфами.



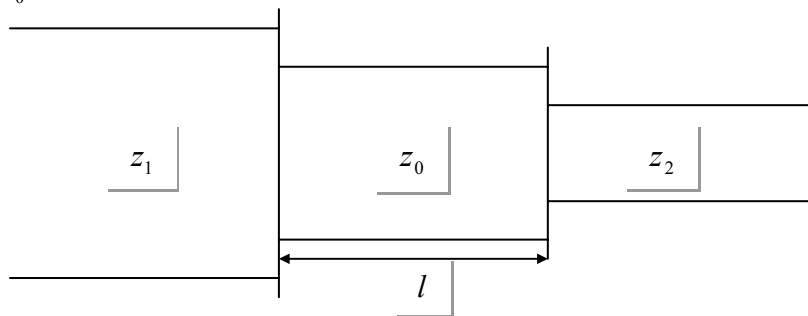
Аналогічно другим шлейфом змінюємо активний опір. В результаті прийдемо в точку А, де КСХ значно менший ніж початковий. Ми не отримали ідеальне узгодження. З теорії: узгодження при фіксованих відстанях між шлейфами можна створити при наявності 3-х шлейфів.

Ми змінювали опір шлейфа так, щоб опинитись на $\beta d = 0$, тому, що ми отримуємо найменший КСХ. Виявилось, що можна придумати метод, яким КСХ можна створити ще меншим.

Лекція 24

Чвертьхвильовий трансформатор.

Нехай маємо два хвильоводи: z_1 , z_2 ; та стоїть задача передати енергію з одного в інший. Це можна зробити, з'єднавши їх відрізком хвильоводу з деяким опором z_0 .

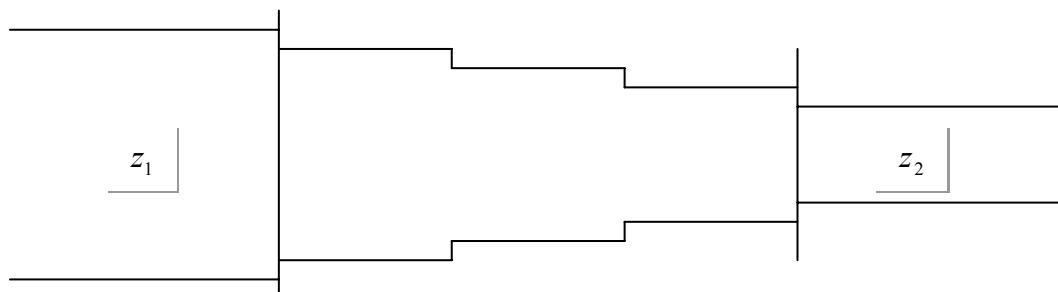


Виявляється, що $z_0 = \sqrt{z_1 z_2}$, $l = \frac{\lambda}{4}$ для узгодження. Підрахуємо це:

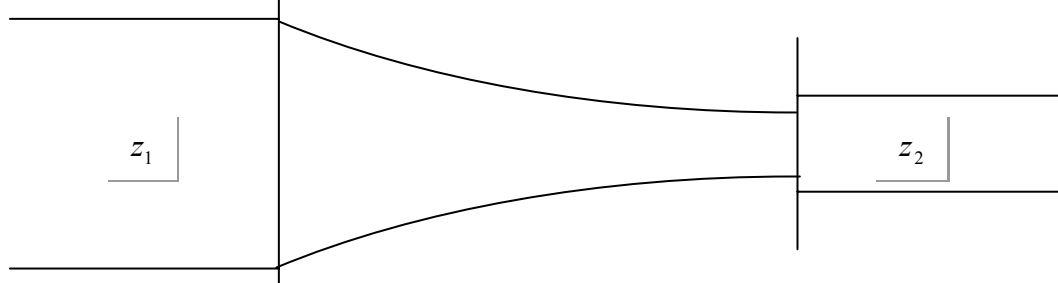
$$z = z_0 \frac{z_l + iz_0 \operatorname{tg} \beta \cdot l}{z_0 + iz_l \operatorname{tg} \beta \cdot l}. \quad \text{Тут } z_l = z_2, \quad \text{тоді } z_1 = z_0 \frac{z_2 + iz_0 \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda_{x\phi}} \cdot \frac{\lambda_{x\phi}}{4}}{z_0 + iz_2 \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda_{x\phi}} \cdot \frac{\lambda_{x\phi}}{4}} = \frac{z_0^2}{z_2}, \quad \text{це}$$

фактично резонансний пристрій.

Для широкосмугового узгодження роблять багато “східців”:

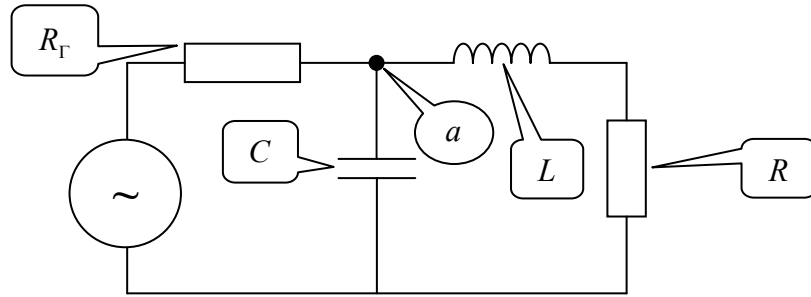


Або ж плавний перехід (однак він більш довгий):



Узгодження в МЕ.

Потрібно щось увімкнути між генератором та опором, щоб виділялась максимальна потужність. Зробимо так як показано на малюнку:



Підрахуємо опір в точці a : $Y = j\omega C + \frac{1}{j\omega L + R}$,
 $z = \frac{1}{Y} = \frac{j\omega L(1 - \omega^2 CL) - iR^2\omega C + R(1 - \omega^2 CL) + \omega^2 RC}{(1 - \omega^2 CL)^2 + R^2\omega^2 C^2}$, $z = z' + jz''$, $z'' = 0$, тобто

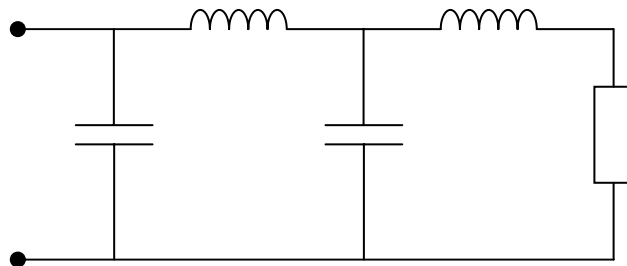
$1 - \omega^2 CL = \frac{R^2 C}{L} \rightarrow 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{CL}}$. Таким чином маємо коливальний контур на

частоті ω . Тобто, $z' = \frac{L}{RC} = \frac{\omega^2 L^2}{R}$ - це повинно дорівнювати $R_Г$, тобто

$\omega^2 L^2 = R \cdot R_Г$ - цим умовам має задовольняти контур LC .

Таким чином, для узгодження опір необхідно включати в паралельний коливальний контур. Тепер ми знаємо повну теорію узгодження.

Щоб збільшити ширину смуги пропускання, використовують більш складні ланцюги, це зв'язані ланцюги, тут смуга пропускання ширша:



А що робити, якщо необхідно узгодити комбінований опір, наприклад CR .

В таких випадках включають послідовно L : $j\omega L' + \frac{1}{j\omega C'} = 0$, а потім

узгоджують так само як і в попередньому випадку.

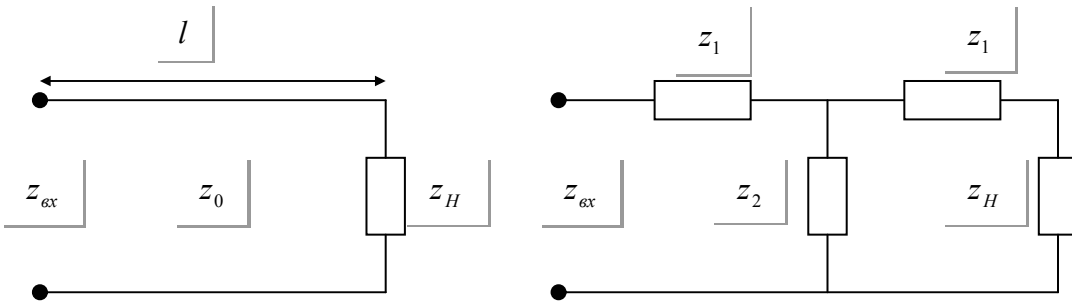
Взагалі, використовують два методи:

1. Комбінація штирів.
2. Комбінація L, C .

Лекція 25

Заміна ліній передачі зосередженими елементами.

Для лінії передачі: $z_{ex} = z_0 \frac{z_H ch \gamma l + z_0 sh \gamma l}{z_H sh \gamma l + z_0 ch \gamma l}$. Для чотириполюсника на зосереджених елементах: $z_{ex} = z_1 + \frac{z_2(z_1 + z_H)}{z_1 + z_2 + z_H}$.

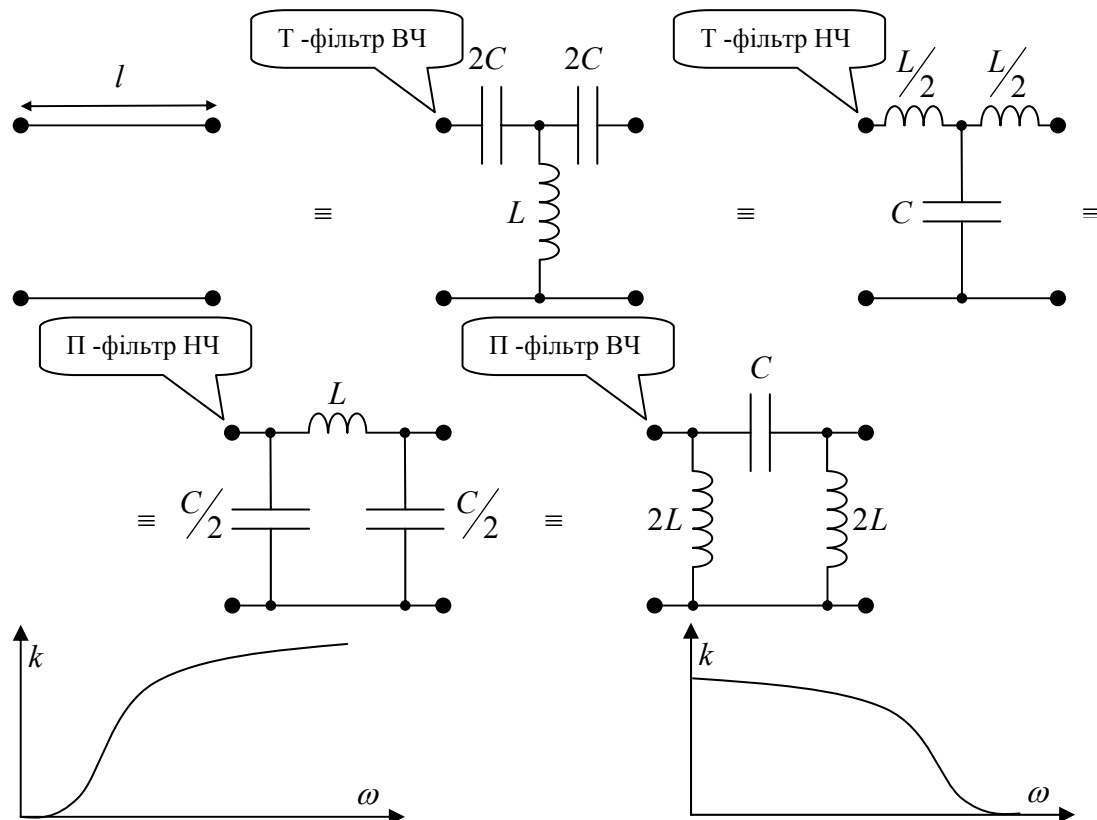


Для того, щоб можна було провести заміну лінії на зосереджений чотириполюсник, необхідно, щоб вирази для їх z_{ex} були еквівалентні.

Прирівнявши, одержимо: $\varphi(z_1, z_2) = f(z_0 l)$, $z_1 = z_0 th \frac{\gamma l}{2} = z_0 th \frac{j\beta l}{2}$,

$$z_2 = \frac{z_0}{sh \gamma l} = \frac{z_0}{sh j\beta l}$$

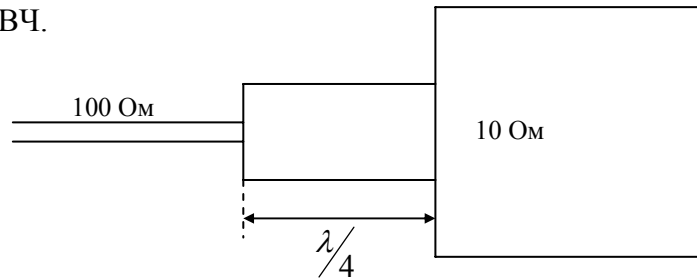
Розглянемо схеми які використовуються на практиці:



$$\text{ПФВЧ: } L = \frac{z_0}{2\omega_0 \operatorname{tg} \beta l / 2}, \quad C = \frac{1}{z_0 \omega \operatorname{Sin} \beta l}.$$

$$\text{ПФВЧ: } L = \frac{z_0}{\omega_0 \operatorname{Sin} \beta l}, \quad C = \frac{1}{2z_0 \omega_0 \operatorname{tg} \beta l / 2}.$$

Задача: Представимо $\lambda/4$ - трансформатор у вигляді зосереджених елементів ТФВЧ.



$$\omega_0 = 10^{10}, \quad z_0 = \sqrt{z_1 z_2} = \sqrt{1000} \approx 33(\text{Ом}), \quad l = \lambda/4, \quad L = \frac{z_0}{\omega_0}, \quad C = \frac{1}{2z_0 \omega_0}.$$

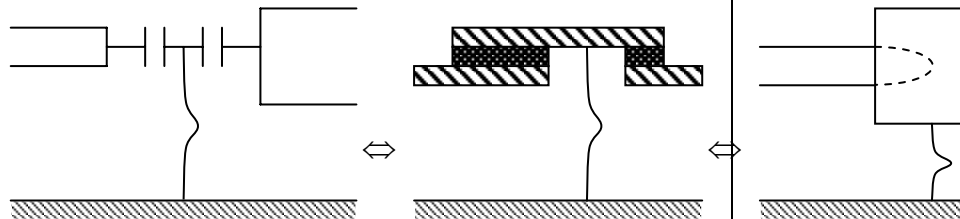
$\lambda/4$ трансформатора

$$\sqrt{z_1 z_2} - \text{опір} \cdot L = \frac{33}{10^{10}}, \quad C = \frac{1}{2 \cdot 33 \cdot 10^{10}} \text{ звідки}$$

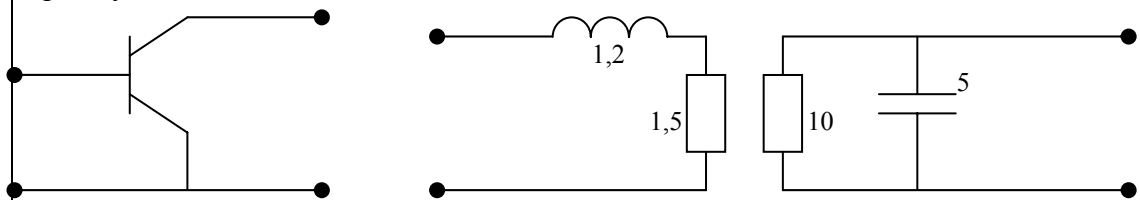
$$L = 3,3 \text{ нГн}$$

$$C = 2 \text{ пФ}$$

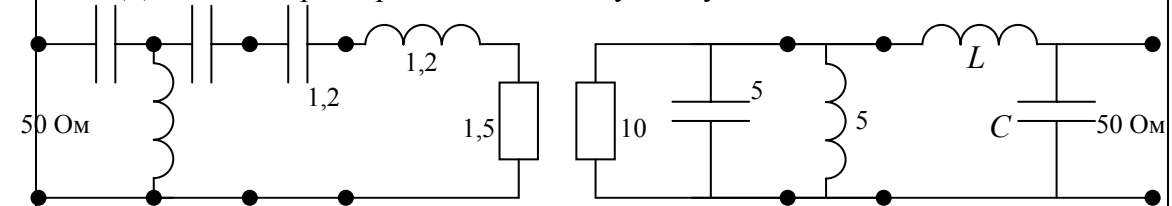
Таким чином, конструктивно цей перехід виконується так:



Задача: Узгодження транзистора. $z_{\text{ex}} = (1,5 + j1,2)\Omega$, $Y_{\text{вих}} = 0,1 + j \cdot 0,2$. Треба узгодити з лініями 50 Ом.



Для цього перетворимо еквівалентну схему:



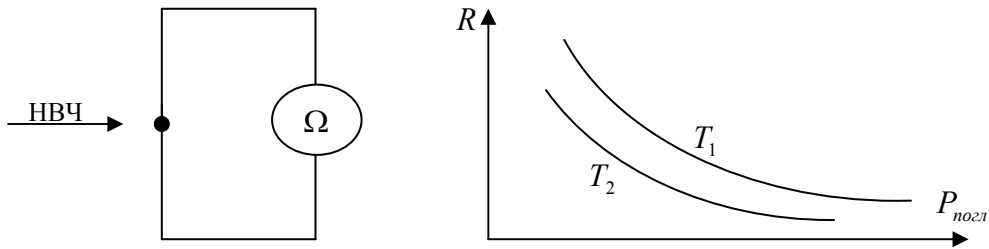
$\lambda/4$ - трансформатор

Отже, ця схема - узгоджена.

Лекція 26

Вимірювання потужностей НВЧ.

НП – детектори не можуть використовуватись для вимірювання, бо з часом вони самі змінюються, тобто не існує однакових НП – детекторів. Найбільш точні методи – калориметричні, але вони розраховані на великі потужності (>1Вт). Використовують термістори і болометри:



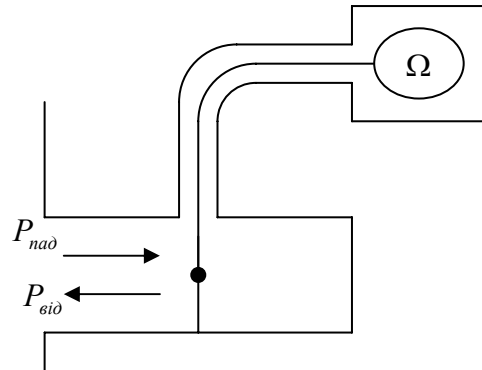
• - НП-бусинка. Це все поміщують у термостат. Але це знову ж дає мало переваг у порівнянні з НП-детекторами.

$$P_{\text{погл}} = P_{\text{над}} - P_{\text{від}}$$

$$P_{\text{над}} = cV_{\text{над}}^2$$

$$P_{\text{від}} = cV_{\text{від}}^2$$

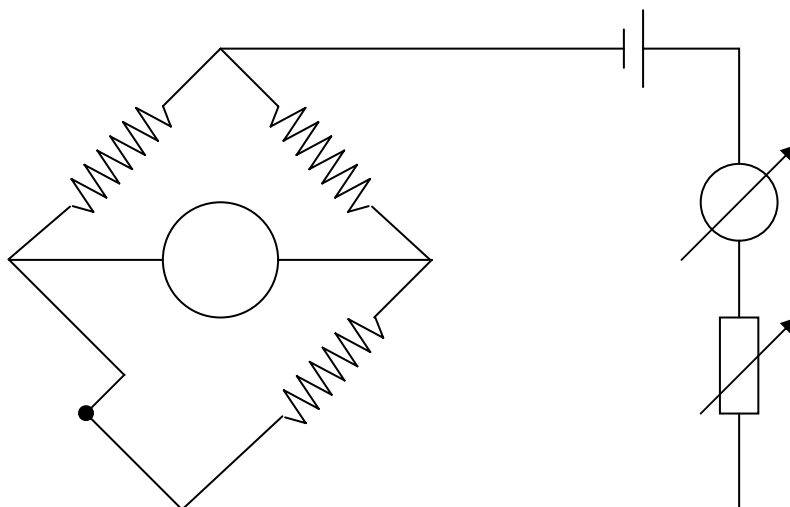
$$|\Gamma| = \frac{V_{\text{від}}}{V_{\text{над}}}$$



Тоді можна записати:

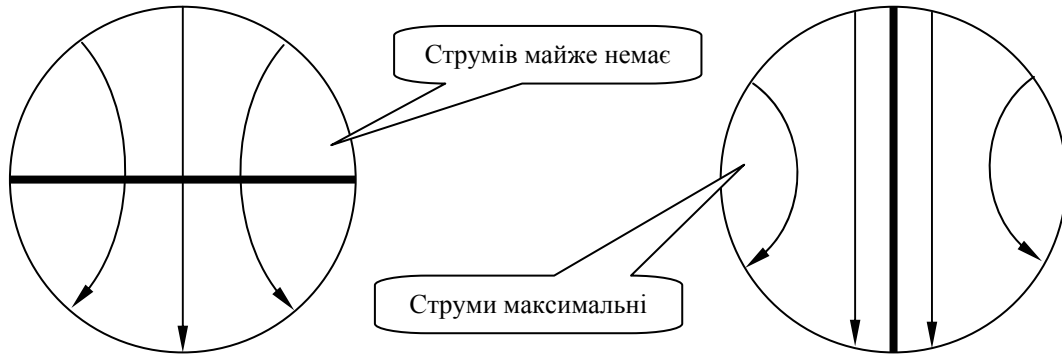
$$P_{\text{погл}} = P_{\text{над}}(1 - |\Gamma|^2), \text{ звідки маємо } P_{\text{над}} = \frac{P_{\text{погл}}}{1 - |\Gamma|^2} = \frac{1}{\eta}.$$

Перевага бусинки - в електроніці. Намалюємо вимірювальний міст: η - з'являється тому, що НВЧ нагріває по поверхні, а батарейка - по об'єму.



Спочатку міст балансується опором R тобто гальванометр нічого не показує.

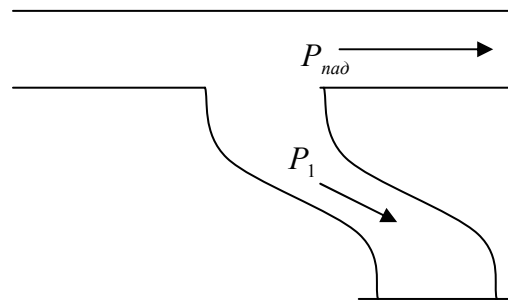
Подаємо НВЧ, тобто болометр перегрівається, баланс порушується. Для встановлення балансу опір R збільшуємо так, щоб загальна потужність: $P_{НВЧ} = P_{пост_0} - P_{пост}$. Для точності використовують η . Інколи потрібно зменшити падаючу потужність. Для цього використовують атенюатори (поглинаюча пластина, що вставляється в хвилевід). Вони можуть зменшувати потужність на 30-40 дБ. Існують прецизійні атенюатори, точність 0,01 дБ:



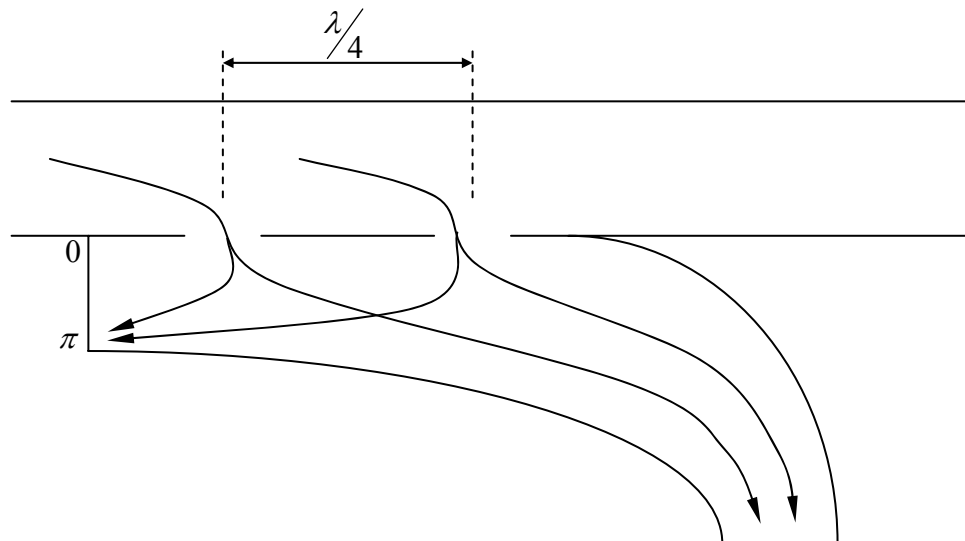
$J \sim \cos\alpha$, а потужність, що поглинається, $\sim J$. А залежність кута можна визначити точно.

Існують направлені відгалужувачі:

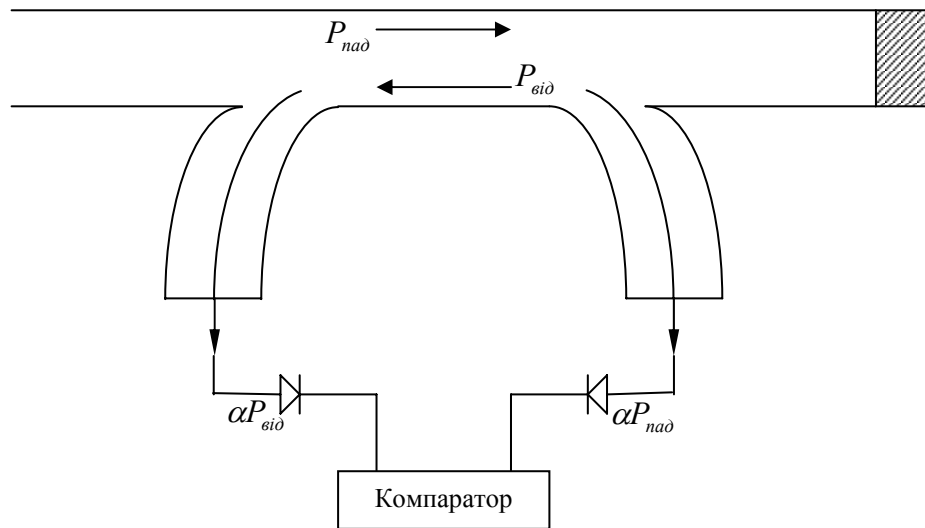
$$P_1 \sim SP_{пад} : 10 \div 30 \text{ дБ}$$



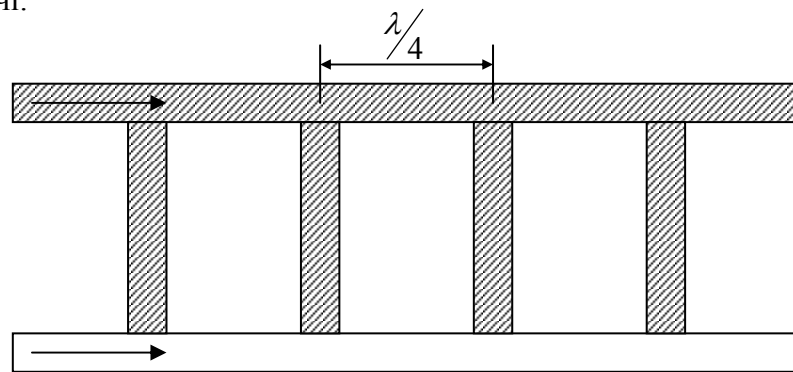
У випадку, зображеному справа, потужність йде в одному напрямку:



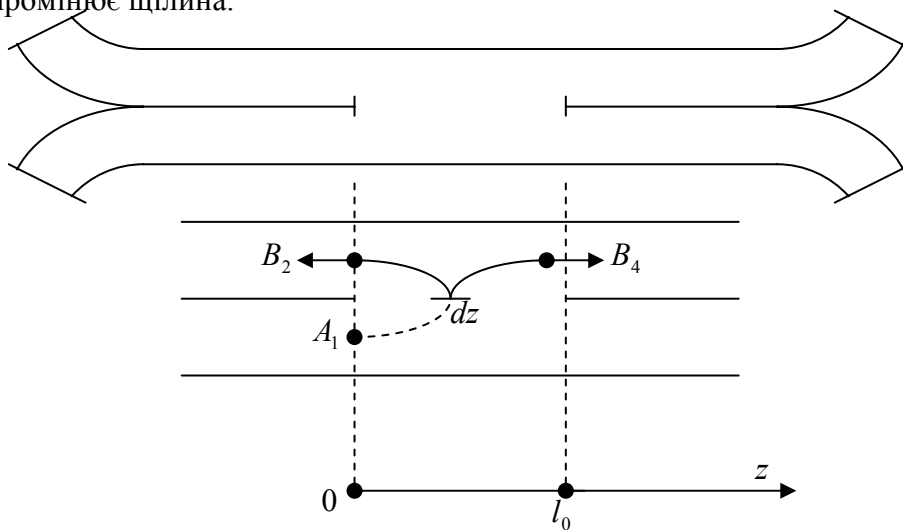
Лівий відгалужувач реагує лише на відбиту хвилю, правий – на падаючу. Компаратор автоматично рахує Γ .



У мікроелектроніці використовують мікросмужкові шлейфові відгалужувачі.



Існують розподілені розгалджувачі – (для верхньої смуги пропускання) – тут випромінює щілина.



Записуємо за принципом Гюйгенса: $dB_4 = \alpha A_1 e^{-i\beta l_0} dz$, $dB_2 = \alpha A_1 e^{-2i\beta z} dz$, проінтегрувавши одержимо:

$$B_4 = \int dB_4 = \alpha \cdot l_0 A_1 e^{-i\beta \cdot l_0}$$

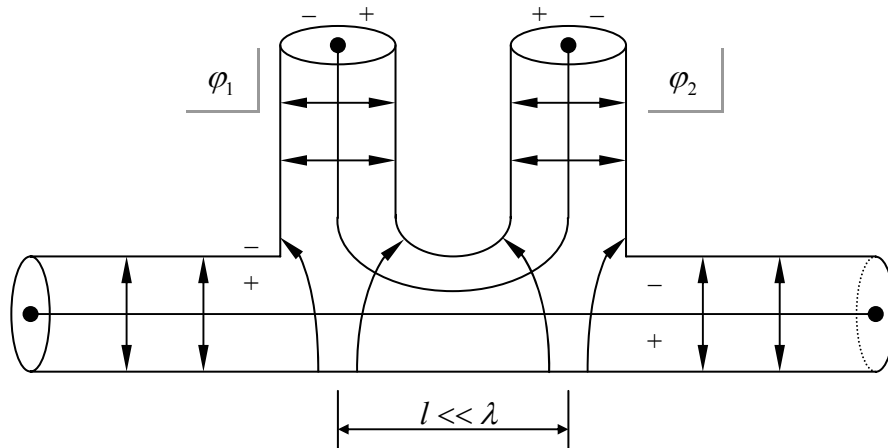
$$B_2 = \int dB_2 = \alpha \cdot A_1 \frac{1}{\beta} \text{Sin}\beta \cdot l_0 e^{-i\beta \cdot l_0}$$

коефіцієнт

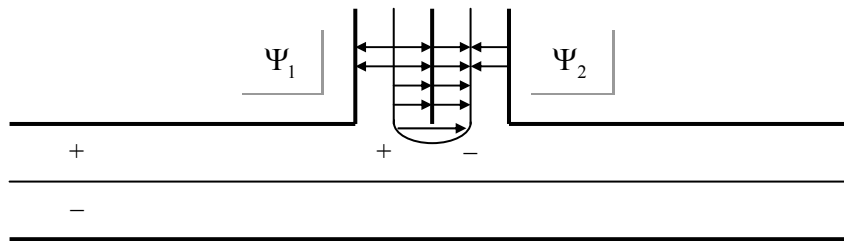
направленості

$$D = 20 \lg \frac{B_4}{B_2} = 20 \lg \frac{\beta \cdot l_0}{\text{Sin}\beta \cdot l_0} - \text{можливо таке, що } B_2 > B_4. \text{ При } l = \frac{n\lambda_0}{2} \Rightarrow B_2 = 0 -$$

це направлений відгалужувач. Однак, розміри цього відгалужувача пропорційні довжині хвилі, що дуже багато. Тому використовують відгалужувач Бете:



Виявляється, що зв'язок цього хвильоводу з трубами існує по ЕМП, і фаза зв'язків по ЕП та МП – різна. Розглянуто зв'язок по ЕП, тепер по МП:

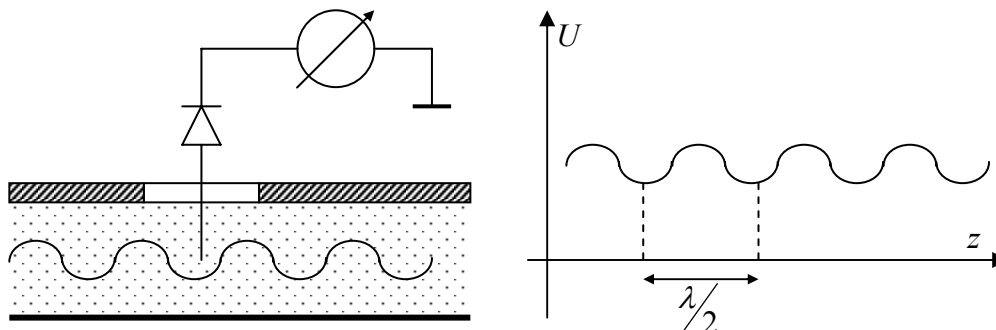


$\varphi_1 = \varphi_2, \Psi_1 = -\Psi_2$ - тобто хвиля піде лише у ліву трубу: від діелектричного зв'язку все "+", від магнітного "+" та "-", тобто в правій трубці $+ - = 0$. Хвиля піде у ліву трубу.

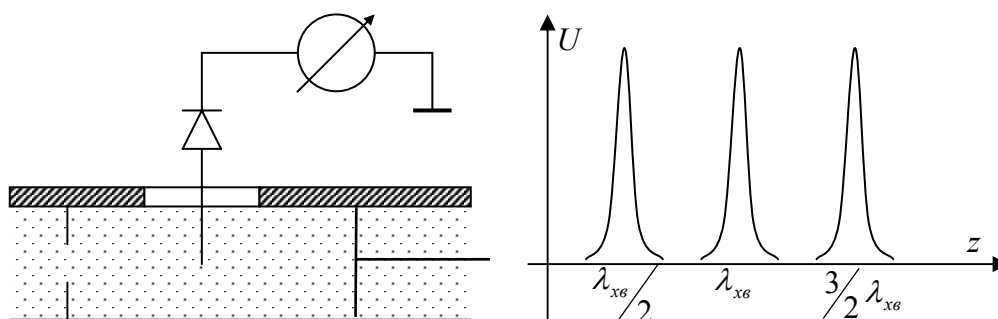
Лекція 27

Вимірювання довжини хвилі та частоти.

Найпростіший вимірювач – вимірювальна лінія. Намалюємо її:

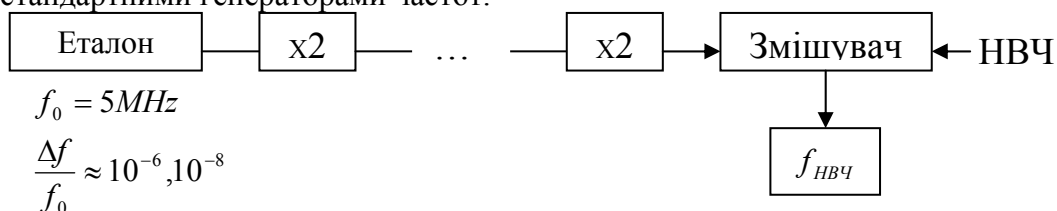


Тут максимум та мінімум – нечіткі, тому краще помістити у резонатор:



$\lambda_{xb} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}}$. Це – ВСТ, хвильоводи середньої потужності. Для

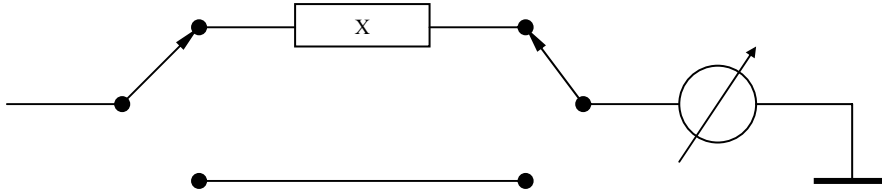
більшої точності є гетеродинні вимірювачі частоти, котрі працюють зі стандартними генераторами частот.



Гетеродином може бути кварц чи молекулярний випромінювач на NH_3 (точність 10^{-12}), також іноді використовується ефект Мьосбауера (точність 10^{-17}).

Випромінювання згасання.

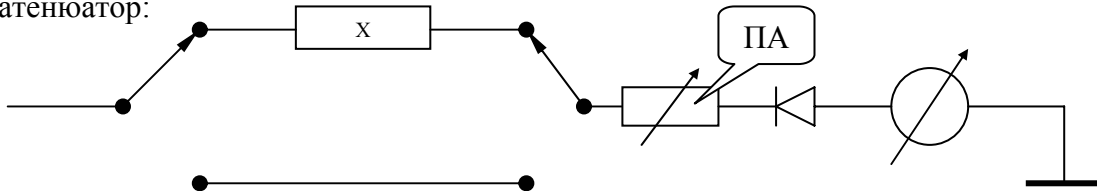
Розглянемо метод відношення потужностей:



Якщо детектор лінійний, то $L = \frac{P_1}{P_x} = \left(\frac{J_1}{J_x}\right)^2$, якщо ж детектор

квадратичний, то $L = \frac{J_1}{J_x}$.

Однак, цей спосіб неточний, він залежить від приладу. Тому існує його модифікація – метод еталонного атенюатора. Тут використовується прецизійний атенюатор:



$P_{об} - 100$ поділок
 $P_{xоб} - 100$ поділок, $L = P_{об} - P_{xоб}$ - незалежно від властивостей детектора,

бо на ньому завжди 100 поділок.

Особливості техніки міліметрових та субміліметрових хвиль.

Виготовлення хвильоводів під субміліметрові хвилі проблематичне бо характерні розміри хвильоводу мають порядок 0,1мм. Втрати: $\lambda = 0,2$ мм,

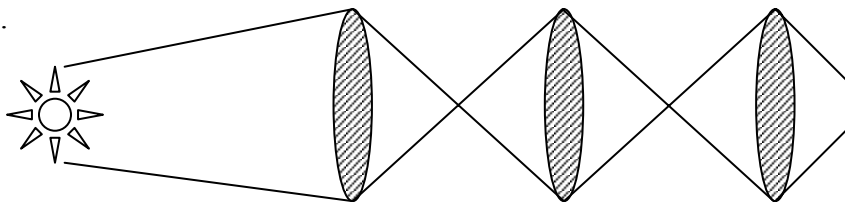
$\alpha^{H_{10}} = \frac{0,7}{\lambda\sqrt{\lambda}} 10^{-3} \left(\frac{\partial B}{M}\right) \Rightarrow \alpha^{H_{10}} = 100 \left(\frac{\partial B}{M}\right)$. Тобто такі хвильоводи

використовувати неможливо. Межі застосування:

- Смужкові – до 300-400 ГГц.
- Мікросмужкові – до 100 ГГц.
- Коаксіальні кабелі – до 50 ГГц.

Потреба в освоєнні даного діапазону пов'язана із “забитістю” інших.

Діелектричні хвильоводи для $\lambda = 0,1 \div 1$ мм теж погані, бо ці частоти відповідають оптичним фотонам у ТТ – ЕМХ замість розповсюдження починає збуджувати коливання атомів ТТ. Це – фундаментальна проблема, її не можна “обійти”.



Тому роблять так звані лінзові хвильоводи – чим менше діелектрика, тим менше втрати. Тому намагаються зменшити кількість лінз за рахунок збільшення фокусної відстані. Однак, завжди є дифракція. Чим більша фокусна

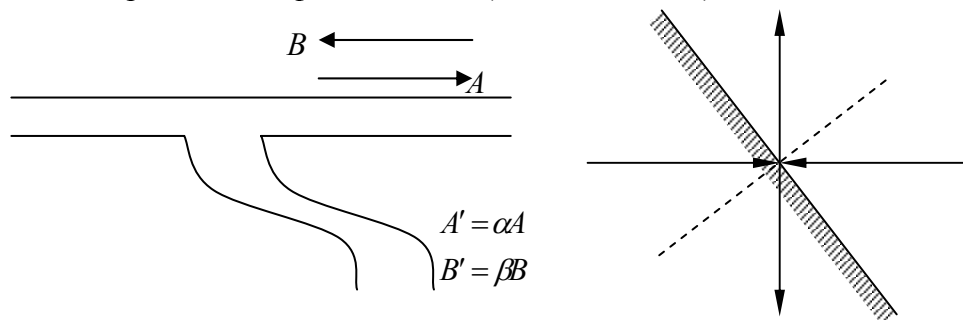
відстань, тим більші втрати, пов'язані з дифракцією. Фокусна відстань Релея

$$F = R = \frac{D^2}{\lambda} - \text{це максимальна фокусна відстань лінзи.}$$

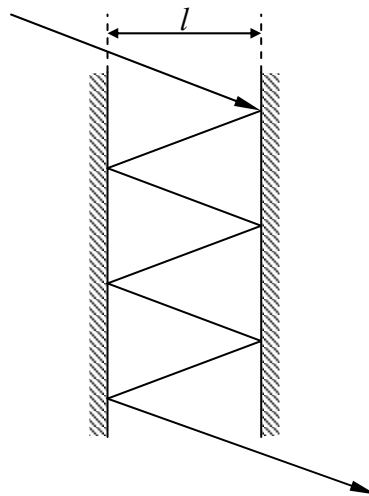
Втрати лінзового хвильоводу $1-1,5 \frac{\partial B}{10m}$. Для виготовлення лінз використовують тефлон. Для того, щоб змінити напрямок розповсюдження, можна поставити дзеркало.

Розглянемо ряд приладів на основі лінзових хвильоводів:

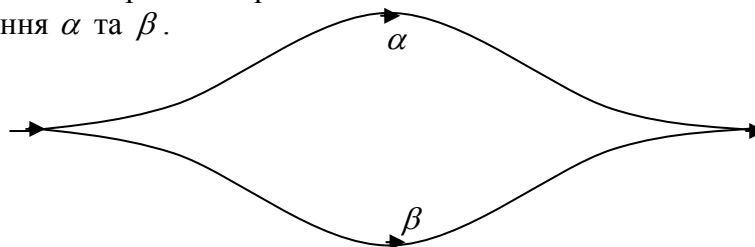
1. Напрямлений відгалуджувач: аналог в НВЧ (див. Мал. Справа): відгалуджує хвилю А, не реагує на хвилю В. непівпрозоре дзеркало створює такий ефект в оптиці (див. Мал. Зліва).



2. Резонатор. Плоскопаралельний дзеркальний резонатор: $l = \lambda/2$. Служить для відбору хвиль певної довжини.



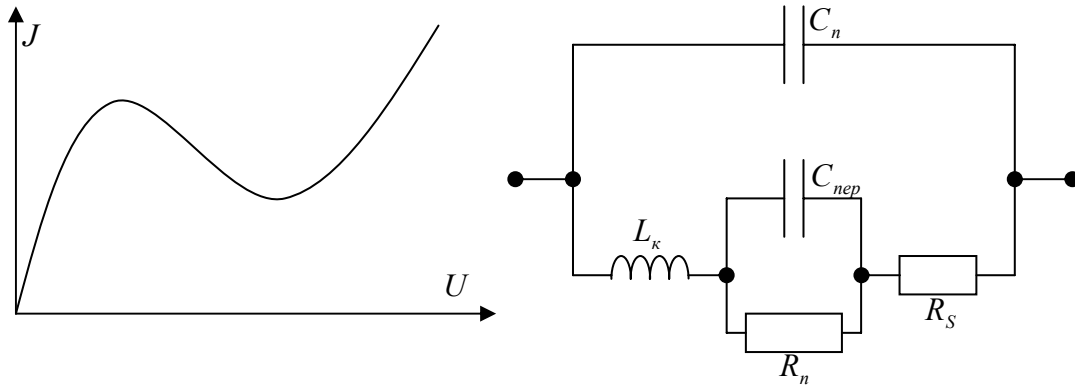
Можна використати розділення і злиття хвиль. Важлива фаза після проходження α та β .



Лекція 28

Генерування та підсилення НВЧ. Підсилювач на тунельному діоді.

ВАХ $J(U)$ тунельного діоду має від'ємну ділянку, де $\frac{dU}{dJ} < 0$. Будь-який діод можна представити еквівалентною схемою:

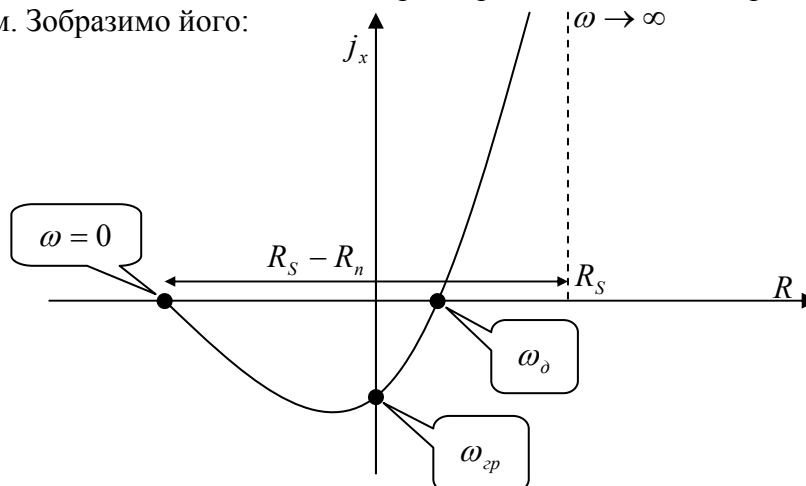


В термінах цієї схеми буде $\frac{dU}{dJ} = R_s + R_n = R_s - |R_n|$ (тут ми врахували опір переходу $R_n < 0$). Звичайні значення $R_n \sim 10 \div 100 \text{ Ом}$. Підрахуємо загальний опір діоду z_{ex} . Знехтуємо паразитичною ємністю C_n , тоді

$$z_{ex} = \left[R_s - \frac{R_n}{1 + \omega^2 C_{nep} R_n^2} \right] + i \left(\omega L_k - \frac{\omega C_{nep} R_{nep}}{1 + \omega^2 C_n^2 R_{nep}^2} \right), \text{ тут введено позначення:}$$

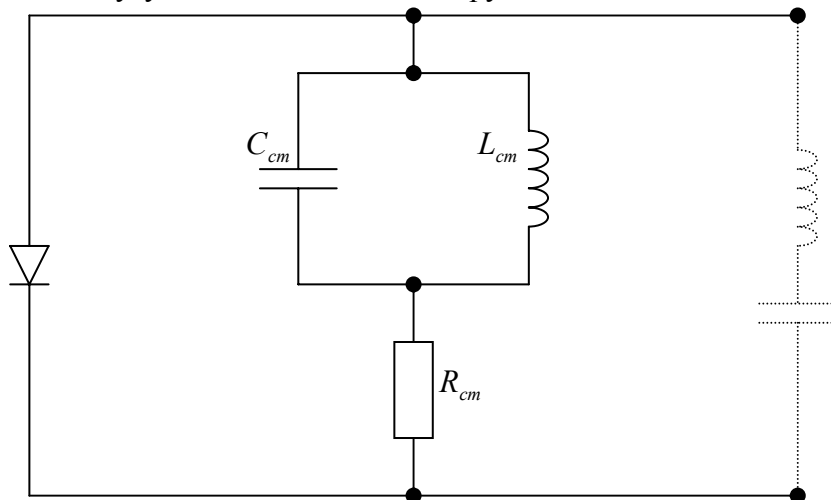
$$\omega_{zp}^2 = \frac{1}{(C_{nep} R_{nep})^2} \left(\frac{R_{nep}}{R_s} - 1 \right), \quad \omega_o^2 = \frac{1}{(L_k C_{nep})} \left(1 - \frac{L_k}{C_{nep} R_{nep}^2} \right).$$

У формулі R_n - по модулю, тобто його від'ємність вже враховано. Графічний вигляд опору чи іншої комплексної величини, де параметром є частота, представляється годографом. Зобразимо його:



ω_o - це резонансна частота діода, вона відповідає чисто реактивному опору. ω_{zp} - гранична частота, на якій опір перестав бути від'ємним.

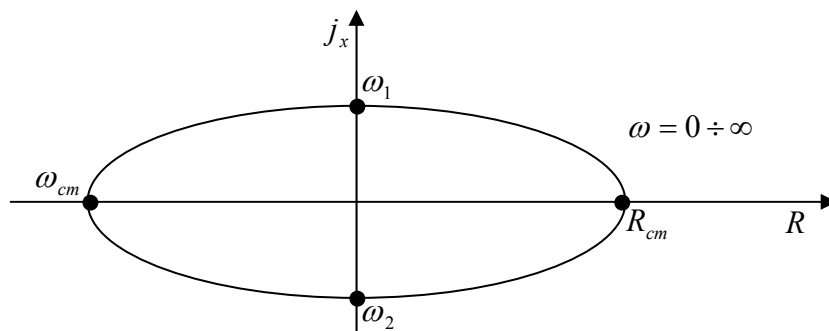
Може бути картина, коли $\omega_0 < 0$, тоді настає самозбудження, оскільки тут резонанс і від'ємний опір. Щоб запобігти цьому, вводять стабілізуючі ланки для обмеження смуги частот від'ємного опору:



На резонансній частоті контуру $\omega \sim \frac{1}{\sqrt{C_{cm} L_{cm}}}$ опір всієї ланки ∞ , а на всіх інших частотах: $R = R_{cm}$. Таким чином, маємо два паралельно з'єднані опори.

Один з них $R_2 < 0$, $R_1 = R_{cm} > 0$, тоді сумарний опір $R_{\Sigma} = \frac{-R_1 |R_2|}{R_1 - |R_2|}$.

Тоді при $R_1 < |R_2|$ буде $R_{\Sigma} > 0$, підсилення не буде. Тепер годограф буде мати інший вигляд, смуга буде на частотах $\omega_1 < \omega < \omega_2$.



Крім цих елементів, у схемі використовуються узгоджуючі трансформатори.

Коефіцієнт підсилення підсилювача на тунельному діоді $\Gamma = \frac{z_{ex} - z_0}{z_{ex} + z_0}$. При цьому тут вхід та вихід не розв'язані, тому, по суті, коефіцієнт підсилення є коефіцієнтом відбиття. Такі підсилювачі нестійкі, нестабільні – параметрично залежать від навантаження.

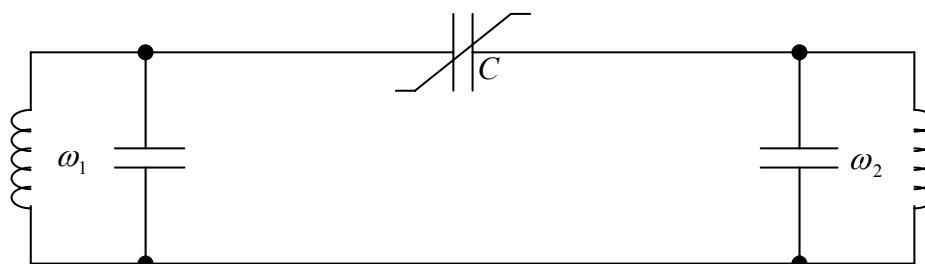
Транзистор має розв'язані вхід та вихід (зв'язок порядку МОМ). Тому зараз використовують саме транзистори.

Регенеративний підсилювач – це генератор в незбудженому режимі.

Перевага транзисторів – триполюсна схема (земля, вхід та вихід), хоча швидкодія гірша чим у діода.

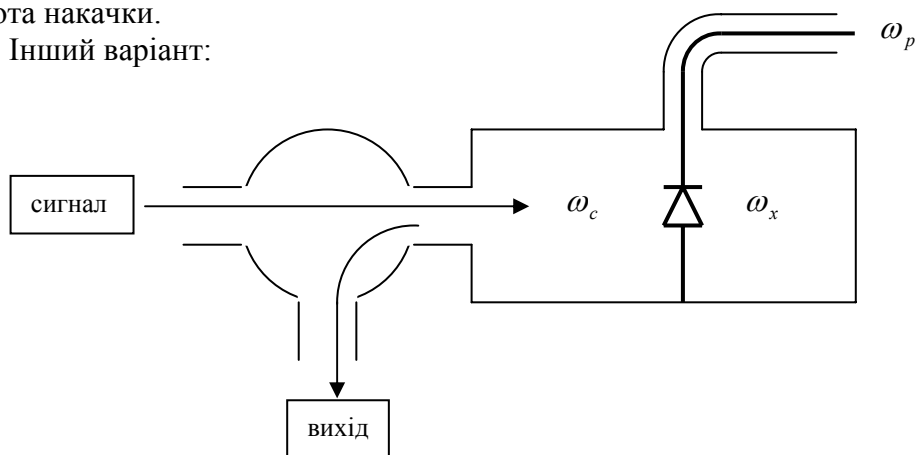
Лекція 29

Параметричний підсилювач на НП-діодах.



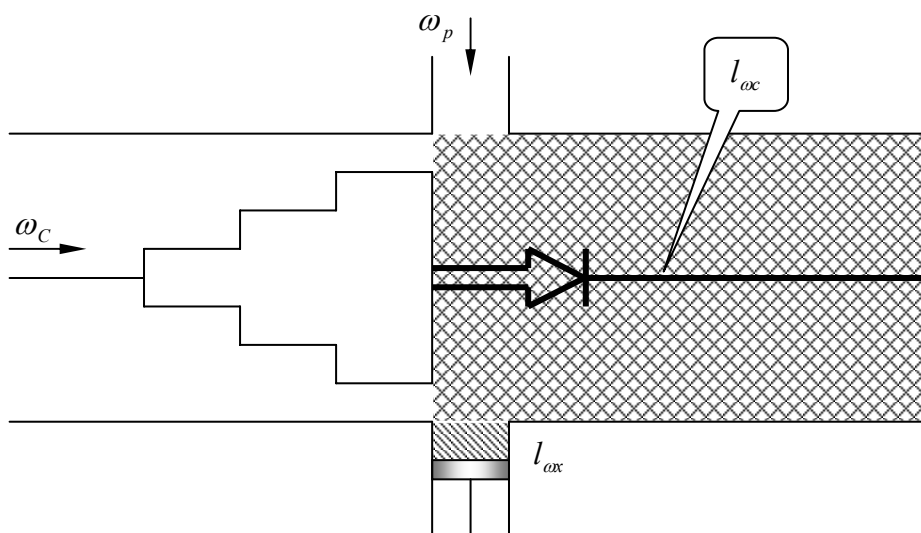
$C = C_0 + \Delta C \cdot \cos \omega t$. Система генерує $\omega = \omega_1 + \omega_2$, при $\Delta C > C_{\text{нор}}$, якщо ж $\Delta C < C_{\text{нор}}$ то система не генерує, проте зовнішній сигнал не підсилюється. ω - частота накачки.


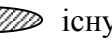

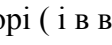
Інший варіант:



ω_c - сигнал, ω_x - холостий, ω_p - накачка. $\omega_c + \omega_x = \omega_p$.

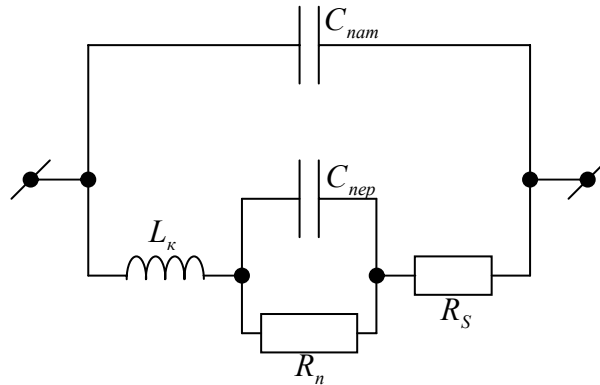
Розглянемо більш сучасний варіант з претензією на мікроелектроніку:



В області  існує ω_c (тобто див. область ). Більша частота ω_x може існувати в , тобто в . Ще більша частота ω_p існує у ще більшому просторі (і в верхньому хвилеводі).

Умова існування резонансу на сигнальній частоті: $x_{oc}(\omega_c) + x_o(\omega_c) = 0$, $x_{oc}(\omega_x) + x_o(\omega_x) + x_{ox}(\omega_x) = 0$. Тоді змінюючи l_{oc} та l_{ox} , можна регулювати частоту, змінюючи умови резонансу.

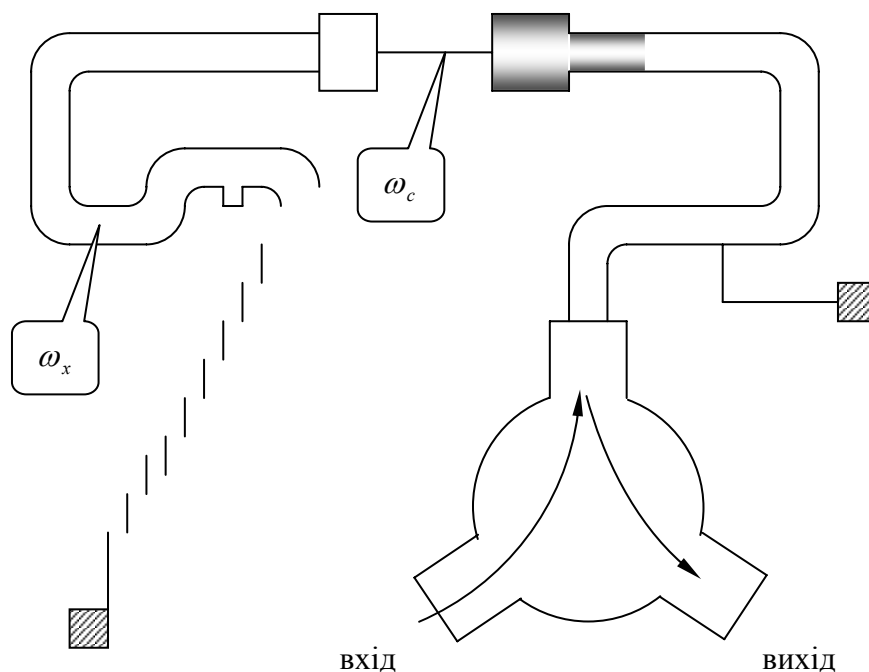
Схема була б “найбільш” мікроелектронною, якби можна було використати власні частоти діода. Спробуємо зробити це: розглянемо еквівалентну схему (див. Мал.):



Тут може бути послідовний резонанс $L_k C_{nep}(\omega_o, \omega_{noc})$ і паралельний $L_k C_{nam}(\omega_{nar})$, $\omega_{noc} \sim 10^{11}$, $\omega_{nar} \sim 10^{12}$.

Останнім часом роблять C_{nam} малим, отже ω_{nar} дуже велика, і її не використовують. Можна використовувати ω_{noc} .

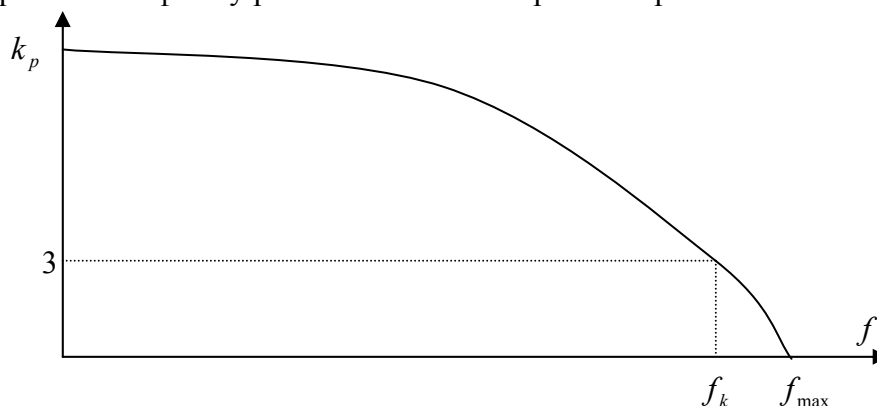
Розглянемо телевізійний параметричний підсилювач. ω_c, ω_x - позначені частоти відповідних резонаторів.



Лекція 30

Транзистори НВЧ.

Ці транзистори є видозміненими звичайними транзисторами. Розглянемо характеристики та фізику роботи звичайного транзистора.



f_{\max} - транзистор перестає працювати. f_k - характеристична частота, зараз досягли 110 ГГц і навіть 250 ГГц. Серійно випуск до 40 ГГц.

Визначимо швидкодію: $f_T = \frac{1}{2\pi\tau}$, для біполярних τ - час на подолання шляху між емітером та колектором, для полярних – між витоком і стоком. “ 2π ” виникає у формулах тому, що в формулах використовується $e^{-\omega\tau}$, тому $\omega = \frac{1}{\tau}$,

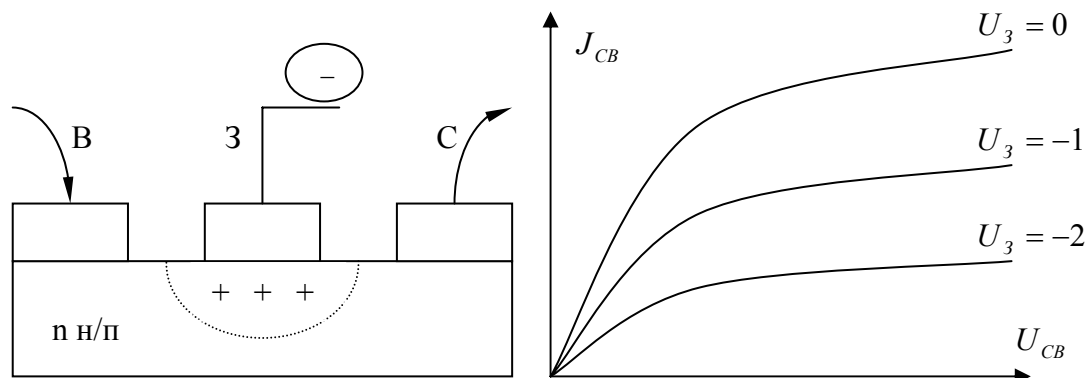
$$f = \frac{1}{2\pi\tau}.$$

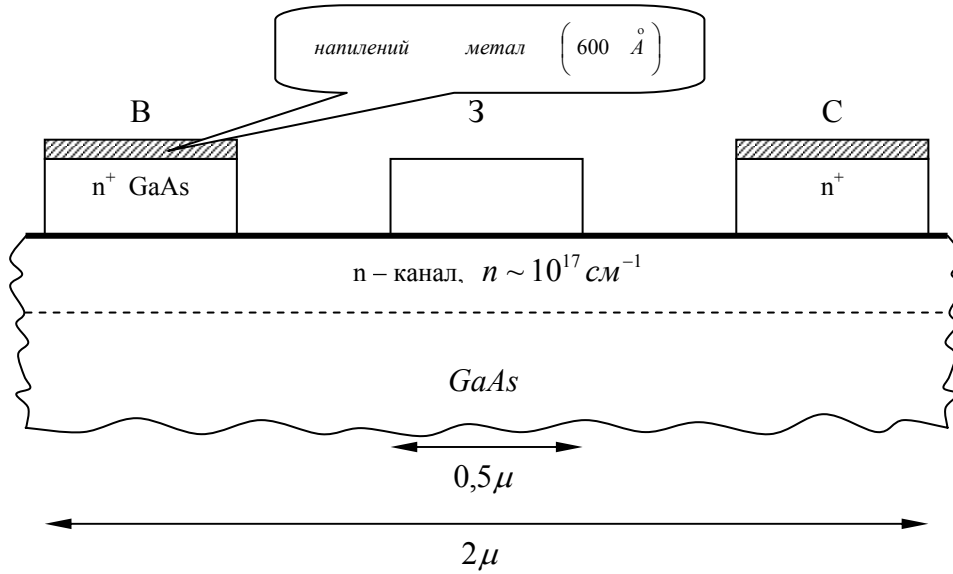
Напругу збільшити ми не можемо, щоб не пробити. Параметри, які можна змінити для зменшення τ :

1. Зменшуємо розмір бази, зменшити область між витоком і стоком. Серійно випускають транзистори з $l = 0,5\mu \Rightarrow f = 40\text{ГГц}$.
2. Використовують матеріали з високою рухливістю, щоб збільшити швидкість. Використовують *GaAs* - транзистори. Іноді використовують транзистори з гетеропереходами, де теж досягається дуже висока рухливість (НЕМТ – транзистори).

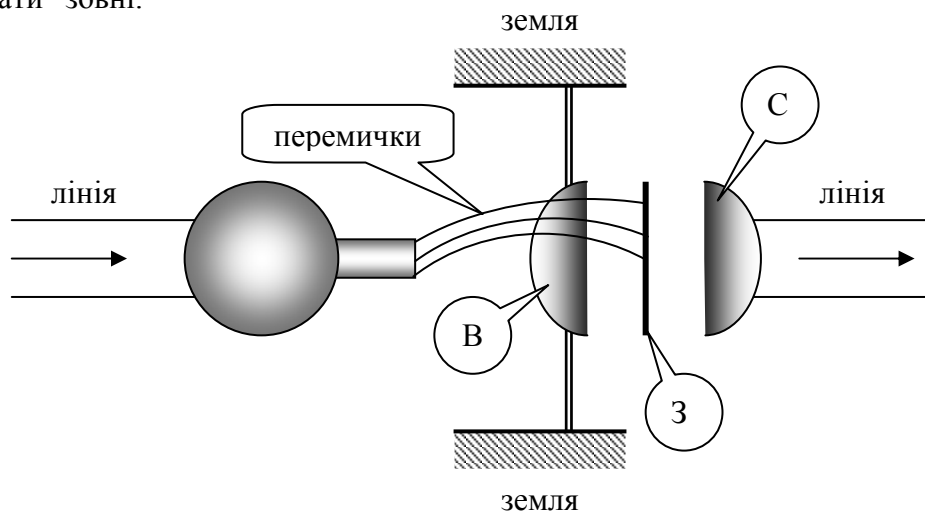
Розглянемо конкретні схеми:

1. **Польовий транзистор.** Чим більше “-“ на затворі, тим менша провідність транзистора завдяки області “+” – заряду на підкладці.

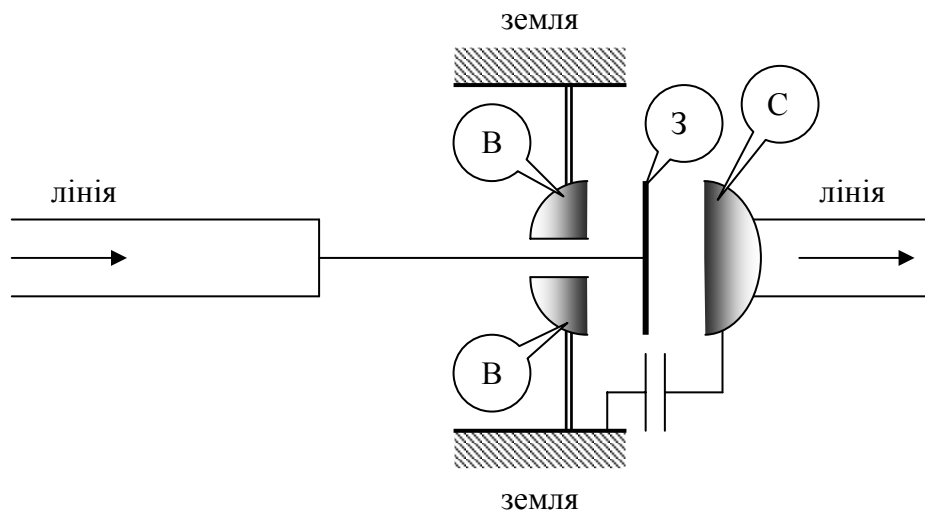




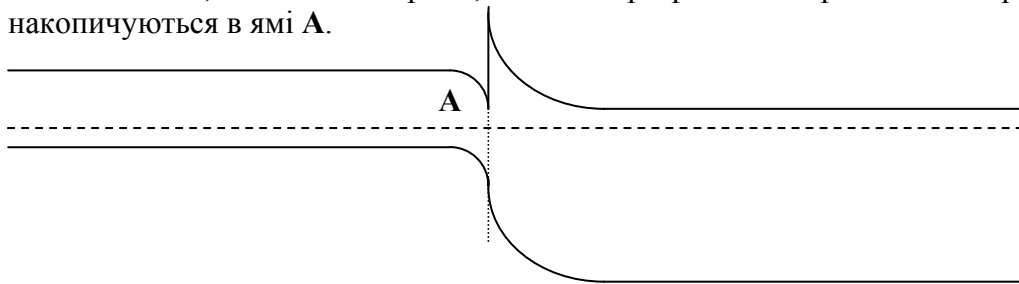
Важливо, щоб транзистор був геометрично включений прямо в лінію. В мікроелектроніці немає можливості створити транзистори, що будуть “стирчати” зовні.



Існує й інший, більш високочастотний варіант підключення:

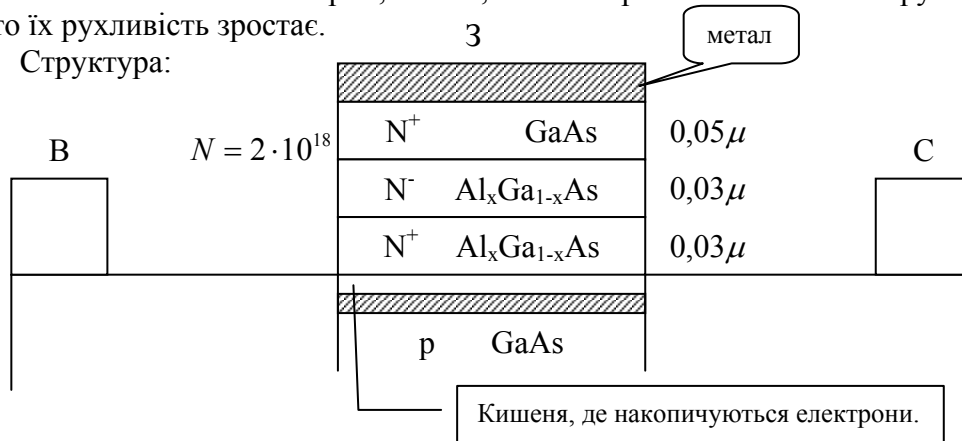


2. **Польові транзистори на гетеропереходах.** Оскільки різниця між рівнями не змінюється, бо це атомні рівні, то маємо розриви на переході: електрони накопичуються в ямі А.

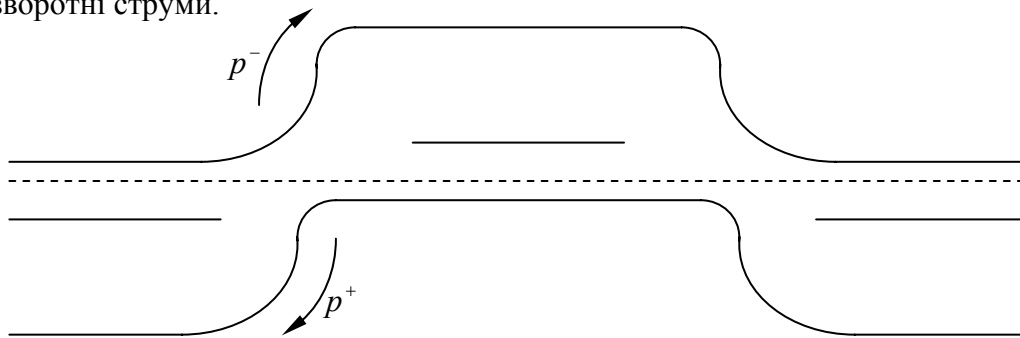


Оскільки справа є домішки, а зліва, де накопичилися електрони, домішок, на яких може осісти електрон, немає, то електрони більш вільно рухаються, тобто їх рухливість зростає.

Структура:

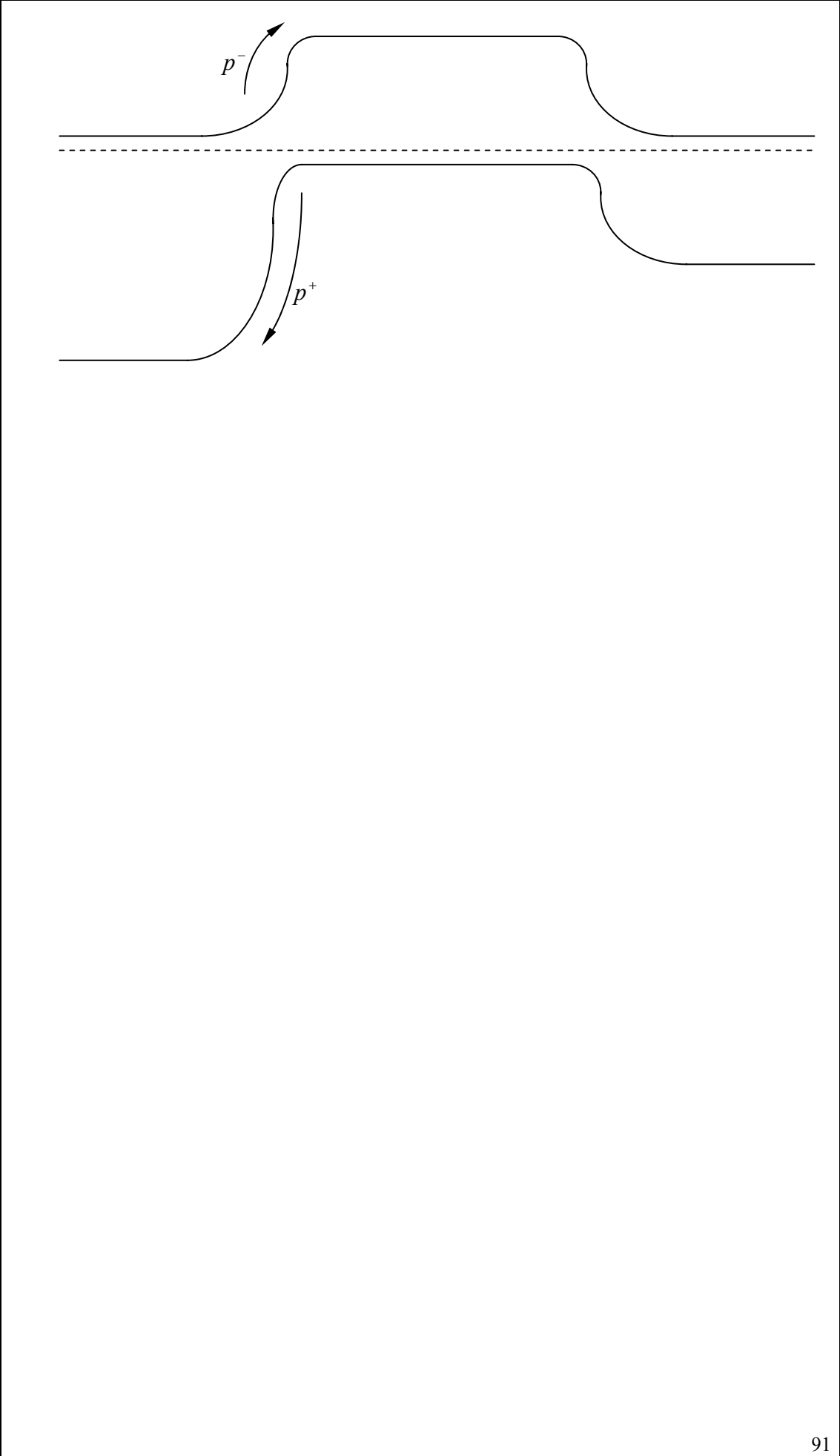


3. **Біполярні транзистори.** На НВЧ ці транзистори гірше. База – дуже мала за розмірами. Це необхідно для збільшення частоти, але при цьому виникають зворотні струми.



Не тільки електрони йдуть у базу p^- , але й дірки йдуть у емітер p^+ . Це створює шуми. Максимальний коефіцієнт підсилення $\beta_{\max} = \frac{I_{ne}}{I_{pe}}$. Звідси

видно, що для кращого β необхідно мінімальний потік дірок в емітер. При малих шарах коефіцієнт підсилення менший. Проблеми розв'язують за допомогою гетеропереходу (див. Мал. нижче): в такому випадку завада для дірок більша, ніж для електронів.

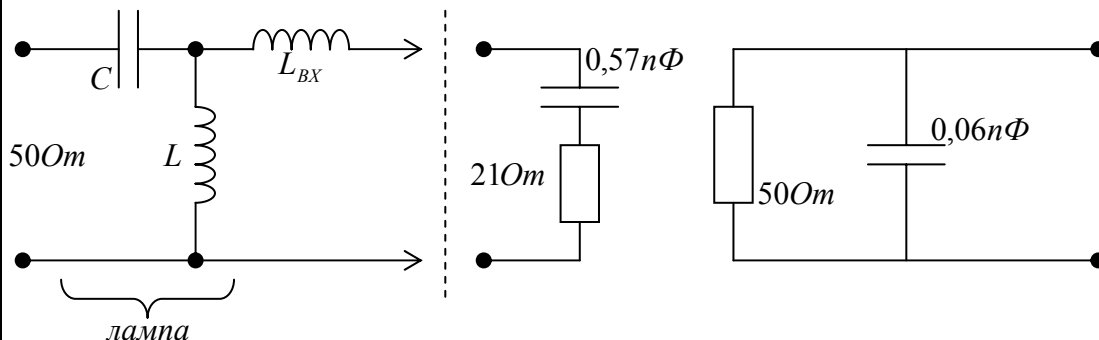


Лекція 31

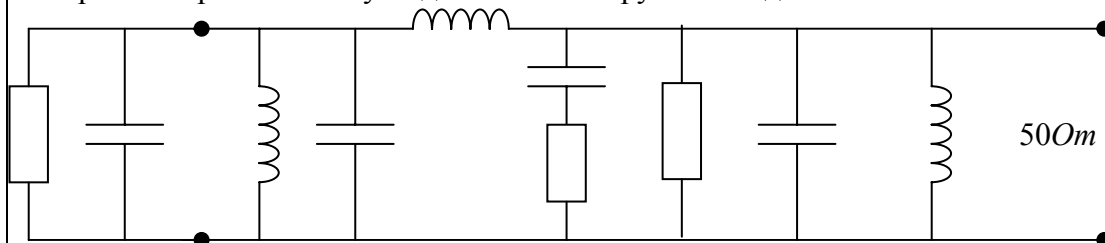
Підсилювачі на НВЧ - транзисторах.

Підсилювачі НВЧ відрізняються від звичайних тим, що треба узгодити вхід-вихід та каскади.

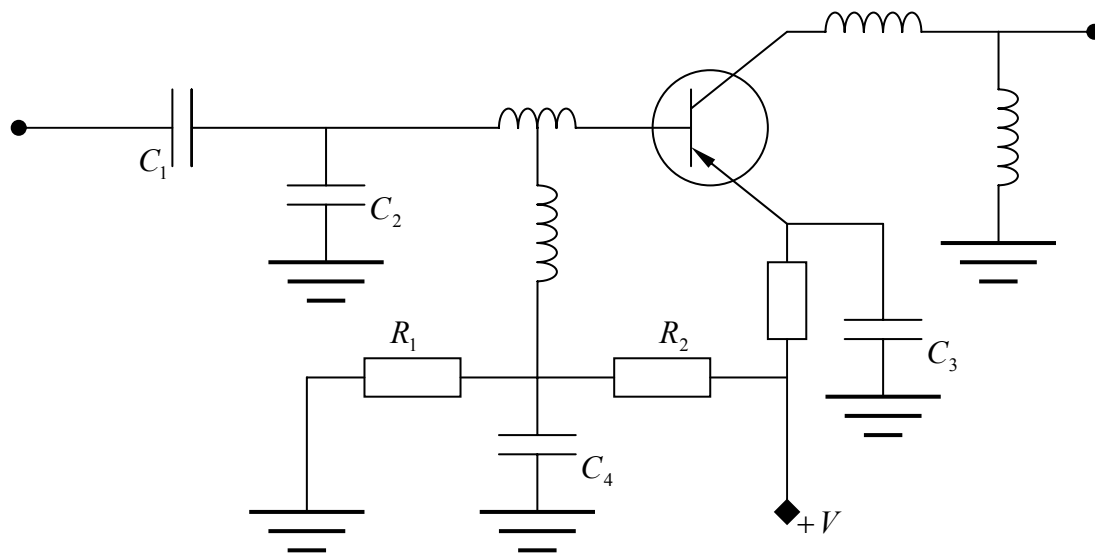
Наприклад розглянемо еквівалентну схему транзистора АП-326А:



Для узгодження з лінією 50 Ом підключають L_{BX} і трансформатор (лампу). L_{BX} підбирається так, щоб узгодити з опорам 50 Ом. Аналогічно створюється резонанс та узгодження по опорі на виході:



Принципова схема підсилювача:



Лекція 32

Невзаємні елементи НВЧ.

Закон Ньютона каже, що $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = f \cdot \vec{F}$. Однак, в загальному випадку: $\vec{a} = \overset{\tau}{\mu} \cdot \vec{F}$, тобто зв'язок не векторний, а тензорний – напрямком руху не завжди співпадає з напрямком сили. Приклад – гіроскоп чи дзига.

В природі існують середовища, що працюють таким чином – електро- чи магнітно-гіротропні. У них намагніченість - $\vec{M} = \overset{\tau}{\chi} \vec{H}$, поляризація - $\vec{P} = \overset{\tau}{\chi}^e \vec{E}$.

$$\overset{\tau}{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \overset{\tau}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & i\varepsilon_a & 0 \\ -i\varepsilon_a & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mu_a - \text{антисиметричний,}$$

$$\overset{\mu}{\mu} = 1 + 4\pi\overset{\tau}{\chi}.$$

Ферити мають магнітогіротропні властивості, плазма має електрогіротропні властивості. Зараз використовують магнітогіротропність, тому її розглядатимемо.

$$m_x = h_x \chi + h_y (i\chi_a) + 0 \cdot h_z \\ m = \overset{\tau}{\chi} \cdot h \Rightarrow m_y = h_x (-i\chi_a) + h_y \chi + 0 \cdot h_z, \text{ бо } \overset{\tau}{\chi} = \begin{pmatrix} \chi & i\chi_a & 0 \\ i\chi_a & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \\ m_z = 0$$

Тензор магнітної проникності фериту.

Рівняння Ландау-Лівшица руху в МП: $\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma [\vec{M} \times \vec{H}]$. Ми будемо шукати $\overset{\tau}{\chi}$ в $\vec{M} = \overset{\tau}{\chi} \vec{H}$.

$$\gamma = \frac{e}{mc} = 2,8 \frac{\text{МГц}}{\text{ерст}}.$$

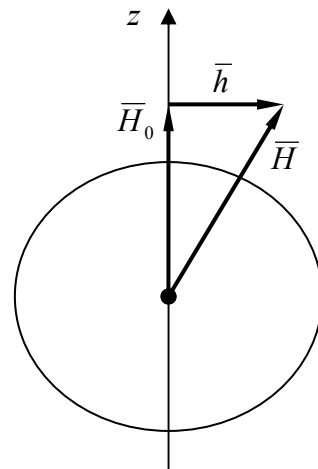
Нехай маємо феромагнітне середовище в \vec{H}_0 , при цьому орієнтація доменів $\vec{M}_0 \uparrow \vec{H}_0$, оскільки це енергетично вигідно.

Нехай тепер $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h} e^{i\omega t}$, $\vec{H}_0 \gg \vec{h}$, $\vec{H}_0 \perp \vec{h}$, тобто додали невелике змінне поле у перпендикулярному напрямку. Звичайно, при цьому зміниться \vec{M} : $\vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{m}$, $\vec{m} \ll \vec{M}_0$.

Тепер треба знайти $\vec{m} = f(\vec{h})$, тобто $\vec{m} = \overset{\tau}{\chi} \vec{h}$. Розглядатимемо лінійну задачу, нелінійності не враховуємо. Можна представити $\vec{m} = \vec{m}_0 e^{i\omega t}$.

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d\vec{m}}{dt} = \vec{m}_0 e^{i\omega t} i\omega$$

$$-\gamma [\vec{M} \times \vec{H}] = -\gamma \begin{vmatrix} i & j & k \\ m_x & m_y & M_0 \\ h_x & h_y & H_0 \end{vmatrix}.$$



Ми знехтували m_z, h_z прирівнявши їх відповідно з M_0, H_0 .

$$m_{ox} e^{i\omega t} i\omega = -\gamma (m_{oy} e^{i\omega t} H_0 - M_0 h_y e^{i\omega t})$$

$$m_{oy} e^{i\omega t} i\omega = -\gamma (m_{ox} e^{i\omega t} H_0 - M_0 h_x e^{i\omega t}), \quad m_{oz} = 0 \text{ оскільки добутки } h \cdot m \text{ мають}$$

другу ступінь малості.

З цієї системи одержимо розв'язок:

$$m_x = \frac{M_0}{H_0} \frac{\omega_H^2}{\omega_H^2 - \omega^2} h_x + \frac{M_0}{H_0} \frac{i\omega\omega_H}{\omega_H^2 - \omega^2} h_y = \chi h_x + i\chi_a h_y$$

$$m_y = \frac{M_0}{H_0} \frac{\omega_H^2}{\omega_H^2 - \omega^2} h_y - \frac{M_0}{H_0} \frac{i\omega\omega_H}{\omega_H^2 - \omega^2} h_x = \chi h_y - i\chi_a h_x$$

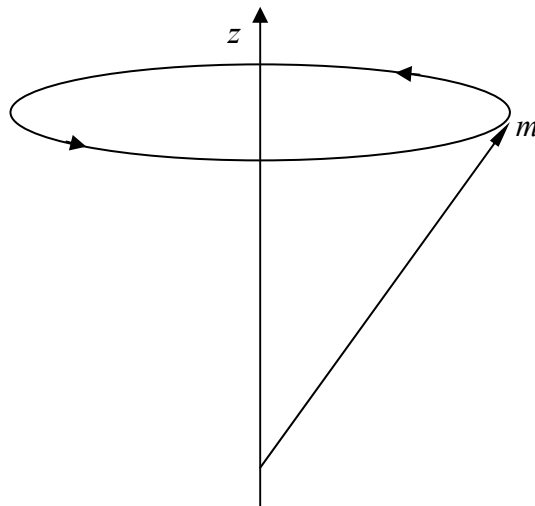
Тут гіромагнітна частота $\omega_H = \gamma H_0$, тобто маємо гіромагнітний ефект у фериті.

- Ферит – це магнітний діелектрик.

При $\omega = \omega_H$ (нескінченності не буде, оскільки ω_H можна замінити як $\omega_H + i\omega'_H$) буде $m_y = -im_x$. Нехай $m_x = e^{i\omega t}$, $m_y = -ie^{i\omega t}$ тоді $\bar{m}_x = \text{Re}(e^{i\omega t}) = \text{Cos } \omega t$, $\bar{m}_y = \text{Re}(-ie^{i\omega t}) = \text{Sin } \omega t$. Таким чином точка обертається по годинниковій стрілці.

Виявляється, магнітний момент, як і спин електрона, може рухатись лише по правому колу.

Таким чином, лівополяризоване поле не буде впливати. На даних властивостях працюють всі прилади.

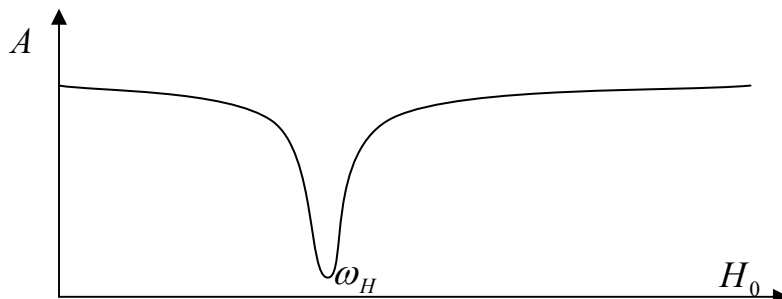


Лекція 33

Прилади.

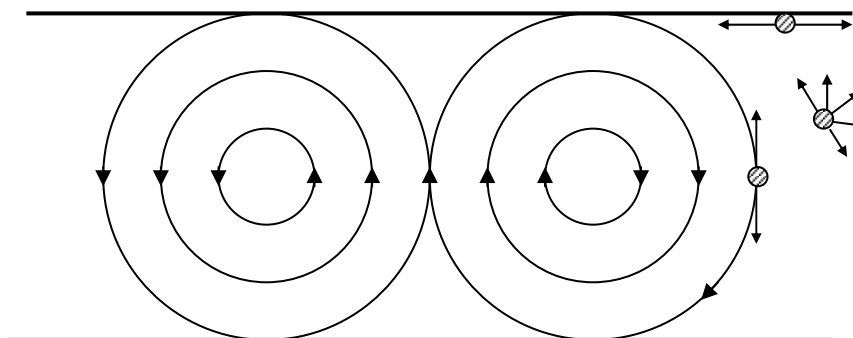
Вони бувають трьох основних типів:

1. **Резонансні.** $\omega_H = \omega$, характеристика поглинання поля:



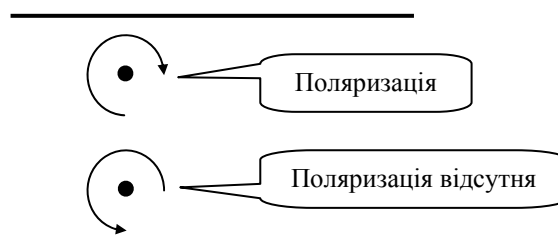
2. Прилади на ефекті зміщення поля.

Помістимо феритову кулю в поле. Хвиля рухається, налітає на кульку. Якщо куля в центрі, то поле на кулі матиме поперечну поляризацію. На стінці поляризація буде поздовжньою. Якщо куля ні в центрі, ні на стінці, то поле буде обертається, тобто кругова поляризація.



Таким чином у хвилеводі існують точки поздовжньої, поперечної та кругової поляризації.

Оскільки моменти в фериті обертаються в одну сторону, то поляризація в різних точках хвилеводу буде різною. Взаємодія буде протилежною при зміні напрямку поля, напрямку хвилі та при симетричній зміні положення зразка у хвилеводі.



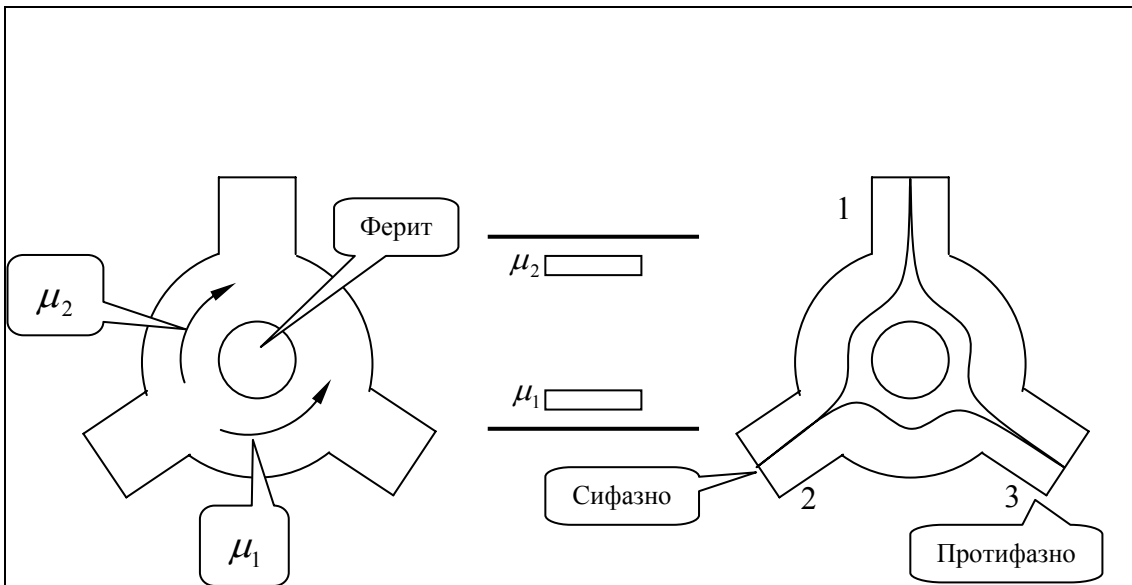
При взаємодії фериту з полем $\mu \gg 1$, при відсутності взаємодії $\mu \sim 1$.

У циркуляторі з феритом хвиля в одному напрямку буде взаємодіяти з феритом сильніше, ніж у протилежному (як і в хвилеводі – див. Мал.). Відповідно і довжина хвилі, що обертається за часовою стрілкою, буде λ_1 , а для хвилі, що обертається проти, λ_2 . Змінюючи радіус та H_0 , можна налагодити

1 \rightarrow 2

прилад так щоб хвиля повністю переходила: 2 \rightarrow 3, і не інакше.

3 \rightarrow 1



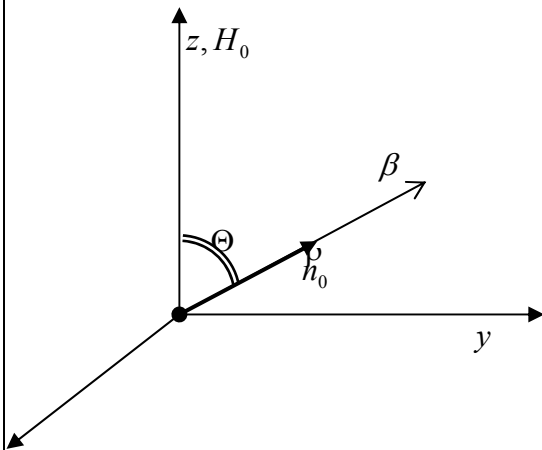
3. Прилади на ефектах Фарадея.

Лекція 34

Плоскі хвилі в гіротропному середовищі.

Нехай $\leftrightarrow \mu = \begin{pmatrix} \mu & i\mu & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Не реагує на складову z , а тільки x, y .

Обертання магнітного моменту відбувається лише у площині (x, y) .



$$\vec{n} = \{0, \sin \theta, \cos \theta\}.$$

Розповсюджуюче плоске поле

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\beta \vec{H}_0 \vec{r}}.$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i\beta \vec{H}_0 \vec{r}}.$$

Запишемо рівняння Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{i\omega}{c} \leftrightarrow \mu \cdot \vec{H}; \\ \text{rot } \vec{H} = \frac{i\omega}{c} \mathcal{E} \vec{E}. \end{cases}$$

Ми розглядаємо \mathcal{E} - скаляр, тобто просто ферит. Використовуємо формулу $\text{rot } \vec{E}_0 e^{-i\beta \vec{H}_0 \vec{r}} = -i\beta \left[\vec{n}_0 \times \vec{E} \right]$; тоді рівняння Максвелла можна записати в такому вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\beta c}{\omega} \vec{n}_0 \times \vec{E}_0 + \leftrightarrow \mu \cdot \vec{H}_0 = 0 \\ \frac{\beta c}{\omega} \vec{n}_0 \times \vec{H}_0 - \mathcal{E} \vec{E}_0 = 0 \end{cases}.$$

Позначимо $\frac{\beta c}{\omega} = \frac{\beta}{k_0} := \xi$ - це уповільнення, оскільки β - новий

хвильовий вектор, k_0 - хвильовий вектор без фериту.

$$\vec{n}_0 \times \vec{E}_0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = i(E_z \sin \theta - E_y \cos \theta) - j(-E_x \cos \theta) + k(-E_x \sin \theta)$$

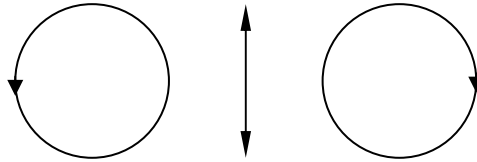
$$\begin{cases} \xi E_z \sin \theta - \xi E_y \cos \theta + \mu H_x + i\mu_a H_y = 0 \\ \xi E_x \cos \theta + \mu H_y + i\mu_a H_x = 0 \\ \xi E_x \sin \theta - \mu_n H_z = 0, \quad (\mu_n = 1) \\ \xi H_z \sin \theta - \xi H_y \cos \theta - \varepsilon E_x = 0 \\ \xi H_x \cos \theta - \varepsilon E_y = 0 \\ \xi H_x \sin \theta - \varepsilon E_z = 0 \end{cases}.$$

Розглянемо прості випадки:

1. $\Theta = 0$ (хвиля розповсюджується вздовж поля): $\frac{\beta^2}{k_0^2} = \varepsilon(\mu \pm \mu_a)$.

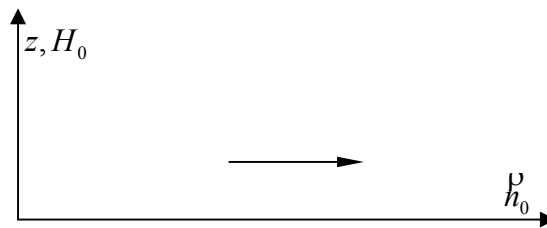
Тут мають місце пряма і зворотна хвилі:

$\beta_+ = k_0 \sqrt{\varepsilon(\mu + \mu_a)}$, $\beta_- = k_0 \sqrt{\varepsilon(\mu - \mu_a)} \sim k_0 \sqrt{\varepsilon}$. Тут буде $\beta_+ \gg 1$. Крім того, отримаємо $H_y = \pm i H_x$, де “-“ – права хвиля, “+” – ліва хвиля. Це означає, що при падінні на ферит лінійна поляризація розкладається на дві зустрічні кругові поляризації:



Це має місце і у всіх інших середовищах, але там це не має значення. Далі права кругова поляризація буде обертати магнітний момент, і для неї буде $\beta_+ = k_0 \sqrt{\varepsilon(\mu + \mu_a)}$, а ліва кругова поляризація магнітний момент обертати не зможе, ферит для неї не існує, тобто стала розповсюдження буде $\sim k_0 \sqrt{\varepsilon}$. Звідси впливає ефект Фарадея.

2. $\Theta = 90^\circ$ (ефект Катоне-Мутона) – подвійне променезаломлення.
Отримаємо дві незалежні системи рівнянь:

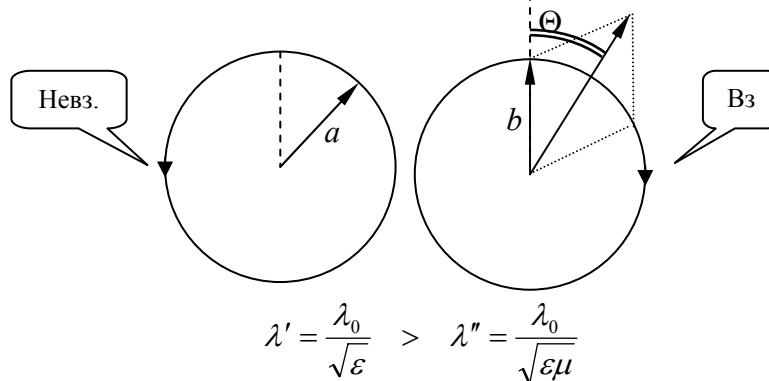


$$\begin{cases} \xi H_x \sin \Theta - \varepsilon E_z = 0 \\ \xi E_z \sin \Theta + \mu H_x + i \mu_a H_y = 0 \\ \mu H_y + i \mu_a H_x = 0 \end{cases} \quad (H_x H_y E_z) \rightarrow \beta = k_0 \sqrt{\varepsilon} - \text{звичайна хвиля}$$

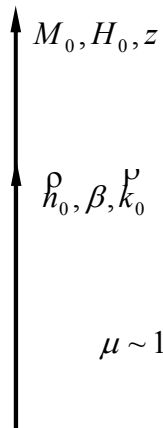
$$\begin{cases} \xi E_x \sin \Theta - \mu_n H_z = 0 \\ \xi H_z \sin \Theta - \varepsilon E_x = 0 \\ -\varepsilon E_y = 0 \end{cases} \quad (H_x H_y E_z) \rightarrow \beta = (\varepsilon \mu_\perp) k_0 - \text{не звичайна хвиля, } H_z \text{ не крутить магнітний момент.}$$

Знову маємо дві незалежні хвилі з різними β .

Розглянемо дві хвилі з круговою поляризацією:



Тобто, у взаємодіючій хвилі довжина хвилі буде менша. Зсунемось від початку на період λ'' , тоді друга хвиля повернеться в початковий стан, а перша не встигне. Тоді $(\vec{a} + \vec{b})$ дасть вектор під кутом Θ до нульової площини. Θ - кут Фарадея (кут повороту площини поляризації). $\Theta = \frac{\beta''l - \beta'l}{2}$, ми розглянули $l = \lambda''$. Цей кут змінюється в залежності від відстані.



$\mu \sim 1$, невзаємодіє

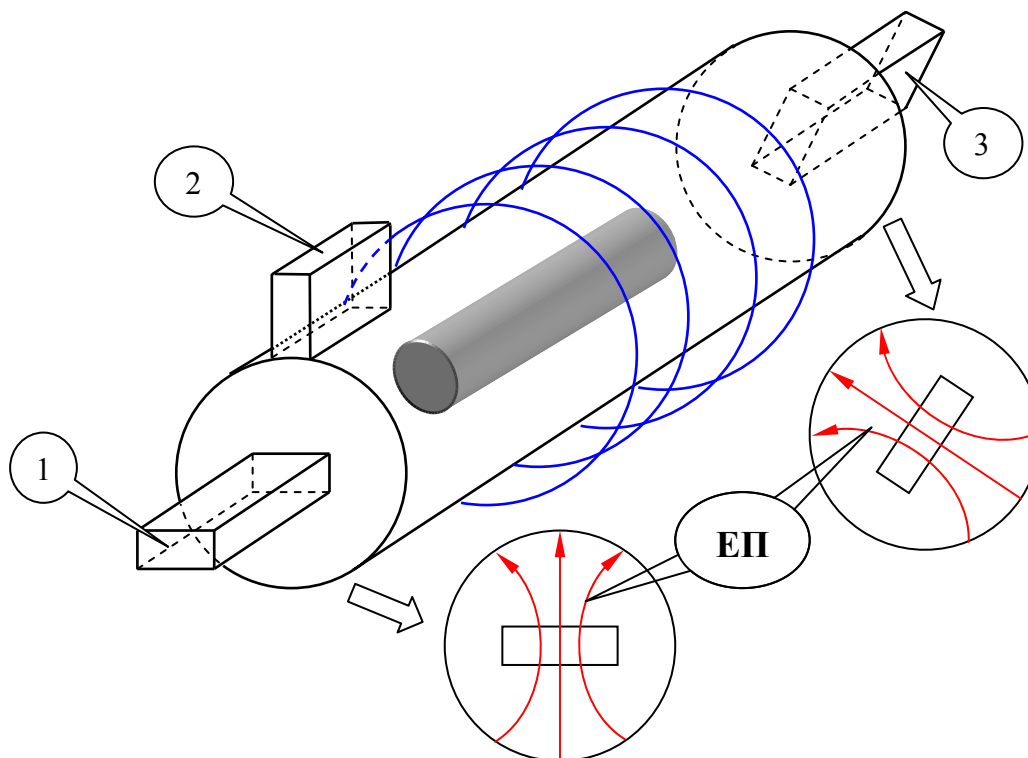


$\mu_{\perp} \gg 1$, взаємодіє

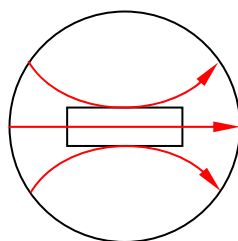
Лекція 35

Фарадеївський вентиль і циркулятор.

Ці прилади працюють на великих потужностях. Вхідна та вихідна щілини повернуті на 45° одна відносно іншої. Всередині – ферит, навколо – електромагнітна котушка. Підбираємо параметри так, щоб хвиля змінювала поляризаційний кут на 45° після проходження $1 \rightarrow 2$.

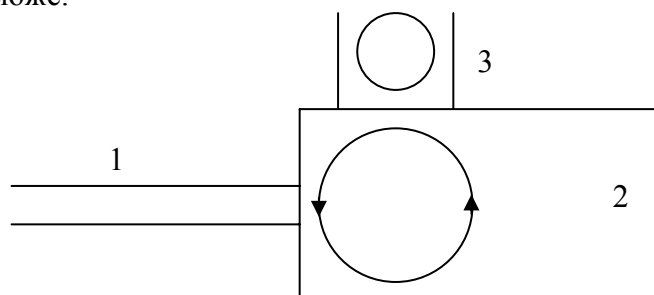


Якщо пропустити хвилю з кінця на вхід, то буде:



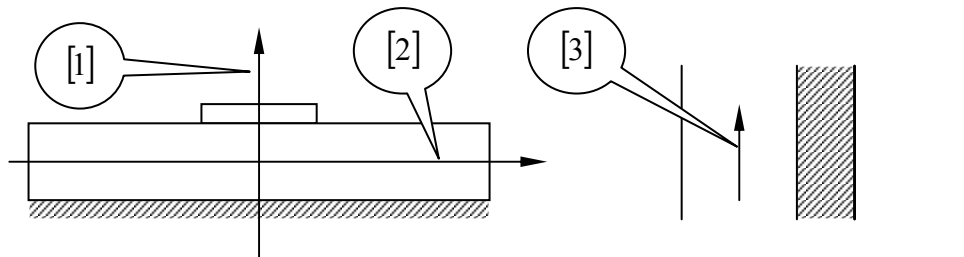
і хвиля не піде $2 \rightarrow 1$, вона піде в 3, оскільки тут буде зв'язок по МП, таке поле може вийти в 3, а в 1 – не може.

Отримуємо циркулятор $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$. Якщо замість 2 поставити заглушку, то отримаємо вентиль, бо хвиля піде $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$.



Мікросмужкові лінії з феритом.

Замість діелектрику беремо ε , μ .



Площина поляризації задана металевими смужками і не може обертатися. Можна змінювати $\beta = \beta(H)$. Є також три варіанти намагнічення [1], [2], [3].

- $\mu_1 \approx \mu_{\perp}$.
- $\mu_2 \approx 1$, оскільки в цьому напрямку змінне $\vec{h} \parallel \vec{M}_0, \vec{H}_0$, і не може взаємодіяти.
- $\mu_3 \approx \mu \pm \mu_a$ (нас цікавить $\mu + \mu_a$).

Лекція 36

Аналіз та синтез НВЧ – елементів.

Хвильові матриці n - полюсника.

Розглянемо відому матрицю розсіювання S . Нехай маємо $2n$ - полюсник, у нього n входів і виходів. Для кожного входу та виходу є падаюча та відбита хвилі.

Будемо користуватися нормованими величинами: $\frac{a_k a_k^*}{2} = P_{k_{\text{пад}}}$ - для падаючої хвилі, $\frac{b_k b_k^*}{2} = P_{k_{\text{від}}}$ - для відбитої. a_i, b_i - амплітуди падаючої та відбитої хвиль, $P_{i_{\text{пад}}}, P_{i_{\text{від}}}$ - відповідні потужності.

Будемо вважати, що відбита хвиля зумовлена всіма хвилями, що увійшли в

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 + \dots + S_{1n}a_n$$

$2n$ - полюсник: Маємо матрицю:

$$b_n = S_{n1}a_1 + S_{n2}a_2 + \dots + S_{nn}a_n$$

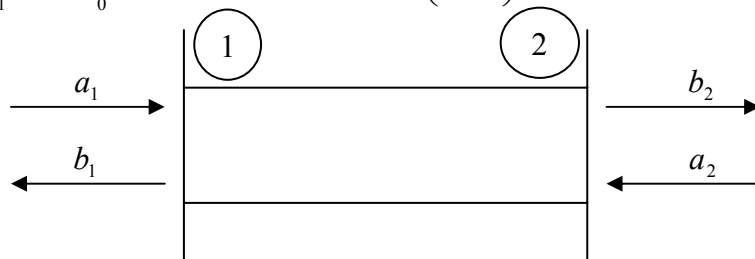
$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & S_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \text{ можна записати в матричному вигляді:}$$

$$\hat{b} = \hat{S} \hat{a}.$$

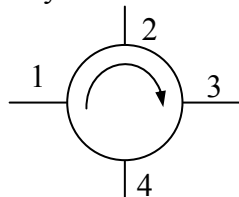
Фізичний зміст S_{kk} - коефіцієнт відбиття від k - того порту. $S_{kk'}$ - коефіцієнт передачі з k' порту у k - тий.

1. Побудуємо матрицю ідеального вентиля. $b_1 = \sum_0^{11} a_1 + \sum_0^{12} a_2$;

$$b_2 = \sum_1^{21} a_1 + \sum_0^{22} a_2; b_2 = a_1. \text{ Отже } \hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

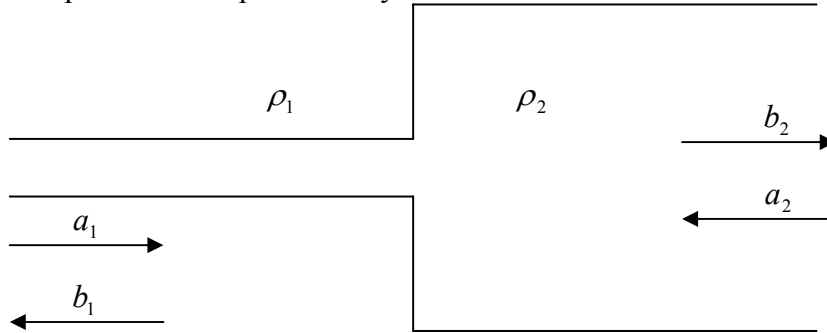


2. Побудуємо матрицю для циркулятора: Матриця \hat{S} не ермітова, бо втрачує енергію. В ермітових втрачати енергії немає.



$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

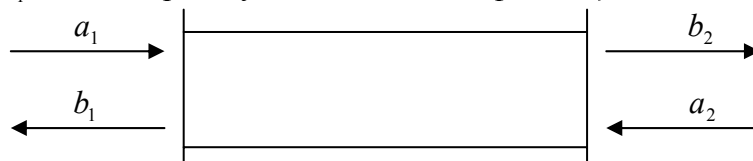
3. Отримаємо матрицю наступного з'єднання хвильоводів:



$\frac{b_1}{a_1} = \Gamma_1$ - коефіцієнт відбиття від порту 1. $\Gamma_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} = \frac{R - 1}{R + 1}$, де $R = \frac{\rho_2}{\rho_1}$. $S_{11} = \Gamma_1$, $S_{22} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{1 - R}{1 + R}$. Так як $P_{над_1} = P_{від_1} + P_{прот_2}$ то $\frac{a_1^2}{2} = \frac{b_1^2}{2} + \frac{b_2^2}{2}$, отже $S_{12} = S_{21} = \frac{2\sqrt{R}}{R + 1}$.

4. Матриця шматку хвильоводу: тут враховується фаза; $S = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\beta l} \\ e^{-i\beta l} & 0 \end{pmatrix}$,

$b_2 = a_1 e^{-i\beta l}$ - це враховує відставання по фазі на βl на відстані l .



Рівняння інциденцій.

Матриця розсіювання для з'єднання малополюсників, якщо відомі матриці окремих малополюсників. Нехай маємо довільний набір елементів.

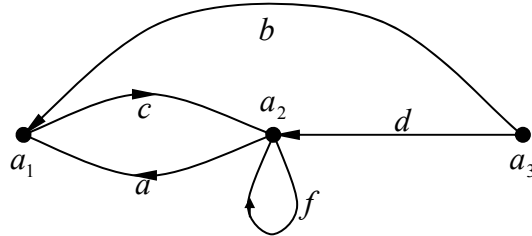
Лекція 37

Метод орієнтованих графів.

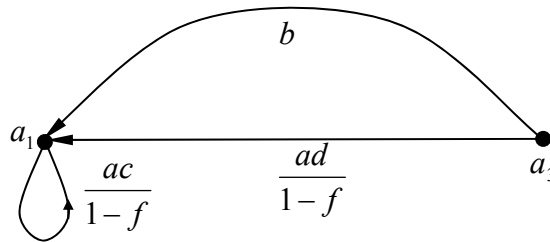
$$a_1 = aa_2 + ba_3$$

$$a_2 = ca_1 + da_3 + f(a_2)$$

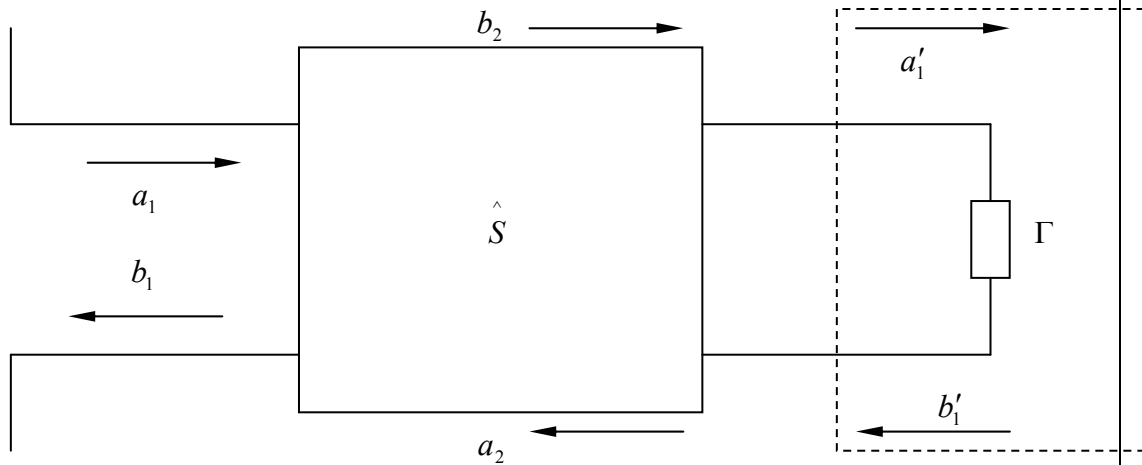
$$a_2 = f(a_2)$$



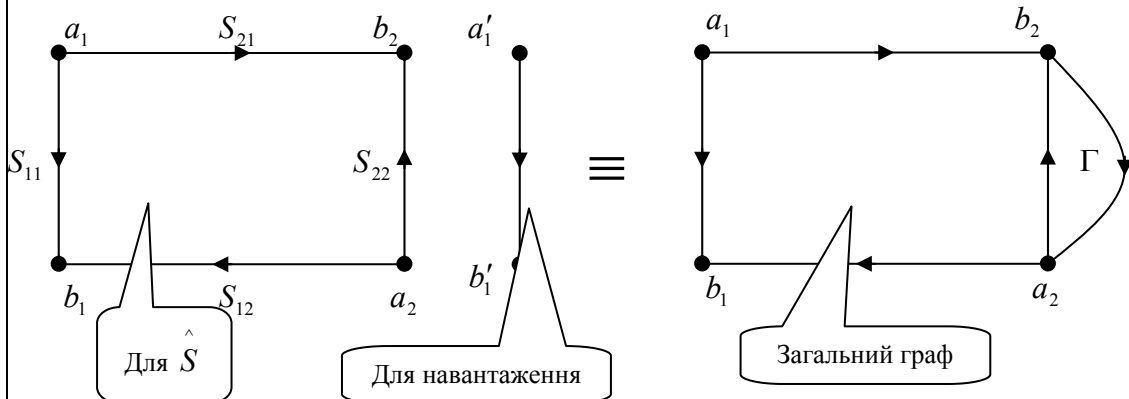
Можна виключити вершину a_2 . Для цього стрілки продовжують так, ніби вузла a_2 і не було. В діамагнетику вказується $(1-f)$ - коефіцієнт при виключеній вершині.



Задача: Знайти за допомогою орієнтованих графів параметри системи.



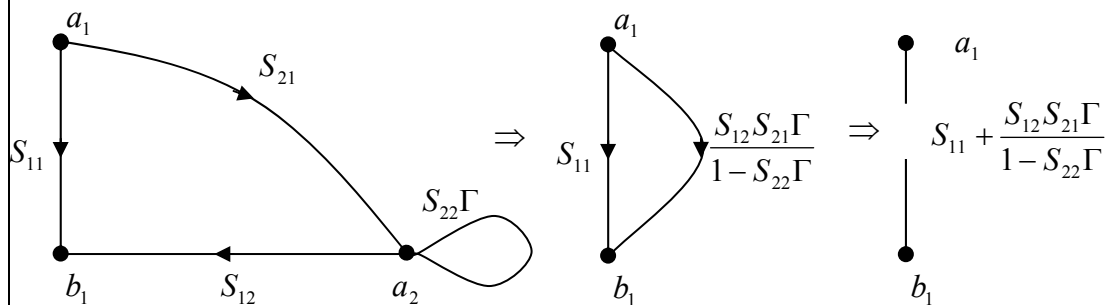
Складемо графи елементів:



Перепозначимо входи – виходи навантаження через a'_1, b'_1 . Можна записати, що $b_2 = a'_1, a_2 = b'_1$.

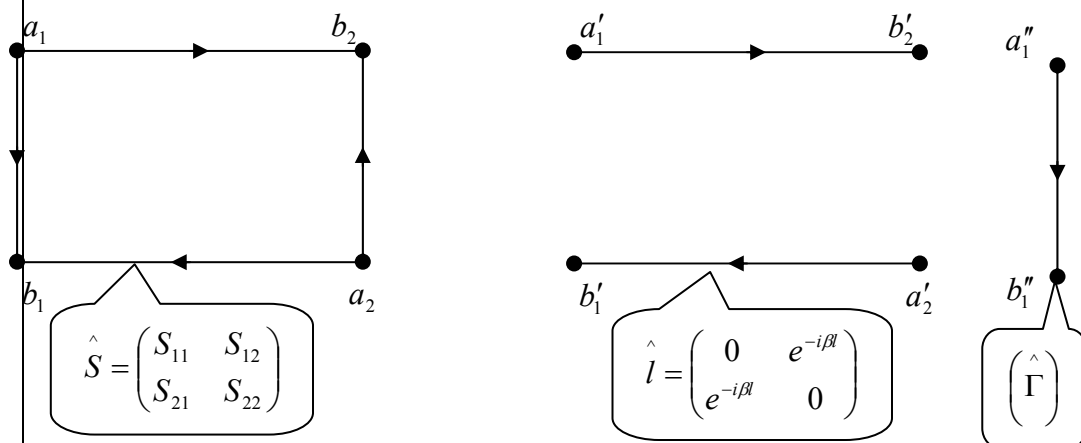
Тепер можна записати рівняння і матрицю:
$$\begin{cases} b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \\ a_2 = \Gamma b_2 \end{cases}$$

Більш того, нас цікавить коефіцієнт відбиття всієї системи, тобто безпосередній зв'язок $a_1 - b_1$. Виключимо b_2 , потім a_2 , послідовно отримуємо:



Ми отримали коефіцієнт відбиття від навантаження через узгоджувальний трансформатор.

Включимо між \hat{S} та Γ відрізок хвильоводу l , тоді буде три матриці:



Тоді замість Γ в попередній формулі одержимо $e^{-2i\beta l}$.

Лекція 38

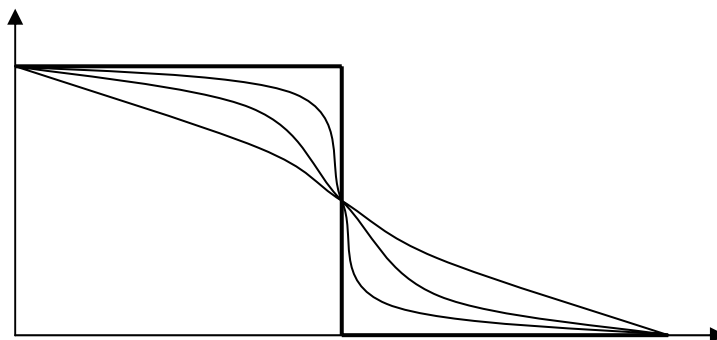
Синтез НВЧ – елементів.

Зараз існує синтез лише пасивних елементів.

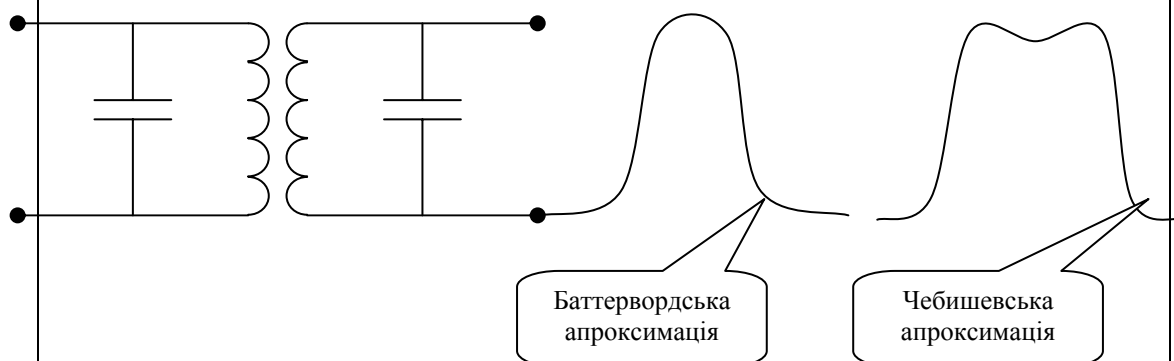
Фільтри НВЧ.

Існують методи синтезу по Каєру та Форстру. Виходять з характеристик фільтру. Синтезується лише ФНЧ, інші отримують за допомогою нескладних перетворень.

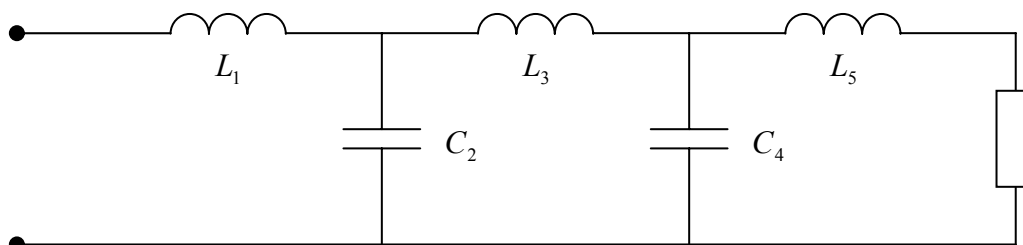
Існує апроксимація по Баттерворту: $A = \frac{1}{\sqrt{1+S^{2n}}}$, де $S = \frac{\omega}{\omega_0}$ - нормована частота. Чим більше n тим ближче до прямокутної характеристики.



Чебишевська характеристика складніша, але результат майже такий самий. Наприклад для трансформатора:



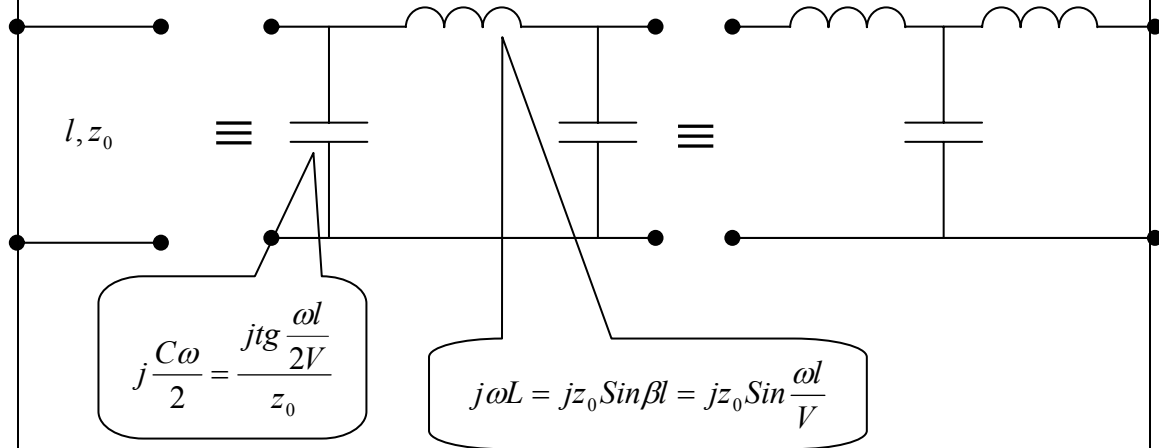
Розглянемо схему:



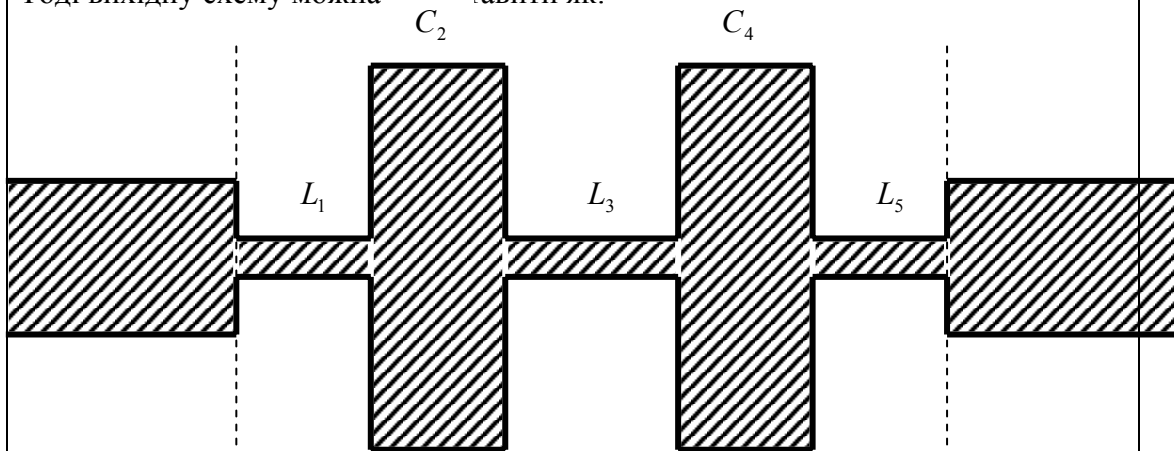
Цей фільтр – п'ятого порядку, бо на ВЧ: L - розрив, C - замкортка, тобто маємо $z = 0^5$ (таких елементів 5). Цей фільтр дає характеристику ФНЧ (достатньо круту).

Спробуємо створити такий фільтр для НВЧ, оскільки розрахунки дають нереальні з точки зору технології значення ємності та індуктивності. Розглянемо лінію довжиною l та опором z_0 .

Їх можна представити у вигляді:



У другій схемі $L = jz_0 \operatorname{tg} \frac{\beta l}{2}$, $C = j \frac{1}{z_0} \operatorname{Sin} \beta l$. Тонка довга лінія має $z_0 > 50 \text{Om}$ і є індуктивністю, широка коротка лінія представляє собою ємність. Тоді вихідну схему можна гавити як:



Однак, нам потрібно розрахувати зовнішні параметри хвильоводів. Нехай z_{oi} - опір, а l_i - довжина відповідного хвильоводу, тоді запишемо рівняння:

$$\omega L_1 = z_{01} \operatorname{Sin}\left(\frac{\omega l_1}{V}\right)$$

$$\omega L_3 = z_{03} \operatorname{Sin}\left(\frac{\omega l_3}{V}\right)$$

$$\omega L_5 = z_{05} \operatorname{Sin}\left(\frac{\omega l_5}{V}\right)$$

$$\omega C_2 = \frac{1}{z_{02}} \frac{\omega l_2}{V}, \text{ (при } x \ll 1, \operatorname{Sin} x \approx x)$$

$$\omega C_4 = \frac{1}{z_{04}} \frac{\omega l_4}{V}$$

Звичайно беруть $z_{01} = z_{03} = z_{05}, z_{02} = z_{04}$, підбирають l_i . Це – перше наближення, його досить для визначення параметрів лінії. Наближення – бо ми вважаємо опори дуже великими, чи дуже маленькими.

Розглянемо друге наближення: ні індуктивності не рівні нулю, і вони впливають на сусідні ділянки. Тоді маємо:

$$\omega L_1 = z_{01} \operatorname{Sin}\left(\frac{\omega l_1}{V}\right) + \frac{z_{02}}{2} \frac{\omega l_2}{V}$$

$$\omega L_3 = z_{03} \operatorname{Sin}\left(\frac{\omega l_3}{V}\right) + \frac{z_{03}}{2} \left(\frac{\omega l_2}{V} + \frac{\omega l_4}{V}\right)$$

$$\omega L_5 = z_{05} \operatorname{Sin}\left(\frac{\omega l_5}{V}\right) + \frac{z_{02}}{2} \frac{\omega l_4}{V}$$

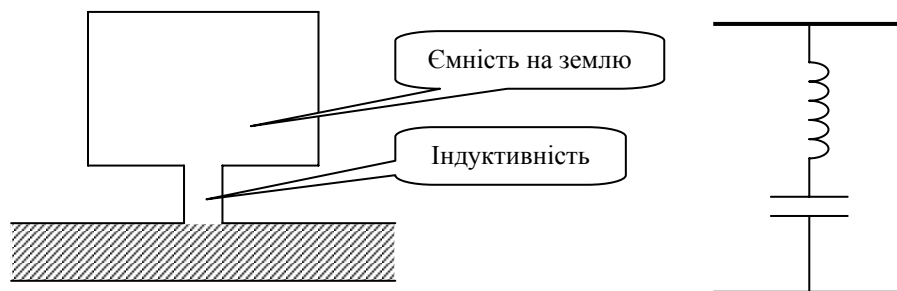
$$\omega C_2 = \frac{1}{z_{02}} \frac{\omega l_2}{V} + \frac{1}{2z_{01}} \left(\frac{\omega l_1}{V} + \frac{\omega l_3}{V}\right)$$

$$\omega C_4 = \frac{1}{z_{04}} \frac{\omega l_4}{V} + \frac{1}{2z_{01}} \left(\frac{\omega l_5}{V} + \frac{\omega l_3}{V}\right)$$

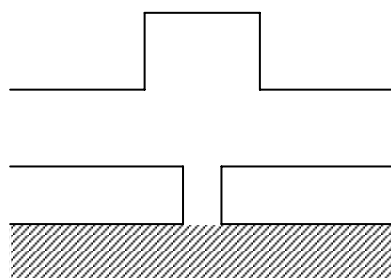
Врахували, що $z_{01} = z_{03} = z_{05}, z_{02} = z_{04}$.

В НВЧ маємо еквівалентні схеми:

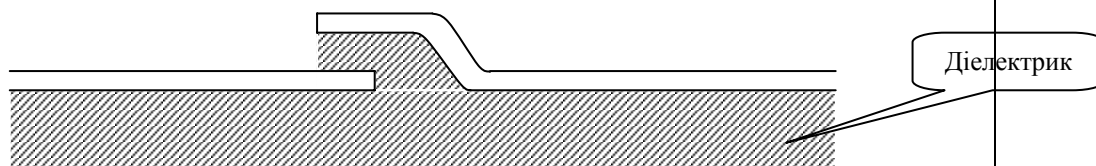
1.



2. Паралельний контур:



3. Ємність:



Лекція 1	1
Фізичні причини виділення діапазону НВЧ.....	1
Лекція 2	4
Класифікація електромагнітних явищ.....	4
Плоскі хвилі	5
Затухання електромагнітних хвиль (EMX).....	6
Лекція 3	7
Затухання у металі, скін – шар.....	7
Перехід хвилі з одного середовища в інше.....	7
Лекція 4	9
Узагальнена плоска хвиля.....	9
Наближені граничні умови Леонтовича.....	9
Відбивання від ідеально провідної границі (метал) ТЕ, ТМ хвилі.....	10
Лекція 5	12
Рівняння Максвела для Т, ТЕ, ТМ хвиль.....	12
Лекція 6	15
Прямокутний хвильовід.....	15
Лекція 7	18
Хвильовий опір хвильовода.....	18
Електродинамічні потенціали	18
Круглий хвильовід.....	19
Лекція 8	22
Коаксіальна лінія.....	22
Лекція 9	25
Лінії передач для інтегральних схем.....	25
Поля в несиметрично – смужковій лінії.....	26
Лекція 10	30
Реальний смужковий несиметричний хвильовід.....	30
Лінія з втратами.....	30
Лекція 11	34
Симетрична смужкова лінія	34
Відкриті лінії.....	35
Лекція 12	36
Повільні хвилі.....	36
Лекція 13	40
Гібридні хвилі.....	40
Метод узгодження поперечного імпедансу. Гофра.....	40
Спіраль.....	42
Лекція 14	43
Об’ємні резонатори.....	43
Добротність резонаторів.....	45
Лекція 15	46
Відкриті резонатори.....	46
Лекція 16	49
Метод магнітної стінки.....	49
Вимушені коливання.....	50
Збудження хвиль у хвильоводі.....	51
Лекція 17	52
Ортогональність власних хвиль у хвильоводі.....	52
Лекція 18	55
Збудження об’ємних резонаторів.....	55
Лекція 19	58
Неоднорідності у хвильоводі.....	58
Діафрагма.....	59
Лекція 20	61
Струми і напруги в техніці НВЧ.....	61
Нормовані струми і напруги.....	61
Стоячі хвилі в лініях передачі.....	61
Лекція 21	64
Виявлення сигналів НВЧ.....	64

Кристалічні детектори: квадратичний детектор.....	64
Лекція 22	66
Лінійний детектор, змішувач.....	66
Балансний змішувач.....	67
Керування параметрами НВЧ за допомогою діодів.....	68
Лекція 23	69
Вимірювання опорів.....	69
Узгодження опорів.....	69
Лекція 24	72
Чвертьхвильовий трансформатор.....	72
Узгодження в МЕ.....	72
Лекція 25	74
Заміна ліній передачі зосередженими елементами.....	74
Лекція 26	77
Вимірювання потужностей НВЧ.....	77
Лекція 27	81
Вимірювання довжини хвилі та частоти.....	81
Випромінювання затухання.....	82
Особливості техніки міліметрових та субміліметрових хвиль.....	82
Лекція 28	84
Генерування та підсилення НВЧ. Підсилювач на тунельному діоді.....	84
Лекція 29	86
Параметричний підсилювач на НП-діодах.....	86
Лекція 30	88
Транзистори НВЧ.....	88
Лекція 31	92
Підсилювачі на НВЧ - транзисторах.....	92
Лекція 32	93
Невзаємні елементи НВЧ.....	93
Тензор магнітної проникності фериту.....	93
Лекція 33	95
Прилади.....	95
Лекція 34	97
Плоскі хвилі в гіротропному середовищі.....	97
Лекція 35	100
Фарадеївський вентиль і циркулятор.....	100
Мікросмужкові лінії з феритом.....	101
Лекція 36	102
Аналіз та синтез НВЧ – елементів.....	102
Хвильові матриці п - полюсника.....	102
Рівняння інциденцій.....	103
Лекція 37	104
Метод орієнтованих графів.....	104
Лекція 38	106
Синтез НВЧ – елементів.....	106