

ГОС. ШПОРИ. Електродинаміка НВЧ

ЗМІСТ

1.	Діелектрична проникність плазми	2
2.	Матеріальні рівняння в електродинаміці.	4
3.	Втрати енергії в резонаторі.	5
4.	Рівняння Максвелла в диференціальній формі.	8
5.	Енергія поля в середовищі з дисперсією.	11
6.	Перенесення енергії хвилею, що поширюється.	17
7.	Добротність резонаторів сантиметрового та міліметрового діапазонів.	20
8.	Система хвиль в прямокутному хвилеводі.	25
9.	Фазова та групова швидкість хвиль в прямокутному хвилеводі.	27
10.	Вектор Умова-Пойтінга.	31
11.	Енергетичні співвідношення в резонаторі.	34
12.	Зміна власних частот резонатора скінченною провідністю його стінок.	38
13.	Спіральний хвилевід.	41
14.	Знайти функцію $\varphi(\vec{r})$, що задовольняє умові $div \mathbf{E}(\vec{r}) = 0$	45
15.	Рівняння Максвелла в інтегральній формі.	46

1. Діелектрична проникність плазми

плазма характеризується електродинамічним параметром ϵ . Якщо електричне поле відсутнє, то відносна діелектрична проникність плазми рівна

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu^2},$$

Якщо $\nu \ll \omega$ формули (9.1) спрощуються:

$$\epsilon \approx 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2},$$

Поняття плазми може бути розповсюджено на електронно-дірковий газ у напівпровідниках. Електродинамічні параметри невродженого напівпровідника з двома типами електропровідності, для якого ефективні частоти зіткнень електронів і дірок рівні ν_n і ν_p , а діелектрична проникність решітки, ϵ_p можуть бути представлені формулою

$$\epsilon = \epsilon_p \left(1 - \frac{\omega_{0n}^2}{\omega^2 + \nu_n^2} - \frac{\omega_{0p}^2}{\omega^2 + \nu_p^2} \right),$$

$$\omega_{0n} = \sqrt{\frac{e^2 n}{m_n^* \epsilon_0 \epsilon_p}}, \quad \omega_{0p} = \sqrt{e^2 p / m_p^* \epsilon_0 \epsilon_p} -$$

Де плазмові частоти електронів та дірок відповідно; n і p – концентрації електронів і дірок; Якщо у напівпровіднику існує декілька сортів частинок з різними ефективними масами, тоді це повинно бути відображено відповідним членами у формулі. Узагальненою електродинамічною

характеристикою середовища ϵ комплексна діелектрична проникність

$$\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a - f \frac{\sigma}{\omega}.$$

Частковим випадком анізотропних середовищ є гіротропні середовища, для яких хоча б один із тензорів (ϵ) та (μ) має вигляд

$$(\epsilon) = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & -j\epsilon_{xy} & 0 \\ j\epsilon_{xy} & \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (\mu) = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & -j\mu_{xy} & 0 \\ j\mu_{xy} & \mu_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{pmatrix}.$$

Гіромагнітні властивості виявляють деякі середовища, розміщені у постійному магнітному полі. Так, для газової плазми у присутності

постійного магнітного поля $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{z}$ складові тензора діелектричної проникності записуються у вигляді

$$\varepsilon_{xx} = 1 - \frac{\omega_0^2}{2\omega} \left[\frac{\omega - \omega_H}{(\omega - \omega_H)^2 + \nu^2} - \frac{\omega + \omega_H}{(\omega + \omega_H)^2 + \nu^2} \right],$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\omega_0^2}{2\omega} \left[\frac{\omega - \omega_H}{(\omega - \omega_H)^2 + \nu^2} + \frac{\omega + \omega_H}{(\omega + \omega_H)^2 + \nu^2} \right],$$

$$\varepsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu^2},$$

$$\omega_H = \mu_0 \frac{|e|}{m} H_0 = \gamma H_0 = 2,21 \cdot 10^5 H_0 \text{ (А/м)}$$

Де частота ларморівської процесії.

При врахуванні зіткнень складові тензора комплексної діелектричної проникності газової плазми матимуть вигляд

$$\tilde{\varepsilon}_{xx} = 1 - \frac{\omega_0^2(\omega - j\nu)}{\omega[(\omega - j\nu)^2 - \omega_H^2]}, \quad \tilde{\varepsilon}_{xy} = \frac{\omega_0^2 \omega_H}{\omega[(\omega - j\nu)^2 - \omega_H^2]},$$

$$\tilde{\varepsilon}_{zz} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega - j\nu)}.$$

2. Матеріальні рівняння в електродинаміці.

У вакуумі у диференційній формі рівняння Максвелла для вакууму мають такий вигляд

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho.\end{aligned}$$

Рівняння записані в системі СГС. Тут \mathbf{E} — напруженість електричного поля, \mathbf{B} — вектор магнітної індукції, ρ — густина електричного заряду, \mathbf{j} — густина електричного струму, c — швидкість світла.

В систему рівнянь Максвелла входять п'ять векторних величин E, D, H, B, j і скалярна величина ρ . З урахуванням трьох складових кожного вектора, всього 16 невідомих величин. Однак, між цими величинами існує зв'язок, який задається так званими матеріальними рівняннями

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu \vec{H}; \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

В системі СІ вони мають вигляд

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}; \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Діелектрична проникність ε , магнітна проникність μ і електропровідність σ можуть залежати від координат, але не від часу і не від напруженості електричного та магнітного полів. Максвелл вважав, що ці величини одержуються в результаті експерименту. Пізніше Лоренц, Ланжевєн та інші, спираючись на рівняння Максвелла, зуміли теоретично знайти ці параметри. Випадок сегнетоелектрики і феромагнетизму в цій системі рівнянь не враховується. У загальному вигляді матеріальні співвідношення мають складну нелокальну форму, тому при запису основних рівнянь електродинаміки їх не наводять. Рівняння набувають вигляду

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho_f.\end{aligned}$$

Тут ρ_f — густина вільних зарядів. Внесок зв'язаних зарядів враховується при визначенні вектора електричної індукції \mathbf{D} .

3. Втрати енергії в резонаторі.

В дециметровій і сантиметровій техніці коливні LC контури незастосовні через те, що ці контури випромінюють сферичні хвилі, і на виских частотах втрати енергії стають дуже великі. Для цієї області частот основним резонансним елементом є об'ємний резонатор. Об'ємний резонатор це пристрій або природній об'єкт, що накопичує енергію яка подається ззовні. Об'ємний резонатор являє собою замкнуту порожнину, обмежену металевими стінками, усередині якого існують електромагнітні коливання. Свободные колебания в О. р. при отсутствии потерь энергии могут существовать неограниченно долгое время. Однако в действительности потери энергии в О. р. неизбежны. Переменное магнитное поле индуцирует на внутренних стенках О. р. электрические токи, которые нагревают стенки, что и приводит к потерям энергии (потери на проводимость). Кроме того, если в стенках О. р. есть отверстия, которые пересекают линии тока, то вне О. р. возбуждается электромагнитное поле, что вызывает потери энергии на излучение. Помимо этого, есть потери энергии в диэлектрике (Диэлектрические потери) и потери за счёт связи с внешними цепями. Отношение энергии, запасённой в О. р., к суммарным потерям в нём за период колебаний, называется добротностью О. р. Чем выше добротность, тем лучше качество О. р.

В реальном резонаторе всегда существуют потери энергии электромагнитного поля. Эти потери могут быть связаны с поглощением волн в стенках резонатора (омические потери) или выходом излучения через отверстия в резонаторе¹¹. В обоих случаях изменение во времени электромагнитной энергии, запасенной в резонаторе, определяется потоком мощности поля через его границу:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \int_S \mathbf{S} d\mathbf{f}.$$

В последнем интеграле в граничную поверхность S резонатора включены и отверстия в нем.

Пусть в резонаторе возбуждено какое-то одно из его собственных колебаний. Потери энергии будут, очевидно, приводить к затуханию этого колебания во времени. Предположим, что потери в резонаторе не очень велики и колебания в резонаторе, затухая, остаются близкими к гармоническим. В этом случае энергия поля и плотность потока энергии зависят от амплитуды колебания поля одинаковым образом (квадратично), и поэтому можно записать:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \alpha W.$$

Решение этого уравнения есть

$$W(t) = W_0 e^{-\alpha t},$$

здесь W_0 – энергия в резонаторе в начальный момент времени. Величина α называется декрементом затухания колебаний по энергии. Очевидно, что электрическое поле в резонаторе будет затухать со вдвое меньшим декрементом:

$$E(t) \propto \exp\left(-\frac{\alpha}{2} t\right).$$

Определим *добротность* колебания как величину $Q \equiv \omega/\alpha$. Из этого определения следует, что

$$Q = \omega \frac{W}{P}, \tag{13.2.1}$$

здесь символом P обозначена мощность потерь.

Частота собственного колебания в резонаторе с потерями, которую обозначим ω' , будет, вообще говоря, отличаться в меньшую сторону от частоты ω_0 того же собственного колебания в отсутствие потерь. Закон изменения во времени электрического поля в резонаторе с потерями может быть записан как

$$E = E_0 \exp(i\omega't) \exp\left(-\frac{\omega'}{2Q} t\right) = E_0 \exp\left[i(\omega' + i\omega'')t\right],$$

здесь обозначено $\omega'' = \frac{\omega'}{2Q}$. Таким образом, можно говорить о комплексной частоте колебания

Или так:

Приведем вывод этого результата другим, более прозрачным способом. Изменение запаса энергии за время dt равно

$$dW = -P dt.$$

Мощность потерь, в свою очередь, пропорциональна запасу энергии в резонаторе, причем коэффициент пропорциональности имеет размерность обратного времени. Его можно записать в виде ω_m/Q , причем ω_m — частота свободных колебаний. Подставляя, получаем

$$dW = -\frac{\omega_m}{Q} W dt,$$

откуда

$$W = W_0 e^{-\omega_m t/Q},$$

причем $Q = \frac{\omega_m W}{P}$.

4. Рівняння Максвела в диференціальній формі.

Класична теорія електромагнетизму базується на рівняннях Максвела, що описують сукупність емпіричних відомостей про електромагнітне поле. Для вакууму вводять два основних векторних об'єкти — *напруженість електричного поля* \mathbf{E} та *напруженість магнітного поля* \mathbf{H} . Крім того, визначають скалярне поле *об'ємної густини електричного заряду* ρ і векторне поле *об'ємної густини електричного струму* \mathbf{J}_e , зв'язаного з рухом носіїв заряду в просторі. Система рівнянь Максвела в диференціальній формі для вакууму щодо згаданих вище величин записується наступним чином

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}_e, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= \rho / \varepsilon_0, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0.\end{aligned}\tag{2.1}$$

У ці рівняння входять дві фундаментальні фізичні константи: $\varepsilon_0 = 10^{-9} / (36\pi)$ Ф/м — *електрична стала* і $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — *магнітна стала*.

До основних принципів електродинаміки відноситься також закон збереження електричного заряду, що знаходить своє відображення в рівнянні неперервності струму:

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_e + \partial \rho / \partial t = 0.\tag{2.2}$$

Перше рівняння системи (2.1) являє собою диференціальну форму запису відомого закону Ампера, доповнену вектором *густини струму зміщення*:

$$\mathbf{J}_{\text{зм}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Іноді буває зручно виділяти густину *стороннього* електричного струму $\mathbf{J}_{\text{ст.е}}$. Суму струму зміщення, струму провідності, а також стороннього струму в електродинаміці називають *повним струмом*.

Друге рівняння системи (2.1) описує закон електромагнітної індукції Фарадея. Два інших рівняння, строго кажучи, залежать від перших двох рівнянь Максвела. З третього рівняння системи (2.1) випливає, що силові лінії електричного поля можуть починатися і закінчуватися тільки на електричних зарядах. Четверте рівняння вказує на те, що у вакуумі силові лінії магнітного поля завжди замкнуті (магнітне поле не має джерел).

У присутності матеріальних середовищ теорія Максвела повинна бути доповненою рядом додаткових уявлень, що враховують мікроскопічну структуру речовини. Під дією прикладеного електричного поля \mathbf{E} в середовищі виникає *струм провідності* з об'ємною густиною

$$\mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E}.\tag{2.3}$$

Тут σ — питома об'ємна провідність речовини.

Співвідношення (2.3) є диференціальною формою запису закону Ома; пропорційність між \mathbf{J}_e і \mathbf{E} в сильних електричних полях може порушуватися.

Молекули або атоми речовини в електричному полі поляризуються, що відображається в теорії введенням векторного поля *електричної поляризації* \mathbf{P} . Даний вектор у кожній точці характеризує дипольний момент одиниці об'єму речовини. Якщо електромагнітне поле змінюється в часі, то в середовищі виникає електричний струм поляризації з об'ємною густиною

$$\mathbf{J}_{\text{пол}} = \partial \mathbf{P} / \partial t$$

У кожній точці середовища прийнято вводити вектор електричного зміщення (індукції)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.4)$$

У результаті перше рівняння Максвелла набуває вигляд

$$\text{rot } \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{ст.е.}} \quad (2.5)$$

Магнетизм матеріальних середовищ має квантову природу. У рамках класичних уявлень визначають *вектор намагніченості* \mathbf{M} , що є магнітним моментом одиниці об'єму речовини, та вектор магнітної індукції \mathbf{B} , зв'язаний із \mathbf{H} та \mathbf{M} співвідношенням

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

Друге рівняння Максвелла в матеріальному середовищі має вигляд

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t. \quad (2.6)$$

Третє і четверте рівняння Максвелла записуються так:

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad (2.7)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (2.8)$$

У лінійному наближенні поляризація і намагніченість пов'язані з напруженостями полів співвідношеннями:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (2.9)$$

де χ_e , χ_m — діелектрична й магнітна сприйнятливості речовини.

На підставі цього матеріальні рівняння електромагнітного поля можна записати у вигляді

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}. \quad (2.10)$$

Коефіцієнтами пропорційності між напруженостями й індукціями є *абсолютна діелектрична проникність* ε_a та *абсолютна магнітна проникність* μ_a . У розрахунках часто використовують *відносні проникності*

$$\varepsilon = \varepsilon_a / \varepsilon_0, \quad \mu = \mu_a / \mu_0. \quad (2.11)$$

Співвідношення виду (2.10) справджуються лише за умови, що взаємодія поля та речовини відбувається практично безінерційно.

У НВЧ та оптичному діапазонах доводиться враховувати ефекти, зв'язані з кінцевим часом становлення стану речовини. При цьому можна говорити про діелектричну й магнітну проникності, що залежать від частоти.

Четверте рівняння Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ свідчить про те, що в природі не існує магнітних зарядів. Проте іноді буває зручно скористатися формальним уявленням про *сторонній магнітний струм*, густина якого $\mathbf{J}_{\text{ст.м}}$ вводять у праву частину другого рівняння Максвелла.

Остаточно одержуємо:

рівняння Максвелла в диференціальній формі

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \partial \mathbf{D} / \partial t + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{ст.е}}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t - \mathbf{J}_{\text{ст.м}}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0;\end{aligned}\tag{2.12}$$

5. Энергия поля в среде с дисперсией.

Ландау Лифшиц Теор Физика том 8 электродинамика сплошных сред
Теоретическая физика. Том 8. Электродинамика сплошных сред

§ 80. Энергия поля в диспергирующих средах

Формула

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] \quad (80,1)$$

для плотности потока энергии остается справедливой в любых переменных электромагнитных полях, в том числе и при наличии дисперсии. Это вполне очевидно из указанных уже в конце § 30 соображений: ввиду непрерывности тангенциальных составляющих \mathbf{E} и \mathbf{H} формула (80,1) однозначно следует из условия непрерывности нормальной составляющей \mathbf{S} на границе тела и из того, что она справедлива в пустоте вне тела.

Изменение (в 1 с) энергии, сосредоточенной в единице объема тела, вычисляется как $\operatorname{div} \mathbf{S}$. С помощью уравнений Максвелла это выражение приводится к виду

$$-\operatorname{div} \mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (80,2)$$

(см. (75,15)). В диэлектрической среде в отсутствие дисперсии, когда ϵ и μ являются вещественными постоянными величинами, эту величину можно рассматривать как изменение электромагнитной энергии

$$U = \frac{1}{8\pi} (\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2), \quad (80,3)$$

имеющей точный термодинамический смысл: это есть разность между внутренней энергией 1 см³ вещества при наличии поля и энергией в отсутствие поля при тех же плотности и энтропии.

При наличии дисперсии такое простое толкование уже невозможно. Более того, в общем случае произвольной дисперсии оказывается невозможным какое-либо разумное определение электромагнитной энергии как термодинамической величины. Это обусловлено тем, что наличие дисперсии связано, вообще говоря, с одновременным наличием диссипации энергии: диспергирующая среда в то же время является поглощающей.

Для определения этой диссипации рассмотрим монохроматическое электромагнитное поле. Усреднив по времени величину (80,2), мы тем самым найдем систематический приток энергии

(в единицу времени в единицу объема среды) от внешних источников, поддерживающих поле. Поскольку амплитуда монохроматического поля предполагается постоянной, вся эта энергия идет на покрытие ее диссипации. Таким образом, в рассматриваемых условиях усредненная по времени величина (80,2) и дает среднее количество тепла Q , выделяющегося в 1 с в 1 см³ среды.

Поскольку выражение (80,2) квадратично по полю, то при его вычислении все величины должны быть написаны в вещественном виде. Если же понимать под \mathbf{E} и \mathbf{H} , как это удобно для монохроматического поля, комплексные представления величин, то в (80,2) надо подставить для \mathbf{E} и $\partial\mathbf{D}/\partial t$ соответственно выражения

$$\frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}(-i\omega\epsilon\mathbf{E} + i\omega\epsilon^*\mathbf{E}^*)$$

и аналогично для \mathbf{H} и $\partial\mathbf{V}/\partial t$. При усреднении по времени произведения $\mathbf{E}\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}^*\mathbf{E}^*$, содержащие множители $e^{\mp 2i\omega t}$, обращаются в нуль; остается:

$$Q = \frac{i\omega}{16\pi} \{(\epsilon^* - \epsilon)\mathbf{E}\mathbf{E}^* + (\mu^* - \mu)\mathbf{H}\mathbf{H}^*\} = \frac{\omega}{8\pi} (\epsilon'' |\mathbf{E}|^2 + \mu'' |\mathbf{H}|^2). \quad (80,4)$$

Это выражение можно написать также в виде

$$Q = \frac{\omega}{4\pi} (\epsilon'' \overline{\mathbf{E}^2} + \mu'' \overline{\mathbf{H}^2}), \quad (80,5)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — вещественные напряженности поля, а черта означает усреднение по времени (ср. примечание на стр. 284).

Легко получить также формулу, определяющую диссипацию энергии в немонохроматическом поле, достаточно быстро обращаемся в нуль при $t \rightarrow \pm\infty$. В этом случае имеет смысл рассматривать диссипацию не в единицу времени, а за все время существования поля.

Разложив поле $\mathbf{E}(t)$ в интеграл Фурье, пишем

$$\mathbf{E}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{\omega} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad \frac{\partial\mathbf{D}(t)}{\partial t} = -i \int_{-\infty}^{\infty} \omega\epsilon(\omega) \mathbf{E}_{\omega} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi},$$

причем $\mathbf{E}_{-\omega} = \mathbf{E}_{\omega}^*$. Написав произведение этих величин в виде двойного интеграла и проинтегрировав затем по времени, имеем

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} dt = -\frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega\epsilon(\omega) \mathbf{E}_{\omega} \mathbf{E}_{\omega'} e^{-i(\omega+\omega')t} \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} dt.$$

Интегрирование по t осуществляется формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+\omega')t} dt = 2\pi \delta(\omega + \omega'),$$

после чего δ -функция устраняется интегрированием по ω' . В результате получим

$$-\frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \varepsilon(\omega) |\mathbf{E}_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi}.$$

После подстановки $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ член с $\varepsilon'(\omega)$ обращается в нуль при интегрировании ввиду нечетности подынтегрального выражения как функции ω . Вместе с аналогичным выражением для магнитного поля окончательно находим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega [\varepsilon''(\omega) |\mathbf{E}_\omega|^2 + \mu''(\omega) |\mathbf{H}_\omega|^2] \frac{d\omega}{2\pi} \quad (80,6)$$

(интеграл от $-\infty$ до ∞ может быть заменен удвоенным интегралом от 0 до ∞).

Полученные формулы показывают, что поглощение (диссипация) энергии определяется мнимыми частями ε и μ ; о двух членах в (80,5) говорят соответственно как об электрических и магнитных потерях. В силу закона возрастания энтропии эти потери имеют вполне определенный знак: диссипация энергии сопровождается выделением тепла, т. е. всегда $Q > 0$. Отсюда следует, что мнимые части ε и μ всегда положительны:

$$\varepsilon'' > 0, \quad \mu'' > 0 \quad (80,7)$$

для всех веществ и при всех (положительных) частотах¹⁾. Знак же вещественных частей ε и μ (при $\omega \neq 0$) не ограничен никакими физическими условиями, так что ε' и μ' могут быть как положительными, так и отрицательными.

Всякий нестационарный процесс в реальном веществе всегда в той или иной степени термодинамически необратим. Поэтому электрические и магнитные потери в переменном электромагнитном поле всегда в какой-то (хотя бы и малой) степени имеются. Другими словами, функции $\varepsilon''(\omega)$ и $\mu''(\omega)$ не обращаются строго в нуль ни при каком отличном от нуля значении частоты. Мы увидим в следующем параграфе, что это утверждение имеет существенное принципиальное значение, хотя им ни в какой мере не исключается возможность существования таких областей частот, при которых потери становятся относительно весьма малыми.

¹⁾ Это утверждение относится к телам, находящимся (в отсутствие переменного поля) в термодинамически равновесном состоянии, что мы везде и подразумеваем. Если тело уже само по себе не находится в тепловом равновесии, то Q могло бы, в принципе, быть и отрицательным. Второй закон термодинамики требует лишь суммарного возрастания энтропии как под влиянием переменного электромагнитного поля, так и от термодинамической неравновесности, не имеющей отношения к наличию поля. Примером такого тела может являться вещество, атомы которого искусственно (т. е. не под влиянием самопроизвольного теплового возбуждения, а внешним «полем накачки») приведены в возбужденные состояния.

Области частот, в которых ϵ'' и μ'' очень малы (по сравнению с ϵ' и μ'), называют *областями прозрачности* вещества. Пренебрегая поглощением, в этих областях оказывается возможным ввести понятие о внутренней энергии тела в электромагнитном поле в том же смысле, какой она имеет в постоянном поле.

Для определения этой величины недостаточно рассматривать чисто монохроматическое поле, так как благодаря его строгой периодичности в нем не происходит никакого систематического накопления электромагнитной энергии. Поэтому мы рассмотрим поле, представляющее собой совокупность монохроматических компонент с частотами в узком интервале вокруг некоторого среднего значения ω_0 . Напряженности такого поля можно написать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t) e^{-i\omega_0 t}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0(t) e^{-i\omega_0 t}, \quad (80,8)$$

где $\mathbf{E}_0(t)$, $\mathbf{H}_0(t)$ — медленно (по сравнению с множителем $\exp(-i\omega_0 t)$) меняющиеся функции времени. Вещественные части этих выражений должны быть подставлены в правую сторону (80,2), после чего мы произведем усреднение по времени по периоду $2\pi/\omega_0$, малому по сравнению со временем изменения множителей \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 .

Первый член в (80,2) после перехода к комплексному представлению \mathbf{E} принимает вид

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{E} + \mathbf{E}^*}{2} \frac{\dot{\mathbf{D}} + \dot{\mathbf{D}}^*}{2}$$

(и аналогично для второго члена). Произведения $\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}}$ и $\mathbf{E}^*\dot{\mathbf{D}}^*$ исчезнут при указанном усреднении по времени, и потому их вообще не надо рассматривать. Таким образом, остается лишь

$$\frac{1}{16\pi} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} + \mathbf{E}^* \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right). \quad (80,9)$$

Напишем производную $\partial \mathbf{D} / \partial t$ в виде $\hat{f}\mathbf{E}$, где \hat{f} обозначает оператор

$$\hat{f} = \frac{\partial}{\partial t} \hat{\epsilon},$$

и выясним, к какому результату приводит действие этого оператора на функцию вида (80,8). Если бы \mathbf{E}_0 была постоянной, то мы имели бы просто

$$\hat{f}\mathbf{E} = f(\omega)\mathbf{E}, \quad f(\omega) = -i\omega\epsilon(\omega).$$

В нашем же случае произведем разложение Фурье функции $\mathbf{E}_0(t)$, представив ее в виде наложения компонент вида $\mathbf{E}_{0\alpha} e^{-i\alpha t}$ с постоянными $\mathbf{E}_{0\alpha}$. Медленность изменения $\mathbf{E}_0(t)$ означает, что в это разложение войдут лишь компоненты с $\alpha \ll \omega_0$. Имея это в виду, пишем

$$\begin{aligned} \hat{f}\mathbf{E}_{0\alpha} e^{-i(\omega_0 + \alpha)t} &= f(\alpha + \omega_0) \mathbf{E}_{0\alpha} e^{-i(\omega_0 + \alpha)t} \approx \\ &\approx \left[f(\omega_0) + \alpha \frac{df(\omega_0)}{d\omega_0} \right] \mathbf{E}_{0\alpha} e^{-i(\omega_0 + \alpha)t}. \end{aligned}$$

Произведя теперь обратное суммирование компонент Фурье, получим

$$\hat{f} \mathbf{E}_0(t) e^{-i\omega_0 t} = f(\omega_0) \mathbf{E}_0 e^{-i\omega_0 t} + i \frac{df(\omega_0)}{d\omega_0} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} e^{-i\omega_0 t}.$$

Опуская ниже индекс 0 у ω_0 , имеем, таким образом:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -i\omega \varepsilon(\omega) \mathbf{E} + \frac{d(\omega \varepsilon)}{d\omega} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} e^{-i\omega t}. \quad (80,10)$$

Подставив это выражение в (80,9) и помня, что мнимой частью функции $\varepsilon(\omega)$ мы пренебрегаем, получим

$$\frac{1}{16\pi} \frac{d(\omega \varepsilon)}{d\omega} \left(\mathbf{E}_0^* \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} + \mathbf{E}_0 \frac{\partial \mathbf{E}_0^*}{\partial t} \right) = \frac{1}{16\pi} \frac{d(\omega \varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \mathbf{E}^*)$$

(произведение $\mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0^*$ совпадает с $\mathbf{E} \mathbf{E}^*$). Прибавив аналогичное выражение с магнитным полем, приходим к выводу, что скорость систематического изменения энергии 1 см³ среды дается производной $d\bar{U}/dt$, где

$$\bar{U} = \frac{1}{16\pi} \left[\frac{d(\omega \varepsilon)}{d\omega} \mathbf{E} \mathbf{E}^* + \frac{d(\omega \mu)}{d\omega} \mathbf{H} \mathbf{H}^* \right]. \quad (80,11)$$

С помощью вещественных напряженностей \mathbf{E} и \mathbf{H} это выражение напишется в виде

$$\bar{U} = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{d(\omega \varepsilon)}{d\omega} \overline{\mathbf{E}^2} + \frac{d(\omega \mu)}{d\omega} \overline{\mathbf{H}^2} \right] \quad (80,12)$$

(L. Brillouin, 1921).

Это и есть искомый результат: \bar{U} есть среднее значение электромагнитной части внутренней энергии единицы объема прозрачной среды. При отсутствии дисперсии ε и μ постоянны и (80,12) переходит, как и должно быть, в среднее значение выражения (80,3).

Если подвод электромагнитной энергии к телу извне прекращается, то фактически всегда имеющееся хотя бы очень малое поглощение приведет в конце концов к переходу всей энергии \bar{U} в тепло. Поскольку, согласно закону возрастания энтропии, это тепло должно именно выделяться, а не поглощаться, то должно быть $\bar{U} > 0$. Согласно формуле (80,11) для этого должны выполняться неравенства

$$\frac{d(\omega \varepsilon)}{d\omega} > 0, \quad \frac{d(\omega \mu)}{d\omega} > 0. \quad (80,13)$$

В действительности эти условия автоматически выполняются как следствие более сильных неравенств, которым всегда удовлетворяют функции $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ в областях прозрачности (см. примечание на стр. 398).

Подчеркнем лишний раз, что выражение (80,12) получено в первом приближении по частотам α изменения амплитуды $E_0(t)$. Поэтому оно справедливо только для полей, амплитуда которых меняется со временем достаточно медленно (это замечание относится также и к вычислению тензора напряжений в следующем параграфе).

6. Перенесення енергії хвилею, що поширюється.

Будь-яка хвиля є рухом деякого середовища. Тому середовище, збурене хвилями що проходять, володіє додатковою енергією, яку ми будемо називати енергією хвилі. Підкреслимо, що насправді мова йде про енергію рухомих і взаємодіючих між собою частинок середовища, подібно до того, як слід строго говорити про кінетичної енергії рухомого тіла (а не енергії руху); про потенційної енергії взаємодіючих тіл (а не енергії взаємодії).

Хвильовий рух своєрідний: всі частинки середовища коливаються біля своїх положень рівноваги, в середньому не переміщаючись, а хвиля поширюється на довільно великі відстані, разом з нею передається енергія.

Енергія електромагнітної хвилі складається з енергії електричного поля і енергії магнітного поля. Густина енергії електричного W_{0E} і магнітного W_{0B} полів

$$W_{0E} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2},$$

$$W_{0B} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}.$$

В електромагнітній хвилі енергія розподіляється порівну між електричним і магнітним полем (точно так само, як в пружній хвилі енергія розподіляється порівну між кінетичної і потенційної) **Густина(Щільність-рус плотность) енергії** - енергія, що припадає на одиницю об'єму середовища, у якій поширюється електромагнітна хвиля дорівнює

$$W_0 = W_{0E} + W_{0B} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu\mu_0} = \frac{EB}{\mu\mu_0 v}. \quad (\text{ТУТ})$$

$$W_{EO} = W_{BO}$$

Де $v = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$ (Електромагнітні хвилі поширюються в речовині з кінцевою швидкістю v)

Для характеристик переносу енергії електромагнітною хвилею вводиться густина потоку енергії (S), інтенсивність (I), потік енергії через площу (Φ)

$$S(t) = W_0(t) \cdot v = \frac{EB}{\mu\mu_0},$$

$$I = \langle S(t) \rangle = \langle W_0(t) \rangle \cdot v = \frac{E_0 B_0}{2\mu\mu_0},$$

$$\vec{S}(t) = W_0(t) \cdot \vec{v} = \frac{[\vec{E}, \vec{B}]}{\mu\mu_0},$$

$$\langle \vec{S}(t) \rangle = \langle W_0(t) \rangle \cdot \vec{v} = \frac{[\vec{E}_0, \vec{B}_0]}{2\mu\mu_0},$$

$$\Phi = \int_{\Sigma} \vec{S} d\vec{s} = \int_{\Sigma} S_n ds,$$

$$\langle \Phi \rangle = \int_{\Sigma} \langle \vec{S}(t) \rangle d\vec{s} = \int_{\Sigma} \langle S_n(t) \rangle ds.$$

$S(t)$ вектор Умова-Пойтінга

Вектор густини потоку енергії S спрямований у бік поширення електромагнітної хвилі, а його модуль дорівнює енергії, яку переносить хвиля за одиницю часу, через одиничну площадку, перпендикулярну напрямку поширення хвилі. S вимірюється в $\text{Дж}/(\text{с} \times \text{м}^2) = \text{Вт}/\text{м}^2$

7. Добротність резонаторів сантиметрового та міліметрового діапазонів.

Підвищення стабільності частоти генераторів СВЧ(надвисокі частоти) обмежено величиною добротності Q об'ємних резонаторів, яка залежить від активних втрат енергії в їх провідних стінках. Теоретично межа Q звичайних резонаторів $2—8 \cdot 10^3$ для основного типа хвиль в сантиметровому діапазоні. Добротність може бути збільшена в $10—100$ разів охолодженням до $15—20$ к за рахунок зменшення розсіяння електронів на теплових коливаннях кристалічної решітки металу.

Резонатори з надпровідними стінками теоретично повинні володіти нескінченно великою добротністю через відсутність втрат в поверхневому шарі надпровідника.

Насправді ж втрати існують унаслідок інерційності електронів. З іншої сторони, на дуже високих частотах ($\sim 10^{11}$ гц), коли енергія кванта електромагнітного поля порівнянна з енергією розщеплювання надпровідних електронних пар ($3,52$ до T), втрати в надпровідному і нормальному станах стають однаковими. Тому найбільша добротність ($Q \sim 10^{11}$) досягається в дециметровому діапазоні довжин хвиль. Для $l = 3$ см добротність надпровідних резонаторів $\sim 10^7—10^{10}$. За допомогою надпровідних резонаторів стабільність частоти звичайних клістронів може бути покращувана з 5×10^{-4} до $10^{-9}—10^{-10}$, тобто до рівня стабільності квантових стандартів частоти при збереженні всіх переваг клістронів.

Надпровідні резонатори зазвичай працюють при гелієвих температурах (4,2 До). Якщо в них використовуються надпровідники 1-го роду, то їх робоча температура піднімається до $10—15$ До.

У сантиметровому діапазоні хвиль ненавантажених добротність прямокутного об'ємного резонатора, виконаного з міді, сягає десятків тисяч. Смуга пропускання цього резонатора досить вузька. Резонаторні методи вимірювання застосовуються в дециметровому і сантиметровому діапазонах і іноді в довгохвильовій частині міліметрового діапазону. Як правило, в дециметровому діапазоні використовуються коаксіальні резонатори, що мають у цьому діапазоні прийнятні габарити і добротність

Подібні системи одержали назву *об'ємних резонаторів*. Найпростіший об'ємний резонатор являє собою діелектричний об'єм, обмежений замкненою металевою поверхнею. Резонатори такого типу називають *закритими*. Застосовуються закриті резонатори в діапазоні сантиметрових і дециметрових хвиль як вибірккові системи у підсилювачах, генераторах, вимірниках частоти, використовуються для побудови частотних фільтрів.

У міліметровому, субміліметровому і оптичному діапазонах, де довжина хвилі набагато менша за розміри резонатора, застосовуються так звані *відкриті резонатори*. У них відсутня замкнена металева оболонка. У найпростішому випадку відкритий резонатор – це система із двох конфронтуючих дзеркал, що взаємно відбивають електромагнітні хвилі.

Найбільш важливим параметром об'ємного резонатора є його *добротність*, яка визначається за формулою

$$Q = \frac{2\pi W}{W_n} = \frac{\omega W}{P_n},$$

де W – занесена в резонатор енергія;

W_n – втрати енергії за один період коливань;

P_n – потужність втрат.

При заданій напруженості електричного і магнітного полів кількість запасеної в резонаторі енергії пропорційна його об'єму, а потужність втрат пропорційна об'єму поверхневого шару у якому відбуваються втрати. Тому добротність контуру пропорційна відношенню об'єму резонатора до площі його внутрішньої поверхні. Добротність об'ємного резонатора значно більша за добротність звичайного контуру і може досягати кількох десятків тисяч одиниць.

Добротність W_j - енергія, що запасается резонатором на j -ій моді.

$$W_j = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 \vec{E}_j \cdot \vec{E}_j^* dV = W_j(0) e^{-2\omega_j'' t}$$

Втрати енергії за період.

$$\Delta W_j = W_j(0) - W_j(T) = W_j(0) (1 - e^{-2\omega_j'' T}) =$$

$$\approx W_j(0) 2\omega_j'' T = \left(\omega_j' = \frac{d\pi}{T} \right) = W_j(0) 4\pi \frac{\omega_j''}{\omega_j'}$$

Добротність резонатора на j -ій моді.

$$Q_j = \frac{\omega_j'}{2\omega_j''} \quad (15)$$

На кожній моді добротність своя (у різних мод мають бути різні добротності) з (15) можна представити Q_j в іншій формі.

$$Q_j = 2\pi \frac{W_j(0)}{\Delta W_j} \quad (16)$$

Вираз добротності через потужність втрат:

$$P_{\text{в}j} = \frac{\Delta W_j}{T} \Rightarrow Q_j = 2\pi \frac{W_j(\omega)}{P_{\text{в}j} T} \quad (17)$$

В (17) - присутні втрати:
де вони можуть бути? (і які?)

$$P_{\text{в}j} = P_{\text{о}j} + P_{\text{з}j} -$$

в резонаторі. в зовнішніх комах
втрати зв'язку

З (17) випливає:

$$\frac{1}{Q_j} = \frac{1}{Q_{\text{о}j}} + \frac{1}{Q_{\text{з}j}}$$

Q_j - навантажена

$Q_{\text{о}j}$ - власна

$Q_{\text{з}j}$ - зовнішня (добротність зв'язку)

$$Q_{\text{з}j} = 2\pi \frac{W(\omega)}{P_{\text{з}j} \cdot T}$$

Двома основними параметрами резонатора на j -ій моді є ω , та $Q_{\text{о}j}$ власна частота (визначення її добротності - проблема нетривіальна!) а навантажувальна шотна, крім того визначає добротність зв'язку

8. Система хвиль в прямокутному хвилеводі.

Хвилевід являє собою порожню металеву трубу довільного перерізу, усередині якої розповсюджуються електромагнітні хвилі.

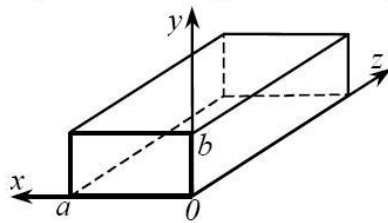


Рис. 4.1

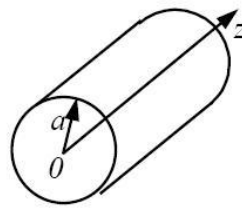


Рис. 4.2

Найбільш часто застосовують хвилеводи прямокутного (рис.4.1) і круглого (рис.4.2) перерізів, рідше — хвилеводи більш складного перерізу, наприклад П-подібні та Н-подібні.

У хвилеводах з ідеально провідними стінками й однорідним заповненням можуть розповсюджуватися хвилі електричного типу (Е), у яких $\dot{H}_z \equiv 0$, а $\dot{E}_z \neq 0$ (напрямок осі z збігається з поздовжньою віссю хвилеводу), і хвилі магнітного типу (Н), у яких $\dot{E}_z \equiv 0$, а $\dot{H}_z \neq 0$.

Аналіз хвиль у хвилеводах роблять за допомогою вирішення рівняння Гельмгольца для складових \dot{E}_z чи \dot{H}_z при рівності нулю тангенціальної складової вектора електричного поля на стінках хвилеводу.

Припустимо, що хвилевід заповнений діелектриком із відносною діелектричною проникністю ϵ і магнітною проникністю $\mu = 1$. Кожен конкретний тип хвилі у хвилеводі може розповсюджуватися в тому випадку, якщо

$$\lambda_0 / \sqrt{\epsilon} < \lambda_{кр}$$

де λ_0 — довжина хвилі генератора; $\lambda_{кр}$ — критична довжина хвилі, що визначається розмірами і формою поперечного перерізу хвилеводу.

Для хвиль типу E_{mn} і H_{mn} у прямокутному хвилеводі

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

де a, b — розміри поперечного перерізу хвилеводу (см. рис.1).

Основним типом хвилі в прямокутному хвилеводі при $a > b$ є хвиля H_{10} , для якої $\lambda_{кр} = 2a$; найближчими вищими типами — хвилі H_{20} , H_{01} , H_{11} . Картина силових ліній поля найпростіших хвиль магнітного типу зображена на рис.4.4

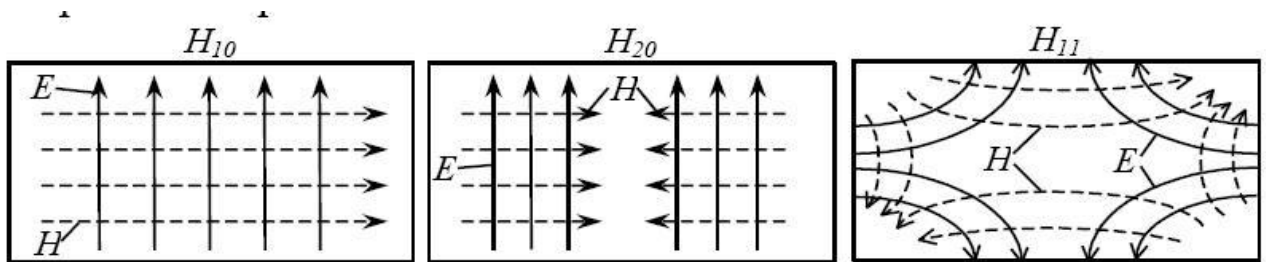


Рис. 4.4

Найбільше практичне значення має хвиля типу H_{10} у прямокутному хвилеводі. Складові векторів поля цієї хвилі описуються рівняннями:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= 0 \\ \dot{E}_y &= E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz} \\ \dot{E}_z &= 0 \\ \dot{H}_x &= -\frac{h}{\omega\mu_a} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz} \\ \dot{H}_z &= j \frac{\pi}{a} \frac{E_0}{\omega\mu_a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz} \end{aligned}$$

h – повздовжнє хвильове число.

9. Фазова та групова швидкість хвиль в прямокутному хвилеводі.

Хвилевід являє собою порожню металеву трубу довільного перерізу, усередині якої розповсюджуються електромагнітні хвилі.

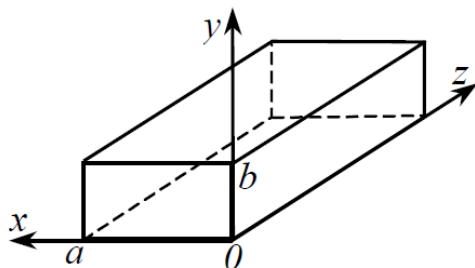


Рис. 4.1

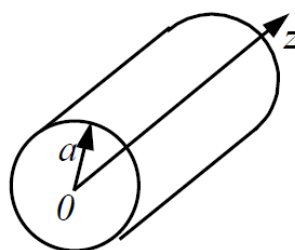


Рис. 4.2

Найбільш часто застосовують хвилеводи прямокутного (рис. 4.1) і круглого (рис. 4.2) перерізів, рідше — хвилеводи більш складного перерізу, наприклад П-подібні та Н-подібні.

У хвилеводах з ідеально провідними стінками й однорідним заповненням можуть розповсюджуватися хвилі електричного типу (Е), у яких $H_z \equiv 0$, а $E_z \neq 0$ (напрямок осі z збігається з поздовжньою віссю хвилеводу), і хвилі магнітного типу (Н), у яких $\dot{E}_z \equiv 0$, а $\dot{H}_z \neq 0$.

Аналіз хвиль у хвилеводах роблять за допомогою вирішення рівняння Гельмгольца для складових \dot{E}_z чи \dot{H}_z при рівності нулю тангенціальної складової вектора електричного поля на стінках хвилеводу.

Припустимо, що хвилевід заповнений діелектриком із відносною діелектричною проникністю ε і магнітною проникністю $\mu = 1$. Кожен конкретний тип хвилі у хвилеводі може розповсюджуватися в тому випадку, якщо

$$\lambda_0 / \sqrt{\varepsilon} < \lambda_{\text{кр}}, \quad (4.1)$$

де λ_0 — довжина хвилі генератора; $\lambda_{\text{кр}}$ — критична довжина хвилі, що визначається розмірами і формою поперечного переріза хвилеводу.

Для хвиль типу E_{mn} і H_{mn} у прямокутному хвилеводі

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}, \quad (4.2)$$

де a, b — розміри поперечного переріза хвилеводу (см. рис. 4.1).

Для хвиль типу E_{mn} у круглому хвилеводі

$$\lambda_{\text{кр}} = 2\pi a / v_{mn}, \quad (4.3)$$

де a — радіус хвилеводу; v_{mn} — n -й корінь рівняння $J_m(\chi) = 0$, $J_m(x)$ — функція Бесселя. Для хвиль типу H_{mn} у круглому хвилеводі

$$\lambda_{\text{кр}} = 2\pi a / \mu_{mn}, \quad (4.4)$$

де μ_{mn} — n -й корінь рівняння $J'_m(\chi) = 0$, $J'_m(x)$ — похідна від функції Бесселя.

Фазова швидкість хвилі у хвилеводі визначається величиною *поздовжнього хвильового числа*:

$$h = \sqrt{\beta^2 \varepsilon - g^2}, \quad (4.5)$$

де $\beta = 2\pi/\lambda_0$; $g = 2\pi/\lambda_{\text{кр}}$ — поперечне хвильове число.

Якщо виконується умова (4.1), то $\beta^2 \varepsilon > g^2$, значення h дійсне і даний тип хвилі розповсюджується. Якщо умова (4.1) не виконується, то $\beta^2 \varepsilon < g^2$, значення h уявне і даний тип хвилі згасає, не поширюючись. У цьому випадку формула (4.5) дозволяє визначити коефіцієнт ослаблення хвилі.

Для знаходження фазової швидкості та довжини хвилі у хвилеводі можна скористатися співвідношенням

$$h = 2\pi / \lambda_B = \omega / \mathfrak{V}_\phi, \quad (4.6)$$

де λ_B — довжина хвилі в хвилеводі.

З (4.6) одержуємо розрахункові формули для фазової швидкості, довжини хвилі й групової швидкості.

Фазова швидкість

$$\mathfrak{V}_\phi = \frac{c / \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2}} \quad (4.7)$$

Довжина хвилі у хвилеводі

$$\lambda_B = \frac{\lambda_0 / \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2}}, \quad (4.8)$$

Групова швидкість

$$\mathfrak{V}_{гр} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2}, \quad (4.9)$$

де c — швидкість світла у вільному просторі.

Основним типом хвилі в прямокутному хвилеводі при $a > b$ є хвиля H_{10} , для якої $\lambda_{\text{вф}} = 2a$; найближчими вищими типами — хвилі H_{20} , H_{01} , H_{11} . Картина силових ліній поля найпростіших хвиль магнітного типу зображена на рис. 4.4.

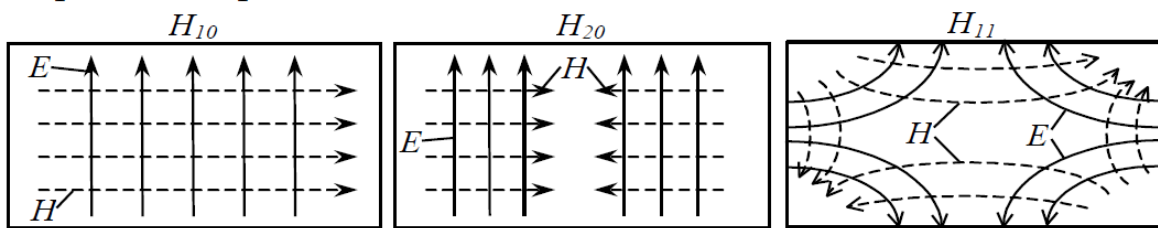


Рис. 4.4

10. Вектор Умова-Пойтинга.

19.6.2014

Вектор Пойнтинга — Википедия

Вектор Пойнтинга

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Вектор Пойнтинга (также *вектор Умова — Пойнтинга*) — вектор плотности потока энергии электромагнитного поля, одна из компонент тензора энергии-импульса электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга \mathbf{S} можно определить через векторное произведение двух векторов:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$$

(в системе СГС),

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$$

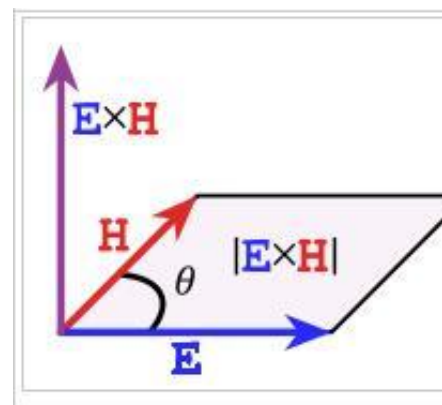
(в СИ),

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — векторы напряжённости электрического и магнитного полей соответственно.

В случае квазимонохроматических электромагнитных полей, справедливы следующие формулы для усреднённой по периоду комплексной плотности потока энергии ^[1]:

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] \text{ (в системе СГС),}$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] \text{ (в системе СИ),}$$



где \mathbf{E} и \mathbf{H} — векторы комплексной амплитуды электрического и магнитного полей соответственно. В этом случае чёткий физический смысл имеет только действительная часть комплексного вектора \mathbf{S} — это вектор усреднённой за период плотности потока энергии. Физический смысл мнимой части зависит от конкретной задачи.

Модуль вектора Пойнтинга равен количеству энергии, переносимой через единичную площадь, нормальную к \mathbf{S} , в единицу времени. Своим направлением вектор определяет направление переноса энергии.

Поскольку тангенциальные к границе раздела двух сред компоненты \mathbf{E} и \mathbf{H} непрерывны (см. граничные условия), то нормальная составляющая вектора \mathbf{S} непрерывна на границе двух сред.

Вектор Пойнтинга и импульс электромагнитного поля

В силу симметричности тензора энергии-импульса, все три компоненты вектора пространственной плотности импульса электромагнитного поля равны соответствующим компонентам вектора Пойнтинга, делённым на квадрат скорости света:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dV} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \quad (\text{в системе СИ})$$

В этом соотношении проявляется материальность электромагнитного поля.

Поэтому, чтобы узнать импульс электромагнитного поля в той или иной области пространства, достаточно проинтегрировать вектор Пойнтинга по объёму.

19.6.2014

Вектор Пойнтинга — Википедия

История

Общее представление о потоке энергии в пространстве впервые было введено Н. А. Умовым в 1874 году^[2]. Поэтому вектор плотности потока энергии *без конкретизации её физической природы*

называется вектором Умова. Выражения для этого вектора были получены Умовым только для упругих сред и вязких жидкостей.

В 1884 году^[3] идеи Умова были разработаны Д. Г. Пойнтингом применительно к электромагнитной энергии. Потому вектор плотности потока *электромагнитной* энергии называется вектором Пойнтинга.

Источники

1. ↑ *Марков Г.Т., Сазонов Д.М.* Глава 1 Электродинамические основы теории антенн, § 1-1. Уравнения Максвелла // Антенны. — М.: Энергия, 1975. — С. 16-17. — 528 с.
2. ↑ *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. — М.: Наука, 1975. — Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. — 519 с.
3. ↑ *Фейнман Р.* Глава 27 Энергия поля и его импульс, § 3. Плотность энергии и поток энергии в электромагнитном поле // Лекции по физике. — Вып. 4. — М.: Мир, 1965. — Т. 6 "электродинамика". — С. 286-290. — 340 с.

«http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Вектор_Пойнтинга&oldid=62984322»

11. Енергетичні співвідношення в резонаторі.

2. 9. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Диэлектрический резонатор в установившемся режиме вынужденных колебаний можно рассматривать как колебательную систему, обладающую запасом энергии

$$W_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_v \varepsilon_{\perp} E^2 dv. \quad (2.91)$$

Добротность такой системы определяется, как обычно [45], в виде

$$Q = \frac{\omega W}{P_{\pi}}, \quad (2.92)$$

где P_{π} — мощность, рассеиваемая в колебательной системе. При большой диэлектрической проницаемости резонатора электромагнитные поля в основном ограничены внутри диэлектрического резонатора и вблизи его границ на расстояниях, малых по сравнению с длиной волны в свободном пространстве, затухают до пренебрежимо малых величин. Поэтому рассеяние электромагнитной энергии в металлических экранах (стенках волноводов, проводниках полосковых линий) мало и собственная добротность в основном определяется лишь потерями в диэлектрике. Электрические потери в диэлектрике вычисляются по формуле [43]

$$P_{\pi} = \frac{\omega \varepsilon_0}{2} \int_v \varepsilon'' E^2 dv, \quad (2.93)$$

где ε'' — мнимая часть диэлектрической проницаемости образца. При пренебрежении потерями, обусловленными внешними

СВЧ-цепями и металлическими экранами, собственная добротность с учетом выражений (2.91) — (2.93) в первом приближении вычисляется по формуле

$$Q_0 = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} = \frac{1}{\operatorname{tg} \Delta}. \quad (2.94)$$

Поскольку типичное значение $\operatorname{tg} \Delta$ для применяемых в настоящее время материалов составляет $10^{-3} \div 10^{-4}$, то собственная добротность диэлектрического резонатора при комнатных температурах достигает значений 10^4 . В отдельных случаях при температуре жидкого гелия удастся получить собственную добротность порядка $10^5 \div 10^6$.

При решении ряда задач необходимо знать энергию, запасаемую диэлектрическим резонатором. Вычислим энергию, запасаемую в диэлектрическом резонаторе при возбуждении в нем H -видов колебаний. В случае прямоугольного резонатора при расчете воспользуемся формулой

$$W_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_S (E_x^2 + E_y^2) dx dy \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon [f(z)]^2 dz. \quad (2.95)$$

Подставляя соотношения (2.43), (2.44) для составляющих поля H -видов колебаний прямоугольного резонатора и вычисляя поверхностный интеграл

$$\int_S f(x, y) dx dy = \frac{AB}{4} \quad (2.96a)$$

и интеграл вдоль продольной оси резонатора

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{\perp} [f(z)]^2 dz = \varepsilon_{\perp} LG, \quad (2.96b)$$

где

$$G = \frac{1}{2} + \frac{\sin L\beta_z}{2L\beta_z} + \frac{\cos^2 \frac{L\beta_z}{2}}{\beta_{0z} L \varepsilon_{\perp}}, \quad (2.97)$$

получим

$$W_e = \frac{\mu_0 \nu \varepsilon_{\perp} G}{2} \left(\frac{\pi H_0}{\lambda \beta} \right)^2. \quad (2.98)$$

В случае цилиндрического резонатора энергия, запасаемая $H_{01\delta}$ -видом колебаний, рассчитывается по формуле

$$W_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{\omega \mu_0 H_0}{\beta} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{D}{2}} I_0'^2(\beta r) r dr d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{\perp} [f(z)]^2 dz. \quad (2.99)$$

$$\int_S [f(r, \alpha)]^2 ds = \frac{\pi D^2}{16}; \quad (2.100a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(z)]^2 dz = \varepsilon_{\perp} LG, \quad (2.100b)$$

где множитель G определяется формулой (2.97). При вычислении интегралов учтено, что

$$I_0'(x) = -I_1(x);$$

$$\int x I_1^2(ax) dx = \frac{x^2}{2} \left[I_1^2(ax) - I_0(ax) I_2(ax) \right]. \quad (2.101)$$

Таким образом, энергия, запасаемая в цилиндрическом диэлектрическом резонаторе, равна

$$W_e = \frac{\mu_0 v \varepsilon_{\perp} G}{8} \left(\frac{2\pi H_0}{\lambda \beta} \right)^2. \quad (2.102)$$

12. Зміна власних частот резонатора скінченною провідністю його стінок.

Якщо не враховувати провідність стінок резонатора та використовувати ідеальні граничні умови, то отримуємо незатухаючі коливання. Врахування кінцевої провідності стінок приводить до того, що вільні коливання в пустих резонаторах затухають, як наслідок втрат в стінках.

Внаслідок затухання частоти коливань являються комплексними $\omega = \omega_0 + i\omega_1$, де ω_0 - резонансна частота, а ω_1 - має зміст коефіцієнта затухання. Це значить, що миттєві значення полів затухають по експоненційному закону (пропорційно $e^{-\omega_1 t}$), а енергія електромагнітного поля в резонаторі – по закону:

$$\bar{W}(t) = \bar{W}(0)e^{-2\omega_1 t}, \quad \frac{d\bar{W}}{dt} = -2\omega_1 \bar{W} \quad (1).$$
 Знайдемо приблизне

значення коефіцієнта затухання ω_1 скориставшись законом збереження енергії та усереднивши по періоду коливання:

$$\frac{d\bar{W}}{dt} + \bar{P} + \bar{\Sigma} = 0 \quad (2).$$
 Цей закон зручно застосовувати до

об'ємного резонатора V , обмеженому поверхнею стінки S .

Струми в стінці розташовані поза об'ємом, тому $\bar{P} = 0$.

Поеднуючи формули (1) та (2) маємо коефіцієнт затухання у

вигляді: $\omega_1 = \frac{\bar{\Sigma}}{2\bar{W}}$. Величину $\bar{\Sigma}$ - середню потужність, що витікає з

об'єму в стінки резонатора, обрахуємо наближено за допомогою умови Леонтовича:

$[\vec{E}, \vec{H}^*] \vec{n} = [\vec{n}, \vec{E}] \vec{H}^* = Z[\vec{n}[\vec{n}, \vec{H}]] \vec{H}^* = Z |H_t|^2$, де t прирівнюється до тангенсійного магнітного поля на стінці ідеального резонатора.

Тоді маємо:
$$\bar{\Sigma} = \frac{c}{16\pi} \operatorname{Re} \oint_S [\vec{E}, \vec{H}^*],$$

$$dS = \frac{c}{16\pi} \operatorname{Re} Z \oint_S |H_t|^2 dS.$$

Енергетична формула застосовується для наближених розрахунків, виходячи з тих полів, які знайдені в припущенні ідеального резонатора, до того ж вважаємо, що середнє значення електричної енергії рівне середньому значенню магнітної енергії:

$\bar{W} = \frac{\mu}{8\pi} \int_V |\vec{H}|^2 dV$. В результаті для коефіцієнта затухання маємо:

$\omega_1 = \frac{c \operatorname{Re} Z}{2\mu D}$, $D = \int_V |\vec{H}|^2 dV / \oint_S |H_t|^2 dS$. Виразимо хвильовий опір Z

через глибину скін-шару d та, враховуючи, що провідність стінок

велика, в результаті отримаємо: $\operatorname{Re} Z = \frac{\omega_0 d \mu_2}{2c}$. І остаточно

$$\omega_1 = \frac{\omega_0 \mu_2 d}{4\mu D}.$$

Таким чином, отримуємо, що коефіцієнт затухання пропорційний глибині скін шару d та обернено пропорційний кореню з провідності $1/\sqrt{\sigma}$; пропорційний кореню з резонансної частоти $\sqrt{\omega_0}$ (глибина скін-шару $d \propto 1/\sqrt{\omega_0}$).

13. Спіральний хвилевід.

Спиральная линия задержки (спиральный волновод) является простейшим устройством, замедляющим электромагнитную волну. Он широко используется в лампах бегущей волны и антенных устройствах.

Одной из первых замедляющих структур, нашедших применение на практике, явился **спиральный волновод**, изображенный схематически на рис. 11.1.

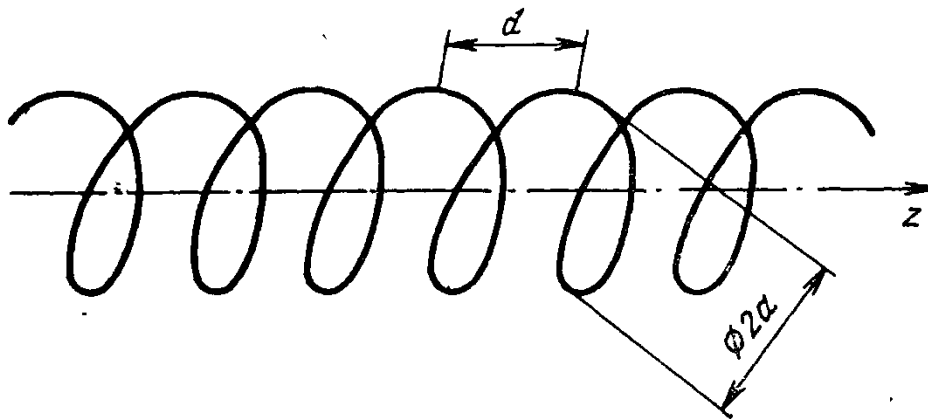


Рис. 11.1. Спиральный волновод.

Данная система представляет собой достаточно тонкий проводник, навитый на круглый цилиндр радиуса a по винтовой линии с некоторым постоянным шагом d .

Замедляющие свойства спирального волновода объясняются следующим. При возбуждении системы

вдоль проводника распространяется волна тока, причем скорость этой волны с большой точностью равна скорости света в вакууме c . Поскольку путь тока вдоль провода значительно превышает проекцию этого пути на ось волновода, фактическая скорость распространения колебаний вдоль волновода уменьшается по сравнению со скоростью света. Степень замедления принято характеризовать **коэффициентом**

$$K_{\text{зам}} = v_{\text{ф}}/c,$$

замедления.
меньше единицы.

который всегда

Для нахождения коэффициента замедления спирального волновода рассмотрим развертку одного витка спирали (рис. 11.2).

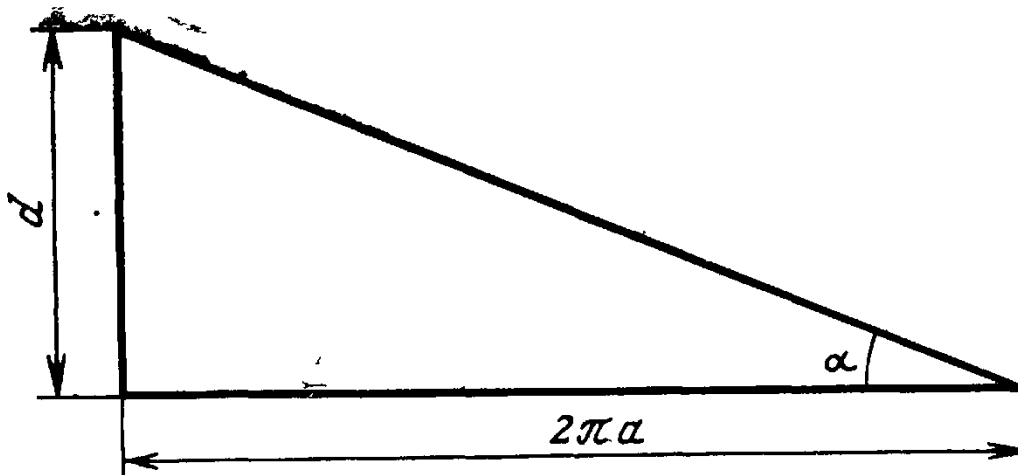


Рис. 11.2. Развертка витка спирали.

Очевидно, что коэффициент замедления равен отношению путей волны вдоль оси волновода и вдоль

$$K_{\text{зам}} = \sin \alpha,$$

проводника, т. е. , где α - угол намотки спирали.

Таким образом, в первом приближении фазовая **скорость замедленной электромагнитной волны** в спиральном волноводе определяется лишь геометрией спирали и не зависит от частоты.

Застосування (не обов'язково)

Это простое, на первый взгляд, свойство объясняет чрезвычайно высокую широкополосность лампы бегущей волны (ЛБВ), используемой в качестве усилителя СВЧ колебаний. Работа ЛБВ (рис. 11.3) основана на том, что часть кинетической энергии пучка электронов может быть передана электромагнитной волне, распространяющейся вдоль спирального волновода при условии синхронизма

между электронным потоком и распространяющейся волной. Очевидно, что отсутствие зависимости фазовой скорости от частоты благоприятствует работе ЛБВ в широкой полосе частот.

Рассмотренное свойство спирального волновода находит также применение при создании так называемых спиральных антенн, способных работать в широкой полосе частот. Отметим, что

$$K_{\text{зам}} = \sin \alpha,$$

равенство справедливо только при

условии $\lambda_0 < d$. В противном случае волны «перескакивают» с витка на виток, в результате чего коэффициент замедления становится функцией рабочей частоты.

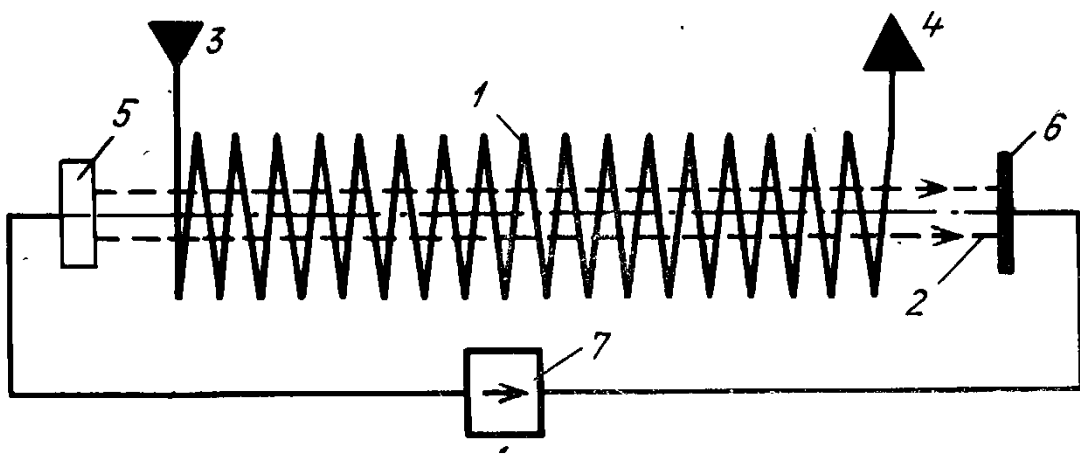


Рис. 11.3. Конструкция лампы бегущей волны:

1 — спираль; 2 — электронный пучок; 3 — вход энергии СВЧ; 4 — выход усиленного сигнала; 5 — катод; 6 — коллектор электронов; 7 — источник питания.

14. Знайти функцію $\varphi(\vec{r})$, що задовольняє умові

$$\operatorname{div} \left[\varphi(\vec{r}) \vec{r} \right] = 0.$$

$$\operatorname{div}[\varphi(\vec{r}) \cdot \vec{r}] = \operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) \cdot \vec{r} + \varphi(\vec{r}) \cdot \operatorname{div}(\vec{r}) = 0, \quad \text{де } \vec{r} = \{x, y, z\}$$

$$\operatorname{div}(\vec{r}) = \left(\frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dy} + \frac{dz}{dz} \right) = 3$$

$$\frac{d\varphi(\vec{r})}{dr} \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r} \right) + 3\varphi(\vec{r}) = 0$$

$$\frac{d\varphi(\vec{r})}{dr} r + 3\varphi(\vec{r}) = 0$$

$$r d\varphi(\vec{r}) = -3\varphi(\vec{r}) dr \Rightarrow \frac{d\varphi(\vec{r})}{\varphi(\vec{r})} = -3 \frac{dr}{r}$$

$$\ln \varphi(\vec{r}) = -3 \ln r + C \Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{C}{r^3}$$

$$\text{Перевірка: при } C=1 \Rightarrow -3 \frac{1}{r^4} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot 3 = 0$$

15. Рівняння Максвелла в інтегральній формі.

Горбаченко каже: рівняння Максвелла в інтегральній формі

$$\begin{aligned}\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{ст.е}} \right) d\mathbf{S}, \\ \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} &= - \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{J}_{\text{ст.м}} \right) d\mathbf{S}, \\ \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} &= \int_V \rho dV, \\ \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} &= 0.\end{aligned}\tag{15.1}$$

Глебова каже: Через 2 століття після відкриття Ньютоном рівнянь руху матеріальних тіл геніальний англійський фізик Джеймс Клерк Максвелл отримав рівняння, які описують динаміку нової форми матерії – електромагнітного поля. Таким чином були повністю встановлені теоретичні основи класичної фізики.

Отже Максвелл створив теорію електромагнітного поля, яка дозволила з єдиної точки зору пояснити електричні та магнітні явища. В її основі лежать чотири рівняння (рівняння Максвелла в інтегральній формі).

1. Перше рівняння Максвелла

Максвелл узагальнив теорему Гауса для електростатичного поля. Він стверджував, що вона є справедливою для довільного електричного поля: як стаціонарного, так і для змінного.

$$\oint_S \mathbf{D}_n dS = \sum q_i$$

Фізичний зміст:

Електричний заряд – джерело потенціального електричного поля.

2. Друге рівняння Максвелла

Максвелл стверджував, що теорема Гауса є справедливою і для довільного магнітного поля.

$$\oint_S \mathbf{B}_n \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Фізичний зміст:

1. Магнітних зарядів в природі не існує.
2. Не існує потенціального магнітного поля.

3. Третє рівняння Максвелла

Дане рівняння є узагальненням закону електромагнітної індукції Фарадея.

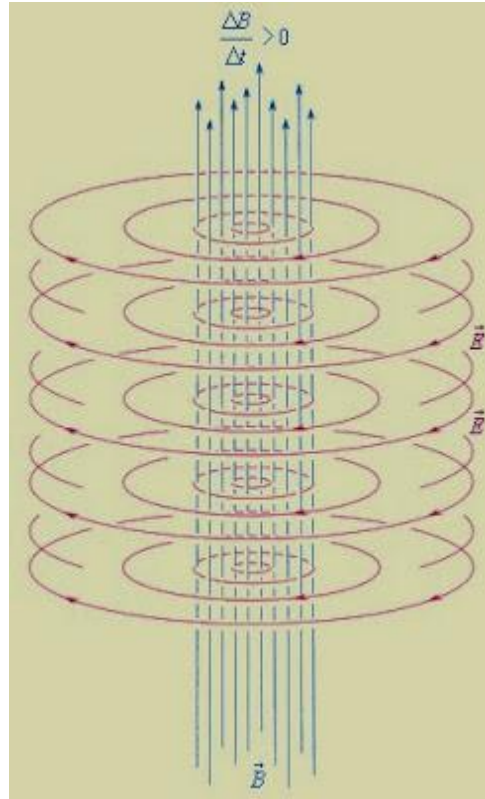
$$\oint_l \mathbf{E}_t \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}_n}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d\Phi_{\mathbf{B}}}{dt};$$

Фізичний зміст:

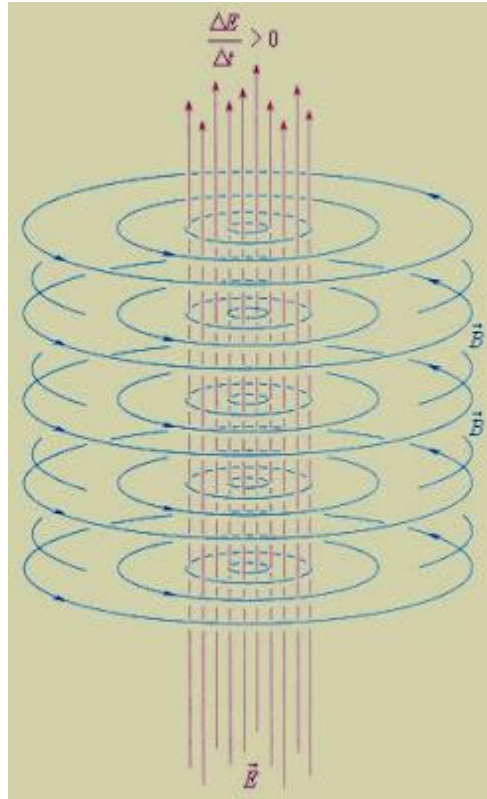
Змінне магнітне поле породжує змінне вихрове електричне.

Це рівняння показує, що джерелами електричного поля можуть бути не тільки електричні заряди, але і змінні магнітні поля: в кожній точці простору, внаслідок зміни з часом індукції магнітного поля, утворюється вихрове електричне поле, напруженість якого E лежить в площині, перпендикулярній B .

4. Четверте рівняння Максвелла



Мал 1.
Закон електромагнітної індукції в трактуванні
Максвелла.



Мал. 2. Гіпотеза Максвелла: змінне електричне поле породжує магнітне поле

Це рівняння показує, що магнітні поля можуть створюватись як електричним струмом, так і змінним електричним полем. Змінний струм, на відміну від постійного, проходить через конденсатор; але цей струм не є за своєю сутністю струмом провідності; він називається струмом зміщення.

Струм зміщення представляє собою змінне електричне поле; його густина

$$\mathbf{J}_{\text{зм}} = \epsilon\epsilon_0 \cdot d\mathbf{E}/dt.$$

$$\oint_l \mathbf{H}_l d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{j}_{\text{прое}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)_n dS;$$

Фізичний зміст:

Змінне магнітне поле породжується струмами провідності та змінним електричним полем.

Величини, що входять в рівняння Максвела зв'язані між собою співвідношеннями

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$
$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

Де ϵ_0, μ_0 – відповідно електрична та магнітна сталі; ϵ, μ – діелектрична та магнітна проникності; σ – питома електропровідність.

АБО, ВАРІАНТ БАТАРЧУКА

§2.6. Рівняння Максвелла в інтегральній формі

Звертаємо увагу, що рівняння (2.23) є диференціальні рівняння в частинних похідних, отже це є «рівності в точках». Зміст цієї термінології полягає в тому, що функції, з якими потрібно мати справу в цьому випадку, повинні бути неперервними і відповідно матимемо неперервні розв'язки. Тобто задача, в якій присутня межа розподілу двох середовищ, за допомогою лише самих рівнянь Максвелла розв'язана бути не може. Її треба доповнювати межовими умовами. Спочатку задачу розв'язують для середовища, що знаходиться по один бік межі, потім для середовища що знаходиться по інший її бік, а відтак отримані розв'язки «зшивають» (підбирають значення довільних констант таким чином, щоб розв'язки з обох боків задовольняли межові умови). Рівняння Максвелла в інтегральній формі є більш загальними, оскільки описують також і ті випадки, коли є поверхні розриву, на яких параметри середовища та поля можуть мати розриви. Диференціальна форма передбачає неперервну зміну всіх величин. Однак можна виправити ситуацію, якщо доповнити диференціальні рівняння межовими умовами. Це ми зробимо пізніше. Накреслимо табл. 2.2, в якій кожному закону електромагнітного поля (перший стовпчик) буде зіставлено у відповідність рівняння Максвелла в диференціальній (другий стовпчик) та інтегральній (третій стовпчик) формах.

Почнемо із закону відсутності магнітного заряду. Виберемо довільний об'єм V , що обмежений замкненою поверхнею S і проінтегруємо все рівняння по цьому об'єму. У лівій частині рівності перейдемо від інтегрування по об'єму до інтегрування по поверхні згідно з теоремою Остроградського — Гаусса (1.1). Одержуємо:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{B} \, dV = \int_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = 0, \quad (2.33)$$

де елемент поверхні має напрям вектора зовнішньої нормалі. А отриманий вираз має досить простий фізичний зміст — потік вектора магнітної індукції через замкнену поверхню дорівнює нулеві.

Цілком аналогічно виконаємо інтегрування для рівняння, яке уособлює закон Кулона. Інтегруючи по тому самому об'єму V та переходячи від інтегрування по об'єму до інтегрування по поверхні згідно з теоремою Остроградського Гаусса, одержуємо:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D} \, dV = \oint_S \mathbf{D} \, d\mathbf{S} = 4\pi \int_V \rho \, dV = 4\pi Q, \quad (2.34)$$

де Q — повний заряд обмежений поверхнею S нормалі. Отримане рівняння добре знайоме — це теорема Гаусса, яка стверджує, що потік вектора електричної індукції через замкнену поверхню дорівнює повному заряду, обмеженому цією поверхнею.

Наступні два рівняння будемо інтегрувати по деякій поверхні S , яка обмежена замкненим контуром L . При інтегруванні закону електромагнітної індукції по вказаній поверхні перейдемо в лівій частині рівняння від інтегрування по поверхні до інтегрування по замкненому контуру згідно з теоремою Стокса (1.2), а в правій частині змінимо порядок диференціювання за часом та інтегрування за просторовими

Таблиця 2.2. Диференціальна та інтегральна форма рівнянь Максвелла.

Закон електромагнітного поля	Диференціальна форма	Інтегральна форма
Закон відсутності магнітного заряду	$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$
Закон Кулона	$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q$
Закон електромагнітої індукції Фарадея	$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
Закон Біо - Савара - Лапласа	$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$

змінними. Ці перетворення змінять рівняння таким чином:

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.35)$$

яке в статичному випадку відоме як теорема про циркуляцію вектора напруженості електричного поля по замкненому контуру. У випадку динамічних задач циркуляція вектора напруженості електричного поля по замкненому контуру дорівнює з точністю до c похідній за часом від потоку вектора магнітної індукції зі знаком мінус.

Нарешті, проінтегрувавши таким же чином узагальнений закон Біо - Савара та врахувавши, що скалярний добуток гу-

стини струму на елемент поверхні дорівнює значенню елемента струму, який тече через елемент dS , матимемо:

$$\begin{aligned}\int_S \operatorname{rot} \mathbf{H} d\mathbf{S} &= \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \\ &= \frac{4\pi}{c} I - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S},\end{aligned}\tag{2.36}$$

де останній доданок, очевидно, пропорційний похідній за часом від потоку вектора електричної індукції через S .