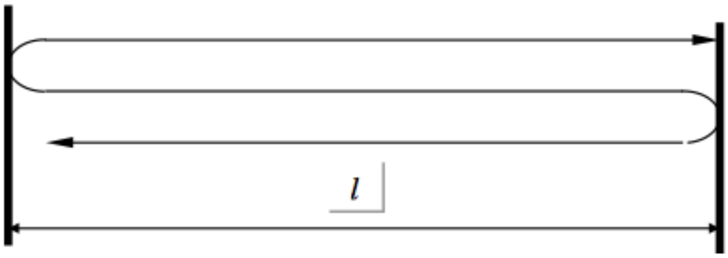
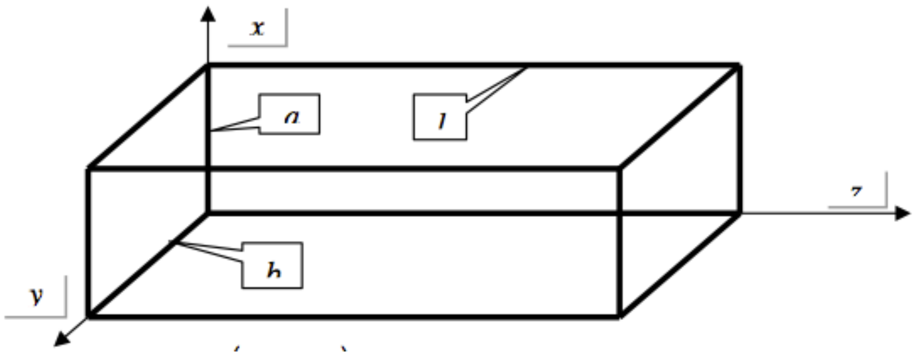
5. Об'ємні резонатори, їх збудження.

У них хвиля "б'ється" між стінками




$\lambda = n\dfrac{\lambda_{wave}}{2}$ ; тоді хвиля, що заходить у резонатор, і відбита, будуть у фазі (умова резонансу).

Розв'яжемо рівняння Максвела для даної системи – знайдемо коливання, що існують у цій коробці.




$$H : \nabla_{\perp}^{2} H_z + (k_0^2 - \beta^2) H_z = 0$$

$$E : \nabla_{\perp}^{2} E_z + (k_0^2 - \beta^2) E_z = 0$$

З урахуванням граничних умов на бокових стінках (стінках хвильовода) та відбиття від торців отримаємо:

$$H_z = H_0 \cos\frac{n\pi}{a} x \cdot \cos\frac{m\pi}{b} y \cdot e^{-i\beta z} + H_0^{"} \cos\frac{n\pi}{a} x \cdot \cos\frac{m\pi}{b} y \cdot e^{i\beta z}$$

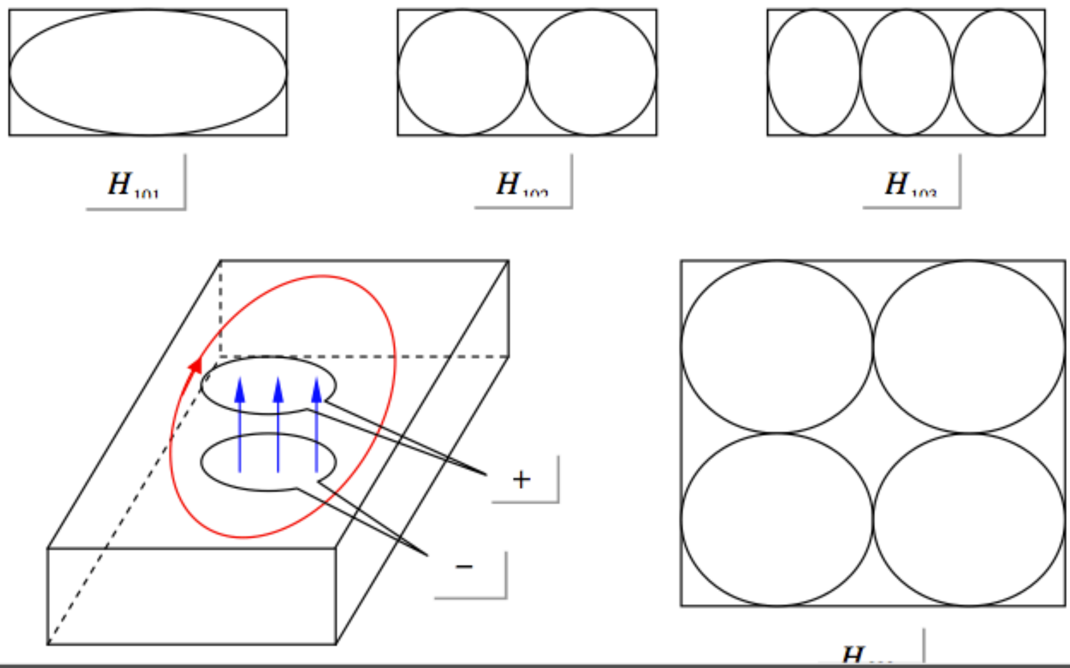
При накладанні умови $H_z = 0\Big|_{z=0,l}$ отримаємо $H_0 + H_0^{"} = 0, H_0^{"} = -H_0$ . Звідси:

$$H_z = H_0 \cos\frac{n\pi}{a} x \cdot \cos\frac{m\pi}{b} y \cdot (e^{-i\beta z} - e^{i\beta z})$$

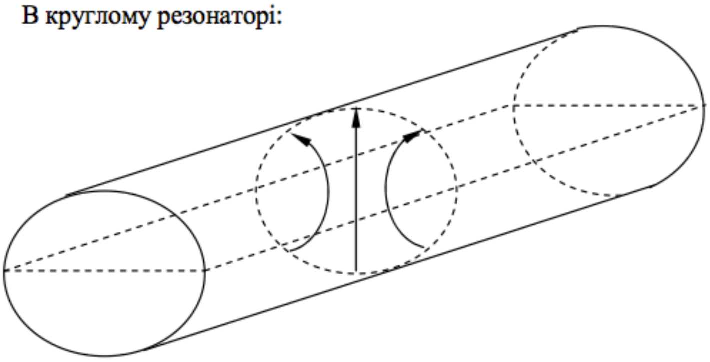
При z = L отримаємо

$$e^{-i\beta l} - e^{i\beta l} = 0 \Rightarrow \sin\beta l = 0 \Rightarrow \beta l = \pi p = \frac{2\pi}{\lambda \cdot \lambda_{wave}} l \Rightarrow \lambda_{wave} = \frac{2l}{p}$$

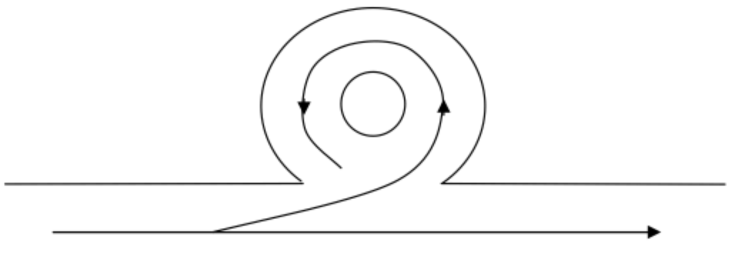
Типи коливань (останній індекс — к-сть півхвиль)




В круглому резонаторі:



Існує дуже багато типів резонаторів. Наприклад, резонатор хвилі, що біжить, такий резонатор ще називають кільцевим. Резонанс: $2\pi r = n\lambda_{хв}$ .



## *Збудження об'ємних резонаторів.*

**1. Доведемо ортонормованість власних функцій резонатора.**

$$\begin{matrix} rot\vec{E}_S = ik_S\mu\vec{H}_S & (1) \\ rot\vec{H}_S = ik_S\varepsilon\vec{E}_S & (2) \end{matrix}$$, $j = 0$, бо задача про власні коливання розв'язується без струмів. Для другого коливання: $\begin{matrix} rot\vec{E}_{S'} = ik_{S'}\mu\vec{H}_{S'} & (3) \\ rot\vec{H}_{S'} = ik_{S'}\varepsilon\vec{E}_{S'} & (4) \end{matrix}$.

$(1)\times H_{S'} + (4)\times E_S : div\left[\vec{E}_S\vec{H}_{S'}\right] = ik_S\mu\vec{H}_S\vec{H}_{S'} + ik_{S'}\varepsilon\vec{E}_S\vec{E}_{S'}$,

$(3)\times H_S + (2)\times E_{S'} : div\left[\vec{E}_{S'}\vec{H}_S\right] = ik_{S'}\mu\vec{H}_S\vec{H}_{S'} + ik_S\varepsilon\vec{E}_S\vec{E}_{S'}$.

Проінтегрувавши обидві рівності по всьому об'єму та врахувавши властивості $div$ векторного добутку, отримаємо:

$\int k_{S'}\varepsilon\vec{E}_S\vec{E}_{S'}dV = -\int k_S\mu\vec{H}_S\vec{H}_{S'}dV$,

$\int k_S\varepsilon\vec{E}_S\vec{E}_{S'}dV = -\int k_{S'}\mu\vec{H}_S\vec{H}_{S'}dV$.

Враховуючи, що $k_S = \dfrac{\omega_S}{c}$ та позначивши $\int \varepsilon\vec{E}_S\vec{E}_{S'}dV = x; \int \mu\vec{H}_S\vec{H}_{S'}dV = y$ маємо лінійну однорідну систему відносно $x, y$ з коефіцієнтами $\omega_S$ та $\omega_{S'}$:

$\begin{cases} \omega_{S'}x + \omega_S y = 0 \\ \omega_S x + \omega_{S'} y = 0 \end{cases}$. Система має нетрівіальні розв'язки якщо $\det = 0$; $\omega_{S'}{}^2 - \omega_S{}^2 = 0 \Rightarrow \omega_{S'} = \omega_S$. Тоді $x = -y$, тобто $\int \varepsilon\vec{E}_S\vec{E}_{S'}dV = -\int \mu\vec{H}_S\vec{H}_{S'}dV = ... = 4\pi N_S\delta_{SS'}$. Таким чином маємо ортонормованість власних функцій резонатора з нормою $4\pi N_S\delta_{SS'}$, яку легко знайти.

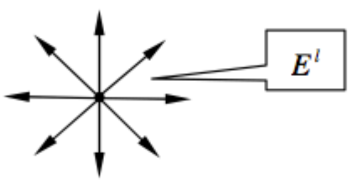
**2. Знайдемо поля $\vec{E}$ та $\vec{H}$ всередині резонатора при наявності струмів.**

$\begin{cases} rot\vec{E} = ik\mu\vec{H} \\ rot\vec{H} = ik\varepsilon\vec{E} + \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases}$ - рівняння Максвела.

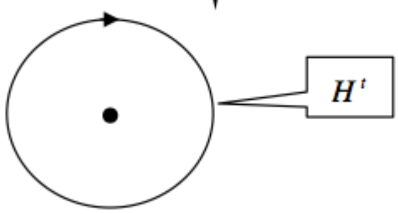
*Псевдовектор* в математиці – вектор, що змінює свій напрямок при інверсії системи координат (напрямок, векторний добуток). У фізиці псевдовектор змінює напрямок при інверсії часу $(t \to -t)$. Наприклад, при інверсії часу електрон починає обертатися в протилежному напрямку, а відповідно змінює і напрямок МП.

Таким чином, МП – псевдовектор, ЕП – вектор. Звідси можна зробити висновок, що гамільтоніан не може містити $\vec{H}, \vec{H}^3, ...$ (щоб він був інваріантний до інверсії часу). Ще один висновок – що немає *магнітного п'єзоефекту*.

Існує іще одна класифікація:
*соленоїдальні та потенціальні*.
Потенціальний (поздовжній):
$rotE^l = 0$ - немає вихорів.




Соленоїдальний (поперечний):
$divH^t = 0$ - немає вузлів.




Записавши $E = \sum C_S\vec{E}_S$ ми зробили помилку, бо не врахували потенційні поля, пов'язані з електростатичними полями зарядів, що збуджують струми.

Отже, $\vec{H} = \vec{H}^l + \vec{H}^t$, $\vec{E} = \vec{E}^l + \vec{E}^t$, де $\vec{H}^t = \sum B_S\vec{H}_S$, $\vec{E}^t = \sum B_S\vec{E}_S$. Взагалі то, $\vec{H}^l = 0$, бо магнітних зарядів не існує. Проте, є припущення про існування магнітних зарядів – *монополь Дірака*; тоді $\vec{H}^l \neq 0$.

$rot\vec{E} = rot\left(\vec{E}^l + \vec{E}^t\right) = rot\vec{E}^l + rot\vec{E}^t = 0 + rot\sum A_S\vec{E}_S = \sum A_S ik_S\mu\vec{H}_S$,

$rot\vec{H} = rot\vec{H}' = ... = \sum B_S (i\varepsilon k_S)\vec{E}_S$ .

Підставимо в рівняння Максвела: $\begin{cases} (a) & \sum A_S i k_S \mu \vec{H}_S = ik\mu \sum B_S \vec{H}_S \\ (b) & -\underbrace{\sum B_S i k_S \varepsilon \vec{E}_S}_{rot\vec{H}} = -\left(ik\sum A_S \vec{E}_S + \vec{E}^l\right) + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases}$. Прирівнявши відповідні коефіцієнти при базисних функціях $\vec{H}_S$ та $\vec{E}_S$, одержимо $A_S k_S = B_S k$ - з рівняння а). Оскільки $div\, rot\vec{H} = 0$, то $div\left(-\left(ik\varepsilon\sum\left[A_S\vec{E}_S + \vec{E}^l\right]\right) + \frac{4\pi}{c}\vec{j}\right) = 0$.

$div\vec{E}_S = 0 \Rightarrow div\left(\frac{4\pi}{c}\vec{j} - ik\varepsilon\vec{E}^l\right) = 0$. $div\vec{j} = \frac{\partial\rho}{\partial t}$; $\rho = \rho_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = i\omega\rho$ .

Таким чином, для гармонічних полів: $div\vec{j} = -i\omega\rho$ . Тоді $-\frac{4\pi}{c}i\omega\rho - div\left(ik\omega\vec{E}^l\right) = 0$ . Використаємо $\vec{E}^l = -grad\varphi$, $div\vec{E}^l = -\Delta\varphi$. $k\varepsilon\Delta\varphi - \frac{4\pi}{c}\omega\rho = 0$, $\Delta\varphi = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$ бо $k = \omega/c$. Таким чином, довели строге рівняння Пуансона для електростатичної частини полів.

(ПУАССОНА!)

Проінтегруємо $(b)$ по $V$ , попередньо помноживши на $E_S$:

$$\int E_{S'}dV\left(\sum\left(-ik_S B_S\vec{E}_S\right) = -ik\varepsilon\sum A_S E_S + \frac{4\pi}{c}j - ik\varepsilon E^l\right)$$

$$\int dVi\varepsilon\sum\left(kA_S - k_S B_S\right)\vec{E}_S\vec{E}_{S'} = \int dV\frac{4\pi i}{c}j\vec{E}_{S'}\int ik\varepsilon E$$

$$i\varepsilon\left(\underbrace{k}_{\frac{\omega}{c}}A_{S'} - \underbrace{k_{S'}}_{\frac{\omega_{S'}}{c}}B_S\right)4\pi N_{S'} = \frac{4\pi}{c}\int\vec{j}\vec{E}_{S'}dV .$$

В результаті отримаємо: $\begin{cases} \omega A_{S'} - \omega_{S'}B_{S'} = \frac{1}{N_S i\varepsilon}\int jE_{S'}dV = \varepsilon \\ \omega_{S'}A_{S'} - \omega B_{S'} = 0 \end{cases}$, маємо систему двох рівнянь з двома невідомими. Амплітуда $A_{S'} = \frac{\varepsilon\omega}{\omega^2 - \omega_s^2}$.

Ми отримали формулу для резонансного збудження. Тут не враховано *дисипацію*, тому можливо $A_{S'} \to \infty$. Якщо дисипацію врахувати наступним чином: $\omega_{S'} \to \omega_{S'} + i\omega_r$ , то отримаємо Лоренцівську резонансну криву: $A_{S'} = \frac{\varepsilon\omega}{\omega^2 - \omega_S^2 + 2i\omega_S\omega_r}$ .