Список формул з курсу "Рівняння матфізики", які студент має знати напам'ять

1) Оператор Лапласа в ортогональних системах координат:
   a) Вигляд оператора Лапласа в сферичних координатах:
$$\Delta = \Delta_r^{(3)} + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta\varphi}$$
   де радіальна частина оператора Лапласа:
$$\Delta_r^{(3)} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}$$
   кутова частина оператора Лапласа (оператор Лапласа на одиничній сфері, або оператор Бельтрамі)
$$\Delta_{\theta\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$
   b) Вигляд оператора Лапласа в циліндричних координатах:
$$\Delta = \Delta_\rho^{(2)} + \frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
   де радіальна частина оператора Лапласа:
$$\Delta_\rho^{(2)} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}$$
   c) Загальний вигляд радіальної частини оператора Лапласа в d–вимірних сферичних координатах:
$$\Delta_r^{(d)} = \frac{1}{r^{d-1}}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d-1}\frac{\partial}{\partial r}\right)$$
2) Загальний вигляд розв'язку лінійних диференціальних рівнянь другого порядку методом відокремлення змінних:
   a) одновимірне рівняння дифузії $u_t - a^2u_{xx} = 0$:
$$u(x,t) = \sum_n\left[A_n\cos\lambda_nx + B_n\sin\lambda_nx\right]\cdot e^{-a^2\lambda_n^2t}$$
   b) одновимірне хвильового рівняння $u_{tt} - a^2u_{xx} = 0$:
$$u(x,t) = \sum_n\left[A_n\cos\lambda_nx + B_n\sin\lambda_nx\right]\cdot\left[C_n\cos(a\lambda_nt) + D_n\sin(a\lambda_nt)\right]$$
   c) рівняння Лапласа на площині в декартових координатах $u_{xx} + u_{yy} = 0$:
$$u(x,y) = \sum_n\left[A_n\cos\lambda_nx + B_n\sin\lambda_nx\right]\cdot\left[C_n\,\mathrm{ch}(\lambda_ny) + D_n\,\mathrm{sh}(\lambda_ny)\right]$$
   d) рівняння Лапласа на площині в полярних координатах $u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi} = 0$:
$$u(\rho,\varphi) = A_0 + B_0\ln\rho + \sum_\nu\rho^{|\nu|}\left[A_\nu\cos(\nu\varphi) + B_\nu\sin(\nu\varphi)\right] + \sum_\nu\rho^{-|\nu|}\left[C_\nu\cos(\nu\varphi) + D_\nu\sin(\nu\varphi)\right]$$
3) Гіпергеометричні функції
   a) Загальний вигляд гіпергеометричної функції
$${}_pF_q(\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\beta_1,\ldots,\beta_q|z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1,n)\cdots(\alpha_p,n)}{(\beta_1,n)\cdots(\beta_q,n)}\cdot\frac{z^n}{n!}, \qquad (\alpha,n)\equiv\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}.$$
   b) Загальний вигляд гіпергеометричного рівняння:
$$\left[zP_p(\delta) - Q_{q+1}(\delta-1)\right]_pF_q(z) = 0, \quad \delta\equiv z\frac{d}{dz}$$
   c) Загальний вигляд рівняння Гауса для функції $u =_2 F_1(\alpha_1,\alpha_2;\beta|z)$:
$$z(1-z)u'' + \left[\beta - (\alpha_1+\alpha_2+1)z\right]u' - \alpha_1\alpha_2u = 0.$$
   d) Загальний вигляд рівняння рівняння Кумера для функції $u =_1 F_1(\alpha;\beta|z)$:
$$zu'' + \left[\beta - z\right]u' - \alpha u = 0.$$
4) Сферичні функції:
   a) Формула Лапласа для сферичних функцій:
$$Y_{lm}(\theta\varphi) = N_{lm}e^{im\varphi}\int_0^{2\pi}d\psi\left[\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi\right]^le^{im\psi}$$

b) Сферичні функції порядку $l = 0, 1, 2$:

$$Y_{00} = \text{const} \quad Y_{10} = \text{const} \cdot \cos\theta \quad Y_{1,\pm1} = \pm\text{const} \cdot \sin\theta e^{\pm i\varphi}$$
$$Y_{20} = \text{const} \cdot (3\cos^2\theta - 1) \quad Y_{2,\pm1} = \pm\text{const} \cdot \sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi} \quad Y_{2,\pm2} = \text{const} \cdot \sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}.$$

c) Диференціальне рівняння для сферичних функцій:

$$\Delta_{\theta\varphi} Y_{lm}(\theta,\varphi) + l(l+1) Y_{lm}(\theta,\varphi) = 0$$

d) Загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа в сферичних координатах:

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}\right] Y_{lm}(\theta,\varphi).$$

e) Розклад фундаментального розв'язку рівняння Лапласа в ряд по сферичних функціях:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} = \begin{cases} \frac{1}{a}\sum_{l=0}^{\infty}(r/a)^l P_l(\cos\theta) & r < a, \\ \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}(a/r)^l P_l(\cos\theta) & r > a. \end{cases}$$

5) Циліндричні функції:

a) Формули Шлеффлі та Зоммерфельд для циліндричних функцій:

$$Z_\nu(z) = C\int_\Gamma d\zeta e^{iz\zeta\sin\zeta - i\nu\zeta}$$

b) Співвідношення між функціями Бесселя, Неймана та Ганкеля 1-го та 2-го роду:

$$H_\nu^{(1,2)}(z) = J_\nu(z) \pm iN_\nu(z)$$

c) Асимптотична поведінка циліндричних функцій у випадку, коли незалежна змінна прямує до нуля

$$J_0(0) = 1, \quad J_\nu(z) \propto z^\nu, \qquad N_0(z) \propto \ln z, \quad N_\nu(z) \propto z^{-\nu}$$

d) Асимптотична поведінка циліндричних функцій у випадку, коли незалежна змінна прямує до нескінченості

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z - \nu\pi/2 - \pi/4), \quad N_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin(z - \nu\pi/2 - \pi/4), \quad H_\nu^{(1,2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\exp\left[\pm(z - \nu\pi/2 - \pi/4)\right]$$

e) Диференціальне рівняння для циліндричних функцій $u \equiv Z_\nu(k\rho)$:

$$u'' + \frac{u'}{\rho^2} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)u = 0$$

f) Нормування циліндричних функцій:

$$\int_a^b Z_\nu(k_1^{(\nu)}\rho) Z_\nu(k_2^{(\nu)}\rho)\rho d\rho = \delta_{k_1^{(\nu)} k_2^{(\nu)}} d^2(k_1^{(\nu)})$$

Норма $d(k)$ визначається як:

$$d^2(k) = \frac{\rho}{2k}\left[\frac{\partial Z_\nu(k\rho)}{\partial\rho}\frac{\partial Z_\nu(k\rho)}{\partial k} - Z_\nu(k\rho)\frac{\partial^2 Z_\nu(k\rho)}{\partial k\partial\rho}\right]\Bigg|_a^b$$

g) Загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа в циліндричних координатах:

$$u(\rho,\varphi,z) = \sum_{k,\nu}\left(A_{k\nu}J_\nu(k\rho) + B_{k\nu}N_\nu(k\rho)\right)\cdot\left(C_{k\nu}\cos\nu\varphi + D_{k\nu}\sin\nu\varphi\right)\cdot\left(E_{k\nu}e^{kz} + F_{k\nu}e^{-kz}\right)$$

6) Узагальнені функції:

a) Властивості узагальнених функцій:

$$(af,\phi) = (f,a\phi), \quad (f(y(x)),\phi(x)) = \left(\frac{f(y)}{|\det|dy/dx||},\phi(x(y))\right), \quad (D^\alpha f,\phi) = (-1)^{|\alpha|}(f,D^\alpha\phi), \quad f' = \{f'\} + [f]_{x_0}\delta(x - x_0),$$
$$(f\times g,\phi) = (f,(g,\phi)), \quad D^\alpha[f\times g] = [D^\alpha f\times g], (f\star g,\phi) = (f(x)\times g(y),\phi(x+y)), \quad D^\alpha(f\star g) = D^\alpha f\star g = f\star D^\alpha g,$$
$$(F[f],\phi) = (f,F[\phi]), \quad F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^d}F[f(-\xi)], \quad D^\alpha F[f] = F[(ix)^\alpha f], \quad F[D^\alpha f] = (-i\xi)^\alpha F[f], \quad F[f\star g] = F[g]F[f]$$

b) Властивості дельта–функції Дірака:

$$(\delta,\phi) \equiv \phi(0), \quad a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x), \quad \delta(y(x)) = \sum_{x_k: y(x_k)=0}\frac{\delta(x - x_k)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x_k}},$$
$$(\delta',\phi) = -\phi'(0), \quad \theta'(x) = \delta(x), \quad \delta\star f = f, \quad F[\delta] = 1, \quad F[1] = (2\pi)^d\delta(\xi).$$

c) Формула Сохоцького:

$$\frac{1}{x-i0}=\mathcal{P}\frac{1}{x}+i\pi\delta(x).$$

7) Розв'язок задачі Коші для лінійного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами через фундаментальний розв'язок $\mathcal{E}_n=\theta(t)T(t)$:

$$LT(t)=0,\qquad T'(0)=\cdots T^{(n-2)}(0)=0,\quad T^{(n-1)}(0)=1.$$

8) Фундаментальний розв'язок рівняння дифузії:

a) Фундаментальний розв'язок рівняння дифузії в d–вимірному просторі:

$$\mathcal{E}_d(x,t)=\frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^d}\exp\left[-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right]$$

b) Розв'язок задачі Коші для рівняння дифузії в d-вимірному просторі (формула Пуассона):

$$u_t-a^2\Delta^{(d)}u=f(x,t),\qquad u(x,0)=u_0(x)$$

$$u(x,t)=\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}^d}dy\mathcal{E}_d(x-y,t-s)f(y,s)+\int_{\mathbb{R}^d}dy\mathcal{E}_d(x-y,t)u_0(y)dy$$

9) Фундаментальний розв'язок хвильового рівняння:

a) Фундаментальний розв'язок хвильового рівняння в одно– двох– і трьох–вимірному просторі:

$$\mathcal{E}_1(x,t)=\frac{1}{2a}\cdot\theta(t)\theta(at-|x|)\quad \mathcal{E}_2(x,t)=\frac{1}{2\pi a}\cdot\frac{\theta(t)\theta(at-|x|)}{\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}\quad \mathcal{E}_3(x,t)=\frac{1}{4\pi a|x|}\cdot\theta(t)\theta(at-|x|)$$

b) Розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння в d-вимірному просторі (формула Пуассона):

$$u_{tt}-a^2\Delta^{(d)}u=f(x,t),\qquad u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x)$$

$$u(x,t)=\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}^d}dy\mathcal{E}_d(x-y,t-s)f(y,s)+\partial_t\int_{\mathbb{R}^d}dy\mathcal{E}_d(x-y,t)u_0(y)dy+\int_{\mathbb{R}^d}dy\mathcal{E}_d(x-y,t)u_1(y)dy$$

10) Фундаментальний розв'язок рівнянь Лапласа та Пуассона:

a) Фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа та Пуассона в d–вимірному просторі:

$$\mathcal{E}_2(x)=\frac{1}{2\pi}\ln|x|,\qquad \mathcal{E}_d(x)=-\frac{1}{(d-2)\sigma_d}\cdot\frac{1}{|x|^{d-2}}\qquad \sigma_d=\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

b) Розв'зок задачі Діріхле рівняння Пуассона за допомогою функції Гріна:

$$\Delta u(x)=f(x),\qquad u\Big|_{x\in\partial D}=u_0(x),$$

$$u(x)=\int_D f(y)G(x,y)dy+\int_{\partial D}u_0(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}dS_y.$$

c) Функція Гріна для d–вимірного півпростору $D=\{x\in\mathbb{R}^d:x_d>0\}$:

$$G(x,y)=\mathcal{E}_d(|x-y|)-\mathcal{E}_d(|x^*-y|),\qquad x^*=\{x_1,\dots,x_{d-1},-x_d\}$$

d) Розв'зок задачі Діріхле рівняння Пуассона для півпростора $D=\{x\in\mathbb{R}^d:x_d>0\}$ (формула Пуассона):

$$\Delta u(x)=f(x),\qquad u\Big|_{x_d=0}=u_0(x),$$

$$u(x)=\int_D f(y)\left[\mathcal{E}_d(|x-y|)-\mathcal{E}_d(|x^*-y|)\right]dy+\frac{2x_n}{\sigma_d}\int_{\partial D}\frac{u_0(y)}{|x-y|^d}dS_y.$$

e) Функція Гріна для d–вимірного півпростору d–вимірної кулі $|x|<a$:

$$G(x,y)=\mathcal{E}_d(|x-y|)-\mathcal{E}_d\left(\frac{|x|}{a}\cdot|x^*-y|\right),\qquad x^*=\frac{a^2}{|x|^2}\cdot x$$

f) Розв'зок задачі Діріхле рівняння Пуассона для кулі $|x|<a$ (формула Пуассона):

$$\Delta u(x)=f(x),\qquad u\Big|_{|x|=a}=u_0(x),$$

$$u(x)=\int_D f(y)\left[\mathcal{E}_d(|x-y|)-\mathcal{E}_d\left(\frac{|x|}{a}\cdot|x^*-y|\right)\right]dy+\frac{1}{a\sigma_d}\int_{\partial D}u_0(y)\frac{a^2-|x|^2}{|x-y|^d}dS_y.$$