28.1) Класифікація диференціальних рівняння з частинними похідними другого порядку. Визначити тип рівняння

$$u_{xx} - 2\sin x u_{xt} + (2-\cos^2 x)u_{tt} + x^5 u_x + \sin t u_t + 3x^2 u = \cos t \tag{1}$$

Розглядаємо загальний вигляд рівняння другого порядку для двух координат (x, y)

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = \Phi(x,y,u,u_x,u_y) \tag{2}$$

T.1 Для рівняння (2) величина $sign\Delta = sign(b^2 - ac)$ інваріат перетворень змінних $(x,y) \to (\xi, \eta)$

◄ Задамо перетворення $(x,y) \to (\xi,\eta)$ як

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases} \tag{3}$$

Причому будемо вимагати від перетворення (3) те щоб якобіан перетворення не був рівний нулю, що означає що перетворення допускає зворотнє

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$

звідки за правилами дифференціювання отрмаємо правила перетворення похідних

$$\left.\begin{array}{rcl} u_x &=& (u(\xi,\eta))_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ u_y &=& (u(\xi,\eta))_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\ u_{xx} &=& (u_x)_x = (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_x = \\ &=& u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_\xi \xi_{xx} + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\eta \eta_{xx} \\ u_{yy} &=& u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_\xi \xi_{yy} + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\eta \eta_{yy} \\ u_{xy} &=& u_{yx} = (u_x)_y = (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_y = u_{\xi y}\xi_x + u_\xi \xi_{xy} + u_{\eta y}\eta_x + u_\eta \eta_{xy} = \\ &=& u_\eta \eta_{xy} + u_\xi \xi_{xy} + \xi_x(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) + \eta_x(u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) = \\ &=& u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} \end{array}\right\} \tag{4}$$

після підстановки (4) до (2) та послідуючого групування можна отримати рівняння в нових координатах

$$a_1(\xi,\eta)u_{\xi\xi} + 2b_1(\xi,\eta)u_{\xi\eta} + c_1(\xi,\eta)u_{\eta\eta} = \overline{\Phi}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) \tag{5}$$

$$\begin{cases} a_1 = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 \\ c_1 = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 \\ b_1 = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y \end{cases} \tag{6}$$

Зауваження 1 всі коефіцієнти (6) в явному вигляді залежать від (x,y) але оскільки перетворення має обернене то $\exists \phi(\xi,\eta), \psi(\xi,\eta) : (\xi,\eta) \to (x,y)$

Зауваження 2 якщо функція Φ була лінійною відносно $u_x,\ u_y,\ u$ то вона і залишиться такою з-за лінійності перетворень (4)

Неважко помітити що рівняння (6) відповідають рівнянням перетворення біквадратної форми $a(x,y)x'^2 + c(x,y)y'^2 + 2b(x,y)x'y'$. Тому, якщо ввести матриці

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix}$$

можна отримати еквівалентну до (6) матричну рівність

$$A_1 = UAU^T \tag{7}$$

Знайдемо визначник (7) $\det A_1 = \det U \det A \det U^T = J^2 \det A$, а оскільки $J \in \mathbb{R} \wedge J \neq 0 \Rightarrow J^2 > 0 \Rightarrow sign(b^2 - ac) = sign(b_1^2 - a_1 c_1)$ ►

Означення В залежності від величини $\Delta = sign(b^2 - ac)$ рівняння (2) поділяють на такі категорії:
$\Delta > 0$ – рівняння гіперболічного типу;
$\Delta < 0$ – рівняння еліптичного типу;
$\Delta = 0$ – рівняння параболічного типу;

В рівнянні (1) в цих позначеннях $a = 1,\ b = \sin x,\ c = 2 - \cos^2 x$, тоді $\Delta = b^2 - ac = \sin^2 x - 2 + \cos^2 x = -2 < 0$ – рівняння еліптичного типу.

28.2) Розв'язати мішану крайову задачу для рівняння дифузії на відрізку

$$\left\| \begin{array}{ll} u_t = u_{xx} - u_x - 1/a, & x \in (0,a),\ t \in \mathbb{R}_+ \\ u(0,t) = 1,\ u(a,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = 2\sin^2(4\pi x/a), & x \in (0,a) \end{array} \right. \tag{8}$$

Задача неоднорідна по краєвим умовам, потрібно шукати компенсатор $w(x,t) = P(t) + Q(t)x$ такий, що $w(0,t) = 1,\ w(a,t) = 0$. Не важко переконатися, що такою функцією є

$$w(x,t) = 1 - x/a \tag{9}$$

тоді можна з-за лінійності рівняння шукати розвязок у вигляді $u = v + w$, для функції v задача матиме такий вигляд

$$\left\| \begin{array}{ll} v_t = v_{xx} - v_x, & x \in (0,a),\ t \in \mathbb{R}_+ \\ v(0,t) = 0,\ v(a,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+ \\ v(x,0) = x/a - 1 + 2\sin^2(4\pi x/a) = x/a - \cos(8\pi x) = \nu(x), & x \in (0,a) \end{array} \right. \tag{10}$$

Шукаємо розвязок задачі у вигляді розкладу по власним функціям

$$v(x,t) = \sum_{\lambda} X_\lambda(x) T_\lambda(t) \tag{11}$$

тоді рівняння перетворюєтся на

$$\sum_{\lambda} T'_\lambda X_\lambda = \sum_{\lambda} (T_\lambda X''_\lambda - T_\lambda X'_\lambda) \tag{12}$$

після ділення на $X_\lambda T_\lambda$ задач для частинного розвязку v_λ та групування по аргументу отрмаємо формулу для розділення

$$\frac{X''_\lambda - X'_\lambda}{X_\lambda} = \frac{T'}{T_\lambda} = -\lambda^2 \tag{13}$$

з рівняння вище та крайових умов отримаємо задачу Ш.-Л.

$$\left\| \begin{array}{l} X''_\lambda - X'_\lambda + \lambda^2 X = 0 \\ X_\lambda(0) = 0 \\ X_\lambda(a) = 0 \end{array} \right. \tag{14}$$

Х. р-ня
$$k^2 - k + \lambda^2 = 0 \tag{15}$$
розвязкоми якого є $k = 1/2 \pm i\sqrt{\lambda^2 - 1/4} = 1/2 \pm i\omega$ Тоді загальним розвязком є
$$X = e^{x/2}(A \sin \omega x + B \cos \omega x) \tag{16}$$
підставляючи $X(0) = 0$ отримаємо що $B = 0$, підстановкою іншої крайової умови отримаємо
$$\begin{aligned} X(a) &= Ae^{x/2} \sin \omega a = 0 \\ \omega a &= \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ \omega_n &= \frac{\pi n}{a},\ n \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned} \tag{17}$$
звідки $-\lambda^2 = -1/4 - \omega_n^2$, коефіцієнт A_n оберемо з умови $|X|^2 = 1$
$$\begin{aligned} |X_n|^2 = A_n^2 \int_0^a e^x \sin^2(\pi n x/a) dx = A_n^2 \frac{2\left(-1 + e^a\right) n^2 \pi^2}{a^2 + 4n^2\pi^2} = 1 \\ A_n = \sqrt{\frac{a^2 + 4n^2\pi^2}{2\left(-1 + e^a\right) n^2 \pi^2}} \end{aligned} \tag{18}$$
розкладемо $\nu(x)$ в ряд по власним функціям, тоді
$$\nu_n = A_n \int_0^a (x/a - \cos(8\pi x)) e^{x/2} \sin(\pi n x/a) dx \tag{19}$$
тоді для T_n можна записати таку крайову задачу
$$\left\| \begin{array}{l} T_n' + \lambda_n^2 T = 0 \\ T(0) = \nu_n \end{array} \right. \tag{20}$$
розвязком якого є
$$T_n = \nu_n e^{-\lambda^2 t} \tag{21}$$
Відповідь:
$$u = 1 - x/a + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \nu_n e^{x/2 - (1/2 + \omega_n^2)t} \sin \frac{n\pi x}{a} \tag{22}$$
28.3) Знайти фундаментальний розвязок $\mathcal{E}(x)$ оператора $L = \frac{d^3}{dx^3} - 21\frac{d}{dx} + 20$. Розвязати рівняння $\frac{d^3 y}{dx^3} - 21\frac{dy}{dx} + 20y = \Theta(x)\left[(x+1)^3 - x\right] + \delta^{(n)}(x)$
$$\mathcal{E}(x) = \Theta(x) Z(x) \tag{23}$$
$$\left\| \begin{array}{l} LZ = 0 \\ Z(0) = 0 \\ Z'(0) = 0 \\ Z''(0) = 1 \end{array} \right. \tag{24}$$
Х. р-ня оператора
$$\lambda^3 - 21\lambda + 20 = 0 \tag{25}$$

має роз-ок $\lambda_1 = 4$ (підбором) поділивши рівняння на $(\lambda - 4)$ отримаємо

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0 \tag{26}$$

звідки $\lambda_2 = -5,\ \lambda_3 = 1$ тому розвязком задачі є

$$Z(x) = Ae^x + Be^{4x} + Ce^{-5x} \tag{27}$$
$$Z'(x) = Ae^x + 4Be^{4x} - 5Ce^{-5x} \tag{28}$$
$$Z''(x) = Ae^x + 16Be^{4x} + 25Ce^{-5x} \tag{29}$$

Підстановкою отримаємо систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A + 4B - 5C = 0 \\ A + 16B + 25C = 1 \end{cases} \tag{30}$$

Розвязок знайдемо методом Кронекера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -5 \\ 1 & 16 & 25 \end{vmatrix} = 162 \tag{31}$$
$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 \\ 1 & 16 & 25 \end{vmatrix} = -9 \tag{32}$$
$$\Delta_B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 25 \end{vmatrix} = 6 \tag{33}$$
$$\Delta_C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 3 \tag{34}$$

звідки

$$A = -\frac{1}{18}\ B = \frac{1}{27}\ C = \frac{1}{54} \tag{35}$$

тому загальний розвязок

$$\mathcal{E}(x) = \Theta(x)\left(\frac{1}{27}e^{4x} + \frac{1}{54}e^{-5x} - \frac{1}{18}e^x\right) \tag{36}$$

Розвязок задачі знаходиться у вигляді

$$y(x) = (f * \mathcal{E}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(S)\mathcal{E}(x - S)dS \tag{37}$$