 об учебнике | содержание | поиск

6.2. Плотность квантовых состояний

Выявленные в предыдущем разделе особенности в поведении частиц, связанные с неразличимостью тождественных частиц в квантовой механике, проявляются и в статистических свойствах систем, состоящих из одинаковых частиц. Это приводит к тому, что статистические распределения частиц в квантовой механике отличаются от статистических распределений, известных из классической физики. Кроме того, статистические свойства бозе- и ферми-частиц в силу кардинального различия в поведении этих частиц также оказываются различными.

Найдем число квантовых состояний, по которым могут распределяться частицы, энергия которых не превышает некоторого значения E . Определим это число для случая электрона, находящегося в трехмерной потенциальной яме с непроницаемыми стенками. Согласно (4.27) энергия электрона в такой яме описывается выражением

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_0}\left(\left(\frac{n_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{a_3}\right)^2\right), \qquad \textbf{(6.20)}$$

где a_1, a_2 и a_3 - стороны прямоугольного параллелепипеда, а квантовые числа n_1, n_2, n_3 = 1, 2, 3, ... Из (6.20) следует, что энергия электрона меняется не непрерывным образом, а дискретно, поскольку квантовые числа n_1, n_2 и n_3 могут принимать только целочисленные значения. Однако, нас будут интересовать значения энергии E , существенно превышающие энергию основного состояния, для которого $n_1 = n_2 = n_3 = 1$. В этом случае изменение энергии от уровня к уровню ΔE будет значительно меньше самого значения энергии E , так что можно считать, что энергия электрона меняется практически непрерывно (квазинепрерывно).

Рассмотрим пространство квантовых чисел, т.е. трехмерное пространство, вдоль трех взаимно перпендикулярных осей которого отложены квантовые числа n_1, n_2, n_3 (рис.6.1) . Точку этого

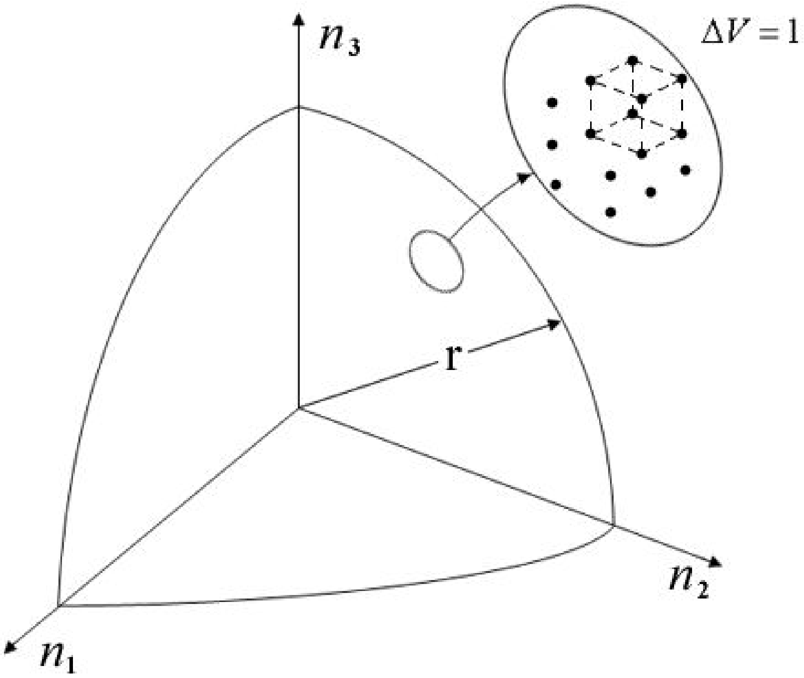

Рис. 6.1.

пространства , которая отвечает определенному набору целых чисел (n_1, n_2, n_3), будем называть узлом. Каждому узлу в пространстве квантовых чисел соответствует определенное квантовое состояние электрона, точнее не одно, а два состояния, которые различаются проекциями спина электрона $\left(\pm\dfrac{1}{2}\right)$. Объем ΔV в пространстве квантовых чисел, приходящийся на один узел, равен единице, т.е. $\Delta V = 1$.

Найдем число G состояний электрона, энергия которого не превышает некоторое фиксированное значение E . Введем обозначение

$$r^2 = (a_2 a_3 n_1)^2 + (a_1 a_3 n_2)^2 + (a_1 a_2 n_3)^2$$

и перепишем соотношение (6.5) в виде

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 (a_1 a_2 a_3)^2} r^2 .$$

Выражая отсюда r , получаем

$$r = \frac{a_1 a_2 a_3 \sqrt{2m_0 E}}{\pi \hbar}. \qquad \textbf{(6.21)}$$

Рассмотрим сферу радиуса r (рис.6.1) . Искомое число квантовых состояний определяется числом узлов, находящихся внутри положительного октанта сферы радиуса r . То обстоятельство, что мы рассматриваем не всю сферу, а только ее октант с положительными значениями квантовых чисел n_1 , n_2 и n_3, обусловлено тем, что в нашей задаче $n_1,\ n_2,\ n_3 > 0$.

Для того, чтобы найти число состояний N, нужно объем октанта (т.е. $1/8$ часть объема сферы) разделить на объем ΔV, приходящийся на один узел, и умножить получившееся выражение на коэффициент 2 , определяющий число возможных проекций спина электрона

$$G = \frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi r^3 \frac{1}{\Delta V} 2 = \frac{1}{3}\pi r^3 \frac{1}{\Delta V}.$$

Подставляя в это соотношение выражение для r (6.21) и учитывая, что $\Delta V = 1$, получаем

$$G = \frac{1}{3}\pi \frac{\left(\sqrt{2m_0 E}\right)^3}{\pi^3 \hbar^3} a_1 a_2 a_3 . \qquad \textbf{(6.22)}$$

Поскольку произведение $a_1 a_2 a_3$ представляет собой объем потенциальной ямы V, а $\sqrt{2m_0 E}$ есть нерелятивистский импульс электрона p , то соотношение (6.22) можно представить в виде

$$G = 2\frac{4}{3}\pi p^3 V \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}. \qquad \textbf{(6.23)}$$

Для того, чтобы наиболее отчетливо выявить смысл полученного выражения, рассмотрим *фазовое пространство* - шестимерное пространство с взаимно перпендикулярными осями x, y, z, p_x, p_y, p_z . Полный объем в этом пространстве $V_{фаз}$ равен произведению объема в пространстве координат V на объем в пространстве импульсов $\dfrac{4}{3}\pi p^3$. Здесь p - максимальный импульс электрона, соответствующий максимальной энергии E . Таким образом,

$$V_{фаз} = V\frac{4}{3}\pi p^3 \qquad \textbf{(6.24)}$$

и выражение (6.23) принимает вид

$$G = 2\frac{V_{фаз}}{(2\pi\hbar)^3}. \qquad \textbf{(6.25)}$$

Множитель 2 в (6.25) , как уже отмечалось, определяет число возможных проекций спина электрона, а множитель $\frac{V_{фаз}}{(2\pi\hbar)^3}$ определяет число состояний, связанных с движением электрона в яме. Подчеркнем, что число состояний G пропорционально фазовому объему $V_{фаз}$.

Отметим еще один важный результат, вытекающий из соотношения (6.25). Из вида (6.25) следует, что объем фазового пространства, приходящийся на одно квантовое состояние, равен $(2\pi\hbar)^3$. Запишем это утверждение следующим образом

$$\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta p_z = (2\pi\hbar)^3 , \qquad \textbf{(6.26)}$$

где Δx, Δy, Δz, Δp_x, Δp_y, Δp_z - размеры ячейки в фазовом пространстве, приходящейся на одно состояние. Поскольку все пространственные координаты x, y и z равноправны, то для одной координаты, например x , получаем

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = 2\pi\hbar .$$

Таким образом, *в фазовом пространстве на одно состояние для каждой координаты приходится объем, равный* $2\pi\hbar$.

Этот результат, как легко видеть, согласуется с принципом неопределенности. Действительно, размеры ячейки фазового пространства, приходящейся на одно состояние, должны определяться теми ограничениями на значения координаты и импульса, которые накладывают соотношения неопределенностей (2.16).

Напомним, что выражение (6.25) было получено для случая электрона, движущегося в трехмерной потенциальной яме (потенциальном ящике). Обобщение этого результата на случай произвольной частицы, движущейся в яме произвольной формы, приводит к следующему соотношению

$$G = J_s\frac{V_{фаз}}{(2\pi\hbar)^3}. \qquad \textbf{(6.27)}$$

Здесь множитель J_s определяет число состояний, не связанных с перемещением частицы в пространстве (например, число возможных проекций спина).

Найдем теперь *плотность квантовых состояний* $g(E)$, т.е. число состояний, приходящихся на единичный интервал энергий. Согласно определению,

$$g(E) = \frac{G(E+dE) - G(E)}{dE} = \frac{dG(E)}{dE}.$$

Перепишем это выражение в виде

$$g(E) = \frac{dG}{dp}\cdot\frac{dp}{dE}.$$

С учетом (6.24) , (6.27) получаем

$$g(E) = J_s\frac{dp}{dE}\frac{d}{dp}\left(\frac{4}{3}\frac{\pi p^3 V}{(2\pi\hbar)^3}\right),$$

или, в окончательном виде

$$g(E) = J_s \frac{4\pi p^2 V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{dp}{dE}. \qquad \textbf{(6.28)}$$

Выражение (6.28) является общим, т.е. справедливым для любых частиц. Найдем с его помощью плотность квантовых состояний для электронов и фотонов.

Для нерелятивистских электронов $p = \sqrt{2m_0 E}$, а множитель J_s = 2. Подставляя эти значения в (6.28) , получаем

$$g_{эл}(E) = \frac{\sqrt{2} m_0^{\frac{3}{2}}}{\pi^2 \hbar^3} V \sqrt{E}. \qquad \textbf{(6.29)}$$

Для фотонов $p = \frac{E}{c}$, где c - скорость света в вакууме, а множитель J_s также равен двум, поскольку из-за поперечности световой волны проекция спина фотона может принимать два значения. Следовательно

$$g_{фот}(E) = \frac{V}{\pi^2 c^3 \hbar^3} E^2. \qquad \textbf{(6.30)}$$

предыдущая | наверх | следующая

 об учебнике | содержание | поиск