3-ти ф-ю відгуку NaCl

Маємо рівняння руху

$$m\ddot{z} - 2\gamma m\dot{z} + 2\alpha\dot{z} = E_0 e^{i\omega t}$$

$$\ddot{z} - 2\gamma\dot{z} + \frac{2\alpha}{m} z = E_0 e^{-i\omega t}$$

$$\ddot{z} - 2\gamma\dot{z} + \Omega^2 z = E_0 e^{-i\omega t}$$

Внесок частоти ω усереднює потенціал, який створений усіма частинками для одного іона z - відстань зміщення m - ефективна маса. Будемо шукати розв'язок у вигляді $z(t)=Ae^{-i\omega t}$

$$A(-i\omega)^2 e^{-i\omega t} - 2\gamma(-i\omega)Ae^{-i\omega t} +$$

$$+\Omega^2 Ae^{-i\omega t} = E_0 e^{-i\omega t}$$

$$A(2\gamma i\omega + \Omega^2 - \omega^2) = E_0$$

$$A = \frac{E_0}{2\gamma i\omega + \Omega^2 - \omega^2}$$

Маємо: $\bar{p} = \alpha \bar{E}$

$\underline{nq\bar{z}} = \alpha E$

$$\frac{nqE_0}{2\gamma i\omega + \Omega^2 - \omega^2} = \alpha E_0$$

$$\alpha(\omega) = \frac{nqE_0}{\Omega^2 - \omega^2 + 2\gamma i\omega}$$

(14) Знайти $\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\vec{A})+\frac{\partial}{\partial y}(\varphi\vec{A})+\frac{\partial}{\partial r}(\varphi\vec{A})$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\vec{A})=\vec{A}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\varphi\frac{\partial A}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{x}{r}A+\varphi\frac{d\vec{A}}{dr}\cdot\frac{x}{r}}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}$$

$$(\vec{A}\nabla)\varphi(r)\vec{A}(\vec{r})=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}\vec{A}+\varphi\frac{x}{r}\frac{d\vec{A}}{dr}+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{y}{r}\vec{A}+$$

$$+\varphi\frac{y}{r}\frac{d\vec{A}}{dr}+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{z}{r}\vec{A}+\varphi\frac{z}{r}\frac{d\vec{A}}{dr}=$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\vec{A}}{r}(x+y+z)+\frac{\varphi}{r}\frac{d\vec{A}}{dr}(x+y+z)=$$

$$=\frac{\dot{\varphi}\vec{A}\cdot\vec{r}}{r}+\frac{\varphi}{r}\dot{\vec{A}}\vec{r}=\frac{\vec{r}}{r}(\dot{\varphi}\vec{A}+\varphi\dot{\vec{A}})$$

(15) Знайти напруженість поля, якщо задано $\varphi = \vec{a}[\vec{b}\vec{r}]$

$[\vec{b}\vec{r}] = \vec{c} \quad \varphi = \vec{a}\vec{c}; \quad [\vec{d} \times [\nabla_f \times \vec{f}]] =$
$= \vec{\nabla}_f(\bar{d}\bar{f}) - \bar{f}(\bar{d}\bar{\nabla}_f) \Rightarrow \nabla_f(\bar{d}\bar{f}) =$
$= [\bar{d} \times [\bar{\nabla}_f \times f]] + f(\bar{d}\bar{\nabla}_f);$ (1)
$[\bar{f} \times [\nabla_d d]] = \nabla_d(fd) - d(f\nabla) \Rightarrow$
$\Rightarrow \nabla_d(fd) = [\bar{f} \times [\nabla_d d]] + d(f\nabla_d)$ (2)

$grad\ \vec{f}\vec{d} = \nabla_f(fd) + \nabla_d(fd) = (1) + (2)$

підставимо $\bar{a} \to \bar{d}$, $\bar{c} \to \bar{f}$, $\bar{a}$ - пост. вект.
$grad\ (\bar{a}\bar{c}) = [\bar{a}[\nabla_c c]] + [\bar{c}[\nabla_a a]] +$
$+ \bar{c}(\bar{a}\nabla_c) + a(\bar{c}\nabla_a)$
Представивши $c = [b r]$

$grad\ (\bar{a}[br]) = [\bar{a} \times [d \times [b \times r]]] + [[br] \times$

$\times [\nabla_d \bar{a}]] + [b \times r](a\nabla_b r) + d([b \times \bar{r}]\nabla_a)$

$rot[\vec{b}\vec{r}] = 2B$

$grad\ (\bar{a}[\bar{b}\bar{r}]) = [\bar{a} \times 2\bar{b}] + [\bar{b} \times \bar{r}](a\nabla_b r)$

(16) Заряд $\bar{e}$ распределен в атоме H, нах. в нормальном состоянии с плотностью $\rho(r) = -\frac{e_0}{\pi a^3} \times \exp\left[-\frac{2r}{a}\right]$. Найти φ_e, E_{er} — эл. поле эл. заряда, а также

$$E_e(r) = \frac{4\pi}{r^2}\int_0^r r'^2\left(-\frac{e_0}{\pi a^3}\right)\exp\left[-\frac{2r'}{a}\right]dr' =$$

$$= -\frac{4\pi e_0}{\pi a^3 r^2}\int_0^r r'^2 e^{-\frac{2r'}{a}}\,dr' = \left|\begin{array}{l} r'^2 = u \\ du = 2r'dr' \\ e^{-2r'/a}dr = dV \\ V = -\frac{a}{2}e^{-2r'/a} \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{4\pi e_0}{a^3 r^2}\left[-r'^2\frac{a}{2}e^{-\frac{2r'}{a}}\Big|_0^r + 2\frac{a}{2}\int_0^r e^{-\frac{2r'}{a}}r'dr'\right] =$$

$$= -\frac{4\pi e_0}{a^3 r^2}\left[-\frac{a}{2}r^2 e^{-2r/a} + \frac{a}{2}\left(r'\left(-\frac{a}{2}\right)e^{-\frac{2r'}{a}}\Big|_0^r +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{a}{2}\int_0^r e^{-2r'/a}dr'\right)\right] = -\frac{4\pi e_0}{a^3 r^2}\left[-\frac{a}{2}r^2 e^{-\frac{2r}{a}} -\right.$$

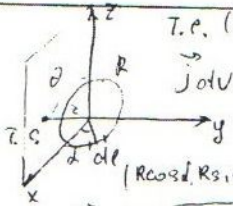
$$\left. -\frac{a^2}{2}r\cdot e^{-\frac{2r}{a}} - \frac{a^3}{4}e^{-2r/a} + \frac{a^3}{4}\right] =$$

$$= -\frac{4\pi e_0}{a^3 r^2}\left[\frac{\pi e_0}{\pi}e^{-2r/a}\left(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{a^2} + \frac{1}{r^2}\right] - \frac{e_0}{4r^2}\right.$$

$$E_e(r) = e_0 e^{-\frac{2r}{a}}\left(\frac{2}{a^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{2}{a^2}\right) - \frac{e_0}{r^2} - \text{н.}$$

екранований заряд

(17) Поле кільцевого струму в довільній точці і на осі



т. Р. $(z\sin\theta, 0, z\cos\theta)$

$\vec{j}\,dV = J\,d\vec{l}$ — j — густина струму, J — струм

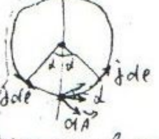
$\vec{A} = \frac{1}{c}\int \frac{J\,d\vec{l}}{|\vec{r}'-\vec{r}|}$

$(R\cos\alpha, R\sin\alpha, 0)$ — $d\vec{l}$

$|d\vec{A}| = 2J\,R\,d\alpha\cos\alpha$

$$A_\varphi = \frac{2JR}{c}\int_0^\pi \frac{\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{z^2+R^2-2Rz\sin\theta\cos\alpha}} =$$

$\sqrt{(z\sin\theta-R\cos\alpha)^2+R^2\sin^2\alpha+z^2\cos^2\theta}$

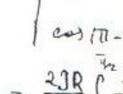


прирівняти в дот. 2 симетр. відр. зі струмом.

$$= \left|\begin{array}{l} \alpha = \pi - 2\beta \\ d\alpha = -2d\beta \quad \alpha = 0 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} \\ \qquad\qquad\quad \alpha = \pi \Rightarrow \beta = 0 \\ \cos(\pi-2\beta) = -\cos 2\beta = -1+2\sin^2\beta \end{array}\right| =$$

$$= \frac{2JR}{c}\int_0^{\pi/2} \frac{-(2\sin^2\beta-1)\,d\beta}{\sqrt{z^2+R^2+2z\sin\theta-4zR\sin\theta\sin^2\beta}} =$$

$$= \frac{4JR}{c\sqrt{z^2+R^2+2zR\sin\theta}}\left[-\frac{2}{k^2}\int_0^{\pi/2}\frac{1-k^2\sin^2\beta-1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}\,d\beta - \int_0^{\pi/2}\frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}\right] \stackrel{..}{=} \left(E(k) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}\,d\beta \text{ - повний еліптичний інт. ІІ р.} \right)$$



$$\stackrel{..}{=} \frac{4JR}{c\sqrt{z^2+R^2+2zR\sin\theta}}\left[-\frac{2}{k^2}E(k) + \left(\frac{2}{k^2}-1\right)K(k)\right]$$

$$\left\{ A_\varphi\big|_{\theta=0} = \frac{4JR}{c\sqrt{z^2+R^2}}\left[-\frac{2}{0}\,\frac{\pi}{2} + \left(\frac{2}{0}-1\right)\frac{\pi}{2}\right] \right\}$$

(18) Знайти $\mathrm{grad}\left(\vec{A}(r)\cdot\vec{r}\right)$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \cancel{2}r\frac{\partial r}{\partial x} = \cancel{2}x$$

$$\frac{\partial \vec{A}(r)\vec{r}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[A_x x + A_y y + A_z z\right] = \frac{\partial A_x}{\partial x}x + \frac{\partial A_y}{\partial y}y +$$

$$+ \frac{\partial A_z}{\partial x}z + A_x = \left(\left\{\frac{\partial A_i}{\partial x} = \frac{\partial A_i}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \dot{A}_i\frac{x}{r}\right\}\right) =$$

$$= \dot{A}_x\frac{x^2}{r} + \dot{A}_y\frac{y}{r}x + \dot{A}_z\frac{z}{r}x + A_x = \frac{x}{r}\left(\dot{A}_x x +\right.$$

$$\left. + \dot{A}_y y + \dot{A}_z z\right) + A_x = \frac{x}{r}\left(\dot{\vec{A}}\vec{r}\right) + A_x$$

$$\mathrm{grad}\left(\vec{A}(r)\vec{r}\right) = \left\{\frac{x}{r}\left(\dot{\vec{A}}\vec{r}\right) + A_x;\ \frac{y}{r}\left(\dot{\vec{A}}\vec{r}\right) + A_y;\right.$$

$$\left.\frac{z}{r}\left(\dot{\vec{A}}\vec{r}\right) + A_z\right\} = \frac{\left(\dot{\vec{A}}\vec{r}\right)}{r}\left\{x, y, z\right\} + \left\{A_x, A_y, A_z\right\} =$$

$$= \frac{\left(\dot{\vec{A}}\vec{r}\right)}{r}\vec{r} + \vec{A}$$

Знайти $\mathrm{grad}\,\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}$

$x = r\sin\theta\cos\alpha,\ y = r\sin\theta\sin\alpha$

$z = r\cos\theta$

$$\vec{A} = \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{p}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left\{x, y, z\right\} = \frac{\vec{p}}{r^3}\left\{x, y, z\right\}$$

$$r^{3/2} = \left[r^2\sin^2\theta\cos^2\alpha + r^2\sin^2\theta\sin^2\alpha + r^2\cos^2\theta\right]^{3/2} =$$

$$= r^{6/2} = r^3$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\vec{A} = \vec{p}\left[\frac{-2\sin\theta\cos\alpha}{r^3},\ \frac{-2\sin\theta\sin\alpha}{r^3},\ \frac{-2\cos\theta}{r^3}\right]$$

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial\theta} = \frac{\vec{p}}{r^3}\left[r\cos\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha \cdot r\sin\theta\right]$$

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial\alpha} = \frac{\vec{p}}{r^3}\left[-r\sin\theta\sin\alpha + r\sin\theta\cos\alpha + 0\right]$$

$$\mathrm{grad}\,\vec{A} = \vec{e}_r\frac{\partial\vec{A}}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\frac{\partial\vec{A}}{\partial\theta} + \frac{\vec{e}_\alpha}{r\sin\alpha}\frac{\partial A}{\partial\alpha}$$

(19) Знайти grad $\vec{A}(r)\vec{B}(r)$

$$\frac{\partial \vec{A}(r)\vec{B}(r)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[A_i B_i\right] = \frac{\partial A_i}{\partial x} B_i + A_i \frac{\partial B_i}{\partial x} = \dot{A}_i B_i \frac{x}{r} +$$

$$+ \dot{B}_i A_i \frac{x}{r}$$

$$= \dot{A}_x B_x \frac{x}{r} + \dot{B}_x A_x \frac{x}{r} + \dot{A}_y B_y \frac{x}{r} + A_y \dot{B}_y \frac{x}{r} +$$

$$+ \dot{A}_z B_z \frac{x}{r} + A_z \dot{B}_z \frac{x}{r} = \frac{x}{r}\left\{ \dot{A}_x B_x + \dot{A}_y B_y + \dot{A}_z B_z + \right.$$

$$\left. + \dot{B}_x A_x + \dot{B}_y A_y + \dot{B}_z A_z \right\} = \frac{x}{r}\left[\dot{\vec{A}}\vec{B} + \dot{\vec{B}}\vec{A}\right]$$

$$\mathrm{grad}\, \vec{A}(r)\vec{B}(r) = \left\{ \frac{x}{r}\left[\dot{\vec{A}}\vec{B} + \dot{\vec{B}}\vec{A}\right], \frac{y}{r}\left[\dot{\vec{A}} \ldots\right], \frac{z}{r}\left[\ldots\right] \right\}$$

$$= \frac{\vec{r}}{r}\left[\dot{\vec{A}}\vec{B} + \dot{\vec{B}}\vec{A}\right].$$

Знайти $\mathrm{div}\, \varphi(r)\vec{A}(r) =$

$$= \varphi(r)\,\mathrm{div}\,\vec{A}(r) + \vec{A}(r)\,\mathrm{grad}\,\varphi(r) \ominus$$

$$\mathrm{div}\,\vec{A}(r) = \dot{A}_x \frac{x}{r} + \dot{A}_y \frac{y}{r} + \dot{A}_z \frac{z}{r} = \frac{1}{r}(\dot{\vec{A}}\vec{r})$$

$$\frac{\partial \vec{A}(r)}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \dot{A}_x \frac{x}{r}$$

$$\mathrm{grad}\,\varphi(r) = \dot{\varphi}\left\{\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right\} = \dot{\varphi}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\frac{\partial \varphi(r)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \dot{\varphi}\frac{x}{r}$$

$$\ominus \frac{\varphi(r)}{r}\left(\dot{\vec{A}}\cdot\vec{r}\right) + \vec{A}(r)\,\dot{\varphi}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\varphi(r)}{r}\left(\dot{\vec{A}}\cdot\vec{r}\right) +$$

$$+ \left(\vec{A}(r)\vec{r}\right)\frac{\dot{\varphi}}{r}$$

Знайти $\mathrm{rot}\,\varphi(r)\vec{A}(r) = \varphi\,\mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\times\mathrm{grad}\,\varphi \ominus$

$$\mathrm{rot}\,\vec{A}(r) = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x\left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right] -$$

$$- \vec{e}_y\left[\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right] + \vec{e}_z\left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right] =$$

$$= \vec{e}_x\left[\dot{A}_z \frac{y}{r} - \dot{A}_y \frac{z}{r}\right] - \vec{e}_y\left[-\dot{A}_x \frac{z}{r} + \dot{A}_z \frac{x}{r}\right] +$$

$$+ \vec{e}_z\left[\dot{A}_y \frac{x}{r} - \dot{A}_x \frac{y}{r}\right] = \frac{1}{r}\left[\vec{r}\times\dot{\vec{A}}\right]$$

$$\ominus \frac{\varphi}{r}\left[\vec{r}\times\dot{\vec{A}}\right] + \frac{\dot{\varphi}}{r}\left[\vec{r}\times\vec{A}\right]$$

(20) Магнітне поле кільця зі струмом

$$d\bar{l} \perp \bar{R}$$

$$dB = \frac{J[d\vec{l}\cdot\vec{R}]}{R^3} = \frac{J\,dl}{R^2}$$

$$B = \frac{J 2\pi R}{R^2} \Rightarrow B = \frac{2\pi J}{R} \quad CGSM$$

Нерівномірно заряджена куля $\rho = a r^2$

$$\int\limits_{(S)} \vec{D}\vec{n}\,dS = 4\pi \int\limits_{\tau} \rho\, d\tau$$

$$e_{з\cdot зміщ} = \int\limits_0^R 4\pi r^2 \rho(r)\, dr = 4\pi \int\limits_0^R a r^4 dr =$$

$$= \frac{4\pi a}{5} R^5$$

а) $r \geq R$ $\quad \bar{E} = \frac{e}{r^3}\bar{r} \Rightarrow E = \frac{e}{r^2} = \frac{4\pi a R^5}{5 r^2}$

$$\varphi = \frac{e}{r} = \frac{4\pi a}{5r} R^5, \quad \varphi(R) = \frac{4\pi a}{5} R^4$$

б) $r \leq R$ $\quad \cancel{4\pi} r^2 D = 4\pi \int\limits_0^r \rho 4\pi r'^2 dr = \cancel{4\pi} \frac{4\pi}{5} a r^5$

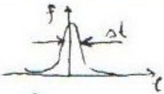
$$D = \frac{4\pi}{5} a r^3, \quad E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{4\pi a r^3}{5\varepsilon}$$

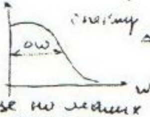
$$\varphi(r) - \varphi(R) = \int\limits_r^R \frac{4\pi a r^3}{5\varepsilon} dr = \frac{\pi a}{5\varepsilon}(R^4 - r^4)$$

$$\varphi(r) = \frac{4\pi}{5} a R^4 - \frac{\pi a}{5\varepsilon}(R^4 - r^4)$$

(21) Частица с з-дом e и ск. v упруго отражается от пл-ти. Определить длинноволновую часть спектра ... излучения в момент удара.

Прискорення є тільки в момент удару, а потім зникає => теж є тіл. в момент удару f - ф-я взаємодії

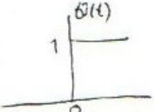




спектр $\Delta t \Delta\omega \approx 2\pi$

Ми розглядаємо малі частоти <=> довгі хвилі → за од. пором. час шв-ть змін-ся на протилежну

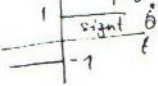
це на малих частотах



$$v_z = \begin{cases} v_0\cos\theta, & t<0 \\ -v_0\cos\theta, & t>0 \end{cases} \to v_0\cos\theta\, \mathrm{sign}\, t$$

$$\mathrm{sign}\, t = 2\left(\theta - \tfrac{1}{2}\right)$$

$$v_z = 2v_0\cos\theta\left(\theta - \tfrac{1}{2}\right)$$



Ф-я хевісайда $\dot\theta(t) = \delta(t)$

$$d = re, \quad d_z = z_z e = \dot v_z e =$$

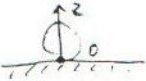
$$= -2e\left(v_0\cos\theta\left(\theta(t) - \tfrac{1}{2}\right)\right)' = -2ev_0\cos\theta\,\delta(t)$$

$$(\ddot d_z)_\omega = -\int \ddot d_z e^{i\omega t}dt = -2ev_0\cos\theta\int\delta(t)e^{i\omega t}dt =$$

$$= -2ev_0\cos\theta$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{2}{3\pi c^3}\left|\ddot d_\omega\right|^2 = \frac{2}{3\pi c^3}4e^2v_0^2\cos^2\theta =$$

$$= \frac{8e^2}{3\pi c^3}v_0^2\cos^2\theta$$



вздовж площини вип. нема.

(22)

$\sigma = const$

$$dS = r\,dr\,d\alpha$$

$$d\ell = \sigma r\,dr\,d\alpha$$

$$dE = \frac{d\ell}{\rho^2} = \frac{\sigma r\,dr\,d\alpha}{\rho^2}$$

$$dE\cos\varphi = \frac{\sigma r\,dr\,d\alpha}{\rho^2}\cos\varphi$$

$$dE\cos\varphi = 2\pi\sigma\,\frac{r\,dr\cos\varphi}{\rho^2}$$

$$r = \ell\,tg\,\varphi, \quad \rho = \ell/\cos\varphi$$

$$dr = \frac{\ell}{\cos^2\varphi}\,d\varphi$$

$$dE\cos\varphi = 2\pi\sigma\,\frac{\ell\,tg\varphi\,\ell\,d\varphi\cos\varphi\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi\,\ell^2} =$$

$$= 2\pi\sigma\sin\varphi\,d\varphi$$

$$E = 2\pi\sigma(1-\cos\varphi) = 2\pi\sigma\left(1 - \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+R^2}}\right)$$

23) При яких умовах по-ть магн. дипол. випром. не зал. від вибору поч. коорд.

$$\vec M = \frac{1}{2c}\int_V [\vec r' \times \vec j(\vec r', t)]\, dV, \quad \vec r \to \vec a + \vec r'$$

$$\vec M = \frac{1}{2c}\int_V [(\vec a + \vec r') \times \vec j(\vec a + \vec r')]\, dV = \frac{1}{2c}\int_V [\vec r' \times \vec j(\vec a + \vec r')]\, dV' + \frac{1}{2c}\int_V [\vec a \times \vec j(\vec a + \vec r')]\, dV' = \vec M_0 + \frac{1}{2c}\int_V [\vec a \times \vec j]\, dV'$$

$$P = \frac{2}{3c^3}(\ddot{\vec M})^2 \quad P = \frac{2}{3c^3}(\ddot{\vec M}_0)^2$$

$$\ddot{\vec M} = \ddot{\vec M}_0 + \underbrace{\frac{1}{2c}\int [\vec a \times \dot{\vec j}]\, dV'}_{\to 0} \Rightarrow \int_V \dot{\vec j}\, dV = 0$$

$$\vec d = \int_V \rho \vec r\, dV, \quad \dot{\vec d} = \int \vec r\, dV$$

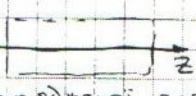
$$\dot{\vec d} = \int \dot\rho \vec r\, dV' \quad \dot{\vec d} = \int_V \vec j\, dV$$

$$\mathrm{div}\,\vec j = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\dot\rho \quad d_x = \int_V j_x\, dV$$

$$(\mathrm{div}\,\vec j)_x = \mathrm{div}(x\vec j) - \vec j_x$$

$$d_x = \int_V (\mathrm{div}\, j)\, x\, dV = -\int \mathrm{div}(x j)\, dV + \int_V j_x\, dV =$$

$$= -\underbrace{\oint x \vec j \vec n\, dS}_{0} + \int j_x\, dV \to \vec d = \mathrm{const}$$



Знайти потенціал φ і напруженість E ел. поля рівномірно зарядженої прямолінійної нитки.

Нехай вона співпадає з віссю z
Маємо

$$\Delta\varphi = 4\pi\rho(r,\varphi,z) \text{ де}$$

$$\rho(r,\varphi,z) = \lambda\delta(r)$$

Очевидно, що розв'язок задачі не залежитеме від r

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = \lambda\delta(r)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = \lambda r\delta(r)$$

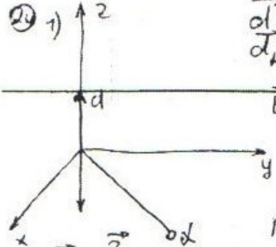
$$r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \int\lambda r\delta(r)\,dr = C_1$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{C_1}{r}$$

$$\varphi = \int\frac{C_1}{r}\,dr = C_1\ln|r| + C_2$$

$$\bar{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{C_1}{r}\bar{e}_r$$

21) 1)



$\vec n = \frac{\vec r}{r}$

$\vec d = \vec d_0 \sin\omega t$

$\vec d_\alpha = \alpha \vec E$

статичне поле диполя

$$\vec E = \frac{3(\vec d \vec n)\vec r - \vec d}{r^3} + \frac{[[\ddot{\vec d} \times \vec n] \times \vec n]}{c^2 r} = -\frac{\vec d}{r^3}$$

Випромінювання диполя

$$\frac{d\omega^2}{c^2 r} = \frac{d}{\lambda^2 r} \ll \frac{d}{r^3}$$

=> час перелету і складова

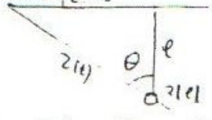
$$\Rightarrow \vec E = \frac{-\vec d}{r^3};\quad \vec d_\alpha = -\frac{\alpha \vec d_0 \sin\omega t}{r^3}$$

$$\Rightarrow p = \frac{2}{3c^3}\left(\ddot{\vec d}\right)^2 = \frac{2}{3c^3}\frac{\alpha d_0}{r^3}\omega d_0^2\omega^4\left(1 - \frac{\alpha}{r^3}\right)^2 \times$$

$$\times \sin^2\omega t = \frac{2}{3c^3}\frac{\alpha^2 d_0^2 \omega^4}{r^6}\sin^2\omega t$$

---

2) $o \to m, e, \vec v_0$



$E = \frac{2}{3c^3}(\ddot{\vec d})^2;\quad \ddot{\vec r} = \frac{\vec E}{m}$

$\vec d = e\vec r(t),\quad p = \frac{2}{3c^3}(\ddot{\vec d})^2,$

$$\vec F = -\frac{ze^2}{r^2} \Rightarrow \ddot{\vec r} = -\frac{ze^2}{mr^2} \qquad E = \int p\,dt$$

$$p = \frac{2}{3c^3}\left(\ell\frac{ze^2}{mr^2}\right)^2 = \frac{2z^2}{3c^3}\frac{e^6}{m^2r^4}$$

$$E = \frac{2z^2e^6}{3m^2c^3}\int\frac{dt}{r^4(t)} = \frac{2z^2e^6}{3m^2c^3}\int\frac{dt}{(v_0^2t^2+\ell^2)^2}$$

$$v_0 t = \sqrt{r^2 - \ell^2} \Rightarrow r = \sqrt{v_0^2t^2 + \ell^2}$$

$$\cos\theta = \frac{\ell}{r};\quad \operatorname{tg}\theta = \frac{v_0 t}{\ell}$$

(25) Заряд распределен сфер. симметр. образом: $\rho = \rho(r)$. Разбив распределение заряда на сферич. слои, выразить через $\rho(r)$ потенциал φ и $\vec{E}$ поле.

$$E = 4\pi r^2 = 4\pi \int_0^r \rho(r) 4\pi r^2 dr \Rightarrow E = \frac{4\pi}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 \times$$

$$\times dr'$$

$$\varphi = -\int_{\infty}^{r} E\, dr = 4\pi \int_r^{\infty} \frac{1}{\tilde{r}^2} \int_0^{\tilde{r}} \rho(r') r'^2 dr' d\tilde{r} =$$

$$= \left| \begin{matrix} dV = \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^2} \\ V = -\frac{1}{\tilde{r}} \end{matrix} \right| = \frac{4\pi}{\tilde{r}} \int_0^{\tilde{r}} \rho(r') r'^2 dr' \Big|_r^{\infty} + 4\pi \int_r^{+\infty} \frac{1}{\tilde{r}} \times$$

$$\times \rho(\tilde{r}) \tilde{r}^2 d\tilde{r}$$

$$\varphi(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + 4\pi \int_r^{\infty} \rho(\tilde{r}) \tilde{r}\, d\tilde{r}$$

$$F(r) = \frac{4\pi}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$$

Заряд $\bar{e}$ распределен в атоме водорода ~~в нормальном состоянии~~ с плотностью $\rho(r) = -\frac{e}{\pi a^3} \times \exp\left[-\frac{2r}{a}\right]$. Найти φ_e, F_e — эл. поле эл-на з-да в (16).

26 Система состоит из частиц, у к-х $\frac{e}{m}$ = const
Показать что в сист. нет дип. излучения

$$\vec d = \sum_i e_i \vec r_i = \sum_i \frac{e_i}{m_i}(m_i \vec r_i) = \frac{e}{m}\underbrace{\frac{\sum(m_i \vec r_i)}{M}}_{=R_ц} M$$

$(\sum_i m_i = M)$. $\vec d = \frac{e}{m} M \vec R_ц$; $\dot{\vec d} = 0$, $\ddot{\vec d} = 0$

$p \sim (\ddot{\vec d})^2 = 0$

—||—||— нет магнитно-дип. излучения

$$P_м = \frac{2}{3c^3}(\ddot{\vec M})^2$$

$$\vec M = \frac{1}{2c}\sum_i [\vec r_i' \vec j(\vec r_i')]$$

$$\vec d = \int_V \rho \, dV$$

$div \vec j = \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\dot\rho$ $\dot{\vec d} = \int \vec j \, dV$; $\dot{\vec d} = \vec j$ плотн. мом. имп.

$$\vec M = \frac{1}{2c}\sum_i e_i\left[\vec r_i \times \frac{d\vec r_i}{dt}\right] = \frac{e}{2mc}\sum_i \overbrace{m[\vec r_i \times \vec v_i]} =$$

$$= \frac{e}{2mc}\vec L = const$$

—||—||— 2 частицы —||—||— нет магн.-дип. изл.

$$\vec M = \frac{1}{2c}\left[e_1\left[\vec r_1 \times \frac{d\vec r_1}{dt}\right] + e_2\left[\vec r_2 \times \frac{d\vec r_2}{dt}\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{2c}\left[\frac{e_1 m_1}{m_1}\left[\vec r_1 \times \frac{d\vec r_1}{dt}\right] + \frac{e_2 m_2}{m_2}\left[\vec r_2 \times \frac{d\vec r_2}{dt}\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{2c}\left[\frac{e_1 \vec L_1}{m_1} + \frac{e_2 \vec L_2}{m_2}\right] = \frac{1}{2c}\left[\frac{e_1 m_2 \vec L_1 + e_2 m_1 \vec L_2}{m_1 m_2}\right]$$

$\vec r_2 = \vec r_1 - \vec r$

$$\vec R = \frac{\vec r_1 m_1 + \vec r_2 m_2}{M}$$

$$\vec r = \vec r_1 - \vec r_2$$

$$\vec r_1 = \vec R + \frac{m_2}{M}\vec r$$

$$\vec R = \frac{1}{M}(\vec r_1 m_1 + \vec r_1 m_2 - \vec r m_2) = \frac{1}{M}(\vec r_1(m_1 + m_2) - \vec r m_2)$$

$$r = \frac{\ell}{\cos\theta}, \quad t = \frac{\ell \, tg\,\theta}{V_0}, \quad dt = +\frac{\ell}{V_0}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$E = \int \frac{2z^2 e^6}{3m^2c^3}\frac{\ell}{V_0}\frac{d\theta\cos^4\theta}{\cos^2\theta\,\ell^4} = \frac{2z^2e^6}{3m^2e^3\ell^3V_0} \times$$

$$\times \int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{\beta}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{\beta}{2}\times$$

$$\times\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{2}}\right] = \frac{\beta}{2}\left[\frac{1}{2}(2)+\pi\right] =$$

$$= \frac{z^2e^6\pi}{3m^2e^3\ell^3V_0}$$

$$T = \frac{mV_0^2}{2}, \quad \frac{E}{T} = \frac{z^2e^6\pi \quad 2}{3m^2e^3\ell^3V_0mV_0^2} \ll 1$$

$$V_0^3 \gg \frac{z^2e^6}{e^3m^3\ell^3}; \quad V_0 \gg \frac{z^{2/3}e^2}{cm\ell}$$

24*

4

(27) Електрон рухається прямол. рівномір

...

$$\varphi(\bar r,t)=\frac{e}{R-\frac{(\bar R\bar v)}{c}}\Big|_{t'=t-\frac{|\bar r-\bar r'|}{c}}$$

$$\vec A(r,t)=\frac{e\bar v}{c\left(R-\frac{(\bar R\bar v)}{c}\right)}\Big|_{t'}$$

$$\vec E=\frac{e\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(\vec R-\frac{\bar v}{c}R\right)}{\left(R-\frac{\bar v\bar R}{c}\right)^3}+\frac{e\left[R\left[\left(\vec R-\frac{\bar v}{c}R\right)\dot{\bar v}\right]\right]}{c^2\left(R-\frac{\bar v\bar R}{c}\right)^2}$$

Розглянемо І доданок

$$=\frac{1}{R}[\bar R E],\quad v=0$$

$$=\frac{e\bar R}{R^3},\ \text{при}\ \frac{v}{c}\ll 1,\ E\sim\frac{1}{R^2}\ i\ H\sim\frac{1}{R^2}$$

$$\bar B\sim\frac{1}{4\pi}[\bar E\bar H]\sim\frac{1}{R^4}$$

Розглянемо ІІ дод.

$$E=\frac{eR^2}{c^2R^3}\sim\frac{1}{R};\quad B\sim\frac{1}{R}$$

$$\bar E=-\operatorname{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\bar A}{\partial t},\quad \vec B=\operatorname{rot}\bar A$$

$$= \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\left[\bar{r}_1(m_1-m_2)-\bar{r}m_2\right]$$

$$\bar{r}_1=\bar{R}+\frac{m_2}{M}\bar{r};\ \bar{r}_2=\bar{R}-\frac{m_1}{M}\bar{r}$$

$$\underline{\bar{R}=0};\ \bar{r}_1=\frac{m_2}{M}\bar{r};\ \bar{r}_2=-\frac{m_1}{M}\bar{r};$$

$$\dot{\bar{r}}_{1,2}=\pm\frac{m_{1,2}}{M}\dot{\bar{r}}$$

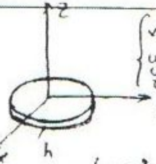
$$\bar{\mu}=\frac{1}{2c}\left(e_1\left(\frac{m_2}{M}\right)^2[\bar{r}\times\dot{\bar{r}}]+e_2\left(\frac{m_1}{M}\right)^2[\bar{r}\times\dot{\bar{r}}]\right)=$$

$$=\frac{1}{2c}[\bar{r}\times\dot{\bar{r}}]\frac{1}{M^2}\left(e_1m_2^2+e_2m_1^2\right)\sim\frac{1}{2c}\bar{N}\frac{1}{M^2}\times$$

$$\times\left(e_1m_2^2+e_2m_1^2\right)=const\Rightarrow\dot{\bar{\mu}}=0=\ddot{\bar{\mu}}$$

26*

(28) Знайти квадруп. мом. с мн, що має ф диско, R, висота h, рівномір. роз. густин. ρ.



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$D_{xx} = \int_0^R \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \times$$

$$\times \left(2\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi - z^2\right) =$$

$$= q\int_0^R \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} \left(2\rho^2\cos^2\varphi h - \rho^2\sin^2\varphi h - \frac{h^3}{R}\right) =$$

$$= q\int_0^R \rho\,d\rho\left(2\rho^2 h - \rho^2\pi h - 2\pi\frac{h^3}{12}\right) = q\int_0^R \left(2\rho^3\pi h - \frac{\pi h^3}{6}\rho\right)d\rho;$$

$$q\left(2\frac{R^4\pi h}{4} - \frac{\pi h^3 R^2}{12}\right) \cdot \frac{q}{4}\left(R^2 - \frac{h^2}{3}\right)$$

$$D_{xx} = D_{yy} = \frac{1}{2}D_{zz}$$

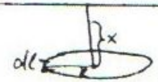
$$D_{xy} = D_{yx} = 0 = h\int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi\, d\varphi = 0$$

$$D_{xz} = D_{zx} = D_{yz} = D_{zy} = 0 \cdot 3\int_0^R \rho\,d\rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \int_0^{2\pi} d\varphi\, \rho z\cos\varphi = 0$$

$$D_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \sum e_k(2x_k^2 - y_k^2 - z_k^2) & 3\sum e_k x_k y_k & 3\sum e_k x_k z_k \\ 3\sum e_k x_k y_k & \sum e_k(2y_k^2 - x_k^2 - z_k^2) & 3\sum e_k y_k z_k \\ 3\sum e_k x_k z_k & 3\sum e_k y_k z_k & \sum e_k(2z_k^2 - y_k^2 - x_k^2) \end{pmatrix}$$

$$D_{xx} = \sum e_k(3x_k^2 - r_k^2) \cdot \sum e_k(2x_k^2 - y_k^2 - z_k^2)$$

(29) Напр. E в центрі і на осі кільця, якщо
$\lambda = \lambda_0 \cos\varphi$



$$\varphi_y = \int_0^{2\pi} \frac{R\lambda_0 \cos\varphi\, d\varphi}{R} =$$

$$= -\lambda_0 \varphi \sin\varphi \Big|_0^{\pi/2} = -\lambda_0 4$$

$E = \frac{h\lambda}{R}$ на осі $\varphi_0 = 4\lambda_0 \int_0^{\pi/2} \frac{R\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{R^2+x^2}} =$

$$= \frac{-4\lambda_0}{\sqrt{R^2+x^2}} \sin\varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{-4\lambda_0 R}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$x \to 0$ $|E| - 4\lambda_0$

$x \to \infty$ $|E| - \infty$

$$|E| = -\operatorname{grad}\varphi = \left| \frac{4\lambda_0 R}{\sqrt{R^2+x^2}} \Big|_x \right| = \frac{4\lambda_0 Rx}{\sqrt{(R^2+x^2)^3}}$$

$$|E| = 4\lambda_0 \int^{\pi/2} \frac{R\cos\varphi\, d\varphi}{R^2+x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} = 4\lambda_0 \frac{Rx}{\sqrt{(R^2+x^2)^3}}$$

$$|E| = 4\lambda_0 \int_0^{\pi/2} \frac{R\cos\varphi\, d\varphi}{R^2+x^2} \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} =$$

$$= 4\lambda_0 \frac{Rx}{\sqrt{(R^2+x^2)^2}}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda_0 R^2 \pi}{(x^2+R^2)^{3/2}}}$$

(33) Електр. рух. прямолін. рівномірно - знайти магн. і ел. поле вектор. потенціалу

$$\varphi(r,t) = \frac{e}{R - \frac{RV}{c}}\Big|_t \quad \bar{A}(r,t) = \frac{e\bar{V}}{c\left(R - \frac{RV}{c}\right)}\Big|_t$$

з цих потенціалів знах. ел. полі

$$\bar{E} = \frac{e(c - V^2/c^2)(\bar{R} - \frac{V}{c}R)}{R - V} + \frac{e(R((R - \frac{VR}{c})\dot{V}))}{c^2(R - \frac{VR}{c})^3}$$

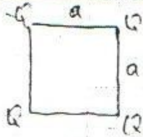
$$\bar{H} = \frac{1}{R}(\bar{R}\bar{E}) \quad V = 0 \quad , \quad \bar{B} = \frac{e\bar{R}}{R^3} \text{ при } \frac{V}{c} \ll 1$$

$$B = \frac{?}{R^2} i \ldots \sim \frac{1}{R^2}, \quad p \sim [\bar{B}\bar{H}] \sim \frac{1}{R^4}$$

Починаючи з моменту $t_0 = 0$ заряд. част. ....

(35) c

(34) Знайти середнє по часу за період обертання $\langle I \rangle$ квадр. випромінюв. зар. рівномірно



$D_{\alpha,\beta}=\sum(x_\alpha x_\beta\ r_i^2)q_i$

$D_{xx}=D_{yy}=Q\left(\frac{3a^2}{2}\cos^2\omega t-\frac{a^2}{2}\right)-Q\left(\frac{3}{2}a^2\sin^2\omega t-\frac{a^2}{2}\right)+Q\left(\frac{3a^2}{2}\cos^2\omega t-\frac{a^2}{2}\right)-Q\left(\frac{3}{2}a^2\sin^2\omega t-\frac{a^2}{2}\right)=3Qa^2\cos\omega t$

$D_{xy}=+3a^2Q\cos 2\omega t$

$D_{zz}=-D_{xx}-D_{yy}=0$ cc

$x_1=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\omega t,\ y_1=\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\omega t$

$x_2=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\left(\cos-\frac{\pi}{2}\right)\quad y_2=\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$

$x_3=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos(\omega t-\pi)\quad y_3=\frac{a}{\sqrt{2}}\sin(\omega t-\pi)$

$x_4=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\left(\omega t-\frac{3\pi}{2}\right)\quad y_4=\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\left(\omega t-\frac{3}{2}\pi\right)$

$I=\left(\frac{1}{180c^5}D_{\alpha\beta}=\frac{1}{180c^5}\left(D_{xx}^2+D_{xy}^2\right)=\frac{1}{180c^5}|2\omega|^6\times\right.$

$\times(3a^2Q\cos 2\omega t)+(2\omega)^6\left[(3a^2Q\cos 2\omega t)^2\right]=$

$=\frac{2(2\omega)^6}{180c^5}3^2a^4Q\cos^2 2\omega t$

$\langle I\rangle=\frac{8}{5}\frac{\omega^6a^4Q}{c^5}$

(35) Електрон рухається рівномірно прямо. Знайти потенціали шляхом переходу від рухомої СК до нерухомої. K - с-ма рухома

$y = z = 0$ в K' $\quad A' = 0 \quad \varphi' = e/\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$

скористаємося формулами

$$\varphi = \frac{\varphi' + \frac{V}{c}A'_x}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad A_x = \frac{A'_x + \beta\varphi'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad A_y = A'_y \quad A_z = A'_z$$

$$\varphi = \varphi'/\sqrt{1-\beta^2} = e/(R'\sqrt{1-\beta^2}); \quad A_x = \beta\varphi$$

$A_y = A_z = 0$

Скористаємося перет. Лоренця

$$R'^2 = x'^2+y'^2+z'^2 = \frac{(x-vt)^2}{1-\beta^2} + y^2+z^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{e}{R} \quad \text{де } R = (x-vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)$$

$A = \varphi\beta$

(36) Чи може поле бути ел стат. якщо $\mathrm{rot}\, B = 0$ $B[\bar{a} \times \bar{r}]$ - перевіримо

$\cancel{\nabla \times [\bar{a} \times \bar{r}],\ [\bar{a} \times \bar{r}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = i(a_y z - y a_z)}$
$+ j(a_z x - a_x z) + k(a_x y - a_y x)$

$$\nabla \times [\bar{a} \times \bar{r}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ (a_y z - y a_z) & (a_z x - a_x z) & (a_x y - a_y x) \end{vmatrix} =$$

$= i(a_x + a_x) + j(a_y + a_y) + (a_z + a_z)k = 2 i a_x + 2 j a_y +$
$+ 2 k a_z = 2\bar{a}$ - поле не ел. статичне

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, A = -\Delta A + \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, A = -\frac{1}{c}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

Знайти $\bar{B}$ в сер і зовні

$$\rho = \rho_0\, sh\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

$$B\, 4\pi r^2 = 4\pi \int_0^r 4\pi r^2\, dr\, \rho_0\, sh\,(r/R)^3 =$$

$$= \frac{4\pi r^2}{3} \int 4\pi \rho_0\, sh\,(r/R)^3\, d\,(r/R)^3 = \frac{12}{3}\pi^2 \rho_0 \times$$

$$\times \left(ch\,(r/R)^3 - 1\right)$$

$$B_{сер} = \frac{4\pi\rho_0}{3r^2}\left(ch\,(r/R)^3 - 1\right) \quad \text{зовні } r > R$$

$$B\, 4\pi r^2 = 4\pi \int_0^R 4\pi r^2\, sh\,(r/R)^3\, dr = \frac{16}{3}\pi^3 \rho_0 \times$$

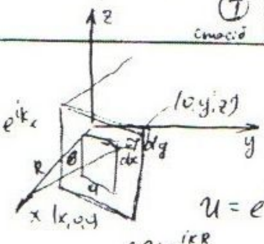
$$\times ch\,(r/R)^2 \Big|_0^R = \frac{16}{3}\pi^2 \rho_0 \left(e/2 + \frac{1}{2e} - 1\right)$$

$$B_{зовн.} = \frac{4\pi\rho_0\left(e/2 + \frac{1}{2e} - 1\right)}{3r^2}$$

(11) Дифракція Френеля

(I) Знайти a - ?

спосіб Плоска хвиля рух вздовж осі x.



$$U_p = a\iint \frac{U}{R} e^{ikR}\,dy\,dz = a\iint \frac{U}{\sqrt{x^2+y'^2+z'^2}} e^{ik\sqrt{x^2+y'^2+z'^2}}\,dy\,dz$$

$$U = e^{ikz+\omega t}$$

$$U_p = a\int \frac{U e^{ikR}}{R}\,dz = aU\int \frac{e^{ik\sqrt{x^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\,z\,dz\,d\varphi =$$

$$= 2\pi a U\int_0^\infty \frac{e^{ikx\sqrt{1+\frac{z^2}{x^2}}}}{x}\,z\,dz = \frac{\pi a U}{x}\int_0^\infty e^{ikx\left(1+\frac{z^2}{2x^2}\right)}\,dz^2 =$$

$$= \pi a \frac{U e^{ikx}}{x}\int_0^\infty e^{\frac{ikz^2}{2x}}\,dz^2 = \pi a\frac{U e^{ikx}}{x}\frac{2x}{ik} e^{\frac{ikz^2}{2x}}\Big|_0^\infty =$$

$$= -\frac{2\pi a}{ik} U e^{ikx} \Rightarrow \boxed{a = \frac{k}{2\pi i}}$$

Чому в множнику бу 0?

$\int_0^\infty f(x)\,dx$ - розбігається. $\int_0^\infty f(x) e^{-\alpha x}\,dx$) $\alpha \to 0$ збіг.

(II) $R = \sqrt{x^2+y'^2+z'^2} = x\sqrt{1+\frac{y'^2}{x^2}+\frac{z'^2}{x^2}} =$
$x\left(1+\frac{1}{2}\frac{y'^2}{x^2}+\frac{1}{2}\frac{z'^2}{x^2}\right)$

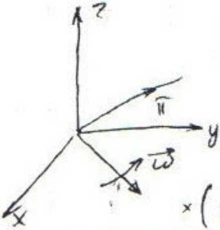
$$\ldots\ a\int \frac{U_0 e^{ikR}}{R}\,dS = a\iint_{-\infty}^{\infty} U_0 e^{ik\left(x+\frac{1}{2}\frac{y'^2}{x}+\frac{1}{2}\frac{z'^2}{x}\right)}\,dy\,dz$$

$$= aU_0 e^{ikx}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{k}{2}\frac{y'^2}{x}}\,d\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{k}{2}\frac{z'^2}{x}}\,d\left(\frac{z'}{\sqrt{x}}\right) =$$

$$= -aU_0 e^{ikx}\sqrt{\frac{2\pi}{ik}}\sqrt{\frac{2\pi}{ik}} = \frac{2\pi i}{k} U_0 a e^{ikx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{k}{2\pi i}}$$

② Постійний диполь обертається в площині. Дослідити його випромінення.



$$d_x = d_0 \cos\omega t\,\vec{e}_x$$
$$d_y = d_0 \sin\omega t\,\vec{e}_y$$
$$[\vec{a}\vec{b}]^2 = a^2 b^2 (\vec{a}\vec{b})^2$$

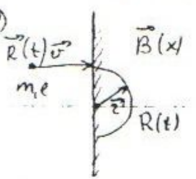
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3}\left(\omega^4 d_0^2 - \omega^4 d_0^2 \times \right.$$
$$\left. \times \left(n_x \cos\omega t + n_y \sin\omega t\right)^2\right) \ominus$$

$$\boxed{\begin{aligned} n_x &= \sin\theta\cos\varphi \\ n_y &= \sin\theta\sin\varphi \end{aligned}} \quad \ominus \frac{1}{4\pi c^3}\omega^4 d_0^2\left(1 - \sin^2\theta \times \right.$$
$$\left. \times \left(\cos\varphi\cos\omega t + \sin\varphi \sin\omega t\right)^2\right) =$$

$$= \frac{\omega^4 d_0^2}{4\pi c^3}\left(1 - \sin^2\theta\cos^2(\omega t - \varphi)\right)$$

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\omega^4 d_0^2}{4\pi c^3}\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right) = \frac{\omega^4 d_0^2}{8\pi c^2}\left(1 + \cos^2\theta\right)$$

③



Дипольний магнітний момента.

$\vec p = \int \vec r' \rho(\vec r', t)\, dV' = e\int \vec r' \times$
$\times\, \delta(\vec r' - R)\, dV' = -e\vec R(t)$

$\{\rho = e\,\delta(\vec r' \cdot R(t))\}$

$m\ddot{R} = \bar F_л = \frac{e}{c}[\vec v, \vec B]$; $[\ddot{\vec R}] : \frac{e}{mc}\left|[\vec v\, \vec B]\right| = \frac{e}{mc}$

$\ddot p = \frac{e^2}{mc} v B$; $P = \frac{2}{3c^3}\left(\ddot{\vec p}\right)^2 = \frac{2}{3c^3}\,\frac{e^4 v^2 B^2}{m^2 c^2} =$

$= \frac{2e^4}{3m^2c^5} v^2 B^2$; $P = \frac{d\mathcal{E}}{dt} \Rightarrow \mathcal{E}_в = P\frac{T}{2}$; $\omega = \frac{eB}{mc}$

$(a = \omega v)$

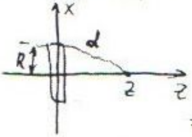
$\mathcal{E}_в = \frac{2e^4}{3m^2c^5} v^2 B^2 \frac{\pi}{\omega} = \frac{2e^3}{3mc^4} v^2 B \frac{\pi mc}{eB} =$
$= \frac{2\pi e^3 B v^2}{3mc^4}$

Щоб вважати що рев-ть частинки не змін, то втрати на випромінюв. повинні бути значно меншими за повну енер. частинки.

$\mathcal{E}_к = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow \frac{\mathcal{E}_к}{\mathcal{E}_в} \gg 1$

$\frac{\mathcal{E}_к}{\mathcal{E}_в} = \frac{mv^2\, 3mc^4}{4\pi e^3 B v^2} \gg 1$: $B \ll \frac{3m^2c^4}{4\pi e^3} \approx \frac{m^2c^4}{e^3}$

④ Потенціал та поле на осі симетрії диску радіусу R якщо поверхнева густина заряду $\sigma = \sigma_0 r^2$, $\sigma_0 = const$



$$d = \sqrt{z^2 + x^2 + y^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$\varphi(z) = \int \frac{\sigma dS}{d} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0 r^2 r dr}{\sqrt{r^2+z^2}} d\varphi =$$

$$= 2\pi\sigma_0 \int_0^R \frac{r^3 dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \pi\sigma_0 \int_0^R \frac{r^2 dr^2}{\sqrt{r^2+z^2}} = |r^2 = y| =$$

$$= \pi\sigma_0 \int_0^{R^2} \frac{y dy}{\sqrt{y+z^2}} \ominus$$

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{y+z^2}} = \int \sqrt{y+z^2} dy - \int \frac{z^2 dy}{\sqrt{y+z^2}} = \frac{3}{2}(y+z^2)^{1/2} - \frac{z^2}{2}\sqrt{y+z^2}$$

$$\ominus \pi\sigma_0 \left[\frac{3}{2}(y+z^2)^{3/2} - \frac{z^2}{2}(y+z^2)^{1/2}\right]\Big|_0^{R^2} =$$

$$= \pi\sigma_0 \left[\frac{3}{2}(y+z^2)^{3/2} - \frac{z^2}{2}(R^2+z^2)^{1/2} - \frac{3}{2}z^3 + \frac{1}{2}z^3\right] =$$

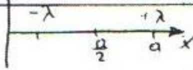
$$= \frac{\pi\sigma_0}{2}\left[3(R^2+z^2)^{3/2} - z^2(R^2+z^2)^{1/2} - 2z^3\right]$$

$$E = -\mathrm{grad}\,\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{\pi\sigma_0}{2}\left[3\frac{3}{\cancel{2}}\sqrt{R^2+z^2}\,\cancel{2}z - \right.$$

$$\left. - 2z\sqrt{R^2+z^2} - z^2\frac{1}{\cancel{2}}(R^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cancel{2}z - 6z^2\right] =$$

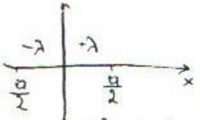
$$= -\frac{\pi\sigma_0}{2}\left[7z\sqrt{R^2+z^2} - \frac{z^3}{\sqrt{R^2+z^2}} - 6z^2\right]$$

(5) Знайти дипольний момент тонкого стержня і поле.



$$d = \int_0^a = \int_0^{a/2} -\lambda x\,dx + \int_{a/2}^{a} \lambda x\,dx = -\frac{\lambda}{2}\frac{a^2}{4} + \frac{\lambda}{2}\left(a^2 - \frac{a^2}{4}\right) =$$

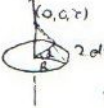
$$= \frac{\lambda}{2}\left(\frac{3}{4}a^2 - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{\lambda a^2}{4}$$



$$d = -\int_{-\frac{a}{2}}^{0} \lambda x\,dx + \int_0^{\frac{a}{2}} \lambda x\,dx = \int_0^{a/2} \lambda x\,dx + \int_0^{a/2} \lambda x\,dx = \frac{\lambda}{2}\frac{a^2}{4} + \frac{\lambda}{2}\frac{a^2}{4} = \frac{\lambda a^2}{4}$$

Визначити потенціал поля на осі диску заряду q

$$d\varphi = \frac{\sigma r\,dr\,d\alpha}{\sqrt{r^2+z^2}}$$



$$\varphi = \sigma \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = 2\pi\sigma \sqrt{r^2+z^2}\Big|_0^R = 2\pi\sigma\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)$$

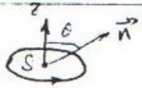
Знайти розподіл поверхневого заряду

$$E(x) = 2\frac{e}{a^2+x^2}\cos\theta = \frac{2e}{a^2+x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{2ea}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$E = 4\pi\sigma \Rightarrow$$

$$\sigma(x) = \frac{E}{4\pi} = \frac{ea}{2\pi(a^2+x^2)^{3/2}}$$

(5) Еліптичний контур зі струмом, $\vec{p}$-? $\frac{d\vec{P}}{d\Omega}$-?



$$J = J_0 \cos\omega t$$

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{J\vec{S}}{c}, \quad \vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2c}\int\limits_V [\vec{r}\,'\,\vec{j}(\vec{r}\,')]\,dV'$$

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{J_0 \cos\omega t S \vec{e}_z}{c}, \quad \ddot{\vec{\mathcal{M}}} = -\frac{J_0 \omega^2 \cos\omega t S \vec{e}_z}{c}$$

$$\frac{dP_m}{d\Omega} = \frac{[\ddot{\vec{\mathcal{M}}}\times\vec{n}]^2}{4\pi c^3} = \frac{1}{4\pi c^5} S^2 J_0^2 \omega^4 \cos^2\omega t [\vec{e}_z \times \vec{n}]^2 =$$

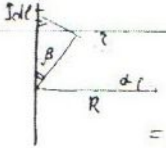
$$= \frac{1}{4\pi c^5} S^2 J_0^2 \omega^4 \cos^2\omega t \sin^2\theta$$

$$\left\langle \frac{dP_m}{d\Omega} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{dP_m}{d\Omega}\Big|_{t=0} = \frac{J_0^2 S^2}{8\pi c^5}\omega^4$$

$$P_m = \frac{2}{3c^3}\left(\ddot{\vec{\mathcal{M}}}\right)^2 = \frac{2}{3c^3}\,\frac{\omega^4 J_0^2 \cos^2\omega t \cdot S^2}{c^2}$$

$$\vec{P}_m\Big|_{t=0} = \frac{2}{3c^5}\omega^4 J_0^2 S^2$$

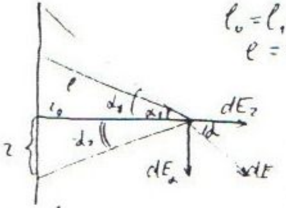
⑦ Прямий ∞ провід. B - ?



$$dB = \frac{I}{c}\frac{dl\sin\beta}{r^2} = \frac{I}{c}\frac{dl\cos\alpha}{r^2} = \frac{I}{cr}\frac{dl\cos\alpha}{r} = -\frac{I}{cr}d\alpha = \frac{I}{cR}\cos\alpha\, d\alpha$$

$$r = \frac{R}{\cos\alpha}. \quad B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{I}{cR}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{2I}{cR}$$

∞ тонкий відрізок довжиною із зарядом q. Знайти φ та E в ∀ т. простору.



$$l_0 = l_1 + l_2 \quad dE = \frac{dq}{r^2}$$

$$e = l_1 l_0$$

$$l = r_0 \operatorname{tg}\alpha,\ dl = \frac{r_0}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

$$r = \frac{r_0}{\cos\alpha}$$

$$dE = \frac{l_1 r_0\, d\alpha \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\, r_0^2} = \frac{l_1}{r_0}d\alpha$$

$$dE_z = dE\cos\alpha = \frac{l_1\cos\alpha}{r_0}d\alpha$$

$$E_z = \int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\frac{l_1\cos\alpha\, d\alpha}{r_0} = \frac{l_1}{r_0}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) = \frac{l_1}{r_0}\left(\frac{l_1}{\sqrt{l_1^2+r^2}} + \frac{l_2}{\sqrt{l_2^2+r^2}}\right)$$

$$dE_\alpha = -\frac{l_1}{r_0}\sin\alpha\, d\alpha \Rightarrow \frac{l_1}{r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = \ldots$$

Якщо нитка ∞ справа $\alpha_1 \to \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = 0$

$$E_z = \frac{l_1}{r_0};\ E_\alpha = -\frac{l_1}{r_0} \Rightarrow E = \frac{\sqrt{2}\,l_1}{r_0}$$

(8) Нерівномірно заряджений циліндр

2) $\rho = ar$ а) $r \le R$

1) $\rho = const$ $2\pi r l E = 4\pi \pi r^2 l \rho$

$E = 2\pi \rho r$

б) $r > R$ $2\pi l r E = 4\pi \ell_1 l$, $E = \frac{2\ell_1}{r}$

ℓ_1 - з-д по одиничній довжині

а) $\varphi(r) - \varphi(R) = \int_r^R E\,dr = \pi\rho(R^2 - r^2)$

б) $\underset{0}{\varphi(R)} - \varphi(r) = \int_R^r E\,dr \Rightarrow \varphi(r) = -\int_r^R E\,dr = -2\ell_1 \ln\frac{r}{R}$

$= -2\underbrace{\pi R^2 \rho}_{=\ell_1} \ln\frac{r}{R}$, $\ell = \pi R^2 l \rho$

2) а) $r \ge R$ $E = \frac{2\ell_1}{r}$, $\ell_1 = \int_0^R 2\pi r \rho(r)\,dr = 2\pi a \int_0^R r^2\,dr =$

$= 2\pi a \frac{R^3}{3} \Rightarrow E = \frac{4\pi a R^3}{3r}$

$-\varphi(r) + \underset{0}{\varphi(R)} = -\int_r^R \frac{4\pi a R^3}{3r}\,dr$; $\varphi(r) = -\frac{4\pi a R^3}{3} \ln\frac{r}{R}$

б) $r \le R$

$2\pi r D = 4\pi \int_0^r 2\pi r \rho(r)\,dr$

$rD = 4\pi \int_0^r a r^2\,dr = \frac{4\pi}{3} a r^3$

$D = \frac{4\pi}{3} a r^2$ $E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{4\pi}{3\varepsilon} a r^2$

$\varphi(r) - \underset{0}{\varphi(R)} = \int_r^R \frac{4\pi}{3\varepsilon} a r^2\,dr = \frac{4\pi}{9\varepsilon} a (R^3 - r^3)$

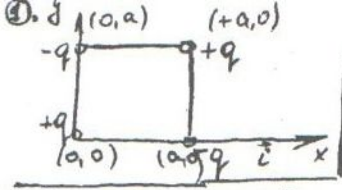
$j = a r^7$

$\oint \vec{H}\,d\vec{l} = 4\pi J$

$2\pi r H = 4\pi \int_0^r j\,2\pi r\,dr = 4\pi \int_0^r a r^7\,2\pi r\,dr$

$rH = \frac{4\pi a r^9}{9}$ $H = \frac{4\pi a}{9} r^8$

1.



$\vec d = ?\ \hat D = ?$

$\vec d = \sum_i q_i \vec r_i$

$\hat D = \begin{pmatrix} D_{11} & \cdots & \cdots \\ \cdots & D_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & D_{33} \end{pmatrix}$

$D_{\alpha\beta} = \sum_i q_i (3x^i_\alpha x^i_\beta - r_i^2 \delta_{\alpha\beta}) =$

$D_{ij} = D_{ji}$

$x_1 \to x$

$x_2 \to y$

$x_3 \to z$

а) $\vec d = q\cdot 0 - q\cdot \vec j + q(a\vec i + a\vec j) + qa\vec i = 0$

б) $D_{11} = D_{xx} = \sum_i q_i (3(x^i)^2 - \delta_{11}^2 r_i^2) =$
$= +q(3\cdot 0 - 0) - q(3\cdot 0 - a^2) +$
$+ q(3a^2 - 2a^2) - q(3a^2 - a^2) = 0$

$D_{12} = \sum_i q_i (3x^i y^i) = 3qa^2;$

$D_{21} = D_{12} = 3qa^2;$

$D_{13} = \sum_i q_i (3x^i z^i) = 0;\ D_{31} = D_{13} = 0$

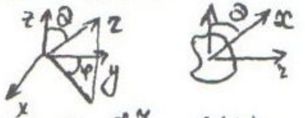
$D_{22} = \sum_i q_i (3(y^i)^2 - r_i^2) = q(0) - q(3a^2 - a^2) +$
$+ q(3a^2 - 2a^2) - q(3\cdot 0 - a^2) = 0$

$D_{23} = \sum_i q_i (3y^i z^i) = 0 = D_{32}$

$D_{33} = q_i(3z^2 - r_i^2) = -\sum_i q_i r_i^2 = -[q\cdot 0 - q\cdot a^2 + q\cdot 2a^2 -$
$- q\cdot a^2] = 0;$

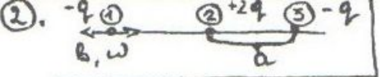
$\hat D = \begin{pmatrix} 0 & 3qa^2 & 0 \\ 3qa^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\dddot{\hat D} \times \vec n}{144\pi c^5},\ |\vec n| = 1$



$\vec n = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$

Нехай $\frac{dI}{d\Omega} = f(t);\ \left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle_t = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \frac{dI}{d\Omega} dt +$
$+ f(t);$

②. 

$q_i(x, y) = 0$
$z_1 = 0;$
$z_2 = +a + b\sin\omega t$
$z_3 = -a + b\sin\omega t$

$$D_{\alpha\beta} = \sum_i q_i (3 x_\alpha^i x_\beta^i - \delta_{\alpha\beta} r_i^2);$$

$$D_{11} = \sum_i q_i (3x_i^2 - r_i^2) = -\sum_i q_i r_i^2 = -(2q\cdot 0 - q z_2^2 - q z_3^2) = q(z_2^2 + z_3^2) = q(a^2 + b^2\sin\omega t + 2ab\sin\omega t + a^2 + b^2\sin^2\omega t - 2ab\sin\omega t) = 2q(a^2 + b^2\sin^2\omega t)$$

$$D_{12} = \sum_i q_i (3x^i y^i) = 0 = D_{21}$$

$$D_{22} = \sum_i q_i (3y_i^2 - r_i^2) = -\sum_i q_i r_i^2 = 2q(a^2 + b^2\sin^2\omega t)$$

$$D_{23} = \sum_i q_i (3y^i z^i) = 0 = D_{32}$$

$$D_{31} = D_{13} = 0; \quad D_{33} = \sum_i q_i (3(z^i)^2 - r_i^2) = \sum_i 2q_i r_i^2 = 2\sum_i q_i r_i^2 = -4q(a^2 + b^2\sin^2\omega t)$$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 2q(a^2 + b^2\sin\omega t & 0 & 0 \\ 0 & 2q(a^2 + b^2\sin\omega t & 0 \\ 0 & 0 & -4q(a^2 + b^2\sin^2\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\hat{D}} = \begin{pmatrix} 2qb^2 2\omega\sin\omega t\cos\omega t & 0 & 0 \\ 0 & -\text{''}- & 0 \\ 0 & 0 & -4q\omega b^2\sin 2\omega t\cos\omega t \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\hat{D}} = \dots$$
$$\dddot{\hat{D}} = \dots$$

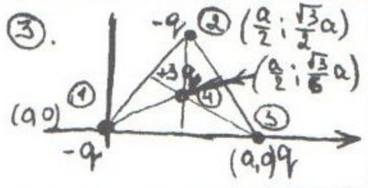
$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{[\dddot{\hat{D}} \times \vec{n}]^2}{144\pi c^5}; \quad \dddot{\hat{D}} \times \vec{n} \,(=)$$

$$(=) \begin{pmatrix} -8q\omega^3 b^2\sin 2\omega t & 0 & 0 \\ 0 & -8q\omega^3 b^2\sin 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 16q\omega b^2\sin 2\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8q\omega^3\sin 2\omega t\cos\theta \\ -8q\omega^3 b^2\sin 2\omega t\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{dI}{d\Omega} = \frac{64q^2\omega^6 b^4\sin^2 2\omega t}{144\pi c^5}}$$

③.



а). $\vec{d} = \sum_i q_i \vec{r}_i =$
$= -\vec{q}\cdot 0 - q\left(\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt3}{2}\vec{j}\right) -$
$- q(a\vec{i}) + 3q\left(\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt3}{6}a\vec{j}\right) =$
$= \vec{i}\left(-\frac{qa}{2} + \frac{3qa}{2}\right) \oplus$

$\oplus\ \vec{j}\left(-\frac{\sqrt3}{2}qa - qa + \frac{\sqrt3}{2}qa\right) = qa\vec{i} - qa\vec{j} =$
$= qa(\vec{i} - \vec{j}).$

б). $D_{11} = \sum_i q_i\left(3(x^i)^2 - r_i\right) = -q(3\cdot 0 - 0) -$
$- q\left(3\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} - a^2\right) - q(3\cdot a^2 - a^2) + 3q\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{3}\right) =$
$= 0 - q\left(3\frac{a^2}{4} - a^2\right) - q\cdot 2a^2 = -qa^2/2;$

$D_{12} = \sum_i q_i\left(3x^i y^i - \underset{i\neq y}{\overset{\to 0}{r_i}}\right) = -q\cdot 0 - q\left(3\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}a\right) +$
$+ qa + 3q\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{6}a\right) - qa = 0 \Rightarrow D_{21} = 0$

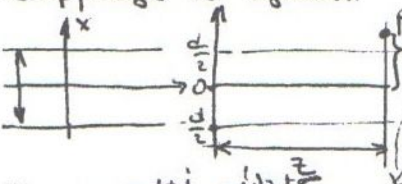
$D_{13} = \sum_i q_i(3x_i z^i - 0) = 0 \Rightarrow D_{31} = 0$

$D_{22} = \sum_i q_i\left(3y^i - r_i^2\right) = -q(0) - q\left(\left(3\frac{\sqrt3}{2}a\right)^2 - a^2\right) -$
$- q(0 - a^2) + 3q\left(3\left(\frac{\sqrt3}{6}\right)^2 - \left(\frac{a}{\sqrt3}\right)^2\right) = -\frac{qa^2}{2};$

$D_{23} = D_{32} = 0;$

$D_{33} = -\sum_i q_i r_i^2 = -\left(0 - qa^2 - qa^2 + 3q\cdot\frac{a^2}{3}\right) =$

$= qa^2;$



$$\mathcal{E}_0(x) = \mathcal{E}_0 \begin{cases} \dots \\ 0 & |x| > d/2 \end{cases}$$

$$\mathcal{E}(x_p, z) = \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda z}} e^{-ikz} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_0(x) \exp\left(-\frac{ik}{2z}(x-x_0)^2\right) dx$$

$$\mathcal{E}(x_p, z) = \mathcal{E}_0 \frac{1+i}{\sqrt{2zk}} e^{-ikz} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_0(x) \exp\left(-\frac{ik}{2z}(x-x_0)^2\right) dx$$

$$\mathcal{E}(x_0, z) = \mathcal{E}_0 \frac{1+i}{\sqrt{2kz}} e^{-ikz} J_1(x_0)$$

$$J_1(x_0) = \int_{-d/2}^{d/2} \exp\left(-\frac{ik}{2z}(x-x_0)^2\right) dx, \quad \xi = (x - x_0)\sqrt{\frac{k}{\pi z}}$$

$$J_1(x_0) = \sqrt{\frac{\pi z}{k}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \exp\left(-i\pi \frac{\xi^2}{2}\right) d\xi.$$

$$\xi_1 = -\left(\frac{d}{2} + x_0\right)\sqrt{\frac{k}{\pi z}}, \quad \xi_2 = +\left(\frac{d}{2} - x_0\right)\sqrt{\frac{k}{\pi z}}$$

$$x = C(\alpha) = \int_0^\alpha \cos\frac{\pi t^2}{2} dt \qquad y = S(\alpha) = \int_0^\alpha \sin\frac{\pi t^2}{2} dt$$

інтеграли Френеля

$$\ell^2(\alpha_1, \alpha_2) = (C(\alpha_1) - C(\alpha_2))^2 + (S(\alpha_1) - S(\alpha_2))^2$$

$J(x_0, z) = \frac{1}{2} J_0 \ell^2(\xi_1, \xi_2)$, J_0 – інтеграл падаючої хвилі.

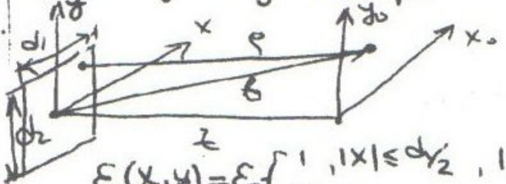
$$\frac{J(x_0)}{J_0} = \frac{1}{2}\ell^2(\xi_1, \xi_2)$$

$$\xi_1 = -\alpha(1+p), \quad \xi_2 = \alpha(1-p)$$

$\alpha = \sqrt{\frac{kd^2}{4\pi z}} = \sqrt{2N_F}$ N_F – число Френеля

$p = 2x_0/d$

Дифракція Фраунгофера на ~~круглому~~ прямокутному створі.



$$\mathcal{E}_s(x,y) = \mathcal{E}_0 \begin{cases} 1, & |x| \le d_1/2,\ |y| \le \frac{d_2}{2} \\ 0, & \text{за межами} \end{cases}$$

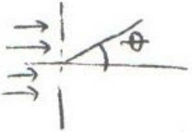
$$\mathcal{E}_0(k_x,k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int \mathcal{E}_0(x,y)\, e^{i(k_x x + k_y y)}\, dx\, dy$$

$$\mathcal{E}_0(k_x,k_y) = \mathcal{E}_0 \int_{-\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_1}{2}} dx \int_{-\frac{d_2}{2}}^{\frac{d_2}{2}} dy\, e^{i(k_x x + k_y y)}\, dy =$$

$$= \mathcal{E}_0 d_1 d_2\, \mathrm{sinc}\left(\frac{k_x d_1}{2}\right) \mathrm{sinc}\left(\frac{k_y d_2}{2}\right)$$

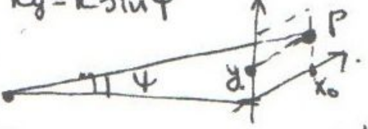
$J(P) = \frac{c}{8\pi}\frac{1}{(kb)^2} S_0(k_x,k_y)$ – просторова спектральна густина

$$S_0(k_x,k_y) = (\mathcal{E}_0(k_x,k_y))^2$$



$k_x = k\sin\theta$

$k_y = k\sin\psi$



$$J(\theta,\psi) = J_{max}\, \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi d_1 \sin\theta}{\lambda}\right) \cdot \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi d_2 \sin\psi}{\lambda}\right)$$

$$J_{max} = J_0\left(\frac{d_1 d_2}{\lambda b^2}\right)$$

Дифракція Гаусового пучка

$$\mathcal{E}_0(r) = \mathcal{E}_0 \exp\left(-\frac{r^2}{2\rho^2}\right),$$

$$\mathcal{E}(k_\perp) = \mathcal{E}_0 \cdot 2\pi \exp\left(-\frac{k_\perp^2 \rho_0^2}{2}\right)$$

$Q \ll 1$. $k_\perp = kQ$

$$J(Q) = J_{max} \exp\left[-\frac{2\pi Q \rho^2}{a}\right]$$

$$J_{max} = J_0 \left(\frac{2\pi \rho^2}{ab}\right)^2$$

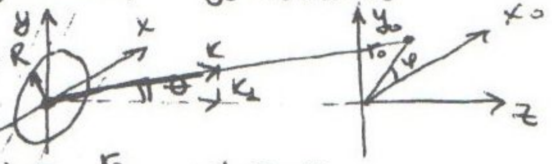
$$J_0 = \frac{c}{8\pi}(\mathcal{E}_0)^2,$$

ρ_0 - початковий радіус пучка

Дифракція на круглому отворі

$x = r\cos\varphi \quad x_0 = r_0\cos\varphi_0$

$y = r\sin\varphi \quad y_0 = r_0\sin\varphi_0$



$\sin\theta = \frac{r_0}{B}, \; K\sin\theta = K_1$

$K_x = K\frac{x_0}{B} = K_1\cos\varphi_0; \quad K_x x + K_y y = K_1 r\cos(\varphi-\varphi_0)$

$K_y = K\frac{y_0}{B} = K_1\sin\varphi_0;$

$$\mathcal{E}(K_1,\varphi_0) = \int_0 \mathcal{E}_0(r)dr \cdot \int_0^{2\pi} \exp(iK_1 r\cos(\varphi-\varphi_0))d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \exp i\theta\cos(\varphi-\varphi_0)d\varphi = 2\pi J_0(\alpha)$$

J - ф-я Бесселя нульового порядку

$$\mathcal{E}(K_1) = 2\pi\int_0^{\infty}\mathcal{E}_0(r)J_0(K_1 r)rdr$$ - перетворення Фур'є-Бесселя (Хенкеля) нульового пор.

для круглого отвору R:

$\mathcal{E}_0(r) = \mathcal{E}_0\begin{cases}1, & r<R\\ 0, & r>R\end{cases}, \quad \mathcal{E}(K_1) = \mathcal{E}_0\cdot 2\pi\int_0^R J_0(K_1 r)rdr =$

$= \mathcal{E}_0\cdot 2\pi R^2\frac{J_1(K_1 R)}{K_1 R}$, де використано:

$\int^x x\cdot J_0(x)dx = xJ_1(x), \; \theta \ll 1, \; \sin\theta = \theta$

$K_1 = K\sin\theta = K\theta$

$$J(P) = \frac{c}{8\pi}\frac{1}{(\lambda B)^2}S_0(K_x,K_y)$$

$$S_0(K_x,K_y) = |\mathcal{E}_0(K_x,K_y)|^2 \Rightarrow J(\theta) = J_{max}\left(\frac{J_1(2\pi\theta R/\lambda)}{\pi\theta R/\lambda}\right)^2$$

$J_{max} = J_0\left(\frac{\pi R^2}{\lambda B}\right)^2$, J_0 - інтеграл падаючої хвилі

повна кутова ширина центрального максимума диф. картини

$$\Delta\theta = 1.22\cdot\lambda/R$$

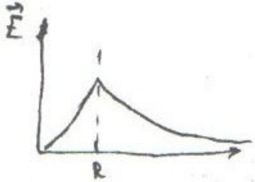
E - ?

1) $r < R$

$$\oint \vec{E}\, d\vec{S} = 4\pi Q$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi\rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E = \frac{4}{3}\pi\rho r$$



2) $r > R$

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi\rho \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$E = \frac{4}{3}\frac{\rho R^3}{r^2}$$

φ - ?

$$\varphi = -\int E\, dr = -\frac{2}{3}\pi\rho r^2 + C_0 \quad (r \le R)$$

$$\varphi = \frac{4}{3}\rho R^3 \pi \frac{1}{r} + \underset{= 0\ (\varphi(\infty) = 0)}{C} \quad (r > R)$$

$$-\frac{2}{3}\pi\rho R^2 + C_0 = \frac{4}{3}\rho R^2 \pi$$

$$C_0 = 2\pi R^2 \rho$$

$$\varphi = -\frac{2}{3}\pi\rho r^2 + 2\pi R^2 \rho$$

Випр. диполя в ближній зоні. Знайти
$R_н = \left|\frac{E_{\theta^\circ}}{H_{\alpha^\circ}}\right|$ мін. значення.

Розв'язання:

$$\varphi(\vec{r},t) = \underbrace{\frac{q_\varepsilon}{r}}_{=0} + \underbrace{\frac{\vec{n}\cdot\vec{p}(t')}{|r|^2}}_{\text{сферичний потенціал диполя}} + \frac{\vec{n}\cdot\dot{\vec{p}}(t')}{c\,|r|}$$ – Визн. висок. напруж. ел. поля в хв. зоні

$$q\varepsilon = \int\rho\, d^3r'$$

Сферична система координат

$$\vec{n}\cdot\vec{p} = P_0\exp(-i\omega t')\cos\Theta$$

$$\vec{H} = \vec{e}_\alpha\cdot H_{\alpha^\circ}\exp(-i\omega t')$$

$$\vec{E} = (\vec{e}_r\cdot E_r + \vec{e}_\theta E_{\dot\theta})e^{-i\omega t'}$$

$$H_{\alpha^\circ} = \left(1 + i\frac{\lambda}{2\pi|r|}\right)B^\infty\sin\Theta$$

$$E_\theta^\circ = \left[\left(1-\frac{\lambda}{2\pi|r|}\right)^2 + i\frac{\lambda}{2\pi|r|}\right]B^\infty\sin\Theta$$

$$E_r^\circ = \left[-2i\left(\frac{\lambda}{2\pi|r|}\right)\left(1 + i\frac{\lambda}{2\pi|r|}\right)\right]B^\infty\cos\Theta$$

$$B^\infty = -\frac{\omega}{c}\,i\cdot\frac{P_0}{|r|}$$

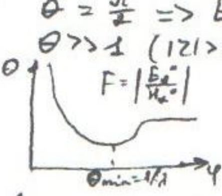
Θ — θ В ближній зоні відсутнє поперечнісь поля

$$\left|\frac{E_\theta^\circ}{H_{\alpha^\circ}}\right| = \left|\frac{1-\left(\frac{1}{\theta}\right)^2 + i\left(\frac{1}{\theta}\right)}{1+i\frac{1}{\theta}}\right| = \frac{1}{\theta}\sqrt{\frac{1-\theta^2+\theta^4}{1+\theta^2}}$$

$$\theta = \frac{2\pi|r|}{\lambda}$$

$$\Theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow E_r^\circ = 0$$

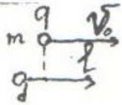
$$\theta \gg 1\ (|r| \gg \lambda): \left|\frac{E_\theta^\circ}{H_{\alpha^\circ}}\right| = 1$$



в бл. зоні:

$$\left|\frac{E_\theta^\circ}{H_{\alpha^\circ}}\right| \gg 1 \qquad \theta\to 0$$

$$F \approx \frac{1}{\theta} \qquad \frac{dF}{d\theta} = 0$$



$m\ddot{x} = qE$

$m\frac{dv}{dt} = qE$

$E = -\text{grad}\,\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}$

$E = \vec{p}\left\{\frac{\vec{e}_x \cdot r^3 - 3x\vec{r}}{r^5};\quad ;\quad\right\}$

$\frac{dv}{dt} = \frac{qE}{m}$

$v - v_0 = -\frac{qE}{m}t$

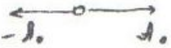
$v = \frac{qE}{m}t + v_0$

$j = nqv$

$A = \frac{1}{c}\int\frac{j\,dV}{r} = \frac{nq}{c}\int\frac{v\,dV}{r}\,dx\,dy$

$E = \frac{1}{c}[[\vec{A}\times\vec{n}]\times\vec{n}] = \text{rot}\,\vec{A}\times\vec{n}$

Заряд q, m. коливається з ω_0, початкова амплітуда – A_0, відбувається дипольне випромінювання. Знайти значення зміни амплітуди коливань



$$W = \frac{m\omega^2 A^2}{2}$$

$$P_{\text{вип.}} = \frac{dW}{dt}$$

$$P_{\text{пот.дип.вип.}} = J = \frac{2}{3}\frac{\ddot{p}}{c^3}$$

Речовина характер діалектр сталою ε_0, що вдвічі більша за ε_∞ знайти групову швидкість е/м хвилі на частоті, що вдвічі менша за резонансу.

Р-ня:

$$\varepsilon = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_0-\varepsilon_\infty)\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}$$

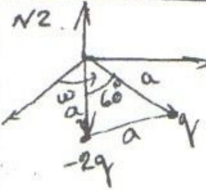
$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dk}; \quad k(\omega)=\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\omega}}$$

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{d\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)}\right)}$$

$\vdots$

$$v_{гр} = \frac{9c-\varepsilon_0\left(1-\frac{4}{3}\varepsilon_0\right)}{\frac{13}{9}\varepsilon-\frac{4}{3}\varepsilon_0^2}$$

№2.



$\frac{dI}{d\Omega}$. I_0 - ?

$P=\sum r_i q_i$

$r_1 = a\cos\omega_0 t\, e_x + a\sin\omega_0 t\, e_y$

$r_2 = a\cos(\omega_0 t+60^\circ)e_x+\dots$

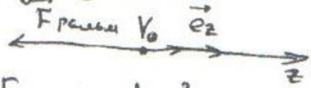
$E=E_0\exp\left\{-\frac{t}{\tau}+\vec{k}\vec{r}\right\}$ $t>0$

$E(\omega)=?$

$$E(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \vec{E}(t)e^{-i\omega t}dt$$

1) Заряд $+q$ рухається прямолінійно і мав в початковий мом. шв V_0. На заряд діє гальмівна сила, яка пропорційна його швидкості. Знайти вектор-потенціал випромінювання цього заряду в дальній зоні

Розв'язання:



$F_{гальм} \sim v$

$F_z = -\alpha V^2 = -\alpha v_z \vec{e}_z, \quad \alpha > 0$

2-ий закон Ньютона

$m\vec{a} = \vec{F}_z$

$m\ddot{z} = -\alpha v_z \vec{e}_z = -\alpha \dot{\vec{z}}$

$m\ddot{z} + \alpha \dot{z} = 0 \qquad \dot{z} = k$

$m\dot{k} + \alpha k = 0;$

$m\frac{dk}{dt} + \alpha k = 0; \quad \frac{dk}{k} = -\frac{\alpha}{m}, \quad \ln\frac{k}{k_0} = -\frac{\alpha}{m}t;$

$k = k_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}; \quad v = \dot{z} = \dot{z}_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t};$

$v(t=0) = v_0 = \dot{z}_0, \quad v = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}$

$A(\vec{r}, t) = \frac{1}{c|\vec{r}|}\, q\, v(t')\, \vec{e}_z; \quad t' = t - \frac{|\vec{r}|}{c}$

$A(\vec{r}, t) = \frac{1}{\ldots} \; e^{-\frac{\alpha}{m}t - \frac{|\vec{r}|}{\ldots}}$

Білет 49?

① По квадратній антені тече струм

$$J = J_0 \frac{at}{b^2+t^2}$$ Знайти спектр випромін. $\vec{E}(\omega)$

Див. Page 21

② $\rho = r^2 e^{-\frac{r}{a}}$

Заряд розподілений у просторі з густиною ρ. Знайти поле та потенціал заряду Q, якщо відомо Q і a=const.

Розв'язання: Нехай $\rho = Ar^2 e^{-\frac{r}{a}}$

Ф-ла Остроградського–Гауса:

$$\oint E\,dS = 4\pi Q, \quad Q = \int_0^R 4\pi A r^4 e^{-r/a} dr;$$

$$\oint E\,dS = 4\pi \int^R 4\pi A r^4 e^{-r/a} dr$$

$$E = 4\pi R^2 = 16\pi^2 A \int_0^R r^4 e^{-r/a} dr;$$

$$E = \frac{4\pi A}{R^2} \int_0^R r^4 e^{-r/a} dr$$

Знайдемо const A!

$$Q = \int_0^\infty r^4 e^{-r/a} dr = 4\pi A \frac{4!}{r^5}$$

$$\int_0^\infty r^n e^{-br} dr = \frac{n!}{r^{n+1}}$$

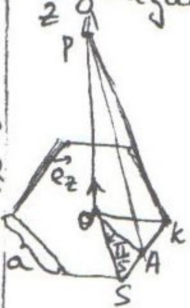
$$A = \frac{Q}{3\pi}$$

$$E = \frac{4Q}{3R^2} \int_0^R r^4 e^{-r/a} dr$$

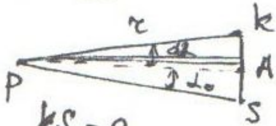
$$\varphi = \int_0^R E(r)\,dr$$

2) Правильний п'ятикутник з лінійною густиною ρ, сторона a. Знайти поле і потенціал на осі симетрії системи $E(0,0,z)$, $\varphi(0,0,z)$

Розв'язання!



$$\rho = \frac{dq}{dl}$$



$$kS = a$$

$$kA = \frac{a}{2}$$

$$dq = \rho\, dl = \rho\, r\, d\alpha$$

$$d\varphi = \frac{dq}{r} = \rho\, d\alpha, \quad \alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$$

$$tg\, \alpha_0 = \frac{AS}{AP} = \frac{a/2}{\sqrt{z^2 + OA^2}}; \quad OA = \frac{a}{2} tg \frac{\pi}{5} = d$$

$$tg \frac{\pi}{5} = \frac{OA}{AS} = \frac{OA}{a/2} \Rightarrow OA = \frac{a\, tg \frac{\pi}{5}}{2}$$

$$\alpha_0 = arctg \frac{a}{\sqrt{z^2 + d^2}}$$

$$\varphi_1 = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} d\varphi = \rho \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} d\alpha = \rho\, 2\alpha_0 = 2\rho\, arctg \frac{a}{\sqrt{z^2 + d^2}}$$

$$\varphi(0,0,z) = 5(\varphi_1)$$

$$E = -grad\, \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z$$

Білет №51

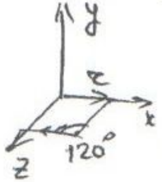
Знайти елем. матриці діел. проникн. які будуть ненульовими в кристалі, якщо симетрія кристала C_3 і пл. симетрії $\sigma_в$

Розв'язання:

$$C_3 \to \varphi = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon'_{i'j'} = a_{i'i}\,\varepsilon_{ij}\,a_{ij'}$$



$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{i'i} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \cdot & \cdot \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \frac{\sqrt{3}}{2} & \cdot \\ \cdot & -\frac{1}{2} & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{i'i} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \varepsilon'_{i'j'} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ще на звороті } * \end{pmatrix} =$$

$$= \varepsilon'_{i'j'} = \begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon'_{21} & \varepsilon'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{ост} = \sigma_в\,\varepsilon'_{i'j'}$$

$$\sigma_h = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_в = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

2) Клас

Білет 50

Дано коло R, поділено на 3 рівні сектори. З них 2 заряджено позитивно, третій - негативно, густина заряджених позитивно +B, негативно -"+ 2B

$d = ?$ $\tau = ?$

Розвязання: $\varphi = \frac{2\pi}{3}$

$P = \Sigma P_i$, $dl = R d\varphi$

$x = R_0 \cos\varphi$, $y = R_0 \sin\varphi$

$dP = \rho x dl$, де ρ - лінійна густина

$$P = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi/3} \rho R_0^2 d\varphi \cos\varphi = \rho R_0^2 \sin\varphi \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} \rho R_0^2$$

$\vec{P}_1 = \sqrt{3} B R_0^2$, $\vec{P}_2 = \sqrt{3} B R_0^2$, $\vec{P}_3 = 2\sqrt{3} B R_0^2$

$P = \Sigma P$

Оцінимо час обертання на орбіті:

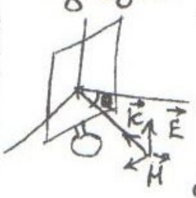
$\frac{m v^2}{2} = \frac{l_0^2}{\tau}$? $v_0 = \sqrt{\frac{l_0^2}{m \tau_0}}$

$\tau = \frac{2\pi a_0}{v} \sim 10^{-16}$ с

За час обертання $N \approx 10^6$ обертів

2) Квадратна антена зі стороною a, на неї падає лінійно поляриз. плоска хвиля. Знайти $\mathcal{E}_{інд}$ хвилі, що падає під кутом Q.

Розв'язок:



$$H = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

$$\mathcal{E}_{інд} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$$

$$Re(\Phi) = \int_S H dS = \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} H_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} dx dy =$$

$$= \iint -|H| \cos Q \cos(\omega t - \bar{k}\bar{r}) = \iint -|H| \cos Q \times$$

$$\times \cos(\omega t - (\underset{0}{k_x} r_x + \underset{0}{k_y} r_y + \underset{-k\cos Q}{k_z} r_z) =$$

$$= -\iint |H| \cos Q \cos(\omega t + k \cos Q) dx dy =$$

$$= -|H| \cos Q (\omega t + k\cos Q) \cdot a^2$$

$$\Phi_r = \omega \cdot \Phi$$

$$\mathcal{E}_{інд} = \frac{\omega}{c}\Phi(\sin \omega t + k \cos Q)\cos Q$$

Визначити час життя електрона

$f_{кул} >> f_{n.т}$

$\dot{P}_s = \frac{2e_0^2}{3c^3} < (\ddot{\vec{r}}) >$

нульове наближення $|f_{n.т}| \to 0$

$\vec{f} = \vec{f}_{кул} + \vec{f}_{n.т}$

$f_{n.т} = \frac{2e_0^2}{3c^3}\dddot{\vec{r}}$, $\ddot{\vec{r}} = -\frac{e_0^2}{m|r_0|^3}\vec{r}_0$ $\quad <\frac{1}{x}> \neq \frac{1}{<x>}$

$I = P_s = \frac{2e_0^2}{3c^3m^2}<\left|\frac{1}{r_0(t)}\right|^4> = \frac{2e_0^6}{3c^3m^2}\frac{1}{r_0^4}$

$E_{кул} = -\frac{e_0^2}{|r|}$; $P_s \cong \frac{2E^4_{кул}}{3c^3m^2e_0^2}$

$E = T + U = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{e_0^2}{2}$; $\frac{m\dot{\vec{r}}}{|r|} = \frac{e_0^2}{|r|^2}$;

$E = \frac{1}{2}E_{кул}$; $\frac{dE}{dt} = -P_s$

$\frac{dE_{кул}}{dt} + bE^4_{кул} = 0$, $b = \frac{4}{3c^3e_0^2m^2}$, $t=0$

$r_0(t=0) = a_0$, $E_{кул}(t=0) = W_0 = -\frac{e_0^2}{a_0}$

$\int_{W_0} \frac{dE_{кул}}{E^4_{кул}} = -b\int_0^T dt$

$E_{кул}(t=T) = -\frac{e_0^2}{r_0(T)_{\to 0}} = \infty$, електрон → ядра

$\frac{1}{3}E^{-3}_{кул}\Big|_{W_0}^{-\infty} = bT$

$T = \frac{a_0^3c^3m^2}{4e_0^4}$, $a_0 \sim 1\,Å$, $T = 10^{-10}c$