

Список формул з курсу «Рівняння матфізики», які студент повинен знати напам'ять

1) Оператор Лапласа в ортогональних системах координат:

а) Вигляд оператора Лапласа в сферичних координатах:

$$\Delta = \Delta_r^{(3)} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi}$$

де радіальна частина оператора Лапласа:

$$\Delta_r^{(3)} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}$$

кутова частина оператора Лапласа (оператор Лапласа на одиничній сфері, або оператор Бельтрамі)

$$\Delta_{\theta\varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

б) Вигляд оператора Лапласа в циліндричних координатах:

$$\Delta = \Delta_\rho^{(2)} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

де радіальна частина оператора Лапласа:

$$\Delta_\rho^{(2)} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}$$

2) Загальний вигляд розв'язку лінійних диференціальних рівнянь другого порядку методом відокремлення змінних:

а) одновимірне рівняння дифузії $u_t - a^2 u_{xx} = 0$:

$$u(x, t) = \sum_n [A_n \cos \lambda_n x + B_n \sin \lambda_n x] \cdot e^{-a^2 \lambda_n^2 t}$$

б) одновимірне хвильового рівняння $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$:

$$u(x, t) = \sum_n [A_n \cos \lambda_n x + B_n \sin \lambda_n x] \cdot [C_n \cos(a \lambda_n t) + D_n \sin(a \lambda_n t)]$$

в) рівняння Лапласа на площині в декартових координатах $u_{xx} + u_{yy} = 0$:

$$u(x, y) = \sum_n [A_n \cos \lambda_n x + B_n \sin \lambda_n x] \cdot [C_n \operatorname{ch}(\lambda_n y) + D_n \operatorname{sh}(\lambda_n y)]$$

г) рівняння Лапласа на площині в полярних координатах $u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} = 0$:

$$u(\rho, \varphi) = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_\nu \rho^{|\nu|} [A_\nu \cos(\nu\varphi) + B_\nu \sin(\nu\varphi)] + \sum_\nu \rho^{-|\nu|} [C_\nu \cos(\nu\varphi) + D_\nu \sin(\nu\varphi)]$$

3) Сферичні функції:

а) Формула Лапласа для сферичних функцій:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = N_{lm} e^{im\varphi} \int_0^{2\pi} d\psi [\cos \theta + i \sin \theta \cos \psi]^l e^{im\psi}$$

б) Сферичні функції порядку $l = 0, 1, 2$:

$$Y_{00} = \text{const} \quad Y_{10} = \text{const} \cdot \cos \theta \quad Y_{1,\pm 1} = \pm \text{const} \cdot \sin \theta e^{\pm i\varphi} \\ Y_{20} = \text{const} \cdot (3 \cos^2 \theta - 1) \quad Y_{2,\pm 1} = \pm \text{const} \cdot \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi} \quad Y_{2,\pm 2} = \text{const} \cdot \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi}.$$

в) Диференціальне рівняння для сферичних функцій:

$$\Delta_{\theta\varphi} Y_{lm}(\theta, \varphi) + l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0$$

d) Загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа в сферичних координатах:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} \right] Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

e) Розклад фундаментального розв'язку рівняння Лапласа в ряд по сферичних функціях:

$$\frac{1}{|r - R|} = \begin{cases} \frac{1}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^l P_l(\cos \theta) & r < R, \\ \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^l P_l(\cos \theta) & r > R. \end{cases}$$

4) Циліндричні функції:

a) Формули Шлеффлі та Зоммерфельда для циліндричних функцій:

$$Z_{\nu}(z) = C \int_{\Gamma} d\zeta e^{iz\zeta \sin \zeta - i\nu\zeta}$$

b) Співвідношення між функціями Бесселя, Неймана та Ганкеля 1-го та 2-го роду:

$$H_{\nu}^{(1,2)}(z) = J_{\nu}(z) \pm iN_{\nu}(z)$$

c) Асимптотична поведінка циліндричних функцій у випадку, коли незалежна змінна прямує до нуля

$$J_0(0) = 1, \quad J_{\nu}(z) \propto z^{\nu}, \quad N_0(z) \propto \ln z, \quad N_{\nu}(z) \propto z^{-\nu}$$

d) Асимптотична поведінка циліндричних функцій у випадку, коли незалежна змінна прямує до нескінченості

$$J_{\nu}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z - \nu\pi/2 - \pi/4), \quad N_{\nu}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin(z - \nu\pi/2 - \pi/4), \quad H_{\nu}^{(1,2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp[\pm(z - \nu\pi/2 - \pi/4)]$$

e) Диференціальне рівняння для циліндричних функцій $u \equiv Z_{\nu}(k\rho)$:

$$u'' + \frac{u'}{\rho^2} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) u = 0$$

f) Нормування циліндричних функцій: $\int_a^b u_1 u_2 \rho d\rho = \delta_{k_1 k_2} \|Z_{\nu}(k\rho)\|^2$, де $u_1 = Z_{\nu}(k_1\rho)$, $u_2 = Z_{\nu}(k_2\rho)$, норма:

$$\|u\|^2 = \|Z_{\nu}(k\rho)\|^2 = \frac{\rho^2}{2} \left[u'^2 - uu'' \right] \Big|_{\rho=a}^{\rho=b}$$

g) Загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа в циліндричних координатах:

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_{k, \nu} (A_{k\nu} J_{\nu}(k\rho) + B_{k\nu} N_{\nu}(k\rho)) \cdot (C_{k\nu} \cos \nu\varphi + D_{k\nu} \sin \nu\varphi) \cdot (E_{k\nu} e^{kz} + F_{k\nu} e^{-kz})$$

5) Узагальнені функції:

a) Властивості узагальнених функцій:

$$\begin{aligned} (af, \phi) &= (f, a\phi), \quad (f(y(x)), \phi(x)) = \left(\frac{f(y)}{|\det|dy/dx|}, \phi(x(y)) \right), \quad (\partial^{\alpha} f, \phi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^{\alpha} \phi), \quad f' = \{f'\} + [f]_{x_0} \delta(x - x_0), \\ (f \otimes g, \phi) &= (f, (g, \phi)), \quad \partial^{\alpha} [f \otimes g] = [\partial^{\alpha} f \otimes g], \quad (f \star g, \phi) = (f(x) \otimes g(y), \phi(x + y)), \quad \partial^{\alpha} (f \star g) = \partial^{\alpha} f \star g = f \star \partial^{\alpha} g, \\ (F[f], \phi) &= (f, F[\phi]), \quad F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^d} F[f(-k)], \quad \partial^{\alpha} F[f] = F[(ix)^{\alpha} f], \quad F[\partial^{\alpha} f] = (-ik)^{\alpha} F[f], \quad F[f \star g] = F[f]F[g] \end{aligned}$$

b) Властивості дельта-функції Дірака:

$$\begin{aligned} (\delta, \phi) &\equiv \phi(0), \quad a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x), \quad \delta(y(x)) = \sum_{x_k: y(x_k)=0} \frac{\delta(x - x_k)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|_{x_k}}, \\ (\delta', \phi) &= -\phi'(0), \quad \theta'(x) = \delta(x), \quad \delta \star f = f, \quad F[\delta] = 1, \quad F[1] = (2\pi)^d \delta(\xi). \end{aligned}$$

с) Формула Сохоцького:

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mathcal{P} \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x).$$

6) Розв'язок задачі Коші для лінійного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами через фундаментальний розв'язок $\mathcal{E}_n = \theta(t)T(t)$:

$$LT(t) = 0, \quad T'(0) = \dots T^{(n-2)}(0) = 0, \quad T^{(n-1)}(0) = 1.$$

7) Фундаментальний розв'язок рівняння дифузії:

а) Фундаментальний розв'язок рівняння дифузії в d -вимірному просторі:

$$\mathcal{E}_d(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^d} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right]$$

б) Розв'язок задачі Коші для рівняння дифузії в d -вимірному просторі (формула Пуассона):

$$u_t - a^2 \Delta^{(d)} u = f(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

$$u(x, t) = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} dy \mathcal{E}_d(x - y, t - s) f(y, s) + \int_{\mathbb{R}^d} dy \mathcal{E}_d(x - y, t) u_0(y)$$

8) Фундаментальний розв'язок хвильового рівняння:

а) Фундаментальний розв'язок хвильового рівняння в одно- двох- і трьох-вимірному просторі:

$$\mathcal{E}_1(x, t) = \frac{1}{2a} \cdot \theta(t)\theta(at - |x|) \quad \mathcal{E}_2(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \cdot \frac{\theta(t)\theta(at - |x|)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}} \quad \mathcal{E}_3(x, t) = \frac{1}{4\pi a|x|} \cdot \theta(t)\delta(at - |x|)$$

б) Розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння в d -вимірному просторі (формула Пуассона):

$$u_{tt} - a^2 \Delta^{(d)} u = f(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x)$$

$$u(x, t) = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} dy \mathcal{E}_d(x - y, t - s) f(y, s) + \partial_t \int_{\mathbb{R}^d} dy \mathcal{E}_d(x - y, t) u_0(y) + \int_{\mathbb{R}^d} dy \mathcal{E}_d(x - y, t) u_1(y)$$

с) Розв'язок одновимірної задачі Коші для хвильового рівняння (формула д'Аламбера):

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} dy f(y, s) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} dy u_1(y) + \frac{1}{2} (u_0(x + at) + u_0(x - at)).$$

д) Розв'язок двовимірної задачі Коші для хвильового рівняння (формула Пуассона):

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t ds \int_{|x-y| \leq a(t-s)} dy \frac{f(y, s)}{\sqrt{a^2(t-s)^2 - |x-y|^2}} + \frac{1}{2\pi a} \partial_t \int_{|x-y| \leq at} dy \frac{u_0(y)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x-y|^2}} + \frac{1}{2\pi a} \int_{|x-y| \leq at} dy \frac{u_1(y)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x-y|^2}}$$

е) Розв'язок трьохвимірної задачі Коші для хвильового рівняння (формула Кірхгофа):

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|x-y| \leq at} dy \frac{f\left(y, t - \frac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|} + \frac{1}{4\pi a^2} \partial_t \left(\frac{1}{t} \int_{|x-y|=at} u_0(y) dS_y \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|x-y|=at} u_1(y) dS_y.$$