2. Класифікація та канонічний вид лінійного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку. Характеристики.

Розглядаємо загальний вигляд рівняння другого порядку для двух координат (x, y)

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = \Phi(x, y, u, u_x, u_y) \tag{1}$$

Означення Величину $\Delta = b^2 - ac$ називають дискримінантом рівняння (1)

T.1 Для рівняння (1) величина $sign\Delta = sign(b^2 - ac)$ інваріат перетворень змінних $(x, y) \to (\xi, \eta)$

◄ Задамо перетворення $(x, y) \to (\xi, \eta)$ як

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{array} \right. \tag{2}$$

Причому будемо вимагати від перетворення (2) те щоб якобіан перетворення не був рівний нулю, що означає що перетворення допускає зворотнє

$$J = \left| \begin{array}{cc} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{array} \right| \neq 0$$

звідки за правилами диффеернціювання отрмаємо правила перетворення похідних

$$\left. \begin{array}{rcl} u_x &=& (u(\xi,\eta))_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ u_y &=& (u(\xi,\eta))_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\ u_{xx} &=& (u_x)_x = (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_x = \\ &=& u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_\xi \xi_{xx} + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\eta \eta_{xx} \\ u_{yy} &=& u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_\xi \xi_{yy} + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\eta \eta_{yy} \\ u_{xy} &=& u_{yx} = (u_x)_y = (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_y = u_{\xi y}\xi_x + u_\xi \xi_{xy} + u_{\eta y}\eta_x + u_\eta \eta_{xy} = \\ &=& u_\eta \eta_{xy} + u_\xi \xi_{xy} + \xi_x(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) + \eta_x(u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) = \\ &=& u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} \end{array} \right\} \tag{3}$$

після підстановки (3) до (1) та послідуючого групування можна отримати рівняння в нових координатах

$$a_1(\xi,\eta)u_{\xi\xi} + 2b_1(\xi,\eta)u_{\xi\eta} + c_1(\xi,\eta)u_{\eta\eta} = \overline{\Phi}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \tag{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1 &=& a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 \\ c_1 &=& a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 \\ b_1 &=& a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y \end{array} \right. \tag{5}$$

Зауваження 1 всі коефіцієнти (5) в явному вигляді залежать від (x, y) але оскільки перетворення має обернене то $\exists \phi(\xi,\eta), \psi(\xi,\eta) : (\xi,\eta) \to (x,y)$

Зауваження 2 якщо функція Φ була лінійною відносно $u_x,\ u_y,\ u$ то вона і залишиться такою з-за лінійності перетворень (3)

Неважко помітити що рівняння (5) відповідають рівнянням перетворення біквадратної форми $a(x,y)x'^2 + c(x,y)y'^2 + 2b(x,y)x'y'$. Тому, якщо ввести матриці

$$A = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ b & c \end{array} \right),\ A_1 = \left(\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{array} \right),\ U = \left(\begin{array}{cc} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{array} \right)$$

можна отримати еквівалентну до (5) матричну рівність

$$A_1 = UAU^T \tag{6}$$

Знайдемо визначник (6) $\det A_1 = \det U \det A \det U^T = J^2 \det A$, а оскільки $J \in \mathbb{R} \wedge J \neq 0 \Rightarrow J^2 > 0 \Rightarrow sign(b^2 - ac) = sign(b_1^2 - a_1 c_1)$ ►

Означення В залежності від величини $\Delta = sign(b^2 - ac)$ рівняння (1) поділяють на такі категорії:
$\Delta > 0$ – рівняння гіперболічного типу;
$\Delta < 0$ – рівняння еліптичного типу;
$\Delta = 0$ – рівняння параболічного типу;

Оберемо змінні $\xi,\ \eta$ таким чином, щоб a_1 став дорівнювати нулю, покладемо в рівнянні (5) $\xi = w(x, y)$, отримаємо рівняння

$$aw_x^2 + 2bw_x w_y + cw_y^2 = 0 \tag{7}$$

Означення Розвязок $w(x, y)$ рівняння (7) називають характеристикою.

Нехай $y = y(x, C)$ де C – довільна стала, розвязок рівняння $w = C$, тоді на цій кривій $dw = 0 \Rightarrow w_x dx + w_y dy = 0$ звідки отримаємо, що

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{w_x}{w_y} \tag{8}$$

поділивши рівняння (7) на w_y^2 отримаємо звичайне диференційне рівняння відносно y

$$a(y')^2 + 2by' + c = 0 \tag{9}$$

яке зводиться до рівняння

$$y'_\pm = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{a} \tag{10}$$

розвязками якого будуть $y_\pm(x, C)$ з яких можна виразити $w = C(y, x)$.

Розглянемо окремо випадки різних типів рівнянь

1. $\Delta > 0$ – рівняння гіперболічного типу. Характеристики дві різні функції $w_\pm(x, y)$. Покладемо $\xi = w_+,\ \eta = w_-$, тоді коефіцієнти a_1, c_1 згідно з характеристичним рівнянням дорівнюють нулю. Отримаємо канонічну форму рівняння гіперболічного типу

$$2b_1 u_{\xi\eta} = \overline{\Phi} \tag{11}$$

або після замін $\alpha = \xi + \eta,\ \ \beta = \xi - \eta$ та ділення на коефіцієнт при мішаній похідній отримаємо іншу канонічну форму

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \overline{\Phi} \tag{12}$$

2. $\Delta = 0$ – характеристика тільки одна і дійсна, тоді можна зробити перетворення $\xi = w$, $\eta = \eta(x, y)$ де η – довільна. $a_1 = 0$ в силу того що w –розвязок характеристичного рівняння. Оскільки $b = \sqrt{ac}$ то $b = (\sqrt{a}\xi_x + \sqrt{b}\xi_y)(\sqrt{a}\eta_x + \sqrt{c}\eta_y) = 0$ в силу рівностей (8),(10). Тоді канонічна форма

$$c_1 u_{\eta\eta} = \overline{\Phi} \tag{13}$$

3. $\Delta < 0$ характеристики комплексно спряжені. Тому вибираємо $\xi = \Re w = (w + w^*)/2,\ \eta = \Im w = (w - w^*)/(2i)$. Як не важко показати

$$a(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) = \overline{\Phi} \tag{14}$$