Білет 10

1). Фундаментальний розв'язок хвильового рівняння в 3-вимірному просторі. Розв'язок задачіКоші.

Загальний вигляд хвильового рівняння: $\square_n u(x,t) = f(x,t), \quad \square_n = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_n$.
Фундаментальнийрозв'язок – церозв'язокрівняння: $\square \varepsilon_n = \delta(x,t)$

$F_x \mid \ \partial_t^2 \varepsilon_n(x,t) - a^2 \Delta_n \varepsilon_n(x,t) = \delta(x,t)$ – діємо перетворенням Фур'є

$F_x[\varepsilon_n(x,t)] = \tilde{\varepsilon}_n(k,t)$

$\partial_t^2 \tilde{\varepsilon}_n(k,t) - a^2|k|^2 \tilde{\varepsilon}_n(k,t) = 1(k)\delta(t)$

$\tilde{\varepsilon}_n(k,t) = \theta(k) z(t)$

$$\left\|\begin{array}{l} z'' + a^2|k|^2 z = 0 \\ z(0) = 0 \\ z'(0) = 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} z(t) = A\sin a|k|t + B\cos a|k|t \\ z(0) = B = 0 \\ z'(0) = Aa|k| = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \dfrac{1}{a|k|} \end{array}$$

$z(t) = \frac{\sin a|k|t}{a|k|}$; $\tilde{\varepsilon}_n(k,t) = \frac{\theta(t)\sin a|k|t}{a|k|}$

$$\boxed{\varepsilon_n(x,t) = F_x^{-1}[\tilde{\varepsilon}_n(k,t)] = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}_n} \frac{\sin a|k|t}{a|k|} e^{-i(k,x)} dk}$$

– фундаментальний розв'язок хвильового рівняння для n-вимірноговипадку.

Для трьохвимірного випадку: n = 3:
$dk = |k|^2 d|k| \sin\theta \, d\theta d\varphi, \quad (k,x) = |k||x|\cos\theta$. Отже,

$$\varepsilon_3(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^3} \int\limits_0^\infty \frac{|k|^2 d|k|}{a|k|} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^\pi e^{-i|k||x|\cos\theta} \sin\theta d\theta \sin a|k|t$$

$$I = \int\limits_0^\pi e^{-i|k||x|\cos\theta} \sin\theta d\theta = |\cos\theta = y| = \int\limits_{-1}^1 e^{-i|k||x|y} dy = \frac{e^{-i|k||x|} - e^{i|k||x|}}{-i|k||x|} = 2\frac{\sin|k||x|}{|k||x|}$$

$\varepsilon_3(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty \frac{|k|^2 d|k|}{a|k|} 2\frac{\sin|k||x|}{|k||x|} \sin a|k||t| = \frac{\theta(t)}{4\pi^2|x|a} \int_0^\infty [\cos|k|(at - |x|) - \cos|k|(at + |k|)] d|k| =$
$\left| \int_0^\infty \cos kx \, dk = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{ikx} dk = \pi\delta(x) \right| = \frac{\theta(t)}{4\pi^2|x|a} \pi[\delta(at - |x|) - \delta(at + |x|)]$, оскількиостанній доданок в дужках не нуль тільки в точці $t = -\frac{|x|}{a}$, а в нас $t > 0$, тому фундаментальний розв'язок має вигляд:

$$\boxed{\varepsilon_3(x,t) = \frac{\theta(t)\delta(at - |x|)}{4\pi|x|a}}$$

Задача Коші:

$$\left\|\begin{array}{l} \square_n U(x,t) = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0 \\ U(x,0) = U_0(x) \\ U_t(x,0) = U_1(x) \end{array}\right.$$

$U(x,t) = (\varepsilon_n * f)(x,t)$

Доповнимо функцію, що є розв'язком, від'ємним часом

$\tilde{U}(x,t) = \theta(t) U(x,t)$ Знаходимо похідні: $\partial_t \tilde{U} = \delta(t) U(x,t) + \theta(t) \partial_t U(x,t)$.

Друга похідна: $\partial^2 \tilde{U} = \delta'(t) U_0(x) + \delta(t) \partial_t U(x,t) + \theta(t) \partial_t^2 U(x,t)$

$\square_n \tilde{U}(x,t) = \partial_t^2 \tilde{U} - a^2 \Delta_n \tilde{U} = \delta'(t) U_0(x) + \delta(t) U_1(x) + \theta(t) \square_n U(x,t) \Rightarrow$

$$\Box_n \tilde{U}(x,t) = \delta'(t)U_0(x) + \delta(t)U_1(x) + \theta(t)f(x,t) \equiv F(x,t)$$

$$\Box_n \tilde{U}(x,t) = F(x,t) \Rightarrow U(x,t) = \varepsilon_n * F = \varepsilon_n * \left(\theta(t)f(x,t) + \delta'(t)U_0(x) + \delta(t)U_1(x)\right) =$$

$$\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} dy \varepsilon_n(x-y,t-s) f(y,s) + \int_{\mathbb{R}^n} dy \varepsilon_n(x-y,t) U_1(y) + \int_{\mathbb{R}^n} dy \varepsilon_n'(x-y,t) U_0(y)$$

При підстановці:

$$\varepsilon_1 \to формула\_Д'Аламбера$$
$$\varepsilon_2 \to формула\_Пуассона$$
$$\varepsilon_3 \to формула\_Кірхгофа$$

Конкретизуємо для *n* = *3*:

$$\boxed{U(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|x-y| \le at} \frac{f(y, t - \frac{|x-y|}{a})}{|x-y|} d^3y + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|x-y| = at} U_1(x)\, dS_y + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \Big(\frac{1}{t} \int_{|x-y| \le at} U_0(x)\, dS_y\Big)}$$

dS_y – диференціал поверхні сфери

<u>Доведення</u>: Беремо перетворення Фур'є:

F_x | $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_n\right) U(x,t) = f(x,t),\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0$

| $U(x,0) = U_0(x),\ U_t(x,0) = U_1(x),\ x \in \mathbb{R}^n$

$$\left| \begin{array}{l} \left(\frac{d^2}{dt^2} + a^2|\xi|^2\right) F_x[U](\xi,t) = F_x[f](\xi,t) \\ F_x[U(x,0)] = F_x[U_0](\xi),\quad F_x[U_t(x,0)] = F_x[U_1](\xi) \end{array} \right.$$

Білет 10

1. $\left\| \begin{array}{ll} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \delta(x) g(t), & x = \{x_1, x_2, x_3\} \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & x \in \{x_1, x_2, x_3\} \in \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$

Розв'язок задачі Коші: $u(x,t) = (\mathcal{E}_3 * F)(x,t)$

$F(x,t) = f(x,t)\theta(t) + u_1(x)\delta(t) + u_0(x)\delta'(t) = f(x,t)\theta(t)$

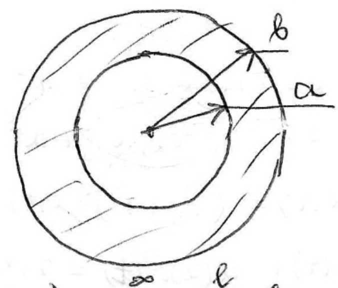
$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|x-y| \le at} \frac{\delta(y) g(t - \frac{|x-y|}{a})}{|x-y|} d^3y + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|x-y|=at} 0 \cdot dS_y + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t} \int_{|x-y| \le at} 0 \cdot dS_y\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|x-y| \le at} \frac{\delta(y) g(t - \frac{|x-y|}{a})}{|x-y|} dy_1 dy_2 dy_3\ ; \quad |x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{g(t - \frac{|x|}{a})}{|x|}, \quad \begin{array}{l} |x| \le at \\ |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \end{array}}$$

2). Задача Діріхле для рівняння Лапласа в кулі

Білет 10



②
$$\begin{cases} \Delta u(r,\theta,\varphi)=0 \\ u(a,\theta,\varphi)=A+B\cos\theta \\ u(b,\theta,\varphi)=0 \end{cases}$$

Розв'язання:

Загальний розв'язок: $u(r,\theta,\varphi) = \sum\limits_{l=0}^{\infty}\sum\limits_{m=-l}^{l}\left(A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)}\right)Y_{lm}(\theta,\varphi)$

Запишемо крайові умови через сферичні ф-ї: $u(a,\theta,\varphi) = \sqrt{4\pi}\,A\,Y_{00} + \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,B\,Y_{10}$

Отже,
$$\begin{cases} u(a,\theta,\varphi) = \sum\limits_{l=0}^{\infty}\sum\limits_{m=-l}^{l}\left(A_{lm}a^l + B_{lm}a^{-(l+1)}\right)Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{4\pi}\,A\,Y_{00} + \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,B\,Y_{10}; \\ u(b,\theta,\varphi) = \sum\limits_{l=0}^{\infty}\sum\limits_{m=-l}^{l}\left(A_{lm}b^l + B_{lm}b^{-(l+1)}\right)Y_{lm}(\theta,\varphi) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_{lm}a^l + B_{lm}a^{-(l+1)} = \sqrt{4\pi}\,A\,\delta_{l,0}\delta_{m,0} + \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,B\,\delta_{l,1}\delta_{m,0} \\ A_{lm}b^l + B_{lm}b^{-(l+1)} = 0 \quad \Rightarrow B_{lm} = A_{lm}b^l b^{l+1} = A_{lm}b^{2l+1} \end{cases}$$

$$A_{lm}\left(a^l + b^{2l+1}a^{-l-1}\right) = A\sqrt{4\pi}\,\delta_{l,0}\delta_{m,0} + \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,B\,\delta_{l,1}\delta_{m,0}$$

$$A_{00} = \frac{\sqrt{4\pi}\,A}{1+b/a}; \quad B_{00} = \frac{\sqrt{4\pi}\,bA}{1+b/a}; \quad A_{10} = \frac{\sqrt{4\pi/3}\,B}{a^1 + b^3/a^2}; \quad B_{10} = \frac{\sqrt{4\pi/3}\,B\,b^3}{a + b^3/a^2}$$

При $(l,m) \neq (0,0);\ (1;0)$

$$\begin{cases} A_{lm}a^l + B_{lm}a^{-(l+1)} = 0 \\ A_{lm}b^l + B_{lm}b^{-(l+1)} = 0 \end{cases} \quad \Delta = a^l b^{-(l+1)} - b^l a^{-(l+1)} \neq 0 \Rightarrow A_{lm} = B_{lm} = 0.$$

В-дь: $u(r,\theta,\varphi) = \left(A_{00} + \frac{B_{00}}{r}\right)Y_{00} + \left(A_{10}r + \frac{B_{00}}{r^2}\right)Y_{10}$

$$A_{00} = \frac{2aA\sqrt{\pi}}{a+b} \quad B_{00} = \frac{2abA\sqrt{\pi}}{a+b} \quad A_{10} = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,\frac{a^2B}{a^3+b^3} \quad B_{10} = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,\frac{a^2b^3B}{a^3+b^3};$$

3). Звести до канонічного вигляду

Білет 10

③. Звести до канонічного вигляду $yu_{xx} + xu_{yy} = 0$

$\Delta = -xy$

1). $\Delta = 0$ – параболічний тип $\Rightarrow x = 0$ або $y = 0$, тобто маємо канонізоване рівняння $\boxed{u_{xx} = 0}$ або $\boxed{u_{yy} = 0}$

2). $\Delta = -xy > 0$ – гіперболічний тип, $\Rightarrow xy < 0$

а). $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$ $\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{y}} \Rightarrow \sqrt{y}\,dy = \pm\sqrt{-x}\,dx \Rightarrow \frac{2}{3}y^{3/2} = \pm\frac{2}{3}(-x)^{3/2} + C_{1,2}$

$\Rightarrow \begin{cases} \xi = \frac{2}{3}y^{3/2} + \frac{2}{3}(-x)^{3/2} \\ \eta = \frac{2}{3}y^{3/2} - \frac{2}{3}(-x)^{3/2} \end{cases}$ $\xi_x = -(-x)^{1/2}$ $\xi_y = y^{1/2}$; $\eta_x = (-x)^{1/2}$ $\eta_y = y^{1/2}$

$u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x = \sqrt{-x}(u_\eta - u_\xi)$

$u_{xx} = -\frac{1}{2\sqrt{-x}}(u_\eta - u_\xi) + \sqrt{-x}(u_{\eta\eta}\eta_x + u_{\eta\xi}\xi_x - u_{\xi\xi}\xi_x - u_{\xi\eta}\eta_x) =$

$= \frac{u_\xi - u_\eta}{2\sqrt{-x}} + \sqrt{-x}(u_{\eta\eta}\sqrt{-x} - u_{\eta\xi}\sqrt{-x} + u_{\xi\xi}\sqrt{-x} - u_{\xi\eta}\sqrt{-x}) =$

$= \frac{u_\xi - u_\eta}{2\sqrt{-x}} - x(u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} - 2u_{\eta\xi})$

$u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y = \sqrt{y}(u_\xi + u_\eta)$; $u_{yy} = \frac{u_\xi + u_\eta}{2\sqrt{y}} + \sqrt{y}(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y + u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) =$

$= \frac{u_\xi + u_\eta}{2\sqrt{y}} + (u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})\sqrt{y}^2$; Підставимо у вихідне р-ня:

$\frac{y}{2\sqrt{-x}}(u_\xi - u_\eta) - yx(\cancel{u_{\eta\eta}} + \cancel{u_{\xi\xi}} - 2u_{\eta\xi}) + \frac{x}{2\sqrt{y}}(u_\xi + u_\eta) + yx(\cancel{u_{\eta\eta}} + \cancel{u_{\xi\xi}} + 2u_{\xi\eta}) = 0$

$\frac{y}{2\sqrt{-x}}(u_\xi - u_\eta) + \frac{x}{2\sqrt{y}}(u_\xi - u_\eta) + 4xyu_{\eta\xi} = 0 \Rightarrow u_\xi\left(\frac{y}{2\sqrt{-x}} + \frac{x}{2\sqrt{y}}\right) + u_\eta\left(\frac{x}{2\sqrt{y}} - \frac{y}{2\sqrt{-x}}\right) + 4xyu_{\eta\xi} = 0$

$u_\xi\frac{y\sqrt{y} + x\sqrt{-x}}{2\sqrt{-xy}} + u_\eta\frac{x\sqrt{-x} - y\sqrt{y}}{2\sqrt{-yx}} + 4xyu_{\eta\xi} = 0 \Rightarrow u_{\eta\xi} + \frac{1}{8\sqrt{-xy}^3}\frac{3}{2}(\xi u_\xi - \eta u_\eta) = 0$

$\xi^2 - \eta^2 = \frac{4}{9}(4y^{3/2}(-x)^{3/2}) \Rightarrow (-yx)^{3/2} = \frac{9}{16}(\xi^2 - \eta^2)$

$u_{\eta\xi} + \frac{3}{16}\frac{9}{16}\frac{1}{\xi^2 - \eta^2}(\xi u_\xi - \eta u_\eta) = 0 \Rightarrow \boxed{u_{\eta\xi} + \frac{\xi u_\xi - \eta u_\eta}{\xi^2 - \eta^2} = 0}$ – канонізоване (гіперболічного типу)

Все буде аналогічно і для випадку $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$, що можна досягти заміною $x \leftrightarrow y$.

3). $\Delta = -xy < 0$ – еліптичний тип $\Rightarrow xy > 0$ а). $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ б). $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$

$\frac{dy}{dx} = \pm i\left(\frac{x}{y}\right)^{1/2} \Rightarrow \frac{2}{3}y^{3/2} \pm i\frac{2}{3}x^{3/2} = C_{1,2} \Rightarrow \xi = Re(\ldots) = \frac{2}{3}y^{3/2}$; $\eta = Im(\ldots) = \frac{2}{3}x^{3/2}$

$\xi_x = 0$ $\eta_x = \sqrt{x}$ $u_{xx} = (u_\xi\overset{0}{\xi_x} + u_\eta\eta_x)_x = u_{\eta\eta}\cdot x$

$\xi_y = \sqrt{y}$ $\eta_y = 0$ $u_{yy} = yu_{\xi\xi}$

$\Rightarrow xyu_{\eta\eta} + xyu_{\xi\xi} = 0$

$\boxed{u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} = 0}$ – канонізов. еліптичного типу.