*1. Основні поняття та означення теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Принцип суперпозиції для лінійних диференціальних рівнянь та приклади його застосування.

(x, y)$\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ - незалежні змінні з декартового квадрату дійсних чисел

U(x,y) – функція від незалежних змінних

U: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ фунція- це відображення незалежних змінних в дійсне число.

$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}} = \mathrm{U_x}$, $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}} = \mathrm{U_y}$, $\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} = \mathrm{U_{xy}}$ - частинні похідні.

Означення1: Рівняння, яке залежить від незалежних змінних, функції від цих змінних, частинних похідних *n*-того порядку: $F(x, y, U, U_x, U_y \ldots) = 0$ (1) називається рівнянням частинних похідних *n*-того порядку.

Функція U(*x,y*), яка при підстановці в це рівняння обертає його в тотожність називається **розв'язком** рівняння.

Приклад: *U=U(x)* $a_0\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}^2} + a_1\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}} + a_2 U + a_3 = 0$ – рівняння

$U(x)= C_1 U_1(x)+ C_2 U_2(x)$, де U_1, U_2 – фундаментальні розв'язки

U=U(x,y) $U_{xy}=0$ – рівняння. *U(x,y)=f(x)+g(y),* де *f і g* – довільні функції.

Додаткові умови дозволяють однозначним чином визначити розв'язок

$U_{xy}=0$, $U(x,0) = f(x)$, $U(0,y)= g(y)$ тут *f і g* задані.

Означення2: Рівняння (1) з додатковими умовами, які дозволяють знайти розв'язок **однозначно**, називаються **задачею.**

Означення3: Рівняння (1), яка є лінійним відносно *U* та її похідних, називається **лінійним диференціальним рівнянням**. Член лінійного рівняння *f,* який не залежить від *U* та її похідних, називається **вільним членом.**

$a(x,y)U_{xx}+2b(x,y)U_{xy}+c(x,y)U_{yy}+d(x,y)U_x+e(x,y)U_y+g(x,y)U=f(x,y)$

$LU(x,y)=f(x,y)$ тут *L* – лінійний диференціальний оператор

$$L=a_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2}{\partial y^2}+d\frac{\partial}{\partial x}+e\frac{\partial}{\partial y}+g$$

Теорема(Принцип суперпозиції):

Якщо U_iє розв'язком $L\,U_i=0$, то $U=\sum_i C_i U_i$теж є розв'язком $L(\sum_i C_i U_i)=0$

Якщо $L\,U=0$, $LV=f$, то $L(U+V)=f$

Якщо$L\,U_i=f_i$, то $L(\sum_i C_i U_i)=\sum_i C_i\,f_i$

Доведення: L – лінійний оператор, тому усі константи C_i виносяться за знак оператора

$$L(\sum_i C_i U_i)=C_i(\sum_i LU_i)=0$$

$L(U+V)=LU+L\,V=0+f=f$

$$L(\sum_i C_i U_i)=C_i(\sum_i LU_i)=C_i\sum_i f_i=\sum_i C_i\,f_i$$

*2. Класифікація та канонічний вид лінійного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку. Характеристики.

<u>Теорема:</u> Якщо від незалежних змінних *x, y* перейти до $\xi(x,y)$ та $\eta(x,y)$, то форма лінійного диференціального рівняння не зміниться.

$a(x,y)U_{xx}+2b(x,y)U_{xy}+c(x,y)U_{yy}=\Phi\left(x,y,U,U_x,U_y\right) \to$

$a_1(\xi,\eta)U_{\xi\xi}+2b_1(\xi,\eta)U_{\eta\xi}+c_1(\xi,\eta)U_{\eta\eta}=\Phi\left(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta\right)$

дискримінанти:

$$\Delta=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)\ \Delta_1=b^2{}_1(\xi,\eta)-a_1(\xi,\eta)c_1(\xi,\eta)$$

sign Δ =signΔ_1

Класифікація рівнянь

$\Delta>0$ – гіперболічний тип рівняння

$\Delta<0$ – еліптичний тип рівняння

$\Delta=0$ – параболічний тип рівняння

Доведення:

$x, y \to \xi(x,y),\eta(x,y)$ $\quad J=\det\begin{pmatrix}\xi_x & \eta_x\\ \xi_y & \eta_y\end{pmatrix}\neq 0$

ланцюгове правило:

$U_x=U_\xi\xi_x+U_\eta\eta_x$

$U_y=U_\xi\xi_y+U_\eta\eta_y$

$U_{xx}=U_{\xi\xi}{\xi_x}^2+2U_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+U_{\eta\eta}{\eta_x}^2+U_\xi\xi_{xx}+U_\eta\eta_{xx}$

$U_{yy}=U_{\xi\xi}{\xi_y}^2+2U_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+U_{\eta\eta}{\eta_y}^2+U_\xi\xi_{yy}+U_\eta\eta_{yy}$

$U_{xy}=U_\xi\xi_{xy}+U_{\xi\eta}\xi_x\eta_y+U_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+U_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+U_\eta\eta_{xy}+U_{\eta\xi}\eta_x\xi_y$

$a_1=a{\xi_x}^2+2b\xi_x\xi_y+c{\xi_y}^2$

$b_1=a\xi_x\eta_x+b\left(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y\right)+c\xi_y\eta_y$

$c_1=a{\eta_x}^2+2b\xi_x\xi_y+c{\eta_y}^2$

$\Delta_1=\Delta J^2$

<u>Теорема(про канонічний вигляд):</u> заміною незалежних змінних *x, y* $\to\xi(x,y),\eta(x,y)$можна привести рівняння $F\left(x,y,U,U_x,U_y\ldots\right)=0$ до канонічного вигляду:

Для $\Delta>0$ – гіперболічного типу рівняння можна звести до $U_{\xi\eta}=\Phi_1(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta)$

а при заміні $\alpha = \xi + \eta$, $\beta = \xi - \eta$ зведемо до вигляду: $U_{\alpha\alpha} - U_{\beta\beta} = \Psi(\alpha, \beta, U, U_\alpha, U_\beta)$

Для $\Delta < 0$ – еліптичного типу $U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = \Phi_2(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$

Для $\Delta = 0$ – параболічного типу $U_{\eta\eta} = \Phi_3(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$

Доведення: ⊡

$a{\omega_x}^2 + 2b\omega_x\omega_y + c\omega_y^2 = 0$ характеристичне рівняння.

Розглянемо $\omega(x, y) = const$ y=y(x). $\omega_x dx + \omega_y dy = 0$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega_x}{\omega_y}$;

$a\frac{dy}{dx}^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0$; розв'язки цього рівняння:$y = y(x, c)$; $\omega(x, y) = const$; $\frac{dy_+}{dx} = \frac{b+\sqrt{\Delta}}{a}$; $\frac{dy_-}{dx} = \frac{b-\sqrt{\Delta}}{a}$; $\omega(x, y_+) = const$ $\omega(x, y_-) = const$

1) $\Delta > 0$. $\xi = \omega(x, y_+), \eta = \omega(x, y_-)$, $a_1 = 0, c_1 = 0$.

2) $\Delta < 0$. $\omega(x, y) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$;

Знайдемо дійсну частину від: $a{\omega_x}^2 + 2b\omega_x\omega_y + c\omega_y^2 = 0$

Re($a{\omega_x}^2 + 2b\omega_x\omega_y + c\omega_y^2 = 0$);

$$a({\xi_x}^2 - {\eta_x}^2) + 2b(\xi_x\xi_y - \eta_x\eta_y) + c({\xi_y}^2 - {\eta_y}^2) = 0$$

З уявної частини отримаємо

$b_1 = 0$

$a_1 - c_1 = 0$; $\Delta_1 = {b^2}_1 - a_1c_1 < 0$.

3)$\Delta = 0$ $\frac{dy_+}{dx} = \frac{dy_-}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$ $\xi = \omega(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$. $a_1 = 0$

Оскільки $\Delta_1 = {b^2}_1 - a_1c_1 = 0$, то $b_1 = 0$ ⊡

*3. Метод відокремлення змінних для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними та приклади його застосування.

МВЗ для дифрівняньзводиться до підстановкив рівняннярозв’язку $v = X(x)Y(y)$, після чого, поділивши на $X(x)Y(y)$, можемо розділити члени залежні лише від x або лише від y і прирівняти їх до деякоїконстанти $-\lambda^2$. Тобто ми отримаємо задачу Штурма-Ліувіля окремо для $X_\lambda(x)$ і $Y_\lambda(y)$.Загальний розв’язок

$$u = \sum_\lambda X_\lambda(x)Y_\lambda(y)$$

МВЗ можна використовувати лише для лінійних диференціальних рівнянь частинних похідних зі сталими коефіцієнтами(Софус Лі).

<u>Приклад МВЗ для параболічного р-ня:</u>

$$u_t - a^2u_{xx} = 0\,, v = X(x)T(t)$$

$$XT' - a^2X''T = 0 \,\Big|\cdot\frac{1}{XT}$$

$$\frac{T'}{T} = a^2\frac{X''}{X} = -\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} T' + \lambda T = 0 \\ a^2X'' + \lambda^2 X = 0 \end{matrix}$$

$$u(x,t) = \sum_\lambda v_\lambda(x,t) = \sum_\lambda X_\lambda(x)\,T_\lambda(t)$$

1) X(x): маємо наступну задачу ШЛ:

$$\begin{matrix} u(0,t) = 0 \Rightarrow X_\lambda(0) = 0 \\ u(l,t) = 0 \Rightarrow X_\lambda(l) = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X_\lambda'' + \lambda^2 X_\lambda = 0 & 0 < x < l \\ X_\lambda(0) = X_\lambda(l) = 0 \end{cases}$$

Де всі X λ утворюють ортогональний базис. Розв’язок задачі*:*

$$X_\lambda = A_\lambda\cos\lambda x + B_\lambda\sin\lambda x \qquad X_\lambda(l) = 0 = B_\lambda\sin\lambda l \qquad X_\lambda(0) = 0 = A_\lambda$$

$$\lambda l = \pi n, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l} \quad n \in \mathbb{N} \quad X_n(x) = B_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x)\,dx = 1 \quad B_n^2\int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx = B_n^2\,\frac{l}{2} = 1 \qquad B_n = \sqrt{\frac{2}{l}}$$

2) *T(т):* $T_n(t) = C_n\,e^{-a^2\lambda_n^2 t}$

Для інших рівнянь розв’язок принципово не відрізняється.

$$U(x,0) = U_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\, T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) -$$

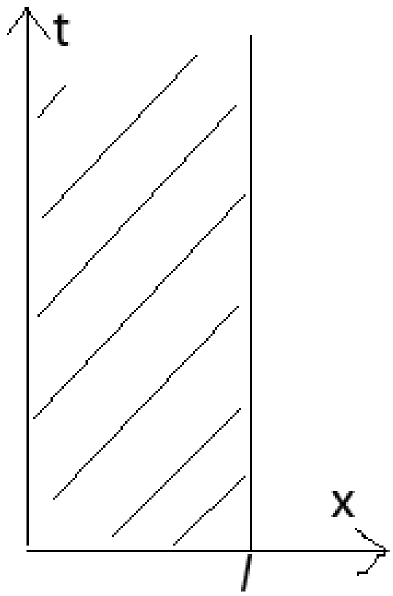
це очевидно є розкладом в ряд Фур'є

$$C_n = \int_0^l U_0(x)\, X_n(x)\, dx$$

*4. Розв'язок рівняннядифузії на відрізку методом відокремлення змінних. Приклад.

$$u(x;t)$$

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad 0 < x < l, \; t > 0$$



u(0,t)=0   u(l,t)=0   t>0
u(x,0)=u(x)   0<x<l

Розв'язання

U(x,t)=X(x)T(t)

XT'-aX''T=0   1/XT

$$\frac{T'}{T} - a^2 \frac{X''}{X} = 0$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T}(t) = \frac{X''}{X}(x) = const = -\lambda^2$$ - константа відокремлення змінних

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad T' + a^2\lambda^2 T = 0$$

$$T_\lambda(t) = C\exp(-a^2\lambda^2 t)$$

$$v(x,t) = X_\lambda(x) T_\lambda(t)$$

$$u(x,t) = \sum_\lambda X_\lambda(x) T_\lambda(t)$$

$$u(0,t) = \sum_\lambda X_\lambda(0) T_\lambda(t) = 0 \quad => X_\lambda(0) = 0$$

$$u(l,t) = 0 = \sum_\lambda X_\lambda(l) T_\lambda(t) \quad => X_\lambda(l) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} X_\lambda^{//} + \lambda^2 X_\lambda = 0 \quad 0 < x < l \\ X_\lambda(0) = 0, \qquad X_\lambda(l) = 0 \end{array}\right.$$ - умови на кінцях відрізка

Оце і є задача Штурма-Леувіля

$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ - власні значення

$X_1(x) = X_{\lambda 1}(x) \; X_2(x) = X_{\lambda 2}(x)$ - власні функції

Нехай ці функції є ортами в функціональному просторі

$$(X_n, X_m) = \int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases}$$

будь-яку функцію із цього функціонального простору можна написати у такому вигляді

$$f(x)=\sum_n f_n X_n(x) \qquad f(x)^o L^2((0,l))$$

$$f_n=\int_0^l f(x)X_n(x)dx \qquad \|f\|^2=\int_0^l f^2(x)dx<\infty$$

квадратично-інтегровніф-ї на відрізку (чого від 0 до *l* в подвійних дужках не знаю)

$$X_\lambda(x)=A_\lambda\cos\lambda x+B_\lambda\sin\lambda x$$

$$X_\lambda(0)=0=A_\lambda$$

$$X_\lambda(x)=B_\lambda\sin\lambda x \qquad \lambda l=\pi n,\ \lambda_n=\pi n/l$$, *n*є*N*

$$X_\lambda(l)=0=B_\lambda\sin\lambda l$$

$$X_n(x)=B_n\sin(\lambda_n x)-B_n\sin(\pi nx/l)$$

$$\|X_n\|^2=\int_0^l X_n^2(x)dx=1=B_n^2\int_0^l\sin^2(\pi nl/2)dx=B_n^2\frac{l}{2}=1$$

$$B_n=\sqrt{2/l}$$

$$T_n(t)=C_n\exp(-a^2\lambda_n^2 t)\,|_{t=0}=C_n$$

$$u(x,0)=u_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nX_n(x)$$

$$u_0(x)=\sum_n C_nX_n(x)$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)$$

Відповідь: $C_n=\int_0^l u_0(x)X_n(x)dx$

Другий тип

$u_t-a^2u_{xx}=0\ 0<x<l$, *t>0*

$$\alpha u_x(0,t)+\beta u(0,t)=0$$

$$\gamma u_x(l,t)+\delta u(l,t)=0$$

$u(x,0)=u_0(x)$, *0<x<l*

Розв'язок: $u(x,t)=\sum_{\lambda} X_{\lambda}(x)T_{\lambda}(t)$

$$\begin{cases} T_{\lambda}^{'}+a^2\lambda^2 T_{\lambda}=0 \\ X_{\lambda}^{''}+\lambda^2 X_{\lambda}=0 \\ \alpha X_{\lambda}^{'}(0)+\beta X_{\lambda}(0)=0 \\ \gamma X_{\lambda}^{'}(l)+\delta X_{\lambda}(l)=0 \end{cases}$$

0<x<l

задача Штурма-Леувіля

$$X_{\lambda}(x)=A_{\lambda}\cos\lambda x+B_{\lambda}\sin\lambda x$$

$$\begin{cases} \beta A_{\lambda}+\alpha\lambda B_{\lambda}=0 \\ (-\gamma\lambda\sin(\lambda l)+\delta\cos(\lambda l))A_{\lambda}+(\gamma\lambda\cos(\lambda l)+\delta\sin(\lambda l))B_{\lambda}=0 \end{cases}$$

Детермінант цієї системи

$$tg(\lambda l)=\frac{\alpha\delta-\gamma\beta}{\alpha\gamma\lambda^2+\beta\gamma}\lambda$$ $\Rightarrow \lambda_1,\lambda_2\ldots$

$$\frac{A_{\lambda}}{B_{\lambda}}=-\frac{\alpha\lambda}{\beta}$$

$$X_{\lambda}(x)=B_{\lambda}\left(\frac{A_{\lambda}}{B_{\lambda}}\cos\lambda x+\sin\lambda x\right)=B_{\lambda}\left(-\frac{\alpha\lambda}{\beta}\cos\lambda x+\sin\lambda x\right)$$

$$X_n(x)=B_n\left(-\frac{\alpha\lambda_n}{\beta}\cos\lambda_n x+\sin\lambda_n x\right)$$

$$\|X_n\|^2=\int_0^l X_n^2(x)dx=1$$

Таким чином: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$

$$T_n^{/}+a^2\lambda_n^2 T_n=0$$

$$T_n(t)=C_n\exp(-a^2\lambda_n^2 t)$$

Третій тип:

$u_t-a^2u_{xx}=f(x,t)$ $0<x<l$, *t>0*

$\alpha u_x(0,t)+\beta u(0,t)=0$ $\gamma u_x(l,t)+\delta u(l,t)=0$, *t>0*

$u(x,0)=u_0(x)$ *0<x<l*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$$

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) X_n(x)$$

$$Q_n(t) = \int_0^l f(x,t) X_n(x) dx$$

$$X_n^{''} + \lambda_n^2 X_n = 0 \quad X_n^{'} = -\lambda_n^2 X_n$$

$$\sum_n X_n T_n^{'} - a^2 X_n^{''} T_n = \sum_n X_n Q_n$$

$$\sum_n X_n T_n^{'} + a^2 \lambda^2 X_{\grave{o}} T_n = \sum_n X_n Q_n$$

$$T_n^{'} + a^2 \lambda^2 T_n = Q_n(t)$$

$$T_n(t) = C_n \exp(-a^2 \lambda_n^2 t) + \int_0^t \exp(-a^2 \lambda^2 (t-s)) Q_n(s) ds$$

$$u(x,0) = u_0(x) = \sum_n X_n(x) T_n(0) = \sum_n C_n X_n(x)$$

$$C_n = \int_0^l u_0(x) X_n(x) dx$$

*5. Розв'язок хвильового рівняння на відрізку методом відокремленнязмінних. Приклад.

$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$, *0<x<l, t>0*

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

u(l,t)=0, t>0

0<x<l

Розв'язання

$$u(x,t) = \sum_{\lambda} X_{\lambda}(x) T_{\lambda}(t)$$

$$0 = u(0,t) = \sum_{\lambda} X_{\lambda}(0) T_{\lambda}(t) \Rightarrow X_{\lambda}(0) = 0$$

$$0 = u(l,t) = \sum_{\lambda} X_{\lambda}(l) T_{\lambda}(t) \Rightarrow X_{\lambda}(l) = 0$$

$$\begin{cases} X_{\lambda}'' + \lambda^2 X_{\lambda} = 0 \quad 0 < x < l \\ X_{\lambda}(0) = 0 \qquad X_{\lambda}(l) = 0 \end{cases}$$ задача Ш.-Л.

$$X_n(x) = X_{\lambda n}(x) = B_{\lambda n} \sin(\lambda x) = \sqrt{2/l} \sin(\pi n x / l)$$

$\lambda_n = \pi n / l$, *nϵN*

$$(X_{\lambda}, X_{\mu}) = \int_0^l X_{\lambda}(x) X_{\mu}(x) dx = \delta_{\lambda\mu}$$

$$\sum_n X_n(x) T_n''(t) - a^2 \sum_n X_n''(x) T_n(t) = \sum_n Q_n(t) X_n(x)$$

$$X_n''(x) = -\lambda_n^2 X_n(x)$$

$$T_n'' + a^2 \lambda_n^2 T_n = Q_n(t)$$

$$Q_n(t) = \int_0^l f(x,t) X_n(x) dx$$

$$T_n(t) = C_n \cos(a\lambda_n t) + D_n \sin(a\lambda_n t) + \int_0^t \frac{\sin(a\lambda_n (t-s))}{a\lambda_n} Q_n(s) ds$$

$$u_0(x) = u(x,0) = \sum_n X_n(x) T_n(0) = \sum_n C_n X_n(t)$$

$$C_n = \int_0^l u_0(x) X_n(x) dx$$

$$u_1(x) = u_1(x,0) = \sum_n X_n T^{'}(0) = \sum_n a\lambda_n D_n X_n(x)$$

$$D_n = \frac{1}{a\lambda_n} \int_0^l u_1(x) X_n(x) dx$$

*6. Розв'язок рівняння Лапласа та Пуассона в прямокутнику методом відокремлення змінних. Приклад.

1) Рівняння Лапласа у декартових координатах має вигляд $\Delta_2 U = U_{XX} + U_{YY} = 0$. Причому 0<x<b, 0<y<a.
U(x,0)=f_1(x), U(x,b)=f_2(x); U(0,y)=0, U(a,y)=0. Знайти розподіл потенціалу всередині прямокутника.
Розв'язування. Шукаємо розв'язок у вигляді функції V(x,y)=X(x)Y(y), тоді рівняння Лапласа прийме вигляд
X″Y+XY″=0. Переписавши його у формі $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$,
отримаємо незалежні рівняння для знаходження X і Y.

$Y_\lambda'' - \lambda^2 Y_\lambda = 0$

$X_\lambda'' + \lambda^2 X_\lambda = 0$

$U(x,y) = \sum_\lambda V_\lambda(x,y) = \sum_\lambda X_\lambda Y_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} X_n Y_n$ **(1)**

$X_\lambda'' + \lambda^2 X_\lambda = 0$

$X_\lambda(0)=0$; $X_\lambda(a)=0$;

$\lambda_n = \frac{\pi n}{a}, \ n \in N$

$X_n(x) \equiv X_{\lambda_n}(x) = B_n \sin(\lambda_n x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{\pi n}{a} x$ **(2)**

$Y_n(y) \equiv Y_{\lambda_n}(y) = C_n'' e^{\lambda_n y} + D_n'' e^{-\lambda_n y} = C_n' sh(\lambda_n y) + D_n' ch(\lambda_n y) = C_n sh(\lambda_n y) + D_n(\lambda_n(b-y))$ ***(3)** обрали таку фундаментальну систему розв'язків.*

C_n і D_n шукаємо з умов:
U(x,0)=f_1(x) ; U(x,b)=f_2(x);

$f_1(x) = U(x,0) = \sum X_n Y_n(0) = \sum_n D_n sh(\lambda_n b) X_n(x)$ - це розклад в ряд тому:

$D_n = \frac{1}{sh(\lambda_n b)} \int_0^a f_1(x) X_n(x) dx$ **(4)**

$$f_2(x) = U(x,b) = \sum_n X_n(x) Y_n(b) = \sum_n C_n sh(\lambda_n b) X_n(x)$$

$C_n = \frac{1}{sh(\lambda_n b)} \int_0^a f_2(x) X_n dx$ **(5)**

Відповідь (1) (2) (3) (4) (5).

2) $\Delta_2 U = U_{XX} + U_{YY} = 0$
0<x<a; 0<y<b;
U(x,0)=0; U(x,b)=0; U(0,y)=g_1(y) ; U(a,y)=g_2(y);

Розв'язування. Аналогічно.

$$U(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}X_m(x)Y_m(y)$$

$$Y_m(y)=A_m\sin\lambda_m y=\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\frac{\pi m}{b}y \quad ; \quad \lambda_m=\frac{\pi m}{b}$$

$$X_m(x)=\widetilde{C_m}\,sh(\lambda_m x)+\widetilde{D_m}\,sh(\lambda_m(a-x))$$

$$\widetilde{C_m}=\frac{1}{sh(\lambda_m a)}\int_0^b g_2(y)Y_m(y)dy$$

$$\widetilde{D_m}=\frac{1}{sh(\lambda_m a)}\int_0^b g_1(y)Y_m(y)dy$$

3) $\Delta_2 U=U_{XX}+U_{YY}=0$

$0<x<a$; $0<y<b$;

$U(x,0)=f_1(x)$; $U(x,b)=f_2(x)$; $U(0,y)=g_1(y)$; $U(a,y)=g_2(y)$;

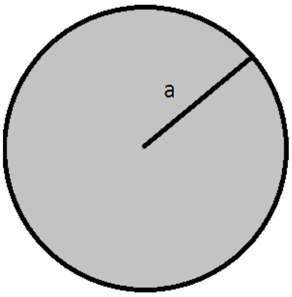
Відповідь: $U^{(3)}(x,y)=U^{(1)}(x,y)+U^{(2)}(x,y)$ за рахунок лінійності рівняння.

Тобто відповідь = сумі відповідей першої та другої задачі (пункт 1) та 2))

*7. Розв'язок рівняння Лапласа та Пуассона в крузі та кільці методом відокремлення змінних. Приклад.

$\Delta_2 U(r,\varphi) = 0\ , 0 \le r \le a, 0 \le \varphi \le 2\pi$

$$U(a,\varphi) = U_0(\varphi), 0 \le \varphi \le 2\pi$$



Шукаємо розподіл потенціалу в крузі за умови, що його значення на границі задане.

Розв'язування

$\Delta_2 U(r,\varphi) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\ \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$

Шукаємо функцію $V(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$

$$\Delta_2 V = 0 = \Phi\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d^2\varphi} \quad | : \frac{R\Phi}{r^2}$$

$\frac{1}{R}r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = 0$

$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d^2\varphi} = -\lambda^2$

$r^2 R_\lambda'' + rR_\lambda' - \lambda^2 R_\lambda = 0$

Напишемо рівняння для функції Ф :

$\Phi_\lambda'' + \lambda^2\Phi = 0$; Умови на функцію Ф такі:

$\Phi_\lambda(\varphi + 2\pi k) = \Phi_\lambda(\varphi), k \in Z$

Задача Штурма-Ліувіля. Розв'язок диф. Рівняння:

$\Phi_\lambda = A_\lambda\cos(\lambda\varphi) + B_\lambda\sin(\lambda\varphi)$

Використавши умову на функцію Ф отримаємо:

$\lambda = n\ \in Z_+ = \{0,1,2,\dots\}$

$\Phi_n = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\ , n \in N, \Phi_0(\varphi) = A_0;$

Для R_n:

$r^2 R_n'' + rR_n' - n^2 R_n = 0$

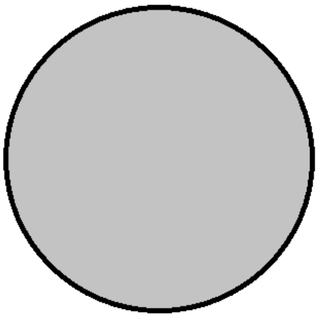
$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}, n \in N\ , R_0 = C_0 + D_0\ln(r)$

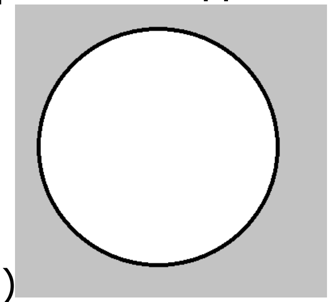
Ми знайшли зліченну множину функцій :

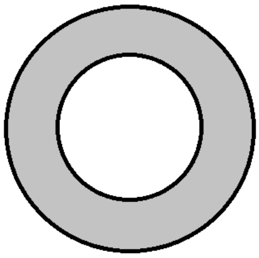
$V_n(r,\varphi) = R_n(r)\Phi_n(\varphi)$

$$U(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(r,\varphi) = R_0(r)\Phi_0(\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)\Phi_n(\varphi)$$

Можемо застосувати цей розв'язок до :

1) 

2) 

3) 

Функція U – нескінченно диференційована. Для випадків
$D_0 = 0$ – інакше в точці r=0 $R_0=\infty$,а такого бути не може.
Аналогічно $D_n=0$ $\forall n \in N$
$D_0=0$ – інакше в точці r= ∞ $R_0=\infty$, аналогічно $C_n=0$ $\forall n \in N$
Нічого не можна сказати
Приклад.
Для 1 випадку :
(1)$U(r,\varphi) = \widetilde{C_0} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\widetilde{A_n} \cos n\varphi + \widetilde{B_n} \sin n\varphi)\widetilde{C_0} = A_0$; $\widetilde{A_n} = A_n C_n$; $\widetilde{B_n} = B_n C_n$
$r \coloneqq a$

$$U(a,\varphi) = U_0(\varphi) = \widetilde{C_0} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\widetilde{A_n} \cos n\varphi + \widetilde{B_n} \sin n\varphi)$$

Це звичайна періодична функція, розкладена в ряд Фур'є:
(2) $\widetilde{C_0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_0(\varphi) d\varphi$
(3) $\widetilde{A_n} = \frac{1}{a^n}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U_0(\varphi)\cos n\varphi \, d\varphi$
(4)$\widetilde{B_n} = \frac{1}{a^n}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U_0(\varphi)\sin n\varphi \, d\varphi$
Відповідь (1) , (2), (3) , (4)

*8. Гармонічні поліноми та їх властивості. Означення сферичних функцій.

$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, x,y,z –декартові координати

Шукатимемо розв'язки рівняння

$$\Delta_3 U(x, y, z) = 0 \quad (0)$$

Розв'язок шукатимемо у вигляді поліномів

$$U(x, y, z) = \sum_{p\geq 0, q\geq 0, r\geq 0} a_{pqr} \underbrace{\boxed{x^p y^q z^r}}_{-\text{моном}}$$

Поліноми, які є розв'язками рівняння (0) називаються гармонічними поліномами. Розглядають однорідні поліноми:

Якщо $U_l(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^l U_l(x, y, z)$, l – степінь однорідності,

U_l - однорідний поліном.

Для однорідних гармонічних поліномів

$$U_l(x, y, z) = \sum a_{pqr}\, x^p y^q z^r, p + q + r = l$$

Вони утворюють лінійний простір.

Приклади: l=0) 1; l=1) x,y,z; l=2) xy,yz,zx,$x^2 - y^2, y^2 - z^2$

Теорема. Існує тільки h_l=2l +1 лінійно незалежних гармонічних поліномів степеню l.

◁Розглянемо мономи $x^p y^q z^r$, $x, y, z \in \mathbb{Z}_+, p + q + r = l$

Нехай r=l. Тоді тільки 1 моном.

При r = $l - 1$, тоді 2 мономи.

…

При r=0, $(l + 1)$ незалежний моном.

Маємо арифметичну прогресію 1,2,3,…,$l + 1$. Її сума $k_l = \frac{(l+1)(l+2)}{2}$

$$\Delta U_l = U_{l-2}(\text{якийсь поліном}) = 0$$

=>усі коефіцієнти полінома степеню $l - 2$ нульові.

Скільки існує таких коефіцієнтів? k_{l-2}

$$h_l = k_l - k_{l-2} = \frac{(l+1)(l+2)}{2} - \frac{(l-1)l}{2} = \frac{l^2 + 3l + 2 - l^2 + 1}{2} =$$

$= 2l + 1 = h_l$▷

Позначатимемо гармонічні поліноми $U_{lm}(x, y, z)$, де l – степінь однорідності, $-l \leq m \leq l$, ь нумерує лінійно незалежні поліноми і приймає (2l+1) значення.

Теорема. (Загальний розв'язок оператора Лапласа)

Розглянемо функцію f(w), де w=z + ixcos(t) + iysin(t), tєC, x,y,z– декартові координати. Вважатимемо, що f(w)єC^2.

Тоді $\Delta f(w) = 0$.

$\triangleleft\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = f(z + ixcost + iysint) =$

$= -cos^2 t f_{ww} - sin^2 t f_{ww} + f_{ww} = f_{ww}(-cos^2 t - sin^2 t + 1) = 0 \triangleright$

$$w^l = (z + ixcost + iysint)^l$$

$$(a+b)^l = \sum_{p\geq 0, q\geq 0, p+q=l} \frac{l!}{p!\,q!} a^p b^q - \text{біном Ньютона}$$

$$(a+b+\mathrm{c})^l = \sum_{p\geq 0, q\geq 0, r\geq 0, p+q+r=l} \frac{l!}{p!\,q!\,r!} a^p b^q c^r$$

- поліном Ньютона для трьох доданків.

$$w^l = \begin{vmatrix} a = z \\ b = ixcost \\ c = iy\sin t \end{vmatrix} = \sum_{\substack{p\geq 0, q\geq 0, r\geq 0, \\ p+q+r=l}} \frac{l!}{p!\,q!\,r!} z^p (ixcost)^q (iy\sin t)^r =$$

$$= \sum a_{pqr}(t) x^p y^q z^r$$

Оскільки $\Delta w^l = 0$, даний поліном є розв’язком рівняння Лапласа.

$$U_l(x,y,z;t) = \sum a_{pqr}(t) x^p y^q z^r = \sum_{m=-l}^{l} C_m(x,y,z) e^{-imt} =$$

$$= \sum_{m=-l}^{l} U_{lm}(x,y,z) e^{-imt}$$

w^l - розв’язок рівняння Лапласа => рядU_l∀tє розв’язком рівняння Лапласа.

Оператор Лапласа не діє на e^{-imt}, а діє тільки на U_{lm}=> усі поліноми U_{lm} є розв’язками рівняння Лапласа.

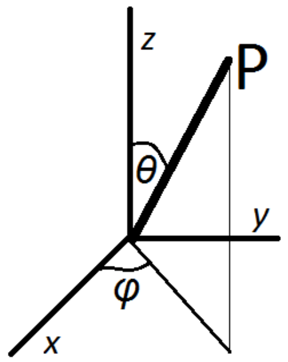
$U_{lm}(x,y,z)$ - лінійно незалежні поліноми степені однорідності l, $-l \leq m \leq l$

$$\boxed{U_{lm}(x,y,z) = \int_0^{2\pi} (z + ixcost + iysint)^l e^{imt} dt, -l \leq m \leq l}$$

Формула для гармонічних поліномів U_{lm} у явному вигляді

<u>Сферичні функції</u>

$$z = rcos\theta, x = rsin\theta cos\varphi, y = rsin\theta sin\varphi$$



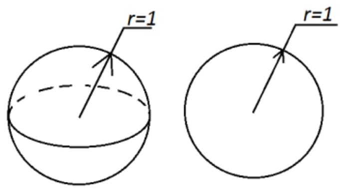
$$U_{lm}(x,y,z) = \int_0^{2\pi} (r cos\theta + i r sin\theta (cos\varphi cos t + sin\varphi sin t))^l \, e^{imt} \, dt =$$

$$= r^l \int_0^{2\pi} (cos\theta + i sin\theta \cos(t-\varphi))^l \, e^{imt} \, dt = |t - \varphi = \psi| =$$

$$= r^l e^{im\varphi} \int_0^{2\pi} (cos\theta + i sin\theta \cos\psi)^l \, e^{im\psi} \, d\psi$$

Позначимо $A = r^l, B = \int_0^{2\pi} (cos\theta + i sin\theta \cos\psi)^l \, e^{im\psi} \, d\psi, C = e^{im\varphi}$, тоді $U_{lm} = A(r)B(\theta)C(\varphi)$

Лаплас увів позначення (формули Лапласа):



$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = N_{lm} e^{im\varphi} \int_0^{2\pi} (cos\theta + i sin\theta \cos\psi)^l \, e^{im\psi} \, d\psi$$

$$\int_{S^2} |Y_{lm}(\theta,\varphi)|^2 do = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} sin\theta d\theta |Y_{lm}(\theta,\varphi)|^2 = 1$$

Таким чином фіксуємо N_{lm}:

$$N_{lm} = \frac{(-i)^m}{2\pi} \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l+m)!\,(l-m)!}{(l!)^2}}$$

Кожну функцію на сфері можна розкласти по сферичних функціях Y_{lm}, вони – як синус і косинус у ДСК.

l=0: $Y_{00}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

l=1: $Y_{10}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} cos\theta$

$$Y_{1\pm1}(\theta,\varphi) = \pm\sqrt{\frac{3}{8\pi}} sin\theta e^{\pm i\varphi}$$

l=2: $Y_{20}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3cos^2\theta - 1)$

$$Y_{2\pm1}(\theta,\varphi) = \pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}} sin\theta cos\theta e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{2\pm2}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}$$

***9. Ортогональність та повнота системи сферичних функцій на сфері одиничного радіусу. Диференціальне рівняння сферичних функцій.**

Теорема. (Диференціальне рівняння для сферичних функцій)

$$\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\,\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y_{lm}=0$$

Заміна $\frac{\partial}{\partial\theta}\to\frac{\partial}{\partial r}, sin\theta\to r$перетворить вираз у диф. оператор Лапласа в полярних координатах.

$\lhd\Delta\left(r^l Y_{lm}(\theta,\varphi)\right)=0$

Оператор Лапласа в ССК:

$$\Delta_3=\underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)}_{-\text{радіальна частина}}+\frac{1}{r^2}\underbrace{\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]}_{-\text{кутова частина}}=$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\Delta_{\theta,\varphi}}{r^2}$$

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\right](r^l Y_{lm})=0$$

Слід намалювати стрілку від θ під лапласом до Y_{lm} і від $r^2\frac{\partial}{\partial r}$ до r^l.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial r^l}{\partial r}\right)Y_{lm}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(lr^{l+1})Y_{lm}=l(l+1)r^{l-2}Y_{lm}$$

$$r^l\frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}Y_{lm}=r^{l-2}\Delta_{\theta,\varphi}Y_{lm}=0$$

$$l(l+1)r^{l-2}Y_{lm}+r^{l-2}\Delta_{\theta,\varphi}Y_{lm}=0$$

$l(l+1)Y_{lm}+\Delta_{\theta,\varphi}Y_{lm}=0\rhd$

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=N_{lm}e^{im\varphi}P_l^{|m|}(cos\theta),$$

$$P_l^{|m|}=\int_0^{2\pi}(cos\theta+isin\theta\cos\psi)^l e^{im\psi}\,d\psi$$

$$-\text{приєднаний поліном Лежандра}$$

$(cos\theta + isin\theta\cos\psi)^l e^{im\psi} = cosm\psi + \boxed{isinm\psi}$ – інтеграл дасть 0

Сферичні функції визначені на одиничній сфері. $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-l \le m \le l, l = 0,1,\dots$ Сферичні функції – добутки двох систем функцій. $e^{im\psi}$ - ПОНС(Повна ортонормована система функцій) по ψ на відрізку 2π.

<u>Теорема.</u> Система сферичних функцій є повною ортонормованою на сфері радіусу 1.

Припустимо, що теорема вірна. Розглянемо ∀ функцію $f = f(\theta,\varphi) \in L^2(S^2)$ - квадратично інтегрована на двовимірній сфері.

$$\int_{S^2} |f(\theta,\varphi)|^2 do < \infty$$

Ця функція може бути розкладена по сферичних функціях:

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{-l\le m\le l} f_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$f_{lm} = \int_{\Omega} f(\theta,\varphi)\overline{Y_{lm}}(\theta,\varphi)do$$

◁$Y_{lm} \sim e^{im\varphi} P_l^{|m|}(cos\theta)$

$\left\{\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{m=1}^{\infty}$ - ПОНС на відрізку 2π

$$\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sin\theta\frac{dy}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{sin^2\theta}y + l(l+1)y = 0\right.$$

$y = P_l^{|m|}(cos\theta)$

$[y(\theta) < +\infty, \theta \to 0, \pi$

[- задача Штурма-Ліувілля. Зверху рівняння, знизу дод. Умови

Ця задача Ш-Л і дає ПОНС функцій▷

***10. Представлення фундаментального розв'язку рівняння Лапласа у вигляді ряду по сферичних функціях у випадку, коли особлива точка фундаментального розв'язку і центр координат не співпадають.**

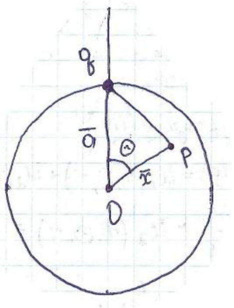
Якщо помістити заряд в центр ССК, то його потенціал буде рівний $U = \frac{1}{r}$.

Перемістимо заряд на відстань $\vec{a}$, тоді потенціал поля буде рівний $U = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|}$.

Теорема (про розклад фундаментального розв'язку рівняння Лапласа в ряд за СФ):

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|} = \begin{cases} \frac{1}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(cos\theta), & r < a \\ \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^l P_l(cos\theta), & r > a \end{cases}$$,де $P_l(\cos\theta) \equiv \frac{Y_{lo}(\theta,\phi)}{Y_{l0}(0,0)}$ - поліном Лежандра

Доведення:Помістимо в центр СК сферу радіуса а:



1)r<a: Потенціалмаєзадовольняти р-ня Лапласа:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l Y_{l0}(\theta; 0)$$

Тут B_l=0 (внутр. задача), m=0 (бо нема залежності від кута).

Розглянемо випадок, коли $\vec{r}$ і $\vec{a}$колінеарні.

Тоді

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|} = \frac{1}{a-r} = \frac{1}{a}\frac{1}{1-(\frac{r}{a})} = \frac{1}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l =$$

l=0∞AlrlYl00;0=>

$=>\frac{1}{a^{l+1}} = A_l Y_{l0}(0; 0) => A_l = \frac{1}{a^{l+1} Y_{l0}(0;0)}$Таким чином

$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|} = \frac{1}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l \frac{Y_{lo}(\theta,\phi)}{Y_{l0}(0,0)}$Для r>a аналогічно.

*11. Загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа в сферичних координатах.

Теорема. Загальнийрозв’язокрівняння Лапласа має вигляд в сферичних координатах:

$$U(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)})Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

Доведення.

Шукатимемо функції

$$V(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$$

де Y, Rпоки що невідомі нам функції.

$$\Delta V(r,\theta,\varphi) = 0$$

$$\Delta = \Delta_r + \Delta_{\theta,\varphi}$$

$$\Delta V = \left(\Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\right)V(r,\theta,\varphi) = Y\Delta_r R + \frac{1}{r^2}R\Delta_{\theta,\varphi}Y = 0 \mid * \frac{1}{RY}$$

$$\frac{\Delta_r R}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Delta_{\theta,\varphi}Y}{Y} = 0 \quad \mid * r^2$$

$$\frac{r^2\Delta_r R}{R} + \frac{\Delta_{\theta,\varphi}Y}{Y} = 0$$

$$\frac{r^2\Delta_r R}{R} = -\frac{\Delta_{\theta,\varphi}Y}{Y} = \lambda$$

$$\begin{cases} \Delta_{\theta,\varphi}Y + \lambda Y = 0 \\ Y(\theta,\varphi) = Y(\theta,\varphi + 2k\pi), k\epsilon Z \\ Y(\theta,\varphi) < +\infty, \theta \to 0, \theta \to \pi \end{cases}$$

Маємо задачу Штурма-Ліувіля.

$$\lambda = l(l+1), \;\; l = 0,1,\dots$$

$$Y(\theta,\varphi) \quad -l \le m \le l$$

$$r^2\Delta_r R - \lambda R = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - l(l+1) = 0$$

$$r^2R'' + 2rR' - l(l+1)R = 0$$

Відомо, що розв’язки цього рівняння:

$$R = r^l, \qquad R = r^{-(l+1)}$$

Отже, загальний розв’язок:

$$R_{lm} = A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)}$$

Таким чином ми знаємо Y_{lm} і R_{lm} $U(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}R_{lm}(r)\,Y_{lm}(\theta,\varphi)$

***12. Розв'язок задачіДіріхле для рівняння Лапласа в кулі методом відокремлення змінних. Приклад.**

Задача Діріхле:

$$\begin{cases} \Delta U(r,\theta,\varphi) = 0 \\ D = \{0 \le r \le a, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi\} \\ U(a,\theta,\varphi) = g(\theta,\varphi) \end{cases}$$

Ми шукаємо розв’язок рівняння Лапласа в кулі радіуса a.

Розв**’**язання:

$$U(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}) Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$B_{lm} = 0$, оскільки в центрі кулі функція $U(r,\theta,\varphi)$ має бути скінченною. Маємо:

$$U(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_{lm} r^l Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

Вводимо такі коефіцієнти:

$$A'_{lm} = A_{lm} a^l$$

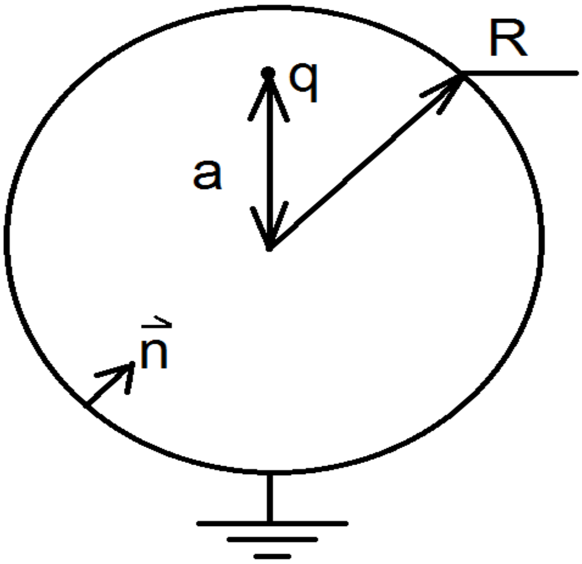
Задовольняємо умову:

$$U(a,\theta,\varphi) = g(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A'_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

Це ряд Фур’є по сферичних функціях. Коефіцієнти:

$$A'_{lm} = \int_0^{\pi} sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} g(\theta,\varphi) Y_{lm}(\theta,\varphi) d\varphi$$

Приклад. Практична задача з електродинаміки



Є заземлена металева сфера (потенціал рівний нулю).Заряд q знаходиться на відстані a від центру. Знайти розподіл потенціала всередині сфери і густину поверхневих зарядів на сфері.

$U-?\quad \sigma-?$

Розв'язання:

$$U(r,\theta,\varphi)=U_1(r,\theta,\varphi)+U_2(r,\theta,\varphi)=$$

U_1-потенціал, утворений зарядом

U_2-потенціал, утворений сферою

$$=\frac{q}{|\vec{x}-\vec{a}|}+U_2(r,\theta,\varphi)=\frac{q}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^l P_l(cos\theta)+\sum_{l=0}^{\infty}C_l r^l P_l(cos\theta)$$

$r>a$ Потенціал у сферичному шарі.

$$U(R,\theta,\varphi)=0=\frac{q}{R}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a}{R}\right)^l P_l(cos\theta)+\sum_{l=0}^{\infty}C_l R^l P_l(cos\theta)$$

$P_l(cos\theta)=\frac{Y_{l0}(\theta,\varphi)}{Y_{l0}(0,0)}=\frac{Y_{l0}(\theta,0)}{Y_{l0}(0,0)}$ – поліноми Лежандра

$$q\frac{a^l}{R^{l+1}}=-C_l R^l => C_l=-q\frac{a^l}{R^{2l+1}}$$

$$U(r,\theta,\varphi)=\frac{q}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^l P_l(cos\theta)-\frac{q}{R}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{ra}{R^2}P_l(cos\theta)$$

$$\sigma=\frac{1}{4\pi}\frac{dU}{dn}=-\frac{1}{4\pi}\frac{dU}{dr}\Big|_{r=R}$$

n-внутрішня нормаль.

***13. Означення та класифікація циліндричних функцій. Співвідношення між циліндричними функціями Беселя, Неймана та Ханкеля. Інтегральні зображення циліндричнихфункцій.**

ОЗН. – Циліндричною називається функція, що задається наступним інтегралом:

$Z_\nu(z) = D\int\limits_\Gamma d\xi \exp[iz\sin\xi - i\nu\xi],$ де D- стала нормування.

Т1 - якщо $\Delta f(\mathrm{w}) = 0$ при $f \in C^2$, то $\mathrm{w} = ix\sin t + iy\cos t + z$, де $(x,y,z) \in R^3$ декартові координати, $t \in C$

◄ $$\Delta f(\mathrm{w}) = f_{xx}(\mathrm{w}) + f_{yy}(\mathrm{w}) + f_{zz}(\mathrm{w}) = \left[\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right)^2\right] f_{uu}(\mathrm{w}) =$$ ►

$$= [-\sin^2 t - \cos^2 t + 1] f_{uu}(\mathrm{w}) = 0 \Big|$$

Приклад: $f_\lambda(\mathrm{w}) = \exp[\lambda \mathrm{w}],$ $\lambda \in C$ то $\Delta f(\mathrm{w}) = 0$

Зробивши перехід до ЦСК:

$x = \rho\sin(\phi)$ $y = \rho\cos(\phi)$ $z = z$ маємо

$$\mathrm{v} = ix\sin t + iy\cos t + z = i\rho\cos\phi\sin t + i\rho\cos t\sin\phi + z = i\rho(\sin(\phi + t)) + z$$

Т2 – якщо $U_{\lambda,\nu}(\rho,\phi.z) = \int\limits_\Gamma \exp[\lambda\mathrm{w} - i\nu t]dt$, тоді

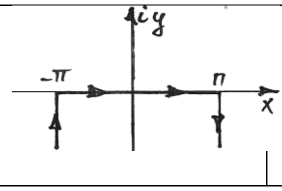
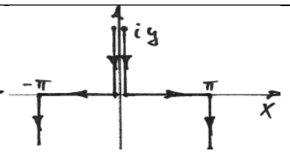
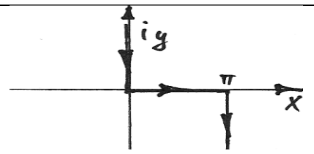
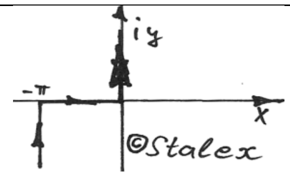
1) $\Delta U_{\lambda,\nu}(\rho,\phi.z) = 0, \forall\lambda,\nu \in R$

$$U_{\lambda,\nu}(\rho,\phi.z) = \int e^{i\lambda\rho\sin(t+\varphi)} e^{\lambda z - i\upsilon t} dt = (t + \varphi = \xi) =$$

2) $$= e^{\lambda z} e^{i\lambda\varphi} \int e^{i\lambda\rho\sin\xi - i\upsilon\xi} d\xi = A(\lambda\rho)B(\upsilon\varphi)C(\lambda z)$$

$$Z_\nu(z) = D\int\limits_\Gamma d\xi \exp[iz\sin\xi - i\nu\xi],$$

Назва, знач D	$I_\nu(z) -$ ф - я Бесселя , $\frac{1}{2\pi}$	$Y_\nu(z) -$ ф - я Неймана , $\frac{1}{2\pi i}$	$H_\nu^{(1)} -$ ф - я Ханкеля 1 - го р. $\frac{1}{\pi}$	$H_\nu^{(2)} -$ ф - я Ханкеля 2 - го роду $\frac{1}{\pi}$

Контур	 		

T3 – Про зв'язок між функціями

$$I_\nu(z)=\frac{1}{2}\left[H_\nu^{(1)}(z)+H_\nu^{(2)}(z)\right] \qquad Y_\nu(z)=\frac{1}{2i}\left[H_\nu^{(1)}(z)-H_\nu^{(2)}(z)\right]$$

$$H_\nu^{(1)}(z)=I_\nu(z)+iY_\nu(z) \qquad H_\nu^{(2)}(z)=I_\nu(z)-iY_\nu(z)$$

$$I_\nu(z)\div\cos z \qquad Y_\nu(z)\div\sin z \quad H_\nu^{(1)}\div\exp[iz] \;\; H_\nu^{(2)}\div\exp[-iz]$$

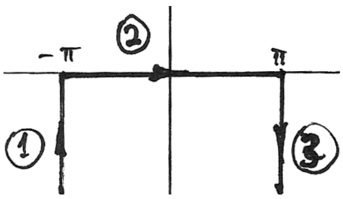
◄

$$I_\nu(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \exp[iz\sin\xi-i\nu\xi]d\xi=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\int_{C1}\exp[iz\sin\xi-i\nu\xi]d\xi+\frac{1}{\pi}\int_{C2}\exp[iz\sin\xi-i\nu\xi]d\xi\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(H_\nu^{(1)}(z)+H_\nu^{(2)}(z)),\ \Gamma=\mathrm{C1}\cup\mathrm{C2}$$

►

Інтегральні зображення (Шека, бо Б-с не дав)



$$t=\frac{z}{2}\exp[i\xi]\Rightarrow i\xi=\ln\frac{2t}{z}\Rightarrow d\xi=\frac{dt}{it};\sin\xi=\frac{\exp[\mathrm{i}\xi]-\exp[-i\xi]}{2i}=\frac{(2t/z)-(z/2t)}{2i}$$

$$\exp[-i\nu\xi]=(\exp[i\xi])^{-\nu}=\left(\frac{2t}{z}\right)^{-\nu}; \quad \mathrm{I}_\nu(z)=\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{dt}{it}\exp\left[iz(\frac{2t}{z}-\frac{z}{2t})\frac{1}{2i}\right]\left(\frac{z}{2t}\right)^\nu$$

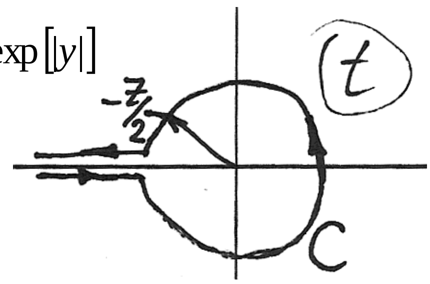
$I_\nu(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\left(\dfrac{z}{2}\right)^\nu\displaystyle\int_c\frac{dt}{t^{\nu+1}}\exp\left[t-\frac{z^2}{4t}\right]=J_\nu(z)$ - формула Соніна – Шлефлі (не впевнений у першому прізвищі)

$$z\in R_t \qquad t=\frac{z}{2}\exp[i\xi]$$

$$1)\ \xi=-\pi-i|y| \quad 0<|y|<\infty \quad t=\frac{z}{2}\exp[i(-\pi-i|y|)]=\frac{z}{2}\exp[-i\pi]\exp[|y|]$$

$$2)\ \xi=x \quad -\pi<x<\pi \quad t=\frac{z}{2}\exp[ix]$$

$$3)\ \xi=\pi\text{-}i|y| \quad t=-\frac{z}{2}\exp[|y|]$$



$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int\limits_C \frac{dt}{t^{\nu+1}} \exp\left[t - \frac{z^2}{4t}\right]; \quad \omega = \frac{2t}{z}; \quad t = \frac{z}{2}\omega; \quad dt = \frac{z}{2}d\omega; \quad t^{\nu+1} = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1}\omega^{\nu+1}$$

$$t - \frac{z^2}{4t} = \frac{z\omega}{2} - \frac{2z^2}{4z\omega} = \frac{z}{2}(\omega - \frac{1}{\omega})$$

*14. Циліндричні функції у випадку, коли незалежна змінна прямує до нуля або до нескінченності. Метод перевалу. Приклади.

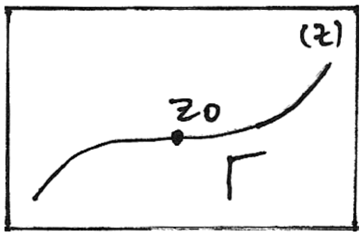
<u>Лема</u> (метод перевалу)

$$I(x)=\int_\Gamma \phi(z)\exp[xf(z)]dz \approx \phi(z_0)\exp[xf(z_0)]*\sqrt{\frac{-2\pi}{xf''(z_0)}}\ ;\ x\to\infty;\ f'(z_0)=0$$

$\phi(z),\ f(z)\in A(D), \Gamma\subset D, z_0\in D$ (асимптотичне наближення)

◄

$$f(z)=f(z_0)+\frac{1}{2}f''(z_0)*(z-z_0)^2;\ f(z)=u+iw,\ w=0$$



$$I(x)=\int_\Gamma \phi(z)\exp[xf(z)]dz \cong \phi(z_0)\exp[xf(z_0)];$$

$$S^2=-\frac{1}{2}f''(z_0)*(z-z_0)^2,\ S=\sqrt{-\frac{f''(z)}{2}}(z-z_0)\in\Re$$

$$\int\exp\left[x\frac{1}{2}f''(z_0)*(z-z_0)^2\right]dz=\phi(z_0)\exp[xf(z_0)]*\int\exp[-xs^2]ds\sqrt{\frac{-2}{f''(z_0)}}$$

►

Візьми як приклад з доведення наступної теореми

<u>Т.1</u> (Аксіоматичні формули для x>>0, при x->∞)

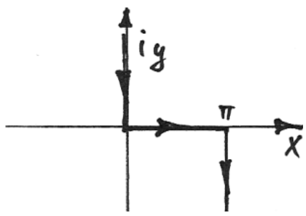
$$I_\nu(x)\cong\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right);\quad Y_\nu\cong\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right);$$

$$H_\nu^{(1)}(x)\cong\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left[i\left(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right];\quad H_\nu^{(2)}(x)\cong\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left[-i\left(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

◄Розглянемо $H_\nu^{(1)}(x)\cong\frac{1}{\pi}\int_{C1}\exp[ix\sin\xi-i\nu\xi]d\xi.\ \phi(\xi)=\frac{1}{\pi}$

Запишемо цю ф-ю показниковим чином: $f(\xi)=i\sin\xi-i\frac{\nu}{x}\xi$

$$f'(\xi)=i\left(\cos\xi-\frac{\nu}{x}\right);\ f''(\xi)=-i\sin\xi;\quad \xi_0:\ f'(\xi)=i\left(\cos\xi_0-\frac{\nu}{x}\right)=0$$



Розглянемо випадок x>>v |-> $\xi_0=\frac{\pi}{2}$:

$f(\xi_0)=i(1-\frac{\nu}{x}\frac{\pi}{2})$; $f''(\xi_0)=-i$. Після застос. леми

$$H_\nu^{(1)} \cong \frac{1}{\pi}\exp\left[i(x-\nu\frac{\pi}{2})\right]\sqrt{\frac{2\pi}{ix}}=\exp\left[i(x-\nu\frac{\pi}{2})\right]\sqrt{\frac{2}{ix\pi}}=\left|\sqrt{\frac{1}{i}}=\exp\left[-i\frac{\pi}{4}\right]\right|=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left[-i(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})\right]$$

Всі інші доводяться на основі вираження одних ф-й через інші.►

Т.2 (про нулі) : $I_\nu(x)=0,\_\_\_, x_k^{(\nu)}=\pi k+\nu\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}, k=1,2,...$

◄

$$I_\nu(x)\cong\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=0;\_\_\_; x_k-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\pi k+\frac{\pi}{2};\_\_\_; x_k^{(\nu)}=\pi k+\nu\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}$$

►

Т.3 При x->+0, v>0 $|I_\nu(x)|<+\infty; |Y_\nu(x)|, |H_\nu^{(1)}|, |H_\nu^{(2)}|\to+\infty$

◄ $Z_\nu(x)=\int\exp[ix\sin\xi-i\nu\xi]d\xi$ Всі ці функції записуються одним і тим же інтегральним виразом по різних контурах. (контури див біл.13). Їх можна представити у вигляді лін. комб. таких інтегралів:

$$\left|\int_0^{i\infty}\exp[ix\sin\xi-i\nu\xi]d\xi\right|=\left|\begin{matrix}\xi=iy, y>0\\ \sin(iy)=ish(y)\end{matrix}\right|=\left|\int_0^{\infty}\exp[\nu y-xsh(y)]dy\right|;$$

$$\left|\int_0^{\pm\pi}\exp[ix\sin\xi-i\nu\xi]d\xi\right|\le\int_0^{\pi}\left|\exp[i(x\sin\xi-\nu\xi)]\right|d\xi\le\pi;$$

$$\left|\int_{\pm\pi}^{-i\infty\pm\pi}\exp[ix\sin\xi-i\nu\xi]d\xi\right|=\left|\begin{matrix}\xi=-iy\pm\pi,\\ \sin(-iy\pm\pi)=ish(y)\end{matrix}\right|=\left|\int_0^{\infty}\exp[-\nu y-xsh(y)]dy\right|<+\infty$$

З отриманих результатів видно: інт-ли по контуру у верх. пів-пл-ні розбіжні, а у ниж, і на дійсній прямій збіж. З огляду на контури робимо висновок $|I_\nu(x)|<+\infty; |Y_\nu(x)|, |H_\nu^{(1)}|, |H_\nu^{(2)}|\to+\infty$. Більш точно

$$I_\nu(x)\approx\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu; при\,\nu>0\quad I_0(x)\approx1;\quad H_\nu^{(1)}(x)\cong-i\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu; при\,\nu>0\quad H_0^{(1)}=-i\frac{2}{\pi}\ln(\frac{2}{x})$$

$$H_\nu^{(2)}(x)\cong-H_\nu^{(1)}(x);\quad Y_\nu(x)=-iH_\nu^{(1)}(x)$$

15. Диференціальне рівняння для циліндричних функцій. Ортогональність і повнота системи циліндричних функцій на відрізку. Ряди Фур'є-Бесселя.

Теорема: Введемо функцію $Z_\nu(\lambda\rho)=\omega(\rho)$, яка є роз'язком такого рівняння $\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\omega}{d\rho}\right)+\left(\lambda^2-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)\omega=0$. Це і буде диф. рівняння для сфер.ф-й.

Доведення:

Було доведено, що $\Delta\left(Z_\nu(\lambda\rho)e^{i\nu\rho}e^{\lambda z}\right)=0$. Звідси:

$$\Delta V=\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]Z_\nu(\lambda\rho)e^{i\nu\rho}e^{\lambda z}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{\partial Z_\nu(\lambda\rho)}{\partial\rho}\right)+\left(\lambda^2-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)Z_\nu(\lambda\rho)\right)e^{i\nu\varphi}e^{\lambda z}=0$$

при всіх ρ,ν,z, а це коли дужки обертаються в нуль.Теорему доведено. ■

Таким чином, будь-яка циліндрична функція є розв'язком такого рівняння: $Z_\nu(\lambda\rho)=EJ_\nu(\lambda\rho)+FY_\nu(\lambda\rho)=E'H_\nu^{(1)}(\lambda\rho)+F'H_\nu^{(2)}(\lambda\rho)$.

Ф-ї будуть лінійно незалежні, якщо:

$W(J_\nu,Y_\nu)=J_\nu\frac{\partial}{\partial\rho}Y_\nu-Y_\nu\frac{\partial}{\partial\rho}J_\nu!=0$.

Введемо оператор диференціювання: : $L_\nu=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{\nu^2}{\rho^2}$

Тоді, попереднє рівняння можемо переписати,як:

$L_\nu\omega=\lambda^2\omega$, $\alpha<\rho<\beta$. Накладемо умови:

$\alpha\omega(a)+\beta\omega'(a)=0;\gamma\omega(a)+\delta\omega'(a)=0$, причому

$\alpha^2+\beta^2>0;\gamma^2+\delta^2>0$.Тоді, маємо задачу ШЛ :

Теорема: Розв'язок такої ЗШЛ є сукупністю циліндричних функцій: $Z_\nu\left(\lambda_n^{(\nu)}\rho\right)=\omega_n(\rho)$, n=1,2,… ,

причому система таких функцій $\omega_n(\rho)$ повна і ортогональна, тобто $\int_a^b \omega_n(\rho)\omega_m(\rho)\rho d\rho = \delta_{nm} d^2\left(\lambda_n^{(\nu)}, a, b\right)$, де

$$d^2\left(\lambda_n^{(\nu)}, a, b\right) = \frac{\rho}{2\lambda_1} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial\lambda_n}\omega_n(\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}\omega_n(\rho) - \omega_n(\rho)\frac{\partial^2}{\partial\lambda_n\partial\rho}\omega_n(\rho)\right]_{\rho=a}^{\rho=b}$$

- нормувальний множник.

Доведення:

$L\omega_n = \lambda_n{}^2\omega_n \mid \times\omega_m\rho$ (1); $L\omega_m = \lambda_m{}^2\omega_m \mid \times\omega_n\rho$ (2);

домножимо кожне з рівнянь на відповідний множник, і віднімемо друге від першого. Результат про інтегруємо від a до b:

$$\left(\lambda_n^2 - \lambda_m^2\right)\int_a^b \omega_n\omega_m\rho d\rho = \int_a^b \rho(\omega_m L\omega_n - \omega_n L\omega_m) d\rho = \int_a^b \left[\omega_n \frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\omega_m}{d\rho}\right) - \omega_m \frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\omega_n}{d\rho}\right)\right] d\rho =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{d\rho}\left[\omega_n\left(\rho\frac{d\omega_m}{d\rho}\right) - \omega_m\left(\rho\frac{d\omega_n}{d\rho}\right)\right] d\rho = \rho\left[\omega_n\frac{d\omega_m}{d\rho} - \omega_m\frac{d\omega_n}{d\rho}\right]_{\rho=a}^{\rho=b}.$$

Таким чином:

$$\int_a^b \omega_n\omega_m\rho d\rho = \frac{\rho}{\left(\lambda_n^2 - \lambda_m^2\right)}\left[\omega_n\frac{d\omega_m}{d\rho} - \omega_m\frac{d\omega_n}{d\rho}\right]_{\rho=a}^{\rho=b}$$, що і треба було довести.

Розглянемо випадок $\lambda_n \neq \lambda_m$. Мають виконуватися граничні умови:

$\alpha\omega_n(a) + \beta\omega_n'(a) = 0; \alpha\omega_m(a) + \beta\omega_m'(a) = 0$, причому $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

Система не може мати тривіального розв'язку відносно α, β ,оскільки $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, а це може виконуватися лише при:

$$\begin{vmatrix} \omega_n(a) & \omega_n'(a) \\ \omega_m(a) & \omega_m'(a) \end{vmatrix} = \omega_n(a)\omega_m'(a) - \omega_m(a)\omega_n'(a) = 0.$$

Аналогічно доводиться тотожність для b. Таким чином:

$$\int_a^b \omega_n \omega_m \rho d\rho = 0.$$

Розглянемо інший випадок $\lambda_n = \lambda_m$.

$$\int_a^b {\omega_m}^2 \rho d\rho = \lim_{\lambda_n \to \lambda_m} \frac{\rho}{\left(\lambda_n^2 - \lambda_m^2\right)} \left[\omega_n \frac{d\omega_m}{d\rho} - \omega_m \frac{d\omega_n}{d\rho} \right]_{\rho=a}^{\rho=b} = \begin{vmatrix} Обчислимо\_границю \\ за\_правилом\_Лопіталя \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\rho}{2\lambda_m} \cdot \left[\frac{\partial \omega_m}{\partial \lambda_m} \frac{\partial \omega_m}{\partial \rho} - \omega_m \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial \lambda_m \partial \rho} \right]_{\rho=a}^{\rho=b} = d^2(\lambda_m)$$

Теорему доведено. ■

Наслідок:

Нехай $f(\rho) \in L^2(\rho, [a,b])$; $\int_a^b f^2(\rho)\rho d\rho < +\infty$. Нехай також $u_n = Z_\nu\left(k_n^{(\nu)}\rho\right)$.

Таку функцію можна розкласти в ряд Фур’є. $f(\rho) \cong \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(\rho)$

-- розклад в ряд Фур’є по циліндричним функціям. Такі ряди називаються рядами Фур’є - Бесселя.

Тоді $f_n = \int_a^b f(\rho) u_n(\rho) \rho d\rho = \frac{1}{\|Z_0\|^2} \int_a^b f(\rho) Z_\nu\left(k_n^{(\nu)}\rho\right) \rho d\rho$ -- коефіцієнти Фур’є.

***16. Загальний вигляд розв'язку рівняння Лапласа в циліндричних координатах.**

Рівняння Лапласа має вигляд: $\Delta u(\rho,\varphi,z)=0$, де ρ,φ,z– циліндричні координати.
Розв*язок такого рівняння шукатимемо у вигляді:
$v(\rho,\varphi,z)=G(z)\Phi(\varphi)R(\rho)$.
В циліндричних координатах оператор Лапласа має вигляд:

$$\Delta=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Оскільки $x=\rho\cdot\cos\varphi\,,y=\rho\cdot\sin\varphi\,,z=z$, а оператор Лапласа в декартових координатах має вигляд:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Тому для циліндричних координат отримаємо:

$$\Delta v(\rho,\varphi,z)=\left(\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)G(z)\Phi(\varphi)R(\rho)=0$$

Після виконання всіх диф. Операцій, отримаємо:

$$\Delta v(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{R(\rho)}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right)+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\cdot\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+\frac{1}{G(z)}\cdot\frac{d^2G(z)}{dz^2}=0$$

В останньому рівнянні частинні похідні замінено на повні, оскільки, функції $G(z),\Phi(\varphi),R(\rho)$ - залежать лише від тих змінних, по яких диференціюємо.

$$\frac{1}{G(z)}\cdot\frac{d^2G(z)}{dz^2}=-\left\{\frac{1}{\Phi(\varphi)}\cdot\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+\frac{1}{R(\rho)}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right)\right\}=\lambda^2$$

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)}\cdot\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=-\left\{\rho^2\lambda^2+\frac{1}{R(\rho)}\cdot\rho\cdot\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right)\right\}=-\nu^2$$

$$\frac{1}{R(\rho)}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right)=\frac{\nu^2}{\rho^2}-\lambda^2$$

Таким чином ми відокремили змінні і отримали три незалежні рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2G(z)}{dz^2} - \lambda^2 G(z) = 0 \\ \dfrac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + \nu^2\Phi(\varphi) = 0 \\ \dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{dR(\rho)}{d\rho}\right) + \left(\lambda^2 - \dfrac{\nu^2}{\rho^2}\right)R(\rho) = 0 \end{cases}$$

Два перших рівняння – диференціальні рівняння другого порядку, розвязками яких очевидно є:

$$G(z) = A_\lambda e^{\lambda z} + B_\lambda e^{-\lambda z} = A_\lambda^{'} sh(\lambda z) + B_\lambda^{'} ch(\lambda z)$$
$$= A_\lambda^{''} sh(\lambda z) + B_\lambda^{''} sh(\lambda(l - z))$$
$$\Phi(\varphi) = C_\nu \cos(\nu\varphi) + D_\nu \sin(\nu\varphi)$$

Останнє рівняння системи – рівняння Бесселя, розв’язком якого є:

$$R(\rho) = E_{\lambda\nu} J_\nu(\lambda\rho) + F_{\lambda\nu} Y_\nu(\lambda\rho) = E_{\lambda\nu}^{'} H_\nu^{(1)}(\lambda\rho) + F_{\lambda\nu}^{'} H_\nu^{(2)}(\lambda\rho)$$

Де $J_\nu(\lambda\rho)$ - функція Бесселя, $Y_\nu(\lambda\rho)$ - функція Неймана, $H_\nu^{(1)}(\lambda\rho)$ і $H_\nu^{(2)}(\lambda\rho)$ - функції Ганкеля першого та другого роду.

Отже загальний розвязок рівняння Лапласа в циліндричних координатах має вигляд:

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_\lambda \sum_\nu \left[A_\lambda e^{\lambda z} + B_\lambda e^{-\lambda z}\right] \cdot \left[C_\nu \cos(\nu\varphi) + D_\nu \sin(\nu\varphi)\right]$$
$$\cdot \left[E_{\lambda\nu} J_\nu(\lambda\rho) + F_{\lambda\nu} Y_\nu(\lambda\rho)\right]$$

Де $A_\lambda, B_\lambda, C_\nu,\ D_\nu, E_{\lambda\nu}, F_{\lambda\nu}$– коефіцієнти, які можна знайти з граничних умов.

Рівняння Лапласа разом з граничними умовами для функції u називається задачею Діріхлє, з цієї задачі і визначається вигляд коефіцієнтів загального розвязку рівняння Лапласа.

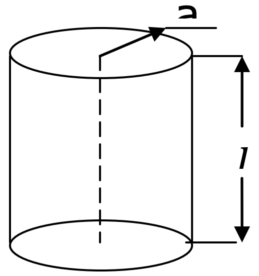
*17. Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в циліндрі методом відокремлення змінних. Приклад.

Рівняння Лапласа разом з граничними умовами для функції u називається задачею Діріхлє.

Рівняння Лапласа в області D має вигляд:

$\Delta u(\rho,\varphi,z)=0$, де ρ,φ,z– циліндричні координати.

$$\left.\begin{aligned} u(\rho,\varphi,0) &= f_1(\rho,\varphi) \\ u(\rho,\varphi,l) &= f_2(\rho,\varphi) \\ u(\mathrm{a},\varphi,z) &= f_3(\varphi,z) \end{aligned}\right\} \text{– межові умови.}$$



Область D:

$$\mathrm{D}=\{\rho,\varphi,z|0<\mathrm{\rho}<\mathrm{a};0\le\mathrm{\varphi}\le 2\mathrm{\pi};0<\mathrm{z}<\mathrm{l}\}$$

Загальний розвязок рівняння Лапласа в циліндричних координатах має вигляд:

$$u(\rho,\varphi,z)=\sum_{\lambda}\sum_{\nu}\left[A_\lambda e^{\lambda z}+B_\lambda e^{-\lambda z}\right]\cdot\left[C_\nu\cos(\nu\varphi)+D_\nu\sin(\nu\varphi)\right]\cdot\left[E_{\lambda\nu}J_\nu(\lambda\rho)+F_{\lambda\nu}Y_\nu(\lambda\rho)\right]$$

Коефіцієнт $F_{\lambda\nu}=0$ оскільки функція Неймана $Y_\nu(\lambda\rho)\to\infty$, коли $\rho\to 0$.

Очевидно, що якщо азимутальний кут $0\le\mathrm{\varphi}\le 2\mathrm{\pi}$, то $u(\rho,\varphi,z)=u(\rho,\varphi+2\mathrm{\pi k},z)$, де k – ціле число, звідки висновок, що $\nu=n$ - натуральне число. Отже розвязок будемо шукати в такому вигляді.

$$u(\rho,\varphi,z)=\sum_{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{\lambda n}e^{\lambda z}+B_{\lambda n}e^{-\lambda z}\right]\cdot\left[C_n\cos(n\varphi)+D_n\sin(n\varphi)\right]\cdot J_n(\lambda\rho)$$

$u(\rho,\varphi,z)=u^I+u^{II}+u^{III}$, де u^I - розвязок рівняння Лапласа на нижній основі циліндра, u^{II} - на верхній основі циліндра, u^{III} – на бічній грані.

$\underline{\Delta u^{I}(\rho,\varphi,z)=0}$

$u(\rho,\varphi,0)=f_1(\rho,\varphi)$

$u(\rho,\varphi,l)=0$

$u(a,\varphi,z)=0$

$=>\boxed{J_n(\lambda a)=0}$

$$u^{I}(\rho,\varphi,z)=\sum_{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty} sh(\lambda(l-z))\cdot[C_n\cos(n\varphi)+D_n\sin(n\varphi)]\cdot J_n(\lambda\rho)$$

Оскільки $J_n(\lambda a)=0 => \lambda_k^{(n)}=\frac{x_k^{(n)}}{a}$, де k - натуральне число.

$$u^{I}(\rho,\varphi,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} sh\left(\frac{x_k^{(n)}}{a}(l-z)\right)\cdot[C_{nk}\cos(n\varphi)+D_{nk}\sin(n\varphi)]\cdot J_n\left(\frac{x_k^{(n)}}{a}\rho\right)$$

Покладемо z=0:

$$f_1(\rho,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} sh\left(\frac{x_k^{(n)}}{a}l\right)\cdot[C_{nk}\cos(n\varphi)+D_{nk}\sin(n\varphi)]\cdot J_n\left(\frac{x_k^{(n)}}{a}\rho\right)$$

$$C_{nk}=\frac{1}{sh\left(\frac{x_k^{(n)}}{a}\rho\right)\pi(1+\delta_{nv})d^2(\frac{x_k^{(n)}}{a})}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\rho d\rho\, f_1(\rho,\varphi)\cos(n\varphi)J_n\left(\frac{x_k^{(n)}}{a}\rho\right)$$

$$D_{nk}=\frac{1}{sh\left(\frac{x_k^{(n)}}{a}\rho\right)\pi d^2(\frac{x_k^{(n)}}{a})}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\rho d\rho\, f_1(\rho,\varphi)\sin(n\varphi)J_n\left(\frac{x_k^{(n)}}{a}\rho\right)$$

Де $d^2\left(\frac{x_k^{(n)}}{a}\right)$ - нормуючий коефіцієнт

$\underline{\Delta u^{II}(\rho,\varphi,z)=0}$

$u(\rho,\varphi,0)=0$

$u(\rho,\varphi,l)=f_2(\rho,\varphi)$

$u(a,\varphi,z)=0$

$$u^{II}(\rho,\varphi,z)=u^{I}(\rho,\varphi,l-z)$$

Те саме, що і в першому випадку тільки $z\to(l-z)$,$f_1\to\ f_2$

$$\underline{\Delta u^{III}(\rho,\varphi,z)=0}$$

$u(\rho,\varphi,0)=0$

$u(\rho,\varphi,l)=0$

$u(a,\varphi,z)=f_3(\varphi,z)$

$$u^{III}(\rho,\varphi,z)=\sum_{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}sh(\lambda z)\cdot[C_n\cos(n\varphi)+D_n\sin(n\varphi)]\cdot J_n(\lambda\rho)$$

$\lambda=i\mu$, $\mu\epsilon\mathbb{R}$

$$sh(i\mu z)=isin(\mu z)$$

$J_n(i\mu\rho)=i^nI_n(\mu\rho)$, де$I_n(\mu\rho)$ – модифікована функція Бесселя, яка поводить себе як ch, в той час як ф-ція Бесселя поводить себе як cos.

$$u^{III}(\rho,\varphi,z)=\sum_{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}sin(\mu z)\cdot\left[C_n^{'}\cos(n\varphi)+D_n^{'}\sin(n\varphi)\right]\cdot I_n(\mu\rho)$$

$$sin(\mu l)=0\ \ =>\mu l=m\pi,\qquad m\epsilon\mathbb{N}$$

$$\mu_m=\frac{m\pi}{l}$$

$$u^{III}(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}sin(\mu_m z)\cdot\left[C_n^{'}\cos(n\varphi)+D_n^{'}\sin(n\varphi)\right]\cdot I_n(\mu_m\rho)$$

Підставляючи граничні умови:

$$f_3(\varphi,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}sin(\mu_m z)\cdot\left[C_n^{'}\cos(n\varphi)+D_n^{'}\sin(n\varphi)\right]\cdot I_n(\mu_m a)$$

$$C_n^{'}=\frac{2}{I_n(\mu_m a)l\pi(1+\delta_{n\nu})}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^l dz\,f_3(\rho,\varphi)\cos(n\varphi)\,sin(\mu_m z)$$

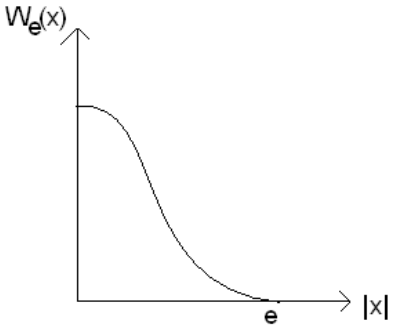
$$D_n^{'}=\frac{2}{I_n(\mu_m a)l\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^l dz\,f_3(\rho,\varphi)\sin(n\varphi)\,sin(\mu_m z)$$

***18. Означення узагальнених функцій. Основні функції та їх властивості. Ядро осереднення. Означення та приклади регулярних та сингулярних узагальнених функцій.**

Озн: функцією f називається відображення X на множину Y
f: X→Y; y=y(x) x є X, y є Y
Озн: узагальненою функцією називається довільний лінійний неперервний функціонал на множині **основних функцій** Ф(x)
f: D→R(або Ȼ)
це означає що φ (x) є D→(f, φ) є (або Ȼ)
Озн: функція φ(x) є основною, якщо :
1) φ (x) є $C^{\infty}(R^n)$ 2) φ (x)=0 коли x $\overline{є}$ U (0, R)
Приклад
Ядро усереднення(«шапочка»)

$$w_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon \exp\left(-\dfrac{\varepsilon^R}{\varepsilon^R - |x|^R}\right), & |x| \le \varepsilon \\ 0, & |x| \ge \varepsilon \end{cases}$$

Константу обирають за умови $\int_{R^d} w_\varepsilon(x)\, dx = 1$



На основі $w_\varepsilon(x)$ можна створити безліч основних функцій.
На основі g(x) є L^m . Побудуємо функцію $g(x)_\varepsilon$ таку, що
$g(x)_\varepsilon = \int_{R^d} g(y) w_\varepsilon(x+y) dx$
$g(x)_\varepsilon$-основна функція.
Множина основних функцій позначається D. Множина узагальнених функцій позначається D'.
Якщо f- узагальнена функція, то вона має такі властивості:
1) f-функціонал f: φ (x) →R(або Ȼ)
2)лінійність (f, $\sum_k c_k \varphi_k$)= $\sum_k c_k$ (f, φ_k)
3) неперервність $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x)$= φ (x),=> $\lim_{k\to\infty}(f, \varphi_k)$= (f, φ)
Нехай f(x) є L –локально-інтегровна функція. Тоді їй у відповідність можна поставити функціонал

f(x): φ (x) →(f, φ)=$\int_{R^d} f(x)\,\varphi(x)dx$ Такі функції наз. регулярними
R′-множина регулярних функцій.
Крім регулярних існують сингулярні функції, їм не можна поставити у відповідність інтеграл, проте можна поставити у відповідність функціонал. Прикладом є δ-функція Дірака.
δ: φ (x) →(δ, φ)= φ (0)
S′-множина сингулярних функцій.
D′=R′ ∪ S′
Наведемо ще приклади сингулярних функцій:

$$P\frac{1}{x}: \qquad \varphi(x) \to \left(P\frac{1}{x},\varphi\right) = Vp\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}dx$$

***19. Диференціювання узагальнених функцій. Приклади.**

Нехай $x \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{R}' - \text{звичайна функція},\ f(x) \in C^p$ – неперервна p разів диференційована

$$f: \varphi(x) \to (f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

$$f^k: \varphi(x) \to (f^k, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k)}(x)\varphi(x)dx =$$

$$= f^{(k)}(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty - \text{тут функція}=0}^{+\infty - \text{тут функція}=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k-1)}(x)\varphi^{(1)}(x)dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k-1)}(x)\varphi^{(1)}(x)dx = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi^{(k)}(x)dx =$$

$= (-1)^k\left(f, \varphi^{(k)}\right) \Rightarrow f^k: (f^k, \varphi) \to (-1)^k\left(f, \varphi^{(k)}\right)$ – означення k-ї похідної регулярної функції на мові узагальнених функцій

<u>Озн.</u>$F \in D'$; $\boxed{f^k: (f^k, \varphi) := (-1)^k\left(f, \varphi^{(k)}\right)}$ - для всіх сингулярних функцій визначаємо похідні таким чином. Якщо визначити $\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{\alpha_1}\partial^{\alpha_2}\dots\partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}} f(x), \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Для функції багатьох незалежних змінних:

$$\boxed{\partial^\alpha f: (\partial^\alpha f, \varphi) := (-1)^{|\alpha|}(f, \partial^\alpha \varphi)}$$

Приклади:

$$\delta': (\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0)$$
$$\delta^{(k)}: \left(\delta^{(k)}, \varphi\right) = (-1)^k\left(\delta, \varphi^{(k)}\right) = (-1)^k\varphi^{(k)}(0)$$

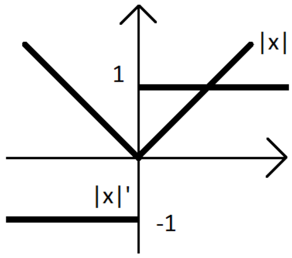
$\theta'(x) = \delta(x)$ - формула Хевісайда

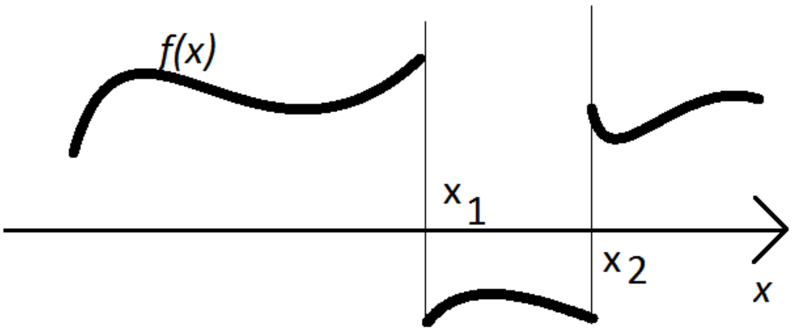
$$\theta': (\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\varphi'(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx =$$

$$= -\varphi(\infty)_{(=0\ \forall\ \text{основної функції})} + \varphi(0) = \varphi(0) = (\delta, \varphi)$$
$$\Rightarrow$$

$\Rightarrow (\theta', \varphi) = (\delta, \varphi)\ \forall \varphi \in D$. *Отже,* $\theta'(x) = \delta(x)$

$|x|' = 2\theta(x) - 1, |x|'' = 2\delta(x)$





Нехай x – незалежна змінна на числовій прямій

$$[f]_{x_k} = f(x_k + 0) - f(x_k - 0)$$

$f'(x) = \{f'\}$– класична похідна в тих точках,де функція диференційовна $+ \sum_k [f]_{x_k} \delta(x - x_k)$

– узагальнення формул 3 і 4

*20. Заміна змінних в узагальнених функціях. Приклади. Множення узагальнених функцій на основну функцію. Приклади.

Множення узагальнених функцій на основну функцію. Приклади.

1. Множення узагальненої функції $\mathrm{f} \in \mathrm{D}'$ на основну функцію $\mathrm{a} \in \mathrm{D}$

Візьмемо $f \in \mathbb{R}'$ – звичайна функція

$$a(x)f(x)\colon (af,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x)f(x)\varphi(x)dx = (f, a\varphi)$$

Тобто для регулярних узагальнених функцій справедлива формула

$$(af,\varphi) = (f, a\varphi)$$

Для сингулярних функцій визначаємо:

$$\boxed{(af,\varphi) \coloneqq (f, a\varphi)}$$

<u>Приклад: $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x), \forall a \in D$</u>

$$a(x)\delta(x)\colon (a\delta,\varphi) = (\delta, a\varphi) = a(0)\varphi(0) = a(0)(\delta,\varphi) = (a(0)\delta,\varphi), \forall \varphi \in D$$

2. Заміна змінних.

$$x \in \mathbb{R}^n, y(x) \in \mathbb{R}^n, \text{Модуль якобіана } |\mathcal{J}| = \left|\frac{dy}{dx}\right| > 0$$

Нехай $f \in \mathbb{R}'$ – звичайна функція. $f\big(y(x)\big)\colon \Big(f\big(y(x)\big), \varphi(x)\Big) =$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y(x))\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(x(y))\left|\frac{dx}{dy}\right| dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}\varphi(x(y))dy = (\frac{f(y)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}, \varphi\big(x(y)\big))$$

Постулюємо для всіх $f \in \mathrm{D}'$:

$$\boxed{\Big(f\big(y(x)\big), \varphi(x)\Big) \coloneqq (f(y)/\left|\frac{dy}{dx}\right|, \varphi\big(x(y)\big))}$$

<u>Приклади:</u>

Нехай $y = x + a$ (x та y – точки n-вимірного простору (вектори), a – сталий вектор):

$$\big(f(x+a), \varphi(x)\big) = (f(y), \varphi(y-a))$$

Нехай $y = Ax$, A – лінійне перетворення:

$$\big(f(Ax),\varphi(x)\big)=(\frac{f(y)}{|A|},\varphi(A^{-1}y))$$

Нехай $y=cx$, c – число, $f\in\mathbb{R}$, $x,y\in\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$

$$\big(f(cx),\varphi(x)\big)=\frac{1}{|c|^n}(f(y),\varphi\left(\frac{y}{c}\right))$$

Нехай, наприклад, $f=\delta$, тоді:

$$\big(\delta(cx),\varphi(x)\big)=\frac{1}{|c|^n}\left(\delta(y),\varphi\left(\frac{y}{c}\right)\right)$$

Покладемо $c\coloneqq -1$:

$$\big(\delta(-x),\varphi(x)\big)=\big(\delta(y),\varphi(-y)\big)$$

$$\delta\big(y(x)\big)\colon\big(\delta(y(x)),\varphi(x)\big)=\left(\delta(y)/\left|\frac{dy}{dx}\right|,\varphi\big(x(y)\big)\right)=$$

$$=\sum_{x_k:y(x_k)=0}\frac{\delta(x-x_k)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_k}}$$

Нехай $y=x^2-a^2=(x-a)(x+a)$

$$\delta(x^2-a^2)\colon\big(\delta(x^2-a^2),\varphi(x)\big)=\left(\delta(y)/\left|\frac{dy}{dx}\right|,\varphi\big(x(y)\big)\right)=$$

$$=\sum_{a_+,a_-}(\frac{\delta(x-a)}{2a}+\frac{\delta(x+a)}{2a},\varphi(x))\,\forall\varphi\in D\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2a}\big(\delta(x-a)+\delta(x+a)\big)$$

***21. Згортка та перетворення Фур'є узагальнених функцій. Приклади.**

Нехай φ(x) ψ(x) єD;

Двом цим функціям співставляється 1 функція:

$$(\varphi * \psi)(x) = \int\limits_{R^n} \varphi(x-y)\psi(y)dy$$

Цей інтеграл завжди існує для основних функцій

Якщо f(x), g(x) єR[f (або g) є фінітна], то:

$$(f * g)(x) = \int\limits_{R^n} f(x-y)g(y)dy$$

<u>*Властивості:*</u>

1) $(\varphi * \psi)(x) = (\psi * \varphi)(x)$

2) $\partial^\alpha(\varphi * \psi)(x) = (\partial^\alpha \varphi * \psi)(x) = (\varphi * \partial^\alpha \psi)(x)$

Доведення

1) $(\varphi * \psi)(x) = \int \varphi(x-y)\psi(y)dy = [x-y=y'] = \int \psi(x-y')\varphi(y')dy' = (\psi * \varphi)(x)$

2)

$$\partial^\alpha(\varphi * \psi)(x) = \partial^\alpha \int \varphi(x-y)\psi(y)dy = \int \partial^\alpha \varphi(x-y)\psi(y)dy = (\partial^\alpha \varphi * \psi)(x)$$

(f*g)(x): <u>(f*g; φ)</u>=

$$\int (f*g)(x)\varphi(x)dx = \int dx[\int f(x-y)g(y)dy]\varphi(x) = [x-y=x'] = \int dx' \int dy f(x')g(y)\varphi(x'+y) =$$

$$= [x' := x] = \int dx \int dy f(x)g(y)\varphi(x+y) = \underline{(f(x)g(y), \varphi(x+y))}$$

Нехай f, g є D′:

(f*g)(x,y): (f*g, φ) = (f(x)g(y), φ(x+y)), для будь-якої φ єD′.

Пр:

f єD′ (f*δ, φ) = (f(x)δ(y), φ(x+y)) = (f(x), (δ(y),φ(x+y))) =
[δ(y),φ(y) = φ(0);δ(y),φ(x+y) = φ(x)] = (f(x), φ(x)) = (f, φ).

<u>f*δ = f</u>

Перетворення Фур'є:

Нехай φ(x) єD;

$$\tilde{\varphi}(\xi) = F[\varphi](\xi) = \int_{R^n} \varphi(x) e^{i(x,\xi)} dx$$

Зворотне перетворення

$$\varphi(x) = F^{-1}[\tilde{\varphi}](x) = \int_{R^n} \tilde{\varphi}(\xi) e^{-i(x,\xi)} \frac{d\xi}{(2\pi)^n}$$

$$F^{-1}[\tilde{\varphi}](x) = \frac{F[\varphi](-x)}{(2\pi)^n}$$

Властивості:

1) $\partial^\alpha F[\varphi](\xi) = F[(ix)^\alpha \varphi](\xi)$

2) $F[\partial^\alpha \varphi](\xi) = (-i\xi)^\alpha F[\varphi](\xi)$

3) $F[\varphi * \psi](\xi) = F[\varphi](\xi) F[\psi](\xi)$

Доведення:

3)

$$F[\varphi * \psi](\xi) = \int (\varphi * \psi)(x) e^{i(x,\xi)} dx = \int dx [\int \varphi(x-y)\psi(y) dy] e^{i(x,\xi)} = [x - y = x'] =$$

$$= \int dx' \varphi(x') e^{i(x,\xi)} \int dy \psi(y) e^{i(y,\xi)} = F[\varphi](\xi) F[\psi](\xi) \quad .$$

Означення:

φ(x) є $S(R^n)$, якщо

1)φ(x) є C^∞ (R^n)

2)при |x|→ ∞ φ(x) і її похідні будь-якого порядку → 0 швидше ніж будь-яка степінь |x|.

$$\sup_{x \epsilon R^n} | x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) | < +\infty$$

, при будь-яких β,α.

Простір Шварца є інваріантом відносно перетворення Фур'є.

F(S) = S

Якщо $\sup_{x \epsilon R^n} | x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) | < +\infty \Leftrightarrow \sup_{\xi \epsilon R^n} | \xi^\alpha \partial^\beta \tilde{\varphi}(\xi) | < +\infty$

Доведення:

$$|\xi^{\alpha}\partial^{\beta}F[\varphi](\xi)|=|F[\partial^{\alpha}(x^{\beta}\varphi)](\xi)|=|\int\partial^{\alpha}(x^{\beta}\varphi(x))e^{i(x,\xi)}dx|\le\int_{R^n}|\partial^{\alpha}(x^{\beta}\varphi)|\,dx<+\infty$$

Означення:
S′ – простір узагальнених функцій є простором лінійних неперервних функціоналів на S.
S′ = R′ ∩S.

(F[f], φ) = (f, F[φ])
Доведення:

$$(\mathrm{F}[\mathrm{f}],\varphi)=\int F[f](\xi)\varphi(\xi)d\xi=\int d\xi\varphi(\xi)[\int dxf(x)e^{i(x,\xi)}]=\int dxf(x)[\int d\xi\varphi(\xi)e^{i(x,\xi)}]=$$

$$=(d(x),F[\varphi](x))=(f,F[\varphi]).$$

Пр:
1)

$$(F[\delta],\varphi)=(\delta,F[\varphi])=F[\varphi](0)=\int_{R^n}\varphi(x)e^{i(x,\xi)}dx\,|_{\xi=0}=\int_{R^n}\varphi(x)dx=(1,\varphi)$$

2)

$$\Theta(x)=\begin{cases}1, & x>=0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

$$F[\theta](\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(x)e^{ix\xi}dx=\int_{0}^{\infty}e^{ix\xi}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{\infty}e^{ix(\xi+i\varepsilon)}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{i}{\xi+i\varepsilon}=\frac{i}{\xi}$$

***22. Означення "дельта"-функції та її фізична інтерпретація. Диференціювання та заміна змінної в "дельта"-функції. Множення "дельта"-функції на основну функцію. Згортка "дельта"-функції з узагальненими функціями. Перетворення Фур'є від "дельта"-функції.**

$$\delta = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

$\int\limits_{R^n} \delta(x)dx = 1$ $\int\limits_{R^n} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$ δ(x)=δ(-x) δ(ax)= δ (x)/a

- диференціювання:[$(\partial^{\alpha} f, \varphi) = (-1)^{\alpha}(f, \partial^{\alpha}\varphi), f \_\epsilon\_ D'$]

1) $(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0)$

2) $(\delta^{(k)}, \varphi) = (-1)^k(\delta, \varphi^{(k)}) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$

3) $(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\varphi'(x) = -\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx = -\varphi(\infty) + \varphi(0) = (\delta, \varphi)$

- множення: [$(af, \varphi) = (f, a\varphi), f \_\epsilon\_ D'$]

1) $(a\delta, \varphi) = (\delta, a\varphi) = a(0)\varphi(0) = a(0)(\delta, \varphi) = (a(0)\delta, \varphi)$

-заміна незалежних змінних:

[$(f(y(x)), \varphi(x)) = (\frac{f(y)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}, \varphi(x(y)), f \_\epsilon\_ D'$]

1) $(\delta(cx), \varphi(x)) = \frac{1}{\left|c^n\right|}(\delta(y), \varphi(\frac{y}{c}))$

Якщо с = -1 $(\delta(-x), \varphi(x)) = (\delta(y), \varphi(-y))$

2) $(\delta(y(x)), \varphi(x)) = (\frac{\delta(y)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}, \varphi(x(y)))$

Якщо y = x^2 - a^2

$$(\delta(x^2-a^2),\varphi(x))=\sum_{a_+,a_-}(\frac{\delta(x-a)}{2a}+\frac{\delta(x+a)}{2a},\varphi(x))$$

-згортка: [$(\varphi*\psi)(x)=\int\limits_{R^n}\varphi(x-y)\psi(y)dy$,φ(x) ψ(x) єD]

1) f єD' (f*δ, φ) = (f(x)δ(y), φ(x+y)) = (f(x), (δ(y),φ(x+y))) = [δ(y),φ(y) = φ(0);δ(y),φ(x+y) = φ(x)] = (f(x), φ(x)) = (f, φ)

-перетворення Фур'є: [$\tilde{\varphi}(\xi)=F[\varphi](\xi)=\int\limits_{R^n}\varphi(x)e^{i(x,\xi)}dx$,

$x,\xi=\sum_{i=1}^{m}x_i\xi_i$]

1) $(F[\delta],\varphi)=(\delta,F[\varphi])=F[\varphi](0)=\int\limits_{R^n}\varphi(x)e^{i(x,\xi)}dx\,|_{\xi=0}=\int\limits_{R^n}\varphi(x)dx=(1,\varphi)$

***23. Означення фундаментального розв'язку лінійного диференціального рівняння. Теорема про існування та єдиність розв'язку лінійного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами.**

Розглянемо лінійний диференціальний оператор: $L(\partial)=\sum\limits_{|\alpha|\le m}C_\alpha\partial^\alpha$,

де C_α-сталі, α=1..n.

Розглянемо рівняння $L(\partial)u(x)=f(x)$.

Узагальненим розв'язком вищенаведеного ЛДР назвемо ф-ю $u(x)\in D'$, яка задовольняє це рівняння в загальному сенсі, тобто для $\forall\ \Phi(x)\in D:(L(\partial)u,\Phi)=(f,\Phi)$.

Серед усіх р-ків є фундаментальний, або *<u>функція впливу</u>* ε .

Def: Фундаментальним розв'язком ε(x) лінійного диф. оператора L() називається функція, що задов. рівнянню:

$L(\partial)\varepsilon=\delta$

Теорема: Нехай $f\in D'$,причому $\varepsilon * f\in D'$, тоді рівняння $L(\partial)u(x)=f(x)$ має розв'язок $u(x)=\varepsilon * f(x)$ і цей розв'язок єдиний для всіх функцій f, для яких існує згортка.

Доведення:

1. Перевіримо і<u>снування</u>:

$$(L(\partial)u,\Phi)=(L(\partial)\varepsilon * f,\Phi)=\sum_{|\alpha|\le m}C_\alpha(\partial^\alpha(\varepsilon * f),\Phi)=$$

$$=\sum_{|\alpha|\le m}C_\alpha(\partial^\alpha(\varepsilon)* f,\Phi)=(L\varepsilon * f,\Phi)=(\delta * f,\Phi)=(f,\Phi)$$

2. <u>Єдиність</u> – доводимо від супротивного. Нехай існують 2 різні функції, що задовольняють даному рівнянню: $u_1:L(\partial)u_1=f$ (1) та $u_2:L(\partial)u_2=f$ (2)

Розглянемо функцію $\omega=u_1-u_2$. Віднімемо (1)-(2):

$L(\partial)u_1-L(\partial)u_2=L\omega=0$ (3)

Маємо:

$$\omega = \omega * \delta = \omega * (L(\partial)\varepsilon) = L(\partial)(\omega * \varepsilon) = (L(\partial)\omega) * \varepsilon = \left|\partial ив(3)\right| = 0$$

(4) Отже $u_1 = u_2$. Теорему доведено.■

Теорема: (без дов.) Для будь-якого лінійного оператора $L(\partial)$ існує фундаментальний розв'язок $\varepsilon \in D'$.

***24. Фундаментальний розв'язок лінійного диференціального рівняння із звичайними похідними. Розв'язок задачі Коші для лінійного диференціального рівняння за допомогою фундаментального розв'зку.**

Розглянемо звичайний лінійний диф. оператор:

$$L(\partial)=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}\frac{d^k}{dt^k}=\left|a_0=1\right|=\frac{d^n}{dt^n}+\frac{a_1 d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\ldots+a_n$$

Теорема: Фундаментальний розв’язок лінійного диф. оператора $L(\partial)$ має вигляд:

$$\varepsilon(t)=\theta(t)T(t)$$, де

$$LT(t)=0; T(0)=T'(0)=\ldots=T^{(n-2)}(0)=0; T^{(n-1)}(0)=1$$ -задача Коші для $T(t)$.

Доведення:

Нехай $\varepsilon(t)=\theta(t)T(t)$. Розглянемо її першу похідну:

$$\varepsilon'(t)=(\theta(t)T(t))'=\theta'(t)T(t)+\theta(t)T'(t)=$$

$$=\delta(t)T(t)+\theta(t)T'(t)=\delta(t)T(0)+\theta(t)T'(t)=\theta(t)T'(t)$$

Таким чином: $\varepsilon^{(n-1)}(t)=\theta(t)T^{(n-1)}(t)$

$$\varepsilon^{(n)}(t)=\theta(t)T^{(n)}(t)+\delta(t)T^{(n-1)}(0)=\theta(t)T^{(n)}(t)+\delta(t)$$

Подієmo оператором L на функцію ε:

$$L\varepsilon(t)=\delta(t)+\theta(t)LT(t)=\delta(t)$$

Отже, ε - фундаментальний розв’язок оператора L. Теорему доведено.■

Нехай маємо лінійне неоднорідне диф. рівняння із звичайними похідними: $L(\partial)u(x)=f(x)$, і ε - його фундаментальний розв’язок. Тоді

$$u(t)=\varepsilon * f=\int\varepsilon(t-s)f(s)ds,$$

якщо f – регулярна узагальнена функція.

Приклади:

1) $L=\frac{d}{dt}+a \rightarrow \varepsilon(t)=\theta(t)e^{-at}$ 2) $L=\frac{d^2}{dt^2}+a^2 \rightarrow \varepsilon(t)=\theta(t)\frac{Sinat}{a}$

***25. Фундаментальний розв'язок рівняннядифузії в n-вимірному просторі. Розв'язок задачі Коші та межових задач з однорідними межовими умовами для рівняння дифузії.**

Рівняння дифузії має вигляд $\mathrm{Lu(x,t)=f(x,t),\ \ x\in R^n,\ \ t\in R}$,
L – оператор дифузії, x - точка в n-вимірному просторі.$\mathrm{L}=\partial_{\mathrm{t}}-\mathrm{a}^2\Delta_{\mathrm{n}}$. Δ_{n} – Оператор Лапласа від n просторових незалежних координат. Слід знати фунд. розв'язок$\varepsilon_n(x,t)$.

$\varepsilon_n(x,t)$*:* $\quad L\varepsilon_n(x,t)=\delta(x)\delta(t)$

Т1. Для оператора дифузії фундаментальний розв'язок має вигляд $\varepsilon_n(x,t)=\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}$

◁Напишемо рівняння дифузії для фундаментального розв'язку:
Діємо $\quad F_{\mathrm{x}}(\xi)\mid(\partial_t-a^2\Delta_n)\varepsilon_n(x,t)=\delta(x,t)=\delta(x)\delta(t)$,
F_{x} – оператор перетворення Фур'є по змінній x. ξ – квадрат евклідової довжини

$F_x[\partial_t\varepsilon_n(x,t)]=\partial_tF_x[\varepsilon_n(x,t)]$

$F_x[\Delta_n\varepsilon_n(x,t)](\xi)-|\zeta|^2F_x[\varepsilon_n(x,t)](\xi)$, адже $F[\partial^\alpha f](\xi)=(-i\xi)^\alpha F(f)(\xi),F_x[\delta(x)](\xi)=1$

Таким чином, замість рівняння у частинних похідних отримуємо рівняння у звичайних похідних:

$$\left(\frac{d}{dt}+a^2|\xi|^2\right)F_x[\varepsilon_n](\xi)=\delta(t)$$

Фур'є – перетворення по x є його фундаментальним розв'язком.

$F_x[\varepsilon_n(x,t)](\xi)=\theta(t)e^{-a^2|\xi|^2t}$

$$\varepsilon_n(x,t)={}_{F^{-1}[}\int\limits_{R^n}F_x[\varepsilon_n(x,t)](\xi)e^{-i(x,\xi)}\frac{d\xi}{(2\pi)^n}]$$

$$=\frac{\theta(t)}{(2\pi)^n}\int\limits_{R^n}e^{-a^2|\xi|^2t-i(x,\xi)}d\xi=$$

$$=\frac{\theta(t)}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty} d\,\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\,\xi_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\,\xi_n$$

$$\times \exp\left[-a^2 t(\xi_1^2+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2) - i\left(x_1\ \xi_1\ +\dots+x_n\ \xi_n\ \right)\right]$$

$$=$$

$$=\frac{\theta(t)}{(2\pi)^n}\prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{x_k^2}{4a^2t}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_k \exp\left[-a^2 t\left(\xi_k + i\,\frac{x_k}{2a^2t}\right)^2\right] =/\eta_k = \xi_k + i\,\frac{x_k}{2a^2t}/=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_k e^{-a^2t\eta_k^2}\cdot\frac{\theta(t)}{(2\pi)^n}$$

$$= \text{(евклідова довжина вектора x: } |x|2=\textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2) \frac{\theta(t)}{(2\pi)^n}\left(\sqrt{\frac{\pi}{a^2t}}\right)^n e^{-\frac{-|x|^2}{4a^2t}}$$

$$=\frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^2} e^{-\frac{-|x|^2}{4a^2t}}$$

▷

Розглянемо рівняння $Lu(x,t)=f(x,t)$ в усьому просторі в усі моменти часу:

$u(x,t)=(\varepsilon_n * f)(x,t)$, $\quad f(x,t)\in S'$ *- узаг.функції,*

Коли $\mathrm{f(x,t)} \in \mathrm{R}'$ - регулярна функція, згорткуможназаписати в явномувигляді:

$$u(x,t)=\int_{R^n} dy \int_{R} ds\varepsilon_n(x-y,t-s)f(y,s)$$

Т.2 Задача Коші для рівняння дифузії: розв'язати рівняння в області з початковою умовою:

$$\begin{cases} L\,u(x,t)=f(x,t), x\in R^n,\ x\in R_+ \\ u(x,0)=u_0(x),\ \ x\in R^n \end{cases}$$

◁Покажемо, що задача зводиться до попередньої. Введемо функцію:

$\tilde{u}(x,t)=\theta(t)t(x,t)=f(x)=\begin{cases} u(x,t),\ t>0 \\ 0,\ x<0 \end{cases}$ *– розв'язокзадачіКоші*

$L=\partial_t - a^2\Delta_n$, $\quad L\tilde{u}(x,t)=F(x,t)$

$\partial_t\tilde{u}(x,t)=\partial_t\theta(t)u(x,t)=\theta(t)u_t(x,t)+\delta(t)u(x,t)$,

$(\delta(t)u(x,0)=\delta(t)u_0(x))$

$$(\partial_t - a^2\Delta_n)\tilde{u}(x,t)$$
$$= \theta(t)u_t(x,t) + \delta(t)u_0(x) - \theta(t)a^2\Delta_n u(x,t)$$
$$= \theta(t)(\partial_t - a^2\Delta_n)u(x,t) + \delta(t)u_0(x) =$$
$$= \theta(t)f(x,t) + \delta(t)u_0(x) = F(x,t),$$

Отримали рівняння $L\tilde{u}(x,t) = F(x,t), \quad -\infty < t < +\infty, \ t \in R$, де $F(x,t)$ – відома вже функція.

$\tilde{u}(x,t) = (\varepsilon_n * F)(x,t), \qquad F(x,t) = \theta(t)f(x,t) + \delta(t)u_0(x)$ – розв'язок для довільних $f(x,t), u_0(x) \in S'$,

якщо $f(x,t), u_0(x) \in R'$ - регулярні функції:

$\tilde{u}(x,t) = \int_0^t ds \int_{R^n} dy \varepsilon(x-y,t-s)f(y,s) + \int_{R^n} dy \varepsilon(x-y,t)u_0(y)$ – розв'язок для $f(x,t), u_0(x) \in R'$

*26. Метод спуску. Приклади.

Позначимо змінні таким чином: $x = (x_1,...,x_{n+1}); y = (x, x_1,...,x_{n+1})$

Нехай, лінійний оператор $L_{n+1}(\partial_y)$ допускає відокремлення змінних, тобто його можна представити у вигляді:

$$L_{n+1}(\partial_y) = L_n(\partial_x) + \sum_{\alpha=0}^{p} L_\alpha(\partial_x)\partial_{x_{n+1}}^{\alpha}, x \in D^\alpha, t \in R$$

<u>*Приклади*</u>: оп-р дифузії $L_n = \partial_t - a^2\Delta_n$; хв.оп-р $\#_n = \partial_{tt} - a^2\Delta_n$ (тут # = □-знак оп-ра); оп-р Лапласа $\Delta_{n+1} = \Delta_n + \partial_{x_{n+1}}^2$; оп-р Лапласа в ЦСК: $\Delta_{\rho,\varphi,z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Теорема («про метод спуску»)**:**

Нехай $\varepsilon_{n+1}(y)$ - фундаментальний розв'язок оператора $L_{n+1}(\partial_y)$, тобто $L_{n+1}(\partial_y)\varepsilon_{n+1}(y) = \delta(y)$; тоді, якщо задовольняється умова $\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_{x_{n+1}}^{\alpha}\varepsilon_{n+1}(y)dx_{n+1} = 0, \forall\alpha \neq 0$, то оператор $L_n(\partial_x)$, такий, що $L_n(\partial_x)\tilde{\varepsilon}_n(x) = \delta(x)$, матиме фундаментальний розв'язок

$$\tilde{\varepsilon}_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{n+1}(y)dx_{n+1}.$$

Доведення:

Фундаментальний розв'язок:

$$L_n(\partial_x)\varepsilon_{n+1}(y) + \sum_{\alpha=1}^{p} L^\alpha(\partial_x)\partial_{x_{n+1}}^{\alpha}\varepsilon_{n+1}(y) = \delta(y)$$

. Беручи інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} dx_{n+1}$ від лівої та правої частини, маємо:

$$L_n(\partial_x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon_n(y)dx_{n+1}+\sum_{\alpha=0}^{p}L^{\alpha}(\partial_x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\partial_{x_{n+1}}^{\alpha}\varepsilon_{n+1}(y)dx_{n+1}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(y)dx_{n+1}$$

Перший інтеграл рівний $\tilde{\varepsilon}_n(x)$, другий(що після суми), рівний 0(це ми задавали в умові теореми). Права частина:

$\delta(y)=\delta(x)\otimes\delta(x_{n+1})$, тоді $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(y)dx_{n+1}=\delta(x)$. Теорему доведено. ■

***27. Фундаментальний розв'язок хвильового рівняння в 1-вимірному просторі. Розв'язок задачіКоші.**

(Примітка : В редакторі відсутній квадратик, тому в формулах він замінений на Square. Не переписуйте в тупу !!! **Рисуйте квадратик**!)

Оператор Даламбера: $Square_{n,a} = (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta_n)$ тут n-розмірність простору

а-швидкість хвиль .

Хвильове , або гіперболічне р-ня має вигляд:

$$Square_{n,a}U(x,t) = f(x,t), x \in \Re^n, t \in \Re \quad (1)$$

Озн.- $\varepsilon_n(x,t)$ є фундаментальним р-ом р-ня (1), якщо:

$$Square_{n,a}\varepsilon_n(x,t) = \delta(x,t) = \delta(x)\delta(t)$$

Лема: Фур'є перетворення по x від ε_n має вигляд :

$$F_x[\varepsilon_n](\xi,t) = \Theta(t)\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|};$$

Доведення(писати не обов'язково):

$$\lhd \ (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta_n)\varepsilon_n(x,t) = \delta(x)\delta(t)$$

$$F_x\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varepsilon_n(x,t)\right] = d_t^2 F_x(\varepsilon_n)(x,t)$$

$$-a^2F_x[\Delta_n\varepsilon_n(x,t)] = a^2|\xi|^2 F_x(\varepsilon_n)(\xi,t)$$

$$F_x[\delta(x)] = 1$$

$$\left(d_t^2 + a^2|\xi|^2\right)F_x[\varepsilon_n](\xi,t) = \delta(t)$$ -для цього диф. оператора

пишемо розв'язок : $F_x[\varepsilon_n](\xi,t) = \Theta(t)\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|} \ \rhd$

<u>Теорема</u>: для хвильового оператора $Square_{n,a} = (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta_n)$

в 1-вимірному випадку (n=1) фундаментальний р-ок має вигляд:

$$\varepsilon_1(x,t) = \frac{\Theta(t)\Theta(at-|x|)}{2a}, x \in \Re^1, t \in \Re \quad (2)$$

<u>Доведення</u>:

$\triangleleft$ за Лемою(для 1-вимірного випадку):

$$F_x[\varepsilon_1](\xi,t) = \Theta(t)\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}$$

$$\varepsilon_1(x,t) = F_x^{-1}\left[\Theta(t)\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}\right](x,t) = \frac{\Theta(t)}{2\pi}\int_{\Re^1} d\xi \frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|} e^{-i(x,\xi)} =$$

$$= \frac{\Theta(t)}{2\pi}\int_0^t dt' \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(a\xi t')e^{-ix\xi} d\xi \overset{Эйлер}{=} \frac{\Theta(t)}{2\pi}\frac{1}{2}\int_0^t dt' \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{i(at'-x)\xi} + e^{\sim i(at'+x)\xi}]d\xi =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha\xi} d\xi \overset{Пуассон}{=} 2\pi\delta(\alpha)$$

$$= \frac{\Theta(t)}{2\pi}\frac{2\pi}{2}\int_0^t (\delta(at'-x) + \delta(at'+x))dt' \overset{озн.\delta-функ.}{=}$$

$$= \frac{\Theta(t)}{2a}(\Theta(at-x) - \Theta(-x) + \Theta(at+x) - \Theta(x)) \overset{озн.\Theta-функ.}{=}$$

$$= \begin{matrix} \frac{\Theta(t)}{2a}\Theta(at-x), x>0 \\ \frac{\Theta(t)}{2a}\Theta(at+x), x<0 \end{matrix} = \frac{\Theta(t)\Theta(at-|x|)}{2a}$$

$\triangleright$

Розв'язок задачіКоші.

<u>Теорема 3</u>: задача Коші для хвильового р-ня

$Square_{n,a}U(x,t)= f(x,t), x\in \Re^n, t>0$

$U(x,0)=U_0(x)$

$U_t(x,0)=U_1(x)$

(можемо розв'язати задачу у всі моменти часу

$\tilde{U}(x,t)=\Theta(t)U(x,t)$)

має розв'язок

$\tilde{U}\, x,t=(\varepsilon_d * F)(x,t)$**, де**

$Fx,t=\Theta(t)f(x,t)+\delta(t)U_1(x)+\delta^{/}(t)U_0(x)$

Якщо $f(x,t)$,$U_1(x)$,$U_0(x)$є регулярними узагальненими

функціями, то $\tilde{U}(x,t)$можна записати у вигляді: (3)

<u>*Доведення*</u>:

$$U(x,t)=\int_0^t ds\int_{R^n} dy\varepsilon_n(x-y,t-s)f(y,s)+\int_{R^n} dy\varepsilon_n(x-y,t)U_1(y)+\frac{\partial}{\partial t}\int_{R^n} dy\varepsilon_n(x-y,t)U_o(y);$$

$\lhd$ Знайдемо Лаплас та другу похідну по часу від виразу для $\tilde{U}(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}(x,t)}{\partial t^2}=\Theta(t)\frac{\partial^2 U(x,t)}{dt^2}+\delta(t)U1(x)+\delta'(t)Uo(x);$$

$$\Delta_n \tilde{U}(x,t)=\Theta(t)\Delta_n U(x,t);$$

Запишемо хвильове р-ня:

$$(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta_n)\tilde{U}(x,t)=\Theta(t)(\frac{\partial^2}{dt^2}-a^2\Delta_n)U(x,t)+\delta(t)U1(x)+\delta'(t)Uo(x)=$$

$$=\Theta(t)f(x,t)+\delta(t)U1(x)+\delta'(t)Uo(x)=F(x,t)$$

Отже $Square_{n,a}\tilde{U}(x,t)=F(x,t), x\in R^d, t\in R \Rightarrow \tilde{U}(x,t)=(\varepsilon_d * F)(x,t)$ (4)

$\rhd$

Теорема 4: Інтеграл (3) для 1-вимірного випадку (d=1) має вигляд: $U(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t ds\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(y,s)dy+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}U_1(y)dy+\frac{U_0(x+at)+U_0(x-at)}{2}$

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)dsd\tau$$

(другий варіант в позначеннях вікіпєдії , для альтернативного списування)

- формула Даламбера

Доведення:

$\triangleleft$ підставимо ф-лу (2) у інтеграл (3), розкриємо модулі |x-y| і в залежності від значень x та y розберемося із ф-єюХевісайда:

$$\varepsilon_1(x,t)=\frac{\Theta(t)\Theta(at-|x|)}{2a},x\in\Re^1,t\in\Re$$ вставляємо у

$$U(x,t)=\int_0^t ds\int_{R^n}dy\varepsilon_n(x-y,t-s)f(y,s)+\int_{R^n}dy\varepsilon_n(x-y,t)U_1(y)+\frac{\partial}{\partial t}\int_{R^n}dy\varepsilon_n(x-y,t)U_o(y);$$

Межі у першому інтегралі враховуються із умови нерівності нулю ф-їїХевісайда: a(t-s)>|x-y| , де |x-y| приймає значення: x-y, x>y ; -x+y, x<y. Тоді межі інтегрування визначатимуться з умов: a(t-s)=x-y і a(t-s)=-x+y.

Розв’язавши обидва р-ня отримаємо: y=[x-a(t-s); x+a(t-s)].

Аналогічно розбираємось із 2-им і 3-ім інтегралами. Тоді остаточно отримуємо:

$$U(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t ds\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(y,s)dy+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}U_1(y)dy+\frac{U_0(x+at)+U_0(x-at)}{2}$$

$\triangleright$

***28. Фундаментальний розв'язок хвильового рівняння в 2-вимірному просторі. Розв'язок задачіКоші.**

(Примітка : В редакторівідсутній квадратик , тому в формулах вінзамінений на Square . Не переписуйте в тупу !!! Рисуйте квадратик!)

Оператор Даламбера: $Square_{n,a} = (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta_n)$ тут n-розмірність простору

a-швидкість хвиль .

Хвильове , або гіперболічне р-ня має вигляд:

$$Square_{n,a}U(x,t) = f(x,t), x \in \Re^n, t \in \Re \quad (1)$$

Озн.- $\varepsilon_n(x,t)$ є фундаментальним р-омр-ня (1), якщо:

$$Square_{n,a}\varepsilon_n(x,t) = \delta(x,t) = \delta(x)\delta(t)$$

Лема: Фур'є перетворення по хвід ε_n має вигляд :

$$F_x[\varepsilon_n](\xi,t) = \Theta(t)\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|};$$

Доведення(писати не обов'язково):

$$\lhd \ (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta_n)\varepsilon_n(x,t) = \delta(x)\delta(t)$$

$$F_x\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varepsilon_n(x,t)\right] = d_t^2 F_x(\varepsilon_n)(x,t)$$

$$-a^2F_x[\Delta_n\varepsilon_n(x,t)] = a^2|\xi|^2 F_x(\varepsilon_n)(\xi,t)$$

$$F_x[\delta(x)] = 1$$

$\left(d_t^2 + a^2|\xi|^2\right)F_x[\varepsilon_n](\xi,t) = \delta(t)$ -для цього диф. оператора

пишемо розв'язок : $F_x[\varepsilon_n](\xi,t) = \Theta(t)\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|} \ \rhd$

Теорема 2: для хвильового оператора $Square_{n,a} = (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta_n)$ в 2-вимірному випадку (n=2) фундаментальний р-ок має вигляд:

$$\varepsilon_2(x,t) = \frac{1}{2a\pi}\frac{\Theta(t)\Theta(at-|x|)}{\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}, x\in\Re^2 \quad (2)$$

Доведення: *Доведення*:

$\triangleleft$ за Лемою(для 2-вимірного випадку):

$$F_x[\varepsilon_2](\xi,t) = \Theta(t)\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}$$

$$|\xi| = r$$

$$\varepsilon_2(x,t) = \frac{\Theta(t)}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(art)}{ar}e^{-i|x|r\cos\phi}rdrd\phi \overset{Ейлер}{=}$$

$$= \frac{\Theta(t)}{(2\pi)^2 a}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{+\infty}dr\,\frac{e^{i(at-|x|\cos\phi)r} - e^{-i(at+|x|\cos\phi)r}}{2i} =$$

$$= \frac{\Theta(t)}{8\pi^2 a}\int_0^{2\pi}d\phi\left(\frac{1}{at-|x|\cos\phi} + \frac{1}{at+|x|\cos\phi}\right) =$$

$$= \frac{\Theta(t)}{8\pi^2 a}2\frac{2\pi}{\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}\Theta(at-|x|) =$$

$$= \frac{1}{2a\pi}\frac{\Theta(t)\Theta(at-|x|)}{\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}$$

$\triangleright$

Розв'язок задачіКоші.

Теорема 3: задача Коші для хвильового р-ня

$$Square_{n,a}U(x,t)= f(x,t), x\in\Re^n, t>0$$
$$U(x,0)=U_0(x)$$
$$U_t(x,0)=U_1(x)$$
(можемо розв'язати задачу у всі моменти часу
$$\tilde{U}(x,t)=\Theta(t)U(x,t))$$
має розв'язок
$$\tilde{U}\,x,t=(\varepsilon_d * F)(x,t)$$, **де**
$$Fx,t=\Theta(t)f(x,t)+\delta(t)U_1(x)+\delta'(t)U_0(x)$$
Якщо $f(x,t)$, $U_1(x)$, $U_0(x)$ є регулярними узагальненими функціями, то $\tilde{U}(x,t)$ можна записати у вигляді:
$$U(x,t)=\int_0^t ds\int_{R^n} dy\varepsilon_n(x-y,t-s)f(y,s)+\int_{R^n} dy\varepsilon_n(x-y,t)U_1(y)+\frac{\partial}{\partial t}\int_{R^n} dy\varepsilon_n(x-y,t)U_o(y);$$
(3)

<u>Доведення</u>:

$\triangleleft$ Знайдемо Лаплас та другу похідну по часу від виразу для $\tilde{U}(x,t)$:
$$\frac{\partial^2\tilde{U}(x,t)}{\partial t^2}=\Theta(t)\frac{\partial^2 U(x,t)}{dt^2}+\delta(t)U1(x)+\delta'(t)Uo(x);$$
$$\Delta_n\tilde{U}(x,t)=\Theta(t)\Delta_n U(x,t);$$
Запишемо хвильове р-ня:
$$(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta_n)\tilde{U}(x,t)=\Theta(t)(\frac{\partial^2}{dt^2}-a^2\Delta_n)U(x,t)+\delta(t)U1(x)+\delta'(t)Uo(x)=$$
$$=\Theta(t)f(x,t)+\delta(t)U1(x)+\delta'(t)Uo(x)=F(x,t)$$

Отже $Square_{n,a}\tilde{U}(x,t)=F(x,t), x\in R^d, t\in R\Rightarrow\tilde{U}(x,t)=(\varepsilon_d * F)(x,t)$ (4)

▷

Теорема 4: Інтеграл (3) для 2-вимірного випадку (d=2) має вигляд:

$$u(\bar{x},t)=u(x_1,x_2,t)=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t\iint\limits_{r<a(t-\tau)}\frac{f(y_1,y_2,t)dy_1dy_2d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{r<at}\frac{\varphi(y_1,y_2)dy_1dy_2}{\sqrt{a^2t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}+\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{r<at}\frac{\psi(y_1,y_2)dy_1dy_2}{\sqrt{a^2t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}$$

Або в інших позначеннях-ф-ла Пуассона

$$U(x,t)=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t ds\int\limits_{|x-y|<a(t-s)}dy\frac{f(y,s)}{\sqrt{a^2t^2-|x-y|^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{|x-y|<at}dy\frac{U_1(y)}{\sqrt{a^2t^2-|x-y|^2}}+\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|x-y|}dy\frac{U_0(y)}{\sqrt{a^2t^2-|x-y|^2}}$$

Доведення: Доведення аналогічне доведенню з попереднього питання . Теж підставляєте (2) в (3) і розставляєте межі , з умови не рівності нулю тета функцій .

***29. Фундаментальний розв'язок хвильового рівняння в 3-вимірному просторі. Розв'язок задачі Коші. Збудження хвиль точковим джерелом.**

(Примітка : В редакторівідсутній квадратик , тому в формулах вінзамінений на Square . Не переписуйте в тупу !!! Рисуйте квадратик!)

Оператор Даламбера: $Square_{n,a} = (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta_n)$

тут n-розмірність простору
а-швидкість хвиль .
Хвильове , або гіперболічне р-ня має вигляд:

$$Square_{n,a}U(x,t) = f(x,t), x \in \Re^n, t \in \Re \quad (1)$$

<u>Озн.</u>- $\varepsilon_n(x,t)$ є фундаментальним р-омр-ня (1), якщо:

$$Square_{n,a}\varepsilon_n(x,t) = \delta(x,t) = \delta(x)\delta(t)$$

<u>Лема</u>: Фур'є перетворення по хвід ε_n має вигляд :

$$F_x[\varepsilon_n](\xi,t) = \Theta(t)\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|};$$

<u>Доведення(писати не обов'язково)</u>:

$$\lhd \ (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta_n)\varepsilon_n(x,t) = \delta(x)\delta(t)$$

$$F_x\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varepsilon_n(x,t)\right] = d_t^2 F_x(\varepsilon_n)(x,t)$$

$$-a^2F_x[\Delta_n\varepsilon_n(x,t)] = a^2|\xi|^2F_x(\varepsilon_n)(\xi,t)$$

$$F_x[\delta(x)] = 1$$

$\left(d_t^2 + a^2|\xi|^2\right)F_x[\varepsilon_n](\xi,t) = \delta(t)$-для цього диф. оператора

пишемо розв'язок : $F_x[\varepsilon_n](\xi,t) = \Theta(t)\dfrac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}$ ▷

Теорема 2: для хвильового оператора

$Square_{n,a} = (\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta_n)$ в 3-вимірному випадку (d=3)

фундаментальний р-ок має вигляд:

$\varepsilon_3(x,t) = \dfrac{\Theta(t)\delta(at-|x|)}{4\pi a|x|}, x \in \Re^3$ (2)

робимо заміну μ=cosQ :

Доведення:

◁

за Лемою(для 3-вимірного випадку):

$$F_x[\varepsilon_3](\xi,t) = \Theta(t)\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}$$

$$|\xi| = r$$

$$d\xi = r^2 dr \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

Вартету заменяем на тету , просто таковой нет в редакторе .

$$\varepsilon_3(x,t)=\frac{\Theta(t)}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(art)}{ar}e^{-i|x|r\cos Q}d\xi=$$

$$=\frac{\Theta(t)}{(2\pi)^3}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin(art)}{ar}e^{-i|x|r\cos Q}r^2dr\sin QdQ2\pi=$$

$$=\frac{\Theta(t)}{(2\pi)^2}\frac{2}{a|x|}\int\limits_0^{\infty}\sin(|x|r)\sin(art)dr=$$

$$=\frac{\Theta(t)}{(2\pi)^2}\frac{1}{a|x|2}\int\limits_0^{\infty}(\cos(|x|-at)-\cos(|x|+at))rdr=$$

$$=\frac{\Theta(t)}{(2\pi)^2}\frac{2\pi}{a|x|2}\left(\delta\left(at-|x|\right)-\delta\left(at+|x|\right)\right)=$$

$$=\frac{\Theta(t)\delta(at-|x|)}{4\pi a|x|}$$

▷

Розв'язок задачіКоші.

<u>*Теорема 3*</u>: задача Коші для хвильового р-ня

$$Square_{n,a}U\left(x,t\right)=f\left(x,t\right), x\in\Re^n, t>0$$

$$U\left(x,0\right)=U_0\left(x\right)$$

$$U_t\left(x,0\right)=U_1\left(x\right)$$

(можемо розв'язати задачу у всі моменти часу

$\tilde{U}\left(x,t\right)=\Theta\left(t\right)U\left(x,t\right)$)

має розв'язок

$\tilde{U}\,x,t=\left(\varepsilon_d*F\right)\left(x,t\right)$, **де**

$$Fx,t=\Theta\left(t\right)f\left(x,t\right)+\delta\left(t\right)U_1\left(x\right)+\delta^{/}\left(t\right)U_0\left(x\right)$$

Якщо $f(x,t)$, $U_1(x)$, $U_0(x)$ є регулярними узагальненими функціями, то $\tilde{U}(x,t)$ можна записати у вигляді:

$$U(x,t)=\int_0^t ds\int_{R^n} dy\varepsilon_n(x-y,t-s)f(y,s)+\int_{R^n} dy\varepsilon_n(x-y,t)U_1(y)+\frac{\partial}{\partial t}\int_{R^n} dy\varepsilon_n(x-y,t)U_o(y);$$

(3)

<u>*Доведення*</u>:

◁ Знайдемо Лаплас та другу похідну по часу від виразу для $\tilde{U}(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}(x,t)}{\partial t^2}=\Theta(t)\frac{\partial^2 U(x,t)}{dt^2}+\delta(t)U1(x)+\delta'(t)Uo(x);$$

$$\Delta_n \tilde{U}(x,t)=\Theta(t)\Delta_n U(x,t);$$

Запишемо хвильове р-ня:

$$(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta_n)\tilde{U}(x,t)=\Theta(t)(\frac{\partial^2}{dt^2}-a^2\Delta_n)U(x,t)+\delta(t)U1(x)+\delta'(t)Uo(x)=$$
$$=\Theta(t)f(x,t)+\delta(t)U1(x)+\delta'(t)Uo(x)=F(x,t)$$

Отже $Square_{n,a}\tilde{U}(x,t)=F(x,t), x\in R^d, t\in R \Rightarrow \tilde{U}(x,t)=(\varepsilon_d * F)(x,t)$

(4)

▷

<u>*Теорема 4*</u>: Інтеграл (3) для 3-вимірного випадку (d=3) має вигляд:

$$U(x,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_{x-y\le at} dy\frac{f(y,t-\frac{|x-y|}{a})}{|x-y|}+\frac{1}{4\pi a^2}\int_{|x-y|=at} d\,yU1(y)+\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{|x-y|=at} dyUo(y)\right)$$

- ф-ла Кірхгофа

<u>*Доведення*</u>: Доведення аналогічне доведенню з 27го питання . Теж підставляєте (2) в (3) і розставляєте межі з умови не рівності нулю тета функцій .

Джерелом поля в цих задачах виступає вільний член рівняння , тобто f(x,t) . Якщо джерело точкове , то f від просторових змінних буде залежати через дельта-функцію . Тобто $f(x,t)=\delta(x)f_1(t)$, тобто як мінімум спроститься вигляд першого інтеграла . Неоднорідності межових умов , здається , не набувають особливих властивостей за умови точковості , хіба , може , сферичну симетрію .

30) N- вимірні сферичні координати та фундаментальний розв*язок рівняння Лапласа в N- вимірному просторі.

Рівняння Лапласа і Пуассона

Розглядаємо рівняння $\Delta_n U(x) = f(x),\ \ x \in \mathbb{R}^n$. У n-вимірному просторі x-вектор x = $\{x_1,...x_n\}$; $dx^n = dx_1 \ldots dx_n$. Використовуємо сферичні координати, позначимо $|x|$= r. Тоді

$dx^n = r^{\,n-1} dr d\sigma_n$, де σ_n – площа одиничної сфери S^n в n-вимірному просторі

Теорема. $\sigma_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ – площа одиничної сфери

Обчислим двома методами:

1) I = $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\, d^n x$ = $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1 ....+x_n)^2} dx_1 \ldots dx_n = \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_k)^2} dx_k\right]^n = \pi^{\frac{n}{2}} = (\pi^{\frac{1}{2}})^n$

2) I = $\int_0^\infty e^{-r^2}\, r^{n-1} dr * \sigma_n = |r^2 = t| = \frac{\sigma_n}{2}\int_0^\infty e^{-t}\, t^{\frac{n-2}{2}} dt = \frac{\sigma_n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})$

Теорема про фундаментальний розв’язок оператора Лапласа

$\varepsilon_2(r) = \frac{1}{2\pi}\ln r \qquad \varepsilon_n(r) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n r^{n-2}}$

Ці формули є узагальненям закону кулона

$\Delta_n = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\Delta_{n,\text{кутова частина}}$

Розглянемо рівняння : $\varepsilon_n(x) = \varepsilon_n(|x|) = \varepsilon_n(r)$ Тоді, коли оператор кутовий Лапласа діє на функцію, то цей оператор зникає, адже немає залежності від кута

$$\Delta_n \varepsilon_n(r) = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1}\frac{\partial \varepsilon_n}{\partial r}) = \delta(r) \quad 0 \le r < \infty$$

У випадку $0 < r < \infty$ маємо

$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial \varepsilon_n}{\partial r}\right) = 0\ ,\ 0\ < r < \infty$; $\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial \varepsilon_n}{\partial r}\right) = 0 \ \rightarrow$ $\frac{\partial \varepsilon_n}{\partial r} = \frac{A}{r^{n-1}}$ (A - константа) $A = \frac{1}{\sigma_n}$; $\frac{\partial \varepsilon_n}{\partial r} = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}}$ - проінтегрувати → маємо умови теореми. $\varphi(0) = (\delta, \varphi) -$ рівність в n-вимірному просторі, замість $\delta -$ функціі підставимо оператор Лапласа

$$(\Delta\varepsilon_n, \varphi) = -(\nabla\varepsilon, \nabla\varphi) = -\left(\frac{\partial \varepsilon_n}{\partial r}, \frac{\partial r}{\partial \varphi}\right) =$$

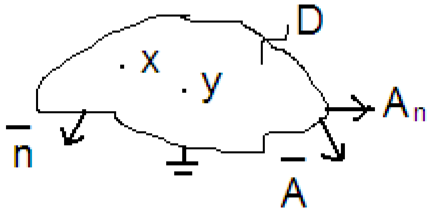
$$-\sigma_n \int_0^\infty \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} r^{n-1} dr = -\sigma_n \int_0^\infty \frac{A}{r^{n-1}}\frac{\partial \varphi}{\partial r} r^{n-1} dr = -\sigma_n A \int_0^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr =$$

$$-\sigma_n A[\varphi(\infty) - \varphi(0)] = \sigma_n A\varphi(0) = \varphi(0) => A = \frac{1}{\sigma_n}$$

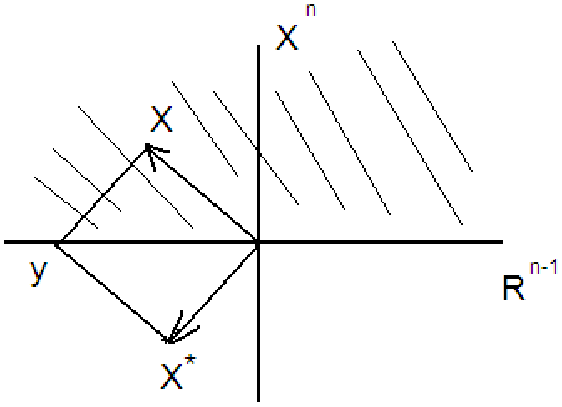
31)Функція Гріна задачі Діріхле. Функція Гріна для n-вимірного півпросторі та n-вимірні кулі.

$\|\Delta_n u(x) = f(x)\,, x \in D \subset R^n$
$\|u(x)\,|_{\partial D} = g(x)$

<u>Означення</u>. Функція Гріна
$G_D(x, y)$, де D – область n – вимірного простору, $x \in D, y \in \overline{D}$, яка має дві властивості:
1) $\Delta G_D(x, y) = \delta(x - y), x, y \in D$
2) $G_D(x, y) = 0,\ \ y \in \partial D$ (межа області D); D- еквіпотенціальна поверхня.
Функція Гріна G_D в області D це потенціал, що створюється в точці y, точковим зарядом одиничної величини що розміщений у точці x і еквіпотенціальною поверхнею ∂D.



<u>Теорема 1.(Гріна)</u> Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$, де $x \in R^n$, а самі функції неперервні і $u(x), v(x) \in C^2(D)$, то справедлива наступна рівність:
$\int_D u(y)\Delta\, v(y) - v(y)\Delta u(y) d^n y = \int_{\partial D} u(y)\frac{\partial}{\partial n}v(y) - v(y)\frac{\partial}{\partial n}u(y)ds$ $\ \ (\frac{\partial}{\partial n}$ – нормаль, ds – диференціал площі поверхні)
Доведення
$\int_D \mathrm{div}\overline{A}\, dy = \int_{\partial D} A_n(y)\, ds$ - формула Гауса-Остроградського
$\Delta u(y) = \mathrm{div\, grad} u(y)$, підставити => Доведено.
Задача Діріхле в R^n для рівняння Пуасона.
Задача Діріхле полягає в тому, що треба знайти $u(x)$, $x \in R^n$
$\|\Delta u(x) = f(x), x \in D \subset R^n, f(x)$ – густина зарядів
$\|\ u(x)\,|_{x \in \partial D} = g(x), g(x)$ – потенціал на поверхні області
<u>Теорема 2</u>. Розв'язок задачі Діріхле:
$u(x) = \int_D G_D(x, y) f(y) dy + \int_{\partial D} g(y)\frac{\partial}{\partial n_y} G_D(x, y) ds$
Доведення.
Візьмемо функцію u як $u(x)$ і функцію Гріна як $v(y)$ з теореми 1 :
$\int_D u(y)\Delta\, G(x, y) - G(x, y)\Delta u(y) d^n y = \int_{\partial D}(u(y)\frac{\partial}{\partial n}G(x, y) - G(x, y)\frac{\partial}{\partial n}u(y) ds$
$\int_D (u(y)\,\delta(x - y) - G(x, y) f(y)) dy = \int_{\partial D}(g(y)\frac{\partial}{\partial n_y}G(x, y) ds$ Доведено.
Функція Гріна півпростору $R^n_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) | x_n > 0\}$
$x = (x_1, \dots x_{n-1}, x_n)$
$x^* = (x_1, \dots x_{n-1}, -x_n)$ – дзеркальне відображення x



$G_{R_+^n}(x,y) = \varepsilon(|x-y|) - \varepsilon(|x^*-y|)$

Доведення

1) $\Delta G_{R_+^n}(x,y) = \Delta\varepsilon(|x-y|) - \Delta\varepsilon(|x^*-y|) = \delta(x-y) - \delta(x^*-y) = \delta(x-y)$

$x, y \in R_+^n$

2) $G_{R_+^n}(x,y)|_{y\in\partial D} = \varepsilon(|x-y|) - \varepsilon(|x^*-y|)|_{y\in\partial D} = 0$

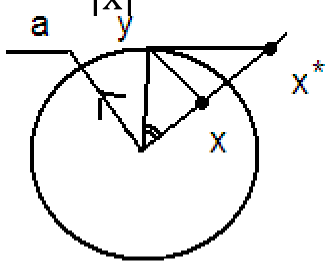
$$\frac{\partial}{\partial n} G_{R_+^n}(x,y) = \frac{2x_n}{\sigma_n |x-y|^n}$$

Доведено

Функція Гріна для кулі: $D = \{x|\ |x| < a\}$

$|x||x^*| = a^2$

$$x^* = \frac{a^2}{|x|^2} x$$



$$G_D(x,y) = \varepsilon(|x-y|) - \varepsilon\left(\frac{|x|}{a}|x^*-y|\right)$$

Доведення

1) $\Delta G_D(x,y) = \delta(x-y), \quad x, y \in D$

2) $G_D(x,y)|_{y\in\partial D} = 0$

$\Delta oxy \sim \Delta ox^*y$ => з подібності випливає:

$|x-y| = \frac{|x}{a}\left|x^k - y\right|$ коли $|y| = a$

Доведено

$$\frac{\partial}{\partial n} G_D(x,y) = \frac{a^2 - |x|^2}{\sigma_n a |x-y|^n}$$

ОГЛАВЛЕНИЕ