ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №6
ЗАКОНОМІРНОСТІ ФЛУКТУАЦІЙ ПРИ РЕЄСТРАЦІЇ ЯДЕРНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ

Опис роботи

Мета роботи — ознайомитися з основними особливостями вимірів при реєстрації ядерних частинок, засвоїти основні методи обчислення похибок вимірів.

Теоретичні відомості

Результат виміру фізичної величини відрізняється від дійсної величини внаслідок наявності похибок вимірів.

В експериментальній фізиці похибки звичайно поділяють на систематичні та випадкові. Систематичні похибки завжди контролюються, вони мають один знак (+ або -), і їх можна легко врахувати у вигляді поправок в кінцевому результаті виміру. Випадкові похибки результату виміру спричинені різноманітними впливами, які не піддаються контролю, і тому носять статистичний характер. В макрофізиці сама по собі вимірювана величина (маса, довжина, швидкість і т.д.), має деяке цілком певне значення, і результати вимірів флуктують внаслідок недосконалості вимірювальних приладів, неконтрольованих зовнішніх умов. Похибки результатів вимірів звичайно розподіляються за неперервним законом ймовірності Гауса. Теорія ймовірності математично обґрунтовує постулат середнього арифметичного, показуючи, що ця величина є найбільш ймовірним значенням точної величини.

Показниками точності вимірів служать дисперсія , абсолютна, відносна, середньоквадратична та ймовірна похибки.

На відміну від макросвіту в мікросвіті флуктуації вимірюваної величини пов’язані не тільки з зовнішніми впливами на результат виміру, а і з самою суттю явища, і їх не можна зробити як завгодно малими (сама вимірювана величина зазнає флуктуацій).

Явища мікросвіту по своїх суті статистичні. Тому роль статистичного підходу тут значно глибша, ніж в макрофізиці. Статистика тут потрібна не тільки для обробки результатів, але і для вивчення самого процесу та природи досліджуваних явищ.

Статистичні методи аналізу вимірюваної величини дозволяють вказати найбільш правдоподібні її значення, в також інтервал, в якому з визначеною ймовірністю знаходиться істинне значення вимірюваної величини.

В області ядерної фізики експериментатори найчастіше зустрічаються зі статистичним розподілом Пуассона (при описі дискретного розподілу величин) і розподілом Гауса (неперервний розподіл).

Розподіл Пуассона описується формулою

$$P_k = \frac{\left(\bar{k}\right)^k}{k!} e^{-\bar{k}} \quad , \qquad (1)$$

де $\bar{k} = nt$ — середнє число імпульсів, нарахованих за час одного виміру, n — інтенсивність або число імпульсів за одиницю часу, t — час одного виміру, k — число імпульсів, нарахованих за час одного виміру, P_k — ймовірність появи k імпульсів за час одного виміру.

Таким чином, за формулою можна обчислити (передбачити) ймовірність появи величини k в даному вимірі, якщо нам відомо $\overline{k}$. Очевидно, що розподіл Пуассона характеризується лише одним параметром $\overline{k}$, який може приймати різні позитивні значення, тоді як k — тільки цілочисельні (дискретні) позитивні значення.

Адже, якщо ми проведемо N вимірів величини k, то одержимо ряд значень: $k_1, k_2, ..., k_N$. При цьому ймовірність появи того чи іншого значення буде визначатися формулою (1), в якій $\overline{k}$ можна приблизно розрахувати за формулою $\overline{k} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_i$. Знайдене значення $\overline{k}$ і є найбільш ймовірним значенням вимірюваної величини.

Для розподілу Пуассона дисперсія дорівнює середньому числу нарахованих частинок $D = \overline{k}$, а середньоквадратична похибка одного виміру дорівнює $\sqrt{k_i}$ (точніше - $\sqrt{\overline{k}}$).

При малих значеннях $\overline{k} \le 1$ ймовірність P_k монотонно спадає зі збільшенням k (рис.1). Якщо $\overline{k} > 1$, P_k спочатку зростає до $P_{\max}$ при $k \approx \overline{k}$, після чого монотонно спадає. По мірі збільшеня k максимум стає відносно все більш гострим, а графік — все більш симетричним відносно $k = \overline{k}$. При великих $\overline{k}$ настає практично повна симетрія (і напраки — при малих $\overline{k}$ спостерігається різка асиметрія).

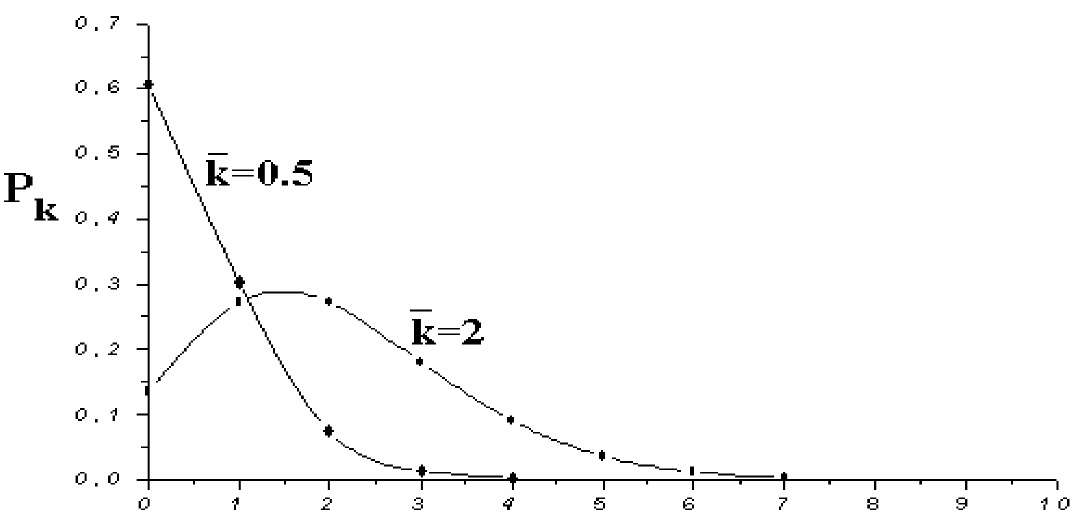

Рис.1. Розподіл Пуассона для випадків $\overline{k}$ = 0.5 та $\overline{k}$ = 2.

Розподіл Гауса (нормальний) отримується як граничний перехід від розподілу Пуассона (розподіл дискретної величини при $\overline{k} >> 1$) до неперервного розподілу вимірюваної величини. Замінюючи $k!$ в формулі (1) його наближеним виразом, справедливим при великих k, отримуємо неперервну функцію розподілу Гауса:

$$\varphi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{k}}} e^{-\frac{(k-\bar{k})^2}{2\bar{k}}} . \qquad (2)$$

В цій формулі k — неперервна випадкова величина, $\varphi(k)$ —густина ймовірності. Тоді, замість ймовірності P_k існування того чи іншого числа відліків (розподіл Пуассона) природньо цікавитися іншою величиною — ймовірністю $\varphi(k)dk$ того, що число відліків лежить в «нескінченно малому» проміжку від k до $k + dk$. Розподіл нормовано, тобто $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k)dk = 1$. Як і для розподілу Пуассона, так і для розподілу Гауса дисперсія $D = \bar{k}$.

Оскільки функція симетрична, то відхилення від середнього $y = \Delta k = k - \bar{k}$ однакове вліво і вправо. Ймовірність попадання до будь-якого інтервалу від y_1 до y_2 визначається інтегруванням функції розподілу в цьому інтервалі (інтеграл похибок).
Значення інтегралу для різних значень y табульовані.

Загальноприйняте, що за найбільш ймовірне значення вимірюваної величини потрібно приймати значення $\bar{k}$. Надійність отриманого результату визначається довірчим інтервалом Δk і величиною довірчої ймовірності, тобто ймовірності попадання до вибраного довірчого інтервалу. Отже результат вимірів подається у вигляді: $\bar{k} \pm \Delta k$.

Як вибрати довірчий інтервал Δk? Виходячи з того, що мірою флуктуацій вимірюваної випадкової величини служить дисперсія $D = \overline{(k-\bar{k})^2}$, яка вказує, наскільки широко розкидані значення випадкової величини відносно середнього значення $\bar{k}$.

Найчастіше величину Δk пов'язують з дисперсією наступним чином $\Delta k = \sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\bar{k}}$.

Квадратний корінь з дисперсії, тобто величина σ, називається середньоквадратичним чи стандартним відхиленням (іноді - стандартна похибка). Інтегрування функції Гауса (2) в границях однієї σ, дає $\int\limits_{-\sigma}^{+\sigma} \varphi(k)dk = 0.682$, а в границях 2σ дає $\int\limits_{-2\sigma}^{+2\sigma} \varphi(k)dk = 0.954$. Це значить, якщо ми проведемо досить велике число вимірів величини k, то 68.2% результатів будуть знаходитися в границях $\bar{k} \pm \sqrt{\bar{k}}$ (чи $\bar{k} \pm \sigma$), і 95.4% — в границях $\bar{k} \pm 2\sqrt{\bar{k}}$.

Якщо вибрати довірчий інтервал так, щоб було рівноімовірно попасти чи не попасти в нього, тобто $\int \varphi(k)dk = 0.5$ (50%) то похибка називається імовірнісною.

Легко знайти зв'язок останньої зі стандартною похибкою:

$$\Delta k_{й} = 0.6745 \cdot \sigma .$$

Якщо відомо, що випадкова величина підлягає закону Пуассона (чи Гауса) можна оцінити середньоквадратичну похибку результату одиничного виміру. При цьому вважають, що $k \approx \bar{k}$ і $\Delta k \approx \sqrt{k}$. Якщо величина вимірювалася N разів з однаковою точністю, то найдене значення $\bar{k}$ відомо точніше в $1/\sqrt{N}$ разів, тобто результат записується як $\bar{k} \pm \frac{\sqrt{\bar{k}}}{\sqrt{N}}$

Аналогічно, якщо результат записується у вигляді інтенсивності $n = k/t$ (де t - час одного виміру) отримуємо: $n \pm \sqrt{\frac{\bar{k}}{Nt}}$.

Відносна похибка вимірів записується як $\frac{\Delta k}{\bar{k}} = \frac{\sqrt{\bar{k}}}{\bar{k}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{k}}}$.

Наприклад, якщо задається точність до 5%, то $1/\sqrt{\bar{k}}$ =0.05, звідки знаходимо, що повинно бути не менше 400.

Зауважимо, що якщо маємо дві незалежні випадкові величини x і y за гаусовськими законами розподілу, то їх сума $z = x + y$ також розподілена за законом Гауса, причому

$$\bar{z} = \bar{x} + \bar{y} \quad \text{і} \quad D_z = D_x + D_y \ .$$

У загальному випадку, якщо $z = \sum c_i x_i$, $c_i = const$, маємо:

$$\bar{z} = \sum c_i \bar{x}_i \ , \qquad D_z = \sum c_i^2 D_{x_i} \ .$$

Вказані співвідношення корисні, наприклад, при визначенні вимірюваної величини і їх похибок при наявності фону.

При визначенні співвідношення двох інтенсивностей похибка мінімальна при умові

$$\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \ , \text{ якщо } t_1 + t_2 = const \ .$$

Таким чином, мала інтенсивність повинна вимірюватися на протязі більшого часу.

Загальні умови справедливості розподілу Пуассона: випадкова величина може приймати лише цілі додаткові значення. Якщо довжина інтервалу $t \to 0$, то ймовірність P_1 також наближається до нуля, як нескінченно мала першого порядку, а ймовірності P_2, P_3 і т.д. наближаються до нуля, як нескінченно малі найбільш високого порядку.

Події, які відносяться до неперекриваючих інтервалів, статистично незалежні.

Зауважимо, що не завжди застосований закон Пуассона при вивченні радіоактивних розпадів. Дійсно, розіб'ємо t на два послідовних t_1 і t_2. Якщо на протязі t відбудеться багато розпадів, то до початку t_2 залишиться менше ядер, які розпалися, а це приводить до зменшення числа розпадів на протязі t_2 (тут не виконується умова 3). В цьому випадку розподіл описується так званим біноміальним законом, який переходить у пуассонівський при $\frac{t}{\tau} = \lambda t << 1$.

Експериментальна частина

В процесі виконання роботи необхідно:

1. Підготувати до роботи установку, блок-схема якої показана на рис.2.

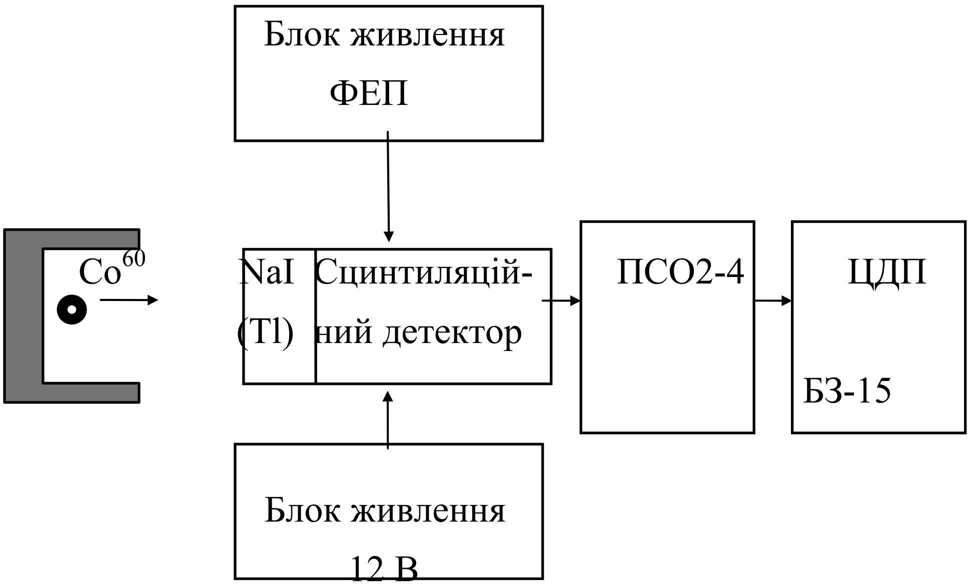

Рис.2. Схема експериментальної установки.

2. Зробити перевірку закону Пуассона.. Для цього обрати час одного виміру так, щоб $nt = k = 4 \div 8$, і зробити 200 вимірів. Побудувати, використовуючи ці виміри, функцію розподілу $P_k = f(k)$, де k —число імпульсів в одному окремому вимірі, P_k — число вимірів, в яких було одержано k імпульсів, нормоване на повне число всіх вимірів. Порівняти цю криву з теоретичною кривою для даного $nt = \bar{k}$. Для цього теоретичну криву розрахувати по формулі (1) та побудувати на тому ж графіку.
3. Зробити перевірку закону Гауса. Для цього обрати час одного виміру так, щоб $k = 40 \div 50$, і зробити 200 вимірів. Оскільки кількість вимірів недостатня для побудови графіка розподілу Гауса, результати вимірів занести в другий стовпчик та обробити їх, як це вказано в таблиці та в наступних пунктах.

Таблиця Результати вимірів

N	k	$y = k - \bar{k}$	$(k - \bar{k})^2$

$\bar{k}$	$\overline{\lvert y \rvert}$	$\overline{(k-\bar{k})^2}$

4. З результатів останніх вимірів визначити величину $\bar{k}$ та її середньоквадратичну похибку $\sigma_{теор.} = \sqrt{\frac{\bar{k}}{N}}$. Порівняти останню з $\sigma_{експ.} = \sqrt{\frac{\Sigma(k_i - \bar{k})^2}{N(N-1)}}$.

5. Знайти процент випадків, коли відхилення від середнього значення $|y| = |k - \bar{k}|$ не перебільшує:
   - стандартної похибки окремого виміру $\sigma = \sqrt{\bar{k}}$;
   - імовірнісної похибки $0.67456 \cdot \sigma$. Порівняти з теорією.

Пояснити причини розбіжностей.

6. Перевірити співвідношення між $\overline{|y|}$ і величиною $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma_{експ.} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\bar{k}}$.

Часто п.6 використовують для перевірки апаратури. Якщо $\sigma_{експ.}{}^2 > \sigma_{теор.}{}^2$, то додаткові флуктуації внесені апаратурою (зміна лічби від спаду напруги, витікання конденсатора, замикання в сусідній лабораторії, зміна фону та інш.). Добре співпадання вказаних величин свідчить про правильне проведення роботи.

7. Детектором ядерного випромінювання зареєструвати кількість імпульсів від радіоактивного препарату. Зробити 5 вимірів по 100 секунд кожний.
   - визначити абсолютну та відносну статистичні похибки отриманого результату;
   - підрахувати інтенсивність випромінювання та її похибку;
   - записати остаточні результати вимірювання з зазначенням їх статистичних похибок.

Контрольні питання

1. Загальні умови застосування закону Пуассона.
2. Зв’язок закону Пуассона з законом Гауса.
3. Інтеграл помилок Гауса. Середньоквадратична (стандартна) та імовірнісна похибки.
4. Відносна похибка. Визначення часу виміру для одержання заданої точності.

Список літератури

1. Гольданский В.И. и др. Статистика отсчетов при регистрации ядерных частиц, гл .1, 1-4.— М.,Физматгиз, 1959.
2. Худсон Д. Статистика для физиков.-1967.-С.20-30,190-196.
3. Абрамов А.И., Казанский Ю.А., Матусевич Е.С. Основы экспериментальных методов ядерной физики. -М., Атомиздат, 1977.- С.5-29.