1. d=**d**$_0$sin(wt) змінюється тільки амплітуда вектора —-? ,**P**-? ***(ст.1)***

2. Постійний диполь обертається в площині.Дослідити його випромінення***1***

3. Дипольний магнітний момент ***(ст.2)***

4. Потенціал та поле на осі симетрії диску радіусу R якщо поверхнева густина заряду ***(ст.3)***

5. Знайти дипольний момент ∞ тонкого стержня і поле ***(ст.4)***

5.1 Визначити потенціал поля поля диску із зарядом q ***(ст. 4)***

5.2 Знайти розподіл поверхневого заряду ***(ст.4)***

6. Еліптичний контур зі струмом —-? ,**P**-? ***(ст.5)***

7. Прямий нескінченний провід. Знайти магнітну індукцію ***B (ст.5)***

7.1 Нескінченно тонкий олівець довжиною L ыз зарядом q. Знайти потенціал φ і напружен. Е у будь якій точці простору. ***(ст.5)***

--9--. **12**. Дифракція фраунгофера на екрані а х в. ***(ст.6)***

12.1 Знайти квадрупольний мометн системи зарядів (ст.6)

+q -q

-q +q

10. Нескінченно тонкий стрижень заряджений з лін густиною). Знайти дипольний момент усього стержня ***(ст.7)***

10.1 Знайти квадрупольний момент , 3 заряди на одній осі, по середині 2q, на однакових відстанях від нього заряди –q , q. ***(ст.7)***

11. Дифракція Френеля. Знайти а. Площина хвилі рухається вздовж х.***(ст.8)***

13. Рівномірно заряджена куля. Знайти потенціал. ***(ст.9)***

14. Знайти $-\left(\varphi \rightarrow\right) \quad -\left(\varphi \rightarrow\right) \quad -\left(\varphi \rightarrow\right)$ ***(с т.10)***

15. Знайти напруженість поля, коли задано **a**[**br**] ***(ст.11)***

16. Заряд **е** распределён в атоме Н, знаходиться в нормальному стані з густиною…….. ***(ст.12)***

17. Поле довільного струму в довільній точці і на осі **(ст.16)**

18. Знайти $grad(A(r)r)$ **(ст. 17)**

19. Знайти $gradA(r)B(r)$ $div\varphi(r)A(r)$, $rot\varphi(r)A(r)$ **(ст.18)**

20. Магнітне поле кільця зі струмом.Знайти потенціал всередині і ззовні кулі **(ст..19)**

21. Частинка e, v пружно відбивається від площини. Визначити довгохвильову частину спектра випромінювання в момент удару **(ст. 20)**

23. При яких умавах поляризованість магніто-дипольного випромінювання не залежить від вибору початкових умов? ***(ст21)***

24.1Випромінювання диполя $\mathbf{d}=\mathbf{d}_0\sin(wt)$ **(ст*22*)**

25.Заряд розподілений сферично симетричним чином :

ρ = ρ(r). Розбивши розподіл заряда на сферичні шари, виразити через ρ(r) потенціал φ та $\rightarrow$ поля (ст***23***)

26.Система складається із частинок у яких $\frac{l}{m} = const$. Показати, що в системі немає дипольного випромінювання (ст***24***)

27.Електрон рухається прямолінійно рівномірно. (ст***25***)

28.Знайти квадрупольний момент системи, що має q диска, R, висотаh, рівномірний розподіл густини ρ. (ст***26***)

29.Знайти $\rightarrow$ в центрі на осі кільця, якщо $\lambda = \lambda_0 \cos\varphi$. (ст***27***)

30.Антена являє собою квадрат із довжиною сторін l. $I = I_0\frac{\theta_0 * t}{b^2 + t^2}$, θ, l - $const$. Знайти спектральний розподіл та випромінювання$I(\omega)$. (ст***28***)

31.Довести підстановкою, що потенціали спізнення задовольняють рівнянню Д'Аламбера. (ст***29***)

32.Знайти рівняння, яким задовольняють потенціал, якщо після калібровки Лоренца написати калібровку Кулона. (ст***30***)

33.Електрон рухається прямолінійно, рівномірно знайти магнітне і електричне поле, векторний потенціал. (ст***31***)

34.Чотири заряди розміщенно у верхівках квадрата зі стороною а. Величини чергуються +q, -q, +q, -q (плоский квадруполь). Знайти середнє по часу за період обертання <I> квадрупольне випромінювання. (ст***32***)

№35. Електрон рухається рівномірно прямолінійно. Знайти потенціал шляхом переходу від рухомої системи координат до нерухомої. ***(ст33)***

№36. Чи може поле бути електростатичним, якщо rot B=0? Знайти $\vec{B}$ всередині і ззовні. ***(ст34)***

№37. Знайти B і φ стержня довжиною L. ***(ст35)***

№38. Магнітний момент струмів за законом M(t)= M_0 exp(-t^2/r^2). Знайти спектр

густини енергії випромінювання. ***(ст36)***

№39. Знайти потенціал φ і напруженість E електричного поля рівномірнозарядженої прямолінійної нитки. ***(ст37)***

№40. Знайти перетворення M^{44} компоненти довільного 4-тензора 2го рангу. ***(ст37)***

№41. По квадратній антені з довжиною сторони L тече струм I ***(ст.38)***

47. Знайти не нульові компоненти тензора діелектричної проникнсті(ст***44***)

48. сфера радіуса R. $\rho \sim r^7$ q-повний заряд. Знайти φ, E-зовні і всередині (ст***45***)

49. Дослідити випромінювання диполя Герца у близькій зоні. Знайти E і H. Проаналізувати залежність (ст***46***)

50. Є кільце, лінійна густина заряду. P-? (ст***47***)

51. Знайти розподіл заряду якщо $\varphi = \cdots$ (ст***47***)

52. Маємо антену m=1 знайти індикатрису випромінення (ст***48-49***)

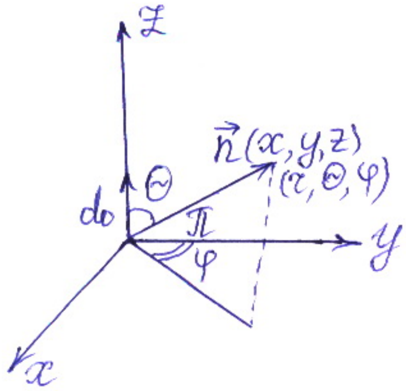
53. +q

-q -q Знайти індикатрису, кутовий розподіл (ст***50-51***)

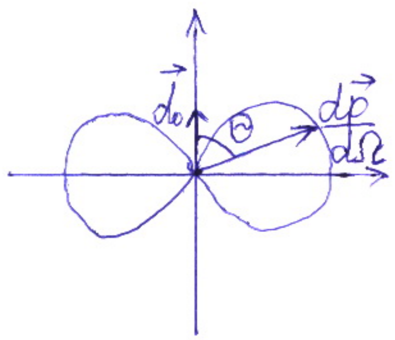
+q

54. Заряд влітає в магнітне поле H зі швидкість V0 знайти середню потужність випромінювання за період (ст***52-53***)

№1. $\vec{d}=\vec{d_0}\sin\omega t$ змінюється тільки амплітуда вектора. Знайти $\frac{d\vec{p}}{d\Omega}=?$ $\vec{p}=?$

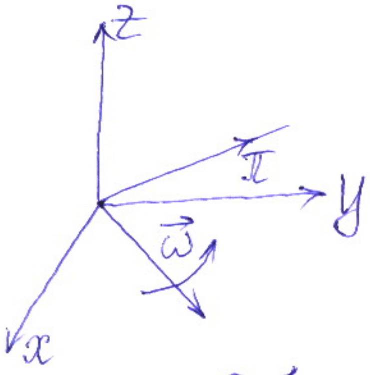


$$\dot{\vec{d}}=\omega\vec{d_0}\cos\omega t$$
$$\ddot{\vec{d}}=-\omega^2\vec{d_0}\sin\omega t$$
$$\frac{d\vec{p}}{d\Omega}=\frac{[\ddot{\vec{d}}\times\vec{n}]^2}{4\pi c^3}=\frac{\omega^4\sin^2\omega t}{4\pi c^3}\cdot[\vec{d_0}\times\vec{n}]^2 =$$
$$= |d_0|\cdot|n|\sin\Theta=d_0 n\sin\Theta$$



$$\frac{d\vec{p}}{d\Omega}=\frac{\omega^4\sin^2\omega t}{4\pi c^3}d_0^2n^2\sin^2\Theta=\frac{\omega^4d_0^2n^2}{8\pi c^3}\sin^2\Theta$$
$$p=\frac{2}{3c^3}|\ddot{d}|^2=\frac{2}{3c^3}\omega^4d_0^2\sin^2\omega t$$
$$\vec{p}=\frac{\omega^4d_0^2}{3c^3}$$

№2. Постійний диполь обертається в площині. Дослідити його випромінення.



$$d_x=d_0\cos\omega t\cdot\vec{e_x} \qquad n_x=\sin\Theta\cdot\cos\varphi$$
$$d_y=d_0\sin\omega t\cdot\vec{e_y} \qquad n_y=\sin\Theta\cdot\sin\varphi$$

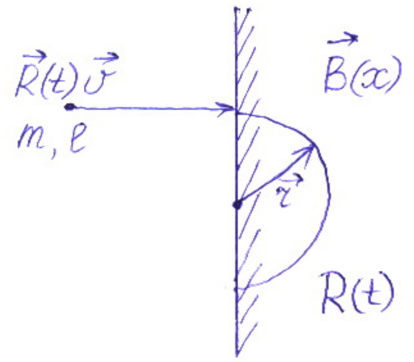
$$\frac{dp}{d\Omega}=\frac{1}{4\pi c^3}(\omega^4d_0^2-\omega^4d_0^2\cdot(n_x\cdot\cos\omega t+n_y\sin\omega t)^2) =$$

$$= \frac{1}{4\pi c^3}\omega^4d_0^2(1-\sin^2\Theta\cdot(\cos\varphi\cdot\cos\omega t+\sin\varphi\cdot\sin\omega t)^2) =$$

$$= \frac{\omega^4d_0^2}{4\pi c^3}(1-\sin^2\Theta\cdot\cos^2(\omega t-\varphi))$$

$$\left\langle\frac{dp}{d\Omega}\right\rangle=\frac{\omega^4d_0^2}{4\pi c^3}\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\Theta\right)=\frac{\omega^4d_0^2}{8\pi c^2}(1+\cos^2\Theta)$$

№3



Дипольний магнітний момент:

$$\vec p = \int \vec r\,' \cdot \rho(\vec r\,';t)\,dv' = e\int \vec r\,' \cdot \delta(\vec r\,' - R)\,dv' = e\vec R(t)$$

$$// \quad \rho = e\delta(\vec r\,' - R(t)) \quad //$$

$$m\ddot{\vec R} = \vec F_n = \frac{e}{c}[\vec v \times \vec B];$$

$$[\ddot{\vec R}] = \frac{e}{mc}\,|[\vec v \times \vec B]| = \frac{e}{mc}$$

$$\ddot p = \frac{e^2}{mc} v B; \qquad P_p = \frac{2}{3c^3}(\ddot{\vec p})^2 = \frac{2}{3c^3}\,\frac{e^4 v^2 B^2}{m^2 c^2} = \frac{2e^4}{3m^2c^5} v^2 B^2$$

$$P = \frac{d\mathcal{E}}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = P\frac{T}{2}; \qquad \omega = \frac{eB}{mc}$$

$$\{a = \omega \cdot v\}$$

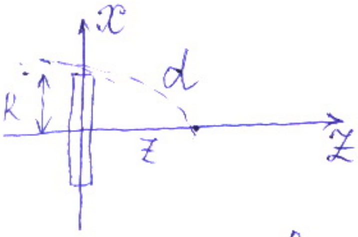
$$\mathcal{E}_B = \frac{2e^4}{3m^2c^5} v^2 B^2 \frac{\pi}{\omega} = \frac{2e^4}{3m^2c^5} \cdot v^2 \cdot B^2 \cdot \frac{\pi m c}{eB} = \frac{2\pi e^3 B v^2}{3mc^4}$$

Щоб вважати, що частинки не змінюється, то втрати на випромінювання повинні бути значно меншими за повну енергію частинки.

$$\mathcal{E}_k = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow \frac{\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_B} \gg 1$$

$$\frac{\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_B} = \frac{mv^2 \cdot 3mc^4}{4\pi e^3 B v^2} \gg 1; \qquad B \ll \frac{3m^2c^4}{4\pi e^3} \approx \frac{m^2c^4}{e^3}$$

N4 Потенціал та поле на осі симетрії диску радіуса R, якщо поверхнева густина заряду $\sigma = \sigma_0 r^2$; $\sigma = const$



$$d = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{r^2+z^2}$$

$$\varphi(z) = \int_S \frac{\sigma}{d}\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{\sigma_0 r^2 r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}}\,d\varphi = 2\pi\sigma_0 \int_0^R \frac{r^3 dr}{\sqrt{r^2+z^2}} =$$

$$= \pi\sigma_0 \int_0^R \frac{r^2 dr^2}{\sqrt{r^2+z^2}} = \left| r^2 = y \right| = \pi\sigma_0 \int_0^{R^2} \frac{y\,dy}{\sqrt{y+z^2}} =$$

$$// \int \frac{y\,dy}{\sqrt{y+z^2}} = \int \sqrt{y+z^2}\,dy - \int \frac{z^2 dy}{\sqrt{y+z^2}} = \frac{3}{2}(y+z^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{z^2}{2}\sqrt{y+z^2} \;//$$

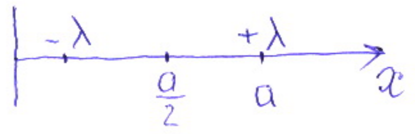
$$= \pi\sigma_0 \left[\frac{3}{2}(y+z^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{z^2}{2}(y+z^2)^{1/2}\right]\Bigg|_0^{R^2} = \pi\sigma_0\left[\frac{3}{2}(y+z^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{z^2}{2}(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}z^3 + \frac{1}{2}z^3\right] =$$

$$= \frac{\pi\sigma_0}{2}\left[3(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - z^2(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}} - 2z^3\right]$$

$$E = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{\pi\sigma_0}{2}\left[3\cdot\frac{3}{2}\sqrt{R^2+z^2}\cdot 2z - 2z\sqrt{R^2+z^2} - z^2\cdot\frac{1}{2}(R^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2z - 6z^2\right]$$

$$E = -\frac{\pi\sigma_0}{2}\left[7z\sqrt{R^2+z^2} - \frac{z^3}{\sqrt{R^2+z^2}} - 6z^2\right]$$

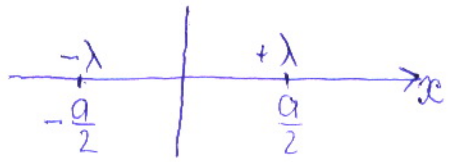
N5 Знайти дипольний момент нескінченно тонкого стержня і поле.



$$d = \int_0^a = \int_0^{\pi/2} -\lambda x\,dx + \int_{a/2}^{a} \lambda x\,dx =$$

$$= -\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{a^2}{4} + \frac{\lambda}{2}\left(a^2 - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{\lambda a^2}{4}$$

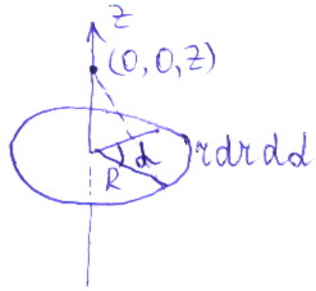
Тепер коли вони розташовані так:



$$d = -\int_{-\frac{a}{2}}^{0} \lambda x\,dx + \int_0^{\frac{a}{2}} \lambda x\,dx =$$

$$= \int_0^{-\frac{a}{2}} \lambda x\,dx + \int_0^{a/2} \lambda x\,dx = \frac{\lambda}{2}\frac{a^2}{4} + \frac{\lambda}{2}\frac{a^2}{4} = \frac{\lambda a^2}{4}$$

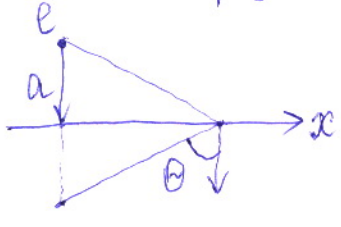
N5.1 Визначити потенціал поля диску заряду q.



$$d\varphi = \frac{\sigma r\,dr\,d\alpha}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

$$\varphi = \sigma \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 + r^2}} = 2\pi\sigma \sqrt{r^2 + z^2}\Big|_0^R = 2\pi\sigma\left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z|\right)$$

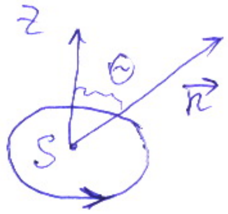
N5.2 Знайти розподіл поверхневого заряду



$$E(x) = 2\frac{\ell}{a^2 + x^2}\cos\Theta = \frac{2\ell}{a^2 + x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{2\ell a}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E = 4\pi\sigma \Rightarrow \sigma(x) = \frac{E}{4\pi} = \frac{\ell a}{2\pi(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

№6. Є еліптичний контур зі струмом.
Знайти $P = ?$ $\frac{dP}{d\Omega} = ?$



$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \cos\omega t$$

$$\vec{M} = \frac{\mathcal{I}\vec{S}}{c}; \quad \vec{M} = \frac{1}{2c}\int_V [\vec{r}' \cdot \vec{j}(\vec{r}')] dV'$$

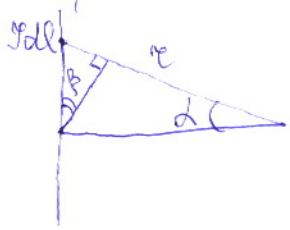
$$\vec{M} = \frac{\mathcal{I}_0 \cos\omega t \cdot S \cdot \vec{e}_z}{c}; \quad \ddot{\vec{M}} = -\frac{\mathcal{I}_0 \omega^2 \cos\omega t \cdot S \cdot \vec{e}_z}{c}$$

$$\frac{dP_m}{d\Omega} = \frac{[\ddot{\vec{M}} \times \vec{n}]^2}{4\pi c^3} = \frac{1}{4\pi c^5} S^2 \mathcal{I}_0^2 \omega^4 \cos^2\omega t [\vec{e}_z \times \vec{n}] = \frac{1}{4\pi c^5} S^2 \mathcal{I}_0^2 \omega^2 \cos^2\omega t \cdot \sin^2\Theta$$

$$\left\langle \frac{dP_m}{d\Omega} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{dP_m}{d\Omega}\Big|_{t=0} = \frac{\mathcal{I}_0^2 S^2}{8\pi c^5} \omega^4$$

$$P_m = \frac{2}{3c^3}(\ddot{\vec{M}})^2 = \frac{2}{3c^3} \frac{\omega^4 \mathcal{I}_0^2 \cos^2\omega t \cdot S^2}{c^2} \qquad \vec{P}_m\big|_{t=0} = \frac{2}{3c^5}\omega^4 \mathcal{I}_0^2 S^2$$

№7 Прямий нескінченний провід. Знайти $\vec{B} = ?$

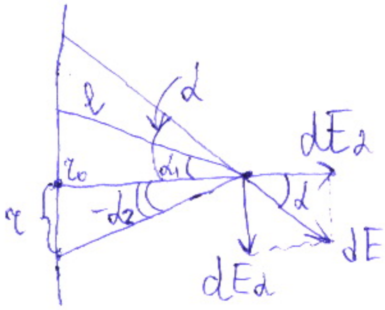


$$dB = \frac{\mathcal{I}}{c} \frac{dl \sin\beta}{r^2} = \frac{\mathcal{I}}{c} \frac{dl \cos\alpha}{r^2} = \frac{\mathcal{I}}{cr} \frac{dl \cos\alpha}{r} = -\frac{\mathcal{I}}{cr} d\alpha =$$

$$= \frac{\mathcal{I}}{cR} \cos\alpha \, d\alpha$$

$$r = \frac{R}{\cos\alpha} \qquad B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathcal{I}}{cR} \cos\alpha \, d\alpha = \frac{2\mathcal{I}}{cR}$$

№7.1 Нескінченно тонкий olівець довжиною l із зарядом q.
Знайти потенціал φ і напруж. E в $\forall$ точці простору.



$$l_0 = l_1 + l_2 \qquad dE = \frac{dq}{r^2} \qquad l = l_1 \cdot l_0$$

$$l = r_0 \, \mathrm{tg}\,\alpha, \quad dl = \frac{r_0}{\cos^2\alpha} d\alpha$$

$$r = \frac{r_0}{\cos\alpha}$$

$$dE = \frac{l_1 r_0 \, d\alpha \cos^2\alpha}{r_0^2 \cos^2\alpha} = \frac{l_1}{r_0} d\alpha; \quad dE_r = dE\cos\alpha = \frac{l_1 \cos\alpha}{r_0} d\alpha$$

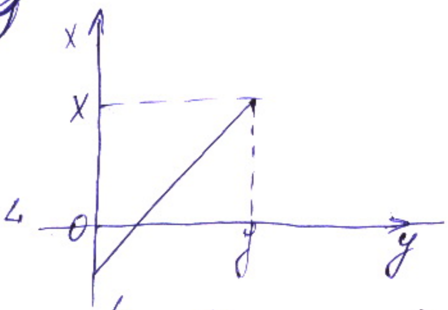
$$E_r = \int_{-\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{l_1 \cos\alpha \, d\alpha}{r_0} = \frac{l_1}{r_0}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) = \frac{l_1}{r_0}\left(\frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + r^2}} + \frac{l_2}{\sqrt{l_2^2 + r^2}}\right)$$

$$dE_\alpha = -\frac{l_1}{r_0} \sin\alpha \, d\alpha \Rightarrow \frac{l_1}{r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = \ldots$$

Якщо маємо нескінченний стержень, то: $\alpha_1 \to \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = 0$, тоді:

$$E_r = \frac{l_1}{r_0}; \quad E_\alpha = -\frac{l_1}{r_0} \Rightarrow E = \frac{\sqrt{2}\, l_1}{r_0}$$

N9



$$\vec{r} = \sqrt{y^2 + (l-x)^2}$$

$$d\varphi = \frac{\lambda\, dl}{\sqrt{y^2 + (l-x)^2}}$$

$$\varphi = \lambda \int_0^L \frac{dl}{\sqrt{y^2 + (l-x)^2}} = \frac{\lambda}{y} \int_0^L \frac{dl}{\sqrt{1 + \left(\frac{l-x}{y}\right)^2}} = \lambda \operatorname{arctg} \frac{l-x}{y} \Big|_0^L = \lambda\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{L-x}{y}\right) - \operatorname{arctg}\left(-\frac{x}{y}\right)\right)$$

$$E = -\operatorname{grad}\varphi = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x}\varphi + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y}\varphi = \vec{e}_x\left[\lambda \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{L-x}{y}\right)^2}}\left(-\frac{1}{y}\right) - \lambda \frac{1}{\sqrt{1-\left(-\frac{x}{y}\right)^2}}\left(-\frac{1}{y}\right)\right] +$$

$$+ \vec{e}_y\left[\lambda \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{L-x}{y}\right)^2}}\left(\frac{x-L}{y^2}\right) - \lambda \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{y}\right)^2}}\left(\frac{x}{y^2}\right)\right]$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln k + \sqrt{x^2+1}$$

N12. Дифракція Фраунгофера на екрані розміром a×в

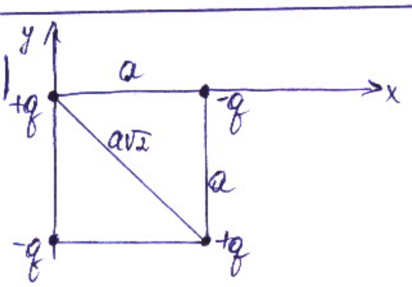
$$U_p = aU \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \int e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}}\, dS = aU \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \int e^{i\vec{q}\vec{r}}\, dS = aU \frac{e^{ikR_0}}{R_0}$$

$$U_p = \frac{U_0 \exp(ikR_0)}{2\pi i R_0} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{i(k_y - k_{y'})y'}\, dy' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{i(k_z - k_{z'})z'}\, dz' =$$

$$= \frac{U_0 \exp(ikR_0)}{2\pi i R_0} \frac{1}{i q_y q_z}\left(e^{iq_y\frac{a}{2}} - e^{-iq_y\frac{a}{2}}\right)\left(e^{iq_z\frac{b}{2}} - e^{-iq_z\frac{b}{2}}\right) =$$

$$= \frac{U_0 \exp(ikR_0)}{2\pi i R_0} \frac{1}{q_y q_z} \sin q_y \frac{a}{2} \sin q_z \frac{b}{2}$$

N12.1



$$D_{xx} = \sum_k e_k (2x_k^2 - y_k^2) = -2a^2q + 2qa^2 + qa^2 - qa^2 = 0$$

$$D_{yy} = \sum_k e_k (2y_k^2 - x_k^2) = 0 = D_{zz}$$

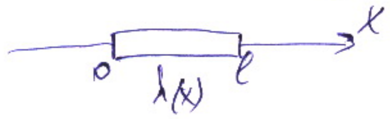
$$D_{xy} = 3\sum_k e_k x_k y_k = 3(-qa\cdot 0 + q\cdot a\cdot a - q\cdot a) =$$

$$= 3qa^2 = D_{yx}$$

$$D_{xz} = 3\sum_k e_k x_k z_k = 0 = D_{zx}; \qquad D_{yz} = D_{zy} = 0$$

$$D_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 3qa^2 & 0 \\ 3qa^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

№10 Нескінченно тонкий стрижень заряджений з лінійною густиною $\lambda(x)$. Знайти нетривіальний мультипольний момент усього стрижня



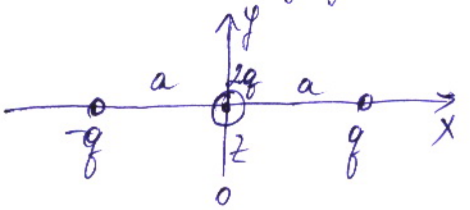
а) $\lambda(x) = Ax$

$$Q = \int_{\ell} \lambda(x)\,dx = \int_0^{\ell} Ax\,dx = \frac{A\ell^2}{2}$$

б) $\lambda(x) = Ax - \frac{A\ell}{2}$

$$d = \int_0^{\ell} x\,\lambda(x)\,dx = \int_0^{\ell}\left(Ax^2 - \frac{A\ell}{2}x\right)dx = \left(\frac{Ax^3}{3} - \frac{A\ell}{4}x^2\right)\Big|_0^{\ell} = \frac{A\ell^3}{3} - \frac{A\ell^3}{4} = \frac{A\ell^3}{12}$$

№10.1 Знайти квадрупольний момент



$$d = 2q\cdot 0 + qa - qa = 0$$

$$D_{\alpha\beta} = \sum_k e_k\left(3x_{\alpha k} - r^k\delta_{\alpha\beta}\right)$$

$\alpha, \beta = 1,2,3 \Longleftrightarrow x, y, z$

$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z$

$$D_{11} = D_{xx} = \sum_k e_k\left(3x_k^2 - r_k^2\right) = \sum_k e_k\left(2x_k^2 - y_k^2 - z_k^2\right)$$

$$D_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \sum_k e_k(2x_k^2 - y_k^2 - z_k^2) & 3\sum_k e_k x_k y_k & 3\sum_k e_k x_k z_k \\ 3\sum_k e_k x_k y_k & \sum_k e_k(2y_k^2 - x_k^2 - z_k^2) & 3\sum_k e_k y_k z_k \\ 3\sum_k e_k x_k z_k & 3\sum_k y_k z_k e_k & \sum_k e_k(2z_k^2 - x_k^2 - y_k^2) \end{vmatrix}$$

$D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}$, $\quad D_{xx} = 2\sum_k e_k x_k^2 = -2a^2q - 2a^2q = -4a^2q$

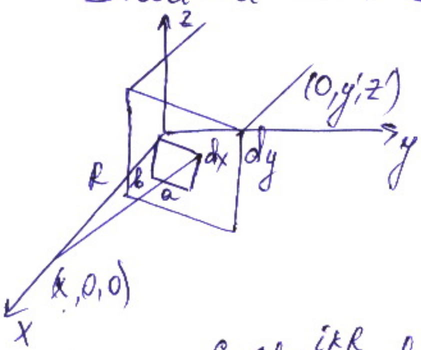
$D_{yy} = D_{zz} = 2qa^2$

$D_{\alpha\beta} = D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0$

$$D = \begin{pmatrix} -4qa^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2qa^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2qa^2 \end{pmatrix}$$

N11 Дифракція Френеля

Знайти a. Площина хвилі рух. вздовж осі x.



I спосіб

$$U_p = a\iint \frac{U}{R} e^{ikR}\, dy'dz' =$$

$$= a\iint \frac{U}{\sqrt{x^2+y'^2+z'^2}} e^{ik\sqrt{x^2+y'^2+z'^2}}\, dy'dz'$$

$$U = e^{ikz+\omega t}$$

$$U_p = a\int \frac{Ue^{ikR}}{R}\, d\tau = aU\int \frac{e^{ik\sqrt{x^2+r^2}}}{\sqrt{x^2+r^2}}\, r\,dr\,d\varphi =$$

$$= 2\pi a U\int_0^\infty e^{ikx\sqrt{1+\frac{r^2}{x^2}}}\, r\,dr = \frac{\pi a U}{x}\int_0^\infty e^{ikx\left(1+\frac{r^2}{2x^2}\right)}\, dr^2 =$$

$$= \pi a \frac{Ue^{ikx}}{x}\int_0^\infty e^{\frac{ikr^2}{2x}}\, dr^2 = \pi a \frac{Ue^{ikx}}{x}\frac{2x}{ik} e^{\frac{ikr^2}{2x}}\Big|_0^\infty =$$

$$= -\frac{2\pi a}{ik} U e^{ikx} \Longrightarrow a = \frac{k}{2\pi i}$$

Інтегруємо від нуля, тому що $\int_0^\infty f(x)\,dx$ – розбігається

$\int_0^\infty f(x)e^{-\alpha x}\,dx$, $\alpha \to 0$ – збігається.

II спосіб

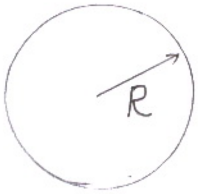
$$R = \sqrt{x^2+y'^2+z'^2} = x\sqrt{1+\frac{y'^2}{x^2}+\frac{z'^2}{x^2}} \approx x\left(1+\frac{1}{2}\frac{y'^2}{x^2}+\frac{1}{2}\frac{z'^2}{x^2}\right)$$

$$\ldots\ a\int \frac{U_0 e^{ikR}}{R}\, dS = a\iint_{-\infty}^{\infty} U_0 e^{ik\left(x+\frac{1}{2}\frac{y'^2}{x}+\frac{1}{2}\frac{z'^2}{x}\right)}\, dy\,dz =$$

$$= aU_0e^{ikx}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{k}{2}\frac{y'^2}{x}}\, d\left(\frac{y'}{\sqrt{x}}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{k}{2}\frac{z'^2}{x}}\, d\left(\frac{z'}{\sqrt{x}}\right) = -aU_0e^{ikx}\sqrt{\frac{2\pi}{ik}}\sqrt{\frac{2\pi}{ik}} =$$

$$= \frac{2\pi i}{k}U_0 a e^{ikx} \Longrightarrow a = \frac{k}{2\pi i}$$

Рівномірно заряджена куля



$\rho = const \qquad \oint \vec{E}\, d\vec{S} = 4\pi \int \rho\, d\tau$

а) $r \le R$

$E\, \cancel{4\pi} r^2 = \cancel{4\pi} \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \Rightarrow$

$\Rightarrow E = \frac{4\pi}{3} r \rho$

$\varphi(R) = \frac{4\pi}{3} \rho R^2$

$\varphi(r) - \varphi(R) = \int_r^R \frac{4\pi}{3} \rho\, r\, dr = \frac{2\pi}{3} \rho \left(R^2 - r^2\right)$

$\varphi(r) = \frac{4\pi}{3} \rho R^2 + \frac{2\pi}{3} \rho \left(R^2 - r^2\right) = 2\pi \rho R^2 - \frac{2\pi}{3} \rho r^2$

б) $r \ge R$

$4E\pi r^2 = 4\pi e \Rightarrow E = \frac{e}{r^2}$

$e = \frac{4\pi}{3} \rho R^3, \quad E = \frac{4\pi}{3} \rho \frac{R^3}{r^2}$

$\varphi(r) - \varphi(\infty) = \int_r^\infty E\, dr = \int_r^\infty \frac{4\pi}{3} \frac{\rho R^3}{r^2} dr =$

$= \frac{4\pi}{3} \rho \frac{R^3}{r}$

$\varphi(\infty) = 0$

9

Знайти $\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\vec{A})+\frac{\partial}{\partial y}(\varphi\vec{A})+\frac{\partial}{\partial z}(\varphi\vec{A})$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\vec{A})=\vec{A}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\varphi\frac{\partial A}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}\vec{A}+\varphi\frac{d\vec{A}}{d\vec{r}}\cdot\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}$$

$$(\vec{A}\nabla)\varphi(r)\vec{A}(r)=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}\vec{A}+\varphi\frac{x}{r}\frac{d\vec{A}}{d\vec{r}}+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{y}{r}\vec{A}+$$

$$+\varphi\frac{y}{r}\frac{d\vec{A}}{d\vec{r}}+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{z}{r}\vec{A}+\varphi\frac{z}{r}\frac{d\vec{A}}{d\vec{r}}=$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\vec{A}}{r}(x+y+z)+\frac{\varphi}{r}\frac{d\vec{A}}{d\vec{r}}(x+y+z)=$$

$$=\frac{\dot{\varphi}\cdot\vec{A}\cdot\vec{r}}{r}+\frac{\varphi}{r}\dot{\vec{A}}\cdot\vec{r}=\frac{\vec{r}}{r}(\dot{\varphi}\vec{A}+\varphi\dot{\vec{A}})$$

10

15

Знайти напруженість поля, коли задано $\varphi = \vec{a}[\vec{b}\vec{r}]$

$[\vec{b}\vec{r}] = \vec{c}$

$\varphi = \vec{a}\vec{c}$

$[\vec{d} \times [\vec{\nabla}_f \times \vec{f}]] = \vec{\nabla}_f (\vec{d}\vec{f}) - \vec{f}(\vec{d}\vec{\nabla}_f) =>$

$=> \vec{\nabla}_f (\vec{d}\vec{f}) = [\vec{d} \times [\vec{\nabla}_f \times \vec{f}]] + \vec{f}(\vec{d}\vec{\nabla}_f); \quad (1)$

$[\vec{f} \times [\nabla_d \times \vec{d}]] = \nabla_d (\vec{f}\vec{d}) - \vec{d}(\vec{f}\nabla_d) =>$

$\vec{\nabla}_d (\vec{f}\vec{d}) = [\vec{f} \times [\vec{\nabla}_d \times \vec{d}]] + \vec{d}(\vec{f}\nabla_d) \quad (2)$

$\mathrm{grad}\, \vec{f}\vec{d} = \nabla_f (\vec{f}\vec{d}) + \vec{\nabla}_d (\vec{f}\vec{d}) = (1) + (2)$

Підставимо $\vec{a} \to \vec{d}$, $\vec{c} \to \vec{f}$, $\vec{a}$ - пост. вектор

$\mathrm{grad}\,(\vec{a}\vec{c}) = [\vec{a}[\vec{\nabla}_c \vec{c}]] + [\vec{c}[\vec{\nabla}_a \vec{a}]] +$
$+ \vec{c}(\vec{a}\vec{\nabla}_c) + \vec{a}(\vec{c}\vec{\nabla}_a)$

Представивши $\vec{c} = [\vec{b}\vec{r}]$

$\mathrm{grad}(\vec{a}[\vec{b}\vec{r}]) = [\vec{a} \times [d \times [\vec{b} \times \vec{r}]]] + [[\vec{b}\vec{r}] \times$
$\times [\vec{\nabla}_d \vec{a}]] + [\vec{b} \times \vec{r}](\vec{a}\vec{\nabla}_b r) + \vec{d}([\vec{b} \times \vec{r}]\vec{\nabla}_a)$

$\mathrm{rot}\,[\vec{b}\vec{r}] = 2b$

$\mathrm{grad}(\vec{a}[\vec{b}\vec{r}]) = [\vec{a} \times 2\vec{b}] + [\vec{b} \times \vec{r}](\vec{a}\vec{\nabla}_b \vec{r})$

11

Заряд $\bar{e}$ розподілен в атомі H, знаходиться в нормальному стані з густиною

$\rho(r) = -\frac{l_0}{\pi a^3} \exp\left[-\frac{2r}{a}\right]$. Знайти φ_e, E_e - ел. поле заряду.

$$E_e(r) = \frac{4\pi}{r^2}\int_0^r r'^2 \left(-\frac{l_0}{\pi a^3}\right) \exp\left[-\frac{2r'}{a}\right] dr' =$$

$$= -\frac{4 l_0}{a^3 r^2}\int_0^r r'^2 e^{-\frac{2r'}{a}} dr' = \left| \begin{array}{l} r'^2 = U \\ dU = 2r'dr' \\ e^{-\frac{2r'}{a}} dr' = dV \\ V = -\frac{a}{2} e^{-\frac{2r'}{a}} \end{array} \right| =$$

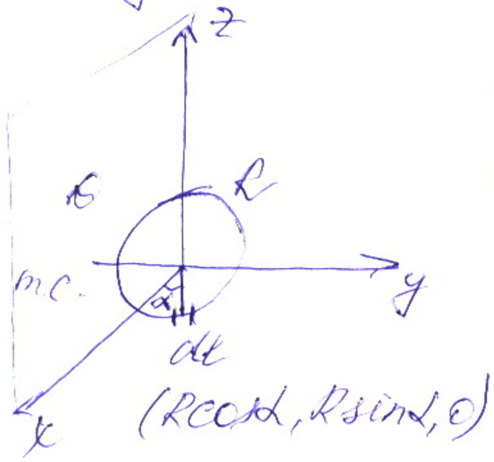
$$= -\frac{4 l_0}{a^3 r^2}\left[-r'^2 \frac{a}{2} e^{-\frac{2r'}{a}} \Big|_0^r + \cancel{2} \cdot \frac{a}{\cancel{2}} \int_0^r e^{-\frac{2r'}{a}} r' dr'\right] =$$

$$= -\frac{4 l_0}{a^3 r^2}\left[-\frac{a}{2} r^2 e^{-\frac{2r}{a}} + a\left(r'\left(-\frac{a}{2}\right) e^{-\frac{2r'}{a}}\Big|_0^r + \frac{a}{2}\int_0^r e^{-\frac{2r'}{a}} dr'\right)\right] =$$

$$= -\frac{4 l_0}{a^3 r^2}\left[-\frac{a}{2} r^2 e^{-\frac{2r}{a}} - \frac{a^2}{2} r e^{-\frac{2r}{a}} - \frac{a^3}{4} e^{-\frac{2r}{a}} + \frac{a^3}{4}\right] \Rightarrow$$

$$E_e(r) = l_0 e^{-\frac{2r}{a}}\left(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{ar} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{l_0}{r^2}$$

№17 Поле кільцевого струму в довільній точці і на осі.



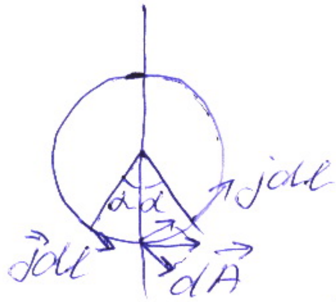
т.с. $(r\sin\theta, 0, r\cos\theta)$

$\vec{j}\,dV = J\,d\vec{l}$, де J – густина струму. J – струм.

$\vec{A} = \frac{1}{c}\int \frac{J\,d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$

$dl = R\,d\alpha\cos\alpha$

$|d\vec{A}| = 2JR\,d\alpha\cos\alpha$



$$A_\varphi = \frac{2JR}{c}\int_0^\pi \frac{\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{r^2+R^2-2R\cdot r\sin\theta\cos\alpha}} =$$

$$\sqrt{(r\sin\theta - R\cos\alpha)^2 + R^2\sin^2\alpha + r^2\cos^2\theta}$$

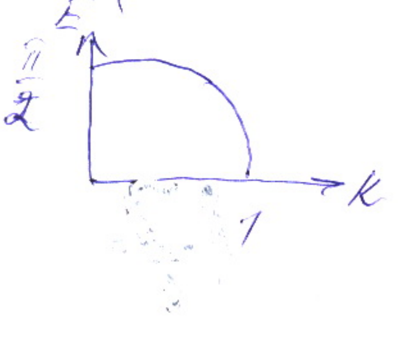
$$= \left[\begin{array}{ll} \alpha = \pi - 2\beta & \alpha = 0 \to \beta = \frac{\pi}{2} \\ d\alpha = -2d\beta & \alpha = \pi \to \beta = 0 \\ \cos(\pi - 2\beta) = \cos 2\beta = 1 + 2\sin^2\beta & \end{array}\right] =$$

$$= \frac{2JR}{c}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-(2\sin^2\beta - 1)\,d\beta}{\sqrt{r^2+R^2+2r\sin\theta - 4\cdot 2R\sin\theta\sin^2\beta}} =$$

$$= \frac{4JR}{c\sqrt{r^2+R^2+2rR\sin\theta}}\left[-\frac{2}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-k^2\sin^2\beta - 1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}\,d\beta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}\right] = \frac{4JR}{c\sqrt{r^2+R^2+2rR\sin\theta}}\left[-\frac{2}{k^2}E(k) + \left(\frac{2}{k^2}-1\right)K(k)\right]$$

$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\beta}\,d\beta$ – повний еліптичний інтеграл ІІ р.

$$\left\{ A_\varphi\Big|_{\theta=0} = \frac{4JR}{c\sqrt{r^2+R^2}}\left[-\frac{2}{0}\frac{\pi}{2} + \left(\frac{2}{0} - 1\right)\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$



18. Знайти $\mathrm{grad}\,(A(r)\cdot r)$

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad 2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x$

$\frac{\partial \vec{A}(r)\cdot\vec{r}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[A_x x + A_y y + A_z z] = \frac{\partial A_x}{\partial x}x + \frac{\partial A_y}{\partial y}y +$

$+\frac{\partial A_z}{\partial z}\cdot z + A_x = \left(\left\{\frac{\partial A_i}{\partial x} = \frac{\partial A_i}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \dot{A}_i\frac{x}{r}\right\}\right) =$

$= \dot{A}_x\frac{x^2}{r} + \dot{A}_y\frac{y}{r}x + \dot{A}_z\frac{z}{r}x + A_x = \frac{x}{r}(\dot{A}_x\cdot x + \dot{A}_y y + \dot{A}_z\cdot z) +$

$+ A_x = \frac{x}{r}(\dot{\vec{A}}\cdot\vec{r}) + A_x$

$\mathrm{grad}\,(\vec{A}(r)\vec{r}) = \left\{\frac{x}{r}(\dot{\vec{A}}\vec{r}) + A_x, \frac{y}{r}(\dot{\vec{A}}\cdot\vec{r}) + A_y, \frac{z}{r}(\dot{\vec{A}}\cdot\vec{r}) + A_z\right\} =$

$= \frac{(\dot{\vec{A}}\vec{r})}{r}\{x, y, z\} + \{A_x, A_y, A_z\} = \frac{(\dot{\vec{A}}\vec{r})}{r}\vec{r} + \vec{A}$

Знайти $\mathrm{grad}\,\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}$

$x = r\sin\theta\cos\alpha$

$y = r\sin\theta\sin\alpha$

$z = r\cos\theta$

$\vec{A} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{p}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\cdot\{x, y, z\} = \frac{\vec{p}}{r^3}\{x, y, z\}$

$r^{3/2} = [r^2\sin^2\theta\cos^2\alpha + r^2\sin^2\theta\sin^2\alpha + r^2\cos^2\theta]^{3/2} =$

$= r^3$.

$\frac{\partial}{\partial r}\vec{A} = \vec{p}\left[-\frac{2\sin\theta\cos\alpha}{r^3} + \frac{-2\sin\theta\sin\alpha}{r^3} + \frac{-2\cos\theta}{r^3}\right]$

$\frac{\partial\vec{A}}{\partial\theta} = \frac{\vec{p}}{r^3}[r\cos\alpha\cos\theta + r\cos\theta\sin\alpha - r\sin\theta]$

$\frac{\partial\vec{A}}{\partial\alpha} = \frac{\vec{p}}{r^3}[-r\sin\theta\sin\alpha + r\sin\theta\cos\alpha + 0]$

$\mathrm{grad}\,\vec{A} = \vec{e}_r\frac{\partial\vec{A}}{\partial r} + \frac{e_\theta}{r}\frac{\partial\vec{A}}{\partial\theta} + \frac{e_\alpha}{r\sin\alpha}\frac{\partial A}{\partial\alpha}$

Ә1

№ 19 Знайти $\operatorname{grad} A(r)B(r)$

$$\frac{\partial \vec{A}(r)\vec{B}(r)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}[A_iB_i] = \frac{\partial A_i}{\partial x}B_i + A_i\frac{\partial B_i}{\partial x} = \dot{A}_iB_i\frac{x}{r} + \dot{B}_iA_i\frac{x}{r}$$

$$\ldots = \dot{A}_xB_x\frac{x}{r} + \dot{B}_xA_x\frac{x}{r} + \dot{A}_yB_y\frac{x}{r} + A_y\dot{B}_y\frac{x}{r} +$$

$$+ \dot{A}_zB_z\frac{x}{r} + A_z\dot{B}_z\frac{x}{r} = \frac{x}{r}\{\dot{A}_xB_x + \dot{A}_yB_y + \dot{A}_zB_z +$$

$$+ \dot{B}_xA_x + \dot{B}_yA_y + \dot{B}_zA_z\} = \frac{x}{r}[\dot{\vec{A}}\vec{B} + \dot{\vec{B}}\vec{A}]$$

$$\operatorname{grad}\vec{A}(r)\vec{B}(r) = \left\{\frac{x}{r}[\dot{\vec{A}}\vec{B} + \dot{\vec{B}}\vec{A}], \frac{y}{r}[\dot{\vec{A}}\ldots], \frac{z}{r}\ldots\right\} =$$

$$= \frac{\vec{r}}{r}[\dot{\vec{A}}\vec{B} + \dot{\vec{B}}\cdot\vec{A}]$$

Знайти $\operatorname{div}\varphi(r)\vec{A}(r) = \varphi(r)\operatorname{div}\vec{A}(r) + \vec{A}(r)\cdot\operatorname{grad}\varphi(r) =$

$$\operatorname{div}\vec{A}(r) = \dot{A}_x\frac{x}{r} + \dot{A}_y\frac{y}{r} + \dot{A}_z\frac{z}{r} = \frac{1}{r}(\dot{\vec{A}}\vec{r})$$

$$\frac{\partial \vec{A}(r)}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \dot{A}_x\frac{x}{r}$$

$$\operatorname{grad}\varphi(r) = \dot{\varphi}\left\{\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right\} = \dot{\varphi}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\frac{\partial\varphi(r)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \dot{\varphi}\frac{x}{r}$$

$$= \frac{\varphi(r)}{r}(\dot{\vec{A}}\cdot\vec{r}) + \vec{A}(r)\cdot\dot{\varphi}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\varphi(r)}{r}(\dot{\vec{A}}\cdot\vec{r}) + (\vec{A}(r)\cdot\vec{r})\frac{\dot{\varphi}}{r}$$

Знайти $\operatorname{rot}\varphi(r)\vec{A}(r) = \varphi\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\times\operatorname{grad}\varphi =$

$$\operatorname{rot}\vec{A}(r) = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x\left[\dot{A}_z\frac{y}{r} - \dot{A}_y\frac{z}{r}\right] -$$

$$-\vec{e}_y\left[-\dot{A}_x\frac{z}{r} + \dot{A}_z\frac{x}{r}\right] + \vec{e}_z\left[\dot{A}_y\frac{x}{r} - \dot{A}_x\frac{y}{r}\right] = \frac{1}{r}[\vec{r}\times\dot{\vec{A}}]$$

$$= \frac{\varphi}{r}[\vec{r}\times\dot{\vec{A}}] + \frac{\dot{\varphi}}{r}[\vec{r}\times\vec{A}]$$

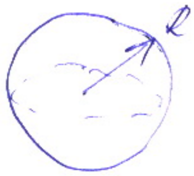
№20. Магнітне поле кільця зі струмом.
Знайти магнітне поле.

$\vec{dl} \perp \vec{R}$

$$dB = \frac{I[\vec{dl} \times \vec{R}]}{R^3} = \frac{I dl}{R^2}$$

$$B = \frac{I \cdot 2\pi R}{R^2} \Rightarrow B = \frac{2\pi I}{R} \; (CGSM)$$

Знайти потенціал всередині і ззовні кулі
Нерівномірно заряджена куля $\rho = ar^2$



$$\int\limits_{(S)} \vec{D} \cdot \vec{n} \, dS = 4\pi \int\limits_{\tau} \rho \, d\tau$$

заряд шара

$$e_{з.шара} = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr = 4\pi \int_0^R a r^4 dr = \frac{4\pi a}{5} R^5$$

а) $r > R$ $\quad \vec{E} = \frac{e}{r^3}\vec{r} \Rightarrow E = \frac{e}{r^2} = \frac{4\pi a R^5}{5 r^2}$

$$\varphi = \frac{e}{r} = \frac{4\pi a}{5} R^5; \quad \varphi(R) = \frac{4\pi a}{5} R^4$$

б) $r \le R$ $\quad 4\pi r^2 D = 4\pi \int_0^r \rho 4\pi r'^2 dr = 4\pi \frac{4\pi}{5} a r^5$

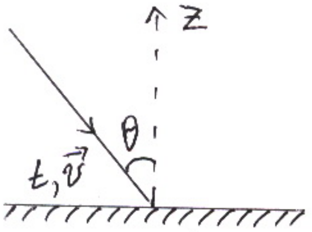
$$D = \frac{4\pi}{5} a r^3, \; E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{4\pi a r^3}{5\varepsilon}$$

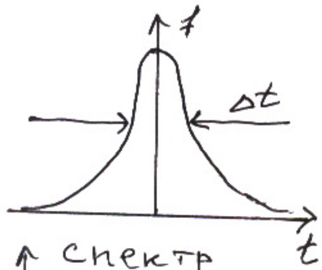
$$\varphi(r) - \varphi(R) = \int_r^R \frac{4\pi a r^3}{5\varepsilon} dr = \frac{\pi a}{5\varepsilon}(R^4 - r^4)$$

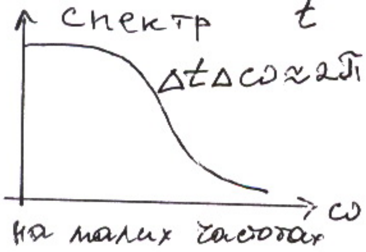
$$\varphi(r) = \frac{4\pi}{5} a R^4 - \frac{\pi a}{5\varepsilon}(R^4 - r^4)$$

81

21 Частинка з зарядом e та швидкістю v пружно відбивається від площини. Визначити довгохвильову частину спектра випромінювання в момент удару.





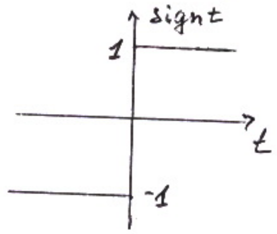


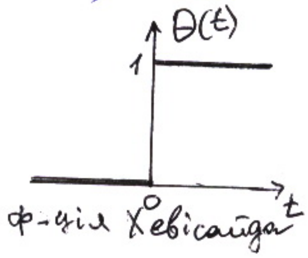
Розв'язання:

Прискорення є тільки в момент удару, а потім зникає $\Rightarrow$ Тільки в момент удару є ф-ція взаємодії f.

Розглядаємо випадок малих частот (великих довжин хвиль) $\Rightarrow$ за ∞ короткий час швидкість змінюється на протилежну

$$v_z = \begin{cases} -v_0 \cos\theta, & t<0 \\ v_0\cos\theta, & t>0 \end{cases} \iff v_0 \cos\theta \, \mathrm{sign}\, t$$





$$\mathrm{sign}\, t = 2\left(\Theta(t) - \frac{1}{2}\right)$$

$$v_z = 2 v_0 \cos\theta \left(\Theta(t) - \frac{1}{2}\right)$$

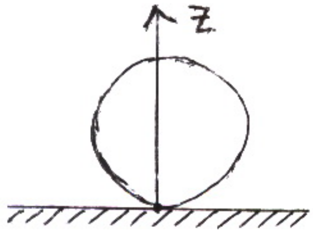
$$\dot{\Theta}(t) = \delta(t)$$

$$d = ze \; ; \quad \ddot{d}_z = \ddot{z}_z e = \dot{v}_z e = -2e\left(v_0 \cos\theta\left(\Theta(t) - \frac{1}{2}\right)\right)' =$$

$$= -2e v_0 \cos\theta\, \delta(t)$$

$$(\ddot{d}_z)_\omega = -\int_{-\infty}^{\infty} \ddot{d}_z e^{i\omega t} dt = -2e v_0 \cos\theta \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{i\omega t} dt = -2e v_0 \cos\theta$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{2}{3\pi c^3} |\ddot{d}_\omega|^2 = \frac{2}{3\pi c^3} 4 e^2 v_0^2 \cos^2\theta = \frac{8e^2}{3\pi c^3} v_0^2 \cos^2\theta$$

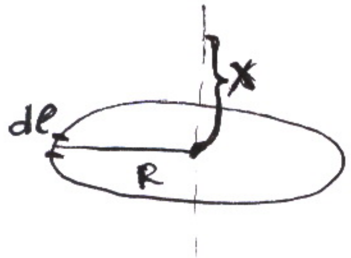


Вздовж площини випромінювання немає

N 29

Знайти E в центрі і на осі кільця якщо $\lambda = \lambda_0 \cos\varphi$

(? аналога в Обух. немає)



$$\varphi_y = \int_0^{2\pi} \frac{R \lambda_0 \cos\varphi \, d\varphi}{R} =$$

$$= -\lambda_0 \varphi \sin\varphi \Big|_0^{\pi/2} = -\lambda_0 \varphi$$

$$E = \frac{4\lambda_0}{R}$$ на осі $$\varphi_0 = 4\lambda_0 \int_0^{2\pi} \frac{R \cos\varphi \, d\varphi}{\sqrt{R^2+x^2}} =$$

$$= -\frac{4\lambda_0}{\sqrt{R^2+x^2}} \sin\varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{-4\lambda_0 R}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

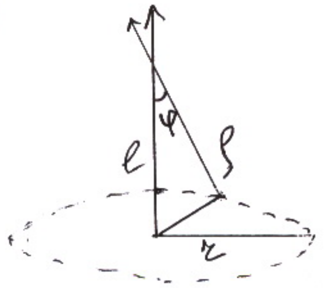
$x \to 0$ $\quad |E| = 4\lambda_0$; $\quad x \to \infty$ $\quad |E| = \infty$

$$|E| = -\operatorname{grad} \varphi = \left| \frac{4\lambda_0 R}{\sqrt{R^2+x^2}} \Big|_x \right| = \frac{4\lambda_0 R_{"}}{\sqrt{(R^2+x^2)^2}}$$

$$|E| = 4\lambda_0 \int_0^{\pi/2} \frac{R \cos\varphi \, d\varphi}{R^2+x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} = 4\lambda_0 \frac{Rx}{\sqrt{(R^2+x^2)^2}}$$

$$E = \frac{\lambda_0 R^2 \pi}{(x^2+R^2)^{1/2}}$$

22



$\sigma = \text{const}$

$dS = r\,dr\,d\alpha$

$dl = \sigma\, r\,dr\,d\alpha$

$dE = \dfrac{dl}{\rho^2} = \dfrac{\sigma\, r\,dr\,d\alpha}{\rho^2}$

$dE\cos\varphi = \dfrac{\sigma\, r\,dr\,d\alpha}{\rho^2}\cos\varphi$

$dE\cos\varphi = 2\pi\sigma \dfrac{r\,dr\cos\varphi}{\rho^2}$; $\quad r = l\,\mathrm{tg}\,\varphi$; $\quad \rho = \dfrac{l}{\cos\varphi}$

$dr = \dfrac{l}{\cos^2\varphi}d\varphi$; $\quad dE\cos\varphi = 2\pi\sigma \dfrac{l\,\mathrm{tg}\varphi\, l\,d\varphi\cos\varphi\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi\, l^2} =$

$= 2\pi\sigma\sin\varphi\, d\varphi$

$E = 2\pi\sigma(1-\cos\varphi) = 2\pi\sigma\left(1-\dfrac{l}{\sqrt{l^2+R^2}}\right)$

---

23 При яких умовах поляризованість магніто-дипольного випромінювання не залежить від вибору початкових координат?

$\vec{M} = \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_V [\vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,',t)]\,dV$, $\quad \vec{r} \to \vec{a} + \vec{r}\,'$

$\vec{M} = \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_V [(\vec{a}+\vec{r}\,')\times\vec{j}(\vec{a}+\vec{r}\,')]\,dV' = \dfrac{1}{2c}\int_V [\vec{r}\,'\times\vec{j}(\vec{a}+\vec{r}\,')]\,dV' +$

$+ \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_V [\vec{a}\times\vec{j}(\vec{a}+\vec{r}\,')]\,dV' = \vec{M}_0 + \dfrac{1}{2c}\int_V [\vec{a}\times\vec{j}]\,dV'$

$P = \dfrac{2}{3c^3}(\ddot{\vec{M}})^2$; $\quad P = \dfrac{2}{3c^3}(\ddot{\vec{M}}_0)^2$

$\ddot{\vec{M}} = \ddot{\vec{M}}_0 + \underbrace{\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_V [\vec{a}\times\ddot{\vec{j}}]\,dV'}_{\to 0} \Rightarrow \int_V \ddot{\vec{j}}\,dV' = 0$

$\vec{d} = \displaystyle\int_V \rho\,\vec{r}\,dV$; $\quad \dot{\vec{d}} = \int_V \dot{\rho}\,\vec{r}\,dV'$; $\quad \dot{\vec{d}} = \int_V \vec{j}\,dV$

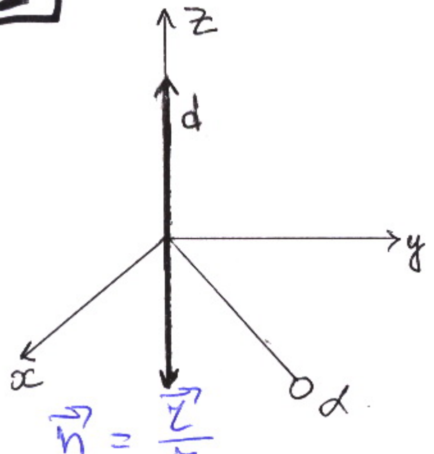
$\mathrm{div}\,\vec{j} = -\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = -\dot{\rho}$; $\quad d_x = \displaystyle\int_V j_x\,dV$

$(\mathrm{div}\,\vec{j})_x = -\mathrm{div}(x\vec{j}) - \vec{j}_x$

$d_x = -\displaystyle\int_V (\mathrm{div}\,\vec{j})\,x\,dV = -\int_V \mathrm{div}(x j)\,dV + \int_V j_x\,dV =$

$= \underbrace{-\oint x\,\vec{j}\,\vec{n}\,dS}_{0} + \displaystyle\int_V j_x\,dV \Rightarrow \ddot{\vec{d}} = \text{const}$

24 | 1



$\vec{n} = \dfrac{\vec{r}}{r}$

$\vec{d} = \vec{d}_0 \sin\omega t$

$\vec{d}_\alpha = \alpha \vec{E}$

$\vec{E} = \underbrace{\dfrac{3(\vec{d}\vec{n})\vec{r} - \vec{d}}{r^3}}_{\text{статичне поле диполя}} + \dfrac{[[\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}] \times \vec{n}]}{c^2 r} = -\dfrac{\vec{d}}{r^3}$

Випромінювання диполя: $\dfrac{d\omega^2}{c^2 r} = \dfrac{d}{\lambda^2 r} \ll \dfrac{d}{r^3}$

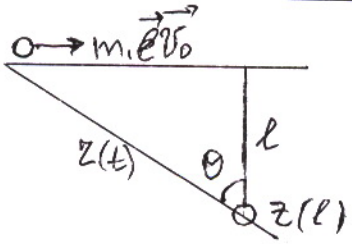
$\Rightarrow \vec{E} = -\dfrac{\vec{d}}{r^3}$; $\vec{d}_\alpha = -\dfrac{\alpha \vec{d}_0 \sin\omega t}{r^3}$

$\Longrightarrow p = \dfrac{2}{3c^3}(\ddot{\vec{d}})^2 = \dfrac{2}{3c^3} \dfrac{\alpha d_0}{r^3} \omega d_0^2 \omega^4 \left(1 + \dfrac{\alpha}{r^3}\right)^2 \sin^2\omega t =$

$= \dfrac{2}{3c^3} \dfrac{\alpha^2 d_0^2 \omega^4}{r^6} \sin^2\omega t$

---

24 | 2



$\ddot{\vec{r}} = \dfrac{\vec{F}}{m}$

$\vec{d} = e\vec{r}(t)$; $p = \dfrac{2}{3c^3}(\ddot{\vec{d}})^2$

$\vec{F} = -\dfrac{Ze^2}{r^2} \Longrightarrow \ddot{\vec{r}} = -\dfrac{Ze^2}{mr^2}$

$E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p\,dt$; $p = \dfrac{2}{3c^3}\left(e\dfrac{Ze^2}{mr^2}\right)^2 = \dfrac{2Z^2}{3c^3}\dfrac{e^6}{m^2 r^4}$

$E = \dfrac{2Z^2e^6}{3m^2c^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dt}{r^4(t)} = \dfrac{2Z^2e^6}{3m^2c^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dt}{(v_0^2t^2 + l^2)^2}$

$v_0 t = \sqrt{r^2 - l^2} \Longrightarrow r = \sqrt{v_0^2 t^2 + l^2}$

$\cos\theta = \dfrac{l}{r}$; $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{v_0 t}{l}$; $r = \dfrac{l}{\cos\theta}$; $t = \dfrac{l \operatorname{tg}\theta}{v_0}$; $dt = \dfrac{l}{v_0}\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$E = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{2Z^2e^6}{3m^2c^3}\dfrac{l}{v_0}\dfrac{d\theta\cos^4\theta}{\cos^2\theta\, l^4} = \underbrace{\dfrac{2Z^2e^6}{3m^2c^3l^3v_0}}_{b}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos^2\theta\,d\theta = \dfrac{b}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta =$

$= \dfrac{b}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2}\sin 2\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right) = \dfrac{Z^2e^6\pi}{3m^2c^3l^3v_0}$

$T = \dfrac{mv_0^2}{2}$; $\dfrac{E}{T} = \dfrac{2Z^2e^6\pi}{3m^2c^3l^3v_0 m v_0^2} \ll 1$

$v_0^3 \gg \dfrac{Z^2e^6}{l^3m^3c^3}$; $v_0 \gg \dfrac{Z^{2/3}e^2}{cml}$

(N 25) Заряд розподілений сфер. симетр. чином: $\rho = \rho(r)$. Розбивши розподіл заряда на сферичні шари, виразити через $\rho(r)$ потенціал φ і $\vec{E}$ поля.

$$E = 4\pi r^2 = 4\pi \int_0^r \rho(r)\, 4\pi r^2 dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{4\pi}{r^2} \int_0 \rho(r') r'^2 dr'$$

$$\varphi = -\int_{+\infty}^{r} E dr = 4\pi \int_r^{\infty} \frac{1}{\tilde{r}^2} \int_0^{\tilde{r}} \rho(r') r'^2 dr' d\tilde{r} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} dV = \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^2} \\ V = -\frac{1}{\tilde{r}} \end{array} \right| = \frac{4\pi}{\tilde{r}} \int_0^{\tilde{r}} \rho(r') r'^2 dr' \Big|_r^{\infty} +$$

$$+ 4\pi \int^{+\infty} \frac{1}{r} \rho(\tilde{r}) \tilde{r}^2 d\tilde{r}$$

$$\varphi(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + 4\pi \int_r^{\infty} \rho(\tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r}$$

$$F(r) = \frac{4\pi}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$$

(26) Система складається із частинок у яких $\frac{e}{m} = const$. Показати, що в системі немає дипольного випромінюван

$$\vec{d} = \sum_i e_i \vec{r}_i = \sum_i \frac{e_i}{m_i}(m_i \vec{r}_i) =$$

$$= \frac{e}{m} \underbrace{\frac{\sum(m_i \vec{r}_i)}{M}}_{= R_y} M$$

$$\left(\sum_i m_i = M\right) \qquad \vec{d} = \frac{e}{m} M \vec{R}_y ; \quad \dot{\vec{d}} = 0, \ \ddot{\vec{d}} = 0$$

$$P \sim (\ddot{\vec{d}})^2 = 0$$

— // — // — немає магнітно-дипольного випром.

$$P_M = \frac{r}{3c^3}(\ddot{\vec{M}})^2$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2c} \sum_i [\vec{r} \vec{j}(\vec{r}_i)] ; \quad \vec{d} = \int_V \rho \, dV$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \vec{d} = \int \vec{j} \, dV ; \quad \vec{d} = \int \vec{j} \rightarrow$$ повний момент імпульсу

$$\vec{M} = \frac{1}{2c} \sum_i e_i \left[\vec{r}_i \times \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right] = \frac{e}{2mc} \sum_i m[\vec{r}_i' \times \vec{v}_i] =$$

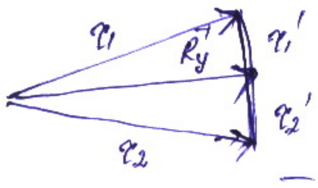
$$= \frac{e}{2mc} \vec{L} = const$$

— // — // — 2 частинки — // — немає магн.-дип. випр.

$$\vec{M} = \frac{1}{2c}\left[e_1 \left[\vec{r}_1 \times \frac{d\vec{r}_1}{dt}\right] + e_2\left[\vec{r}_2 \times \frac{d\vec{r}_2}{dt}\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{2c}\left[\frac{e_1 m_1}{m_1}\left[\vec{r}_1 \times \frac{d\vec{r}_1}{dt}\right] + \frac{e_2 m_2}{m_2}\left[\vec{r}_2 \times \frac{d\vec{r}_2}{dt}\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{2c}\left[\frac{e_1 \vec{L}_1}{m_1} + \frac{e_2 \vec{L}_2}{m_2}\right] = \frac{1}{2c}\left[\frac{e_1 m_2 \vec{L}_1 + e_2 m_2 \vec{L}_2}{m_1 m_2}\right]$$



$$R = \frac{r_1 m_1 + r_2 m_2}{M} ; \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{r}_1 = R + \frac{m_2}{M} \vec{r} \qquad \vec{r}_2 = \vec{r}_1 - r$$

$$\vec{R} = \frac{1}{M}(\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2 - \vec{r} m_2) = \frac{1}{M}(\vec{r}_1(m_1 + m_2) - \vec{r} m_2)$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_2 m_1}[\vec{r}_1(m_1 + m_2) - \vec{r} m_2] ; \quad \vec{r}_2 = R + \frac{m_2}{M}\vec{r} ; \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}$$

$$\vec{R} = 0 ; \quad \vec{r}_1 = \frac{m_2}{M}\vec{r} ; \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{M}\vec{r} ;$$

$$\dot{\vec{r}}_{1,2} = \pm \frac{m_{1,2}}{M} \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2c}\left(e_1\left(\frac{m_2}{M}\right)^2 [\vec{r} \times \dot{\vec{r}}] + e_2 \left(\frac{m_1}{M}\right)^2 [\vec{r} \times \dot{\vec{r}}]\right) = \frac{1}{2c}[\vec{r} \times \dot{\vec{r}}] \frac{1}{M^2} \cdot$$

$$\cdot (e_1 m_2^2 + e_2 m_1^2) \sim \frac{1}{2c} \vec{N} \frac{1}{M^2}(e_1 m_2^2 + e_2 m_1^2) = const \Rightarrow \dot{\vec{M}} = 0 = \ddot{\vec{M}}$$

(27) Електрон рухається прямол. рівном.

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{e}{R - \frac{(\vec{R}\vec{V})}{c}}\Bigg|_{t'} \qquad = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}$$

$$\vec{A}(r,t) = \frac{e\vec{V}}{c\left(R - \frac{(\vec{R}\vec{V})}{c}\right)}\Bigg|_{t'}$$

$$\vec{E} = \frac{e\left(e - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c}R\right)}{\left(R - \frac{\bar{V}R}{c}\right)^3} + \frac{e\left(R\left(\left(\vec{R} - \frac{\vec{V}}{c}R\right)\dot{\vec{V}}\right)\right)}{c^2\left(R - \frac{VR}{c}\right)^2}$$

Розглянемо I-ий доданок:

$$= \frac{1}{R}[\bar{R}E], \quad V = 0$$

$$= \frac{e\bar{R}}{R^3}, \text{ при } \frac{V}{c} \ll 1, \quad E \sim \frac{1}{R^2}; \quad H \sim \frac{1}{R^2}$$

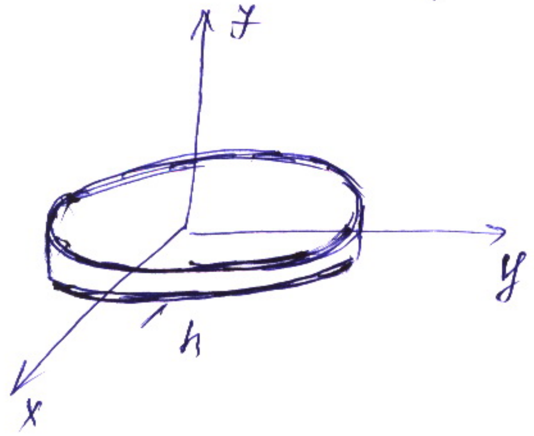
$$\bar{B} \sim \frac{1}{4\pi}[\bar{E}\bar{H}] \sim \frac{1}{R^4}$$

Розглянемо II-ий доданок:

$$E = \frac{eR^2}{c^2R^3} \sim \frac{1}{R}; \quad B \sim \frac{1}{R}$$

$$\bar{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot}\bar{A}$$

(28) Знайти квадрупольний момент системи, що має q диска, R, висота h, рівномірний розподіл густини ρ.



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$D_{xx} = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \times$$

$$\times \left(2\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi - z^2\right) =$$

$$= q\int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi}\left(2\rho^2\cos^2\varphi\, h - \rho^2\sin^2\varphi\, h - \frac{h^3}{R}\right) =$$

$$= q\int_0^R \rho\, d\rho \left(2\rho^2 h - \underbrace{\rho^2\pi h}_{=0} - 2\pi\frac{h^3}{12}\right. =$$

$$= q\int_0^R \left(2\rho^3\pi h - \frac{\pi h^3}{6}\rho\right) d\rho$$

$$q\left(2\frac{R^4\pi h}{4} - \frac{\pi h^3 R^2}{12}\right) = \frac{d}{4}\left(R^2 - \frac{h^2}{3}\right)$$

$$D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2}D_{zz}$$

$$D_{xy} = D_{yx} = 0 = h\int_0^R \rho^3 d\rho \int^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = 0$$

$$D_{xz} = D_{zx} = D_{yz} = D_{zy} = 0 = 3\int_0^R \rho\, d\rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \int_0^{2\pi} d\varphi\, \rho z \cos\varphi = 0$$

$$D_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \sum l_k(2x_k^2 - y_k^2 - z_k^2) & 3\sum l_k x_k y_k & 3\sum l_k x_k z_k \\ 3\sum l_k x_k y_k & \sum l_k(2y_k^2 - x_k^2 - z_k^2) & 3\sum l_k y_k z_k \\ 3\sum l_k x_k z_k & 3\sum l_k y_k z_k & \sum l_k(2z_k^2 - y_k^2 - x_k^2) \end{pmatrix}$$

$$D_{xx} = \sum l_k(3x_k^2 - y_k^2) = \sum l_k(2x_k^2 - y_k^2 - z_k^2)$$

№ 30 Антена являє собою квадрат із довжиною сторін l.

$J = J_0 \frac{\theta_0 t}{\theta^2 + t^2}$ θ, l - const

Знайти спектр. розподіл та випром. $J(\omega)$

$$M = \frac{JS}{c} = \frac{Jl^2}{c} = \frac{J_0}{c} \frac{\theta t l^2}{l^2 + t^2}$$

$$E = \frac{1}{c^2 |r|} \left[\bar{n} \times \ddot{M} \left(t - \frac{|r|}{c} \right) \right]$$

$$\dot{M} = l^2 \frac{J_0}{c} \theta \frac{(l^2 + t^2) - t \cdot 2t}{(l^2 + t^2)^2} = l^2 \frac{J_0 \theta}{l} \frac{l^2 - t^2}{(l^2 + t^2)^2};$$

$$\ddot{M} = l^2 \frac{J_0 \theta}{c} \frac{-2t(l^2 + t^2)^2 - (l^2 - t^2) 2 (l^2 + t^2) 2t}{(l^2 + t^2)^4} =$$

$$= -l^2 \frac{J_0 \theta}{c} \frac{2t(l^2 + t^2) + (l^2 + t^2) 4t}{(l^2 + t^2)^3} =$$

$$= -l^2 \frac{J_0 \theta}{c} \frac{-2t^3 + 6l^2 t}{(l^2 + t^2)^3} = l^2 \frac{J_0 \theta}{c} \frac{2t^3 - 6l^2 t}{(l^2 + t^2)^3}$$

$$\vec{\ddot{M}} = \bar{e}_z \ddot{M}$$

$$E_{mg}(r, t) = \frac{1}{c^2 |r|} l^2 \frac{J_0 \theta}{c} \left(\frac{2t^3 - 6l^2 t}{(l^2 + t^2)^3} \right).$$

$$\cdot \left(\bar{e}_\perp \sin\theta \right)$$

$$S = \frac{c}{4\pi} E^2 \qquad P = \int S \, d\sigma$$

$$d\sigma = r^2 \sin\theta \, dE \, d\varphi$$

$$P(\omega) = \int^t P(t) e^{i\omega t} dt$$

(31) Довести підстановкою, що потенціали спізнення задовольняли рівнянню Д'Аламбера

$$\Box\varphi = -4\pi\rho \qquad \varphi = \int \frac{\delta(r, t - \frac{r-r'}{c})}{|r-r'|} dr'$$

$$\Delta(f,g) = f\Delta g + g\Delta f + 2\Delta f\,\Delta g$$

$$\Box\rho(\vec{r}; t-\frac{R}{c}) = \frac{1}{R}\Delta(g(\vec{r}; t-\frac{R}{c})) -$$

$$-4\pi\delta(R)\cdot\delta(\vec{r}; t-\frac{R}{c})\nabla\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{Rc^2}\delta_{zz} =$$

$$= -4\pi\delta \quad (*)$$

> перший доданок:

$$\frac{1}{R}\Delta\left(\delta(\vec{r}'; t-\frac{R}{c})\right) = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta t\left(-\frac{1}{c}\right)\frac{\partial R}{\partial x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{Rc}\delta_{zz}\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c}\rho + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{1}{c^2R}\rho_{tt} - \frac{1}{Rc}\rho_t(\Delta R)$$

> другий доданок після $\int$ переходить у

$$-4\pi\delta(R)\rho(\vec{r}'; t-\frac{R}{c}) = -4\pi\rho$$

> третій доданок:

$$2\nabla\delta(\vec{r}'; t-\frac{R}{c})\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = \rho_t\left(-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{\partial R}{\partial x}\left(-\frac{1}{R^2}\right)\frac{\partial R}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{1}{R^2c}\rho_t\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 = \left(\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 - 1\right) = \frac{1}{R^2c}\delta t$$

$$\Delta R = \left(\sqrt{(x-x')^2 + \ldots}\right)^2 = \frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{Rc^2}\delta_{tt} - \frac{1}{R^2c} - 4\pi\rho = \frac{1}{R^2c} - \frac{1}{Rc^2}\delta_{tt} = -4\pi\rho$$

(32) Знайти рівняння, яким задовольняє потенц. $A;\varphi$ якщо після калібровки Лоренца. написати калібровку Кулона

$\operatorname{div} A=0$

$\operatorname{div} E = 4\pi\rho \qquad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \qquad \operatorname{div} \vec{B}=0;$

$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$

$B = \operatorname{rot} A$

$B = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \operatorname{div}\operatorname{rot} A = 0.$

(*) $\operatorname{div}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\varphi = 4\pi\rho$

$\operatorname{rot}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{A}$

$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$

підставляємо у рівняння (*)

$\operatorname{div} A=0.$

$\operatorname{grad}\varphi$ рівняння набуває вигляду:

$\Delta\varphi = -4\pi\rho$

$\Box\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi$

(33) Електрон рухається прямолінійно, рівномірно. Знайти $\vec{E}$ і $\vec{H}$ поля, векторний потенціал.

$$\varphi(r,t) = \frac{e}{R - \frac{Rv}{c}}\Bigg|_t \qquad \vec{A}(r,t) = \frac{e\vec{v}}{c\left(R - \frac{RV}{c}\right)}\Bigg|_t$$

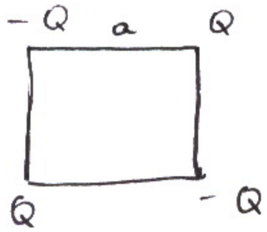
З цих потенціалів знаходимо $\vec{E}$ поле

$$\vec{E} = \frac{e\left(c - \frac{V^2}{c^2}\right)\left(R - \frac{V}{c}R\right)}{R - V} + \frac{e\left(R\left(\left(R - \frac{VR}{c}\right)\frac{1}{V}\right)\right)}{c^2\left(R - \frac{VR}{c}\right)^3}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{R}(\vec{R}\,\vec{E}) \qquad V = 0 \qquad \vec{B} = \frac{e\vec{R}}{R^3} \text{ при } \frac{V}{c} \ll 1.$$

$$B = \frac{1}{R^2} \text{ і } H \sim \frac{1}{R^2} \qquad p \sim [\vec{B}\,\vec{H}] \sim \frac{1}{R^4}$$

№ 34



Чотири заряди розстав. У верхівках квадрата зі стороною а. Величини чергуються +q, −q, +q, −q (плоский квадруполь).
Знайти середнє по часу за період обертання <I> квадр. випром.

$$D_{\alpha,\beta} = \sum (x_\alpha x_\beta z_i^2) q_i$$

$$D_{xx} = D_{yy} = Q\left(\frac{3a^2}{2}\cos^2\omega t - \frac{a^2}{2}\right) -$$

$$-Q\left(\frac{3}{2}a^2\sin^2\omega t - \frac{a^2}{2}\right) + Q\left(\frac{3a^2}{2}\cos^2\omega t -\right.$$

$$\left.-\frac{a^2}{2}\right) - Q\left(\frac{3}{2}a^2\sin^2\omega t - \frac{a^2}{2}\right) = 3Qa^2\cos\omega t$$

$$D_{yy} = -3a^2\, Q\cos 2\omega t$$

$$D_{zz} = -D_{xx} - D_{yy} = 0 \quad \text{, бо}$$

$$x_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\omega t \quad ; \quad y_1 = a v_1 \sin\omega t$$

$$x_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\left(\cos - \frac{H}{2}\right) \quad ; \quad y_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\left(\omega t - \frac{H}{2}\right)$$

$$x_3 = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos(\omega t - H) \quad ; \quad y_3 = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin(\omega t - H)$$

$$x_4 = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\left(\omega t - \frac{3H}{2}\right) \quad ; \quad y_4 = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\left(\omega t - \frac{3}{2}H\right)$$

$$y = \left(\frac{1}{180c^3}\right. D_{\alpha,\beta} = \frac{1}{180c^5}\left(D_{xx}^2 + D_{yy}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{180c^3}(2\omega)^6 \times (3a^2 Q\cos 2\omega t) + (2\omega)^6 \,\cdot$$

$$\cdot\left[(3a^2 Q\cos 2\omega t)^2\right] = \frac{2(2\omega)^6}{180c^5}\, 3^2 a^4 Q\cos^2 2\omega t$$

$$\langle J \rangle = \frac{8}{5}\,\frac{\omega^6 a^4}{c^5} Q$$

N35

Електрон рухається рівномірно прямолінійно. Знайти потенціал шляхом переходу від рухомої с-ми коорд. до нерухомої.

$\varphi = z = 0$ в K': $A' = 0$ $\varphi' = \frac{e}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

скористаємося ф-лами:

$\varphi = \frac{\varphi' + \frac{v}{c} A'_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $A_x = \frac{A'_x + \beta \varphi'}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $A_y = A'_y$; $A_z = A'_z$

$\varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{K' \sqrt{1-\beta^2}}$; $A_x = \beta \varphi$; $A_y = A_z = 0$

Скористаємось перетворенням Лоренца:

$R'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{(x-vt)^2}{1-\beta^2} + y^2 + z^2 \Rightarrow \varphi = \frac{e}{R}$;

де $R = (x-vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)$

$A = \varphi \beta$

(36) Чи може поле бути електростатичним, якщо $rot\, B = 0$, $B[\vec{a} \times \vec{r}]$ - перевірено ???

$$\nabla \times [\vec{a} \times \vec{r}]$$

$$[\vec{a} \times \vec{r}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = i(a_y z - y a_z) + j(a_z x - a_x z) + k(a_x y - a_y x)$$

$$\nabla \times [\vec{a} \times \vec{r}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (a_y z - y a_z) & (a_z x - a_x z) & (a_x y - a_y x) \end{vmatrix} =$$

$$= i\frac{\partial}{\partial y}(a_x y - a_y x) + k\frac{\partial}{\partial x}(a_z x - a_x z) + j\frac{\partial}{\partial z}(a_y z - y a_z) -$$

$$- k\frac{\partial}{\partial y}(a_y z - y a_z) - i\frac{\partial}{\partial z}(a_z x - a_x z) - j\frac{\partial}{\partial x}(a_x y - a_y x) =$$

$$= i(a_x + a_x) + k(a_z + a_z) + j(a_y + a_y) =$$

$$= 2i a_x + 2j a_y + ak a_z = 2\pi$$

поле не є електростатичним.

Знайти $\vec{B}$ в середині і зовні

$$\rho = \rho_0 sh\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

$$B\, 4\pi r^2 = 4\pi \int_0^r 4\pi r^2 dr\, \rho_0\, sh\left(\frac{r}{R}\right)^3 = \frac{4\pi r^2}{3}\int 4\pi \rho_0\, sh\left(\frac{r}{R}\right)^3 d\left(\frac{r}{R}\right)^3 =$$

$$= \frac{4r}{3}\pi^2 \rho_0 \left(ch\left(\frac{r}{R}\right)^3 - 1\right)$$

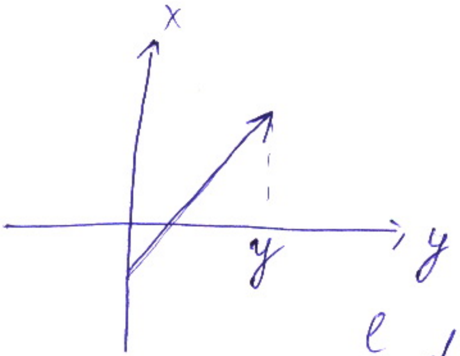
$$\vec{B}_{всер.} = \frac{4\pi\rho_0}{3r^2}\left(ch\left(\frac{r}{R}\right)^3 - 1\right)$$ зовні $r > R$

$$B\, 4\pi r^2 = 4\pi \int_0^R 4\pi r^2 sh\left(\frac{r}{R}\right)^3 dr = \frac{16}{3}\pi^3 \rho_0\, ch\left(\frac{r}{R}\right)^2\Big|_0^R = \frac{16}{3}\pi^2 \rho_0\left(\frac{e}{r} + \frac{1}{2e} - 1\right)$$

$$\vec{B}_{зовн} = \frac{4\pi\rho_0\left(\frac{e}{r} + \frac{1}{2e} - 1\right)}{3e^2}$$

Задача N 37

Знайти B і φ стержня довжиною l



$$\vec{r} = \sqrt{y^2+(l-x)^2}$$

$$d\varphi = \frac{x\,dl}{\sqrt{y^2+(l-x)^2}}$$

$$\varphi = \lambda\int_0^l \frac{dl}{\sqrt{1+\frac{(l-x)^2}{y^2}}} = \lambda \operatorname{arctg}\frac{l-x}{y}\Big|_0^l =$$

$$= \lambda\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{l-x}{y}\right) - \operatorname{arctg}\left(-\frac{x}{y}\right)\right).$$

$$B = \operatorname{grad}\varphi = \vec{l}_y\frac{\partial}{\partial x}\varphi + \vec{l}_y\frac{\partial}{\partial y}\varphi =$$

$$= \vec{l}_x\left[\lambda\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{l-x}{y}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{1}{y}\right) - \lambda\frac{1}{\sqrt{1-\left(-\frac{x}{y}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{1}{y}\right)\right] +$$

$$+ l_y\left[\lambda\frac{1}{1+\left(\frac{l-\cancel{x}}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x-l}{y^2}\right) - \lambda\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\left(\frac{x}{y^2}\right)\right].$$

N38 Магнітний момент струмів змінюється за з-ном $M(t) = M_0 \exp(-t^2/\tau^2)$. Знайти спектр густини е-ї випромін.

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{4}{3c^3} |\ddot{m}_\infty|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\frac{d\mathcal{E}_\omega}{d\omega} = \frac{4}{3c^3} |\ddot{m}_\infty|^2 \frac{1}{2\pi}$$

$$m_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) e^{-i\omega} \frac{dt}{2\pi}$$

$$\ddot{m}_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} m_0 e^{-\frac{t^2}{\tau^2}} e^{-i\omega t} \frac{dt}{2\pi}$$ зводиться до інтеграла $\int_0^{\pi} e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$

Починаючи з моменту $t_0 = 0$ заряджена частина масою m і зарядом Q рухається під дією електричного поля $E(t) = E_0 e^{-\alpha t} \sin\omega_0 t$. Знайти ел. $d\mathcal{E}_\omega$ дипол. випром. системи зв'язаних частот в інтервалі $[\omega, \omega + d\omega]$.

$$\frac{d\mathcal{E}_\omega}{d\omega} = \frac{1}{M} \frac{2}{3\pi c^3} |d\ddot{\omega}|^2 - \text{ел.}$$

$$d\ddot{\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{d}(\varphi, t) e^{i\omega t} dt; \quad \ddot{d} = Q\ddot{x}(\tau, t);$$

$$m\ddot{x} = Q\vec{E}_0 \exp(-\alpha t) \sin\omega_0 t$$

$$\ddot{d}(\tau, t) = \frac{Q^2 E_0}{\pi m} e^{-\alpha t} \sin\omega$$

$$d\ddot{\omega} = \int_0^\infty \frac{Q^2 E_0}{\pi m} e^{-\alpha t} \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) e^{i\omega t} dt = \frac{Q^2 E_0}{2\pi m} \left(\int_0^\infty e^{(i\omega + i\omega - \alpha)t} dt + \int_0^\infty e^{(i\omega - i\omega_0 \alpha)t} dt \right) =$$

$$= \frac{Q^2 E_0 \omega}{2m(\omega_0^2 - \omega^2 + \alpha - 1)} d\omega$$

№39 Знайти потенціал φ і напруженість E електричного поля рівномірнозарядженої прямолінійної нитки

Нехай нитка співпадає з віссю z. Маємо:

$$\Delta\varphi = 4\pi\rho(r,\varphi,z)$$

де $\rho(r,\varphi,z) = \lambda\delta(r)$

Очевидно, що розв'язок задачі не залежить від r:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = \lambda\delta(r)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = \lambda r\delta(r)$$

$$r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \int\lambda r\delta(r)dr = C_1$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{C_1}{r}$$

$$\varphi = \int\frac{C_1}{r}dr = C_1\ln|r| + C_2$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = \frac{C_1}{r}\vec{C_2}$$

№40 Знайти перетворення M^{44} компоненти довільного 4-тензора другого рангу

Будь-який вектор можна представити у вигляді добутку 2-ох векторів G_i і H^k

Ці вектори перетворюються за законом:

$$G'^1 = \gamma(G^1 - \beta G^4) \qquad H'^1 = \gamma(H^1 - \beta H^4)$$

$$G'^2 = G^2 \qquad H'^2 = H^2$$

$$G' = G^3 \qquad H'^3 = H^3$$

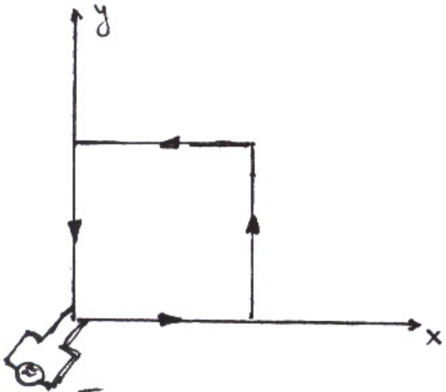
$$G'^4 = \gamma(G^4 - \beta G^1) \qquad H'^4 = \gamma(H^4 - \beta H^1)$$

$$M^{ik} = G^i \cdot H^k$$

$$(M^{44})' = G'^4 H'^4 = \gamma^2(G^4H^4 - \beta H^1 G^4 - \beta H^1 G^4 - \beta H^4 G^1 + \beta^2 G^1 H^1) =$$

$$= \gamma^2(M^{44} - \beta M^{14} - \beta M^{41} + \beta^2 M^{11}) = \gamma^2(M^{44} - \beta(M^{14} + M^{41}) + \beta^2 M^{11})$$

№ 41



По квадратній антені з довж. сторони l тече струм $I = I_0 \frac{at}{b^2+t^2}$. Знайти спектр. склад випромінювання $F(\omega)$

a, b - const

Тут матиме місце магнітно-дипольне випромінювання.

Магнітодипольний момент:

$$\bar{M} = \bar{e}_z \frac{I(t)\, L^2}{c}$$

$$E_{mg} = \frac{1}{c^2 |z|}\left[\bar{n} \times \ddot{\bar{M}}\left(t - \frac{|z|}{c}\right)\right] = \frac{\ddot{J}(t)\, L^2}{c^3 z}[\bar{n} \times \bar{e}_z]$$

$$\bar{n} \times \bar{e}_z = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{e}_x \sin\theta\sin\varphi +$$

$$+ \bar{e}_y \sin\theta \sin\varphi$$

$$|E(t)| = \frac{\ddot{I}(t')\, L^2}{c^3 z}\sin\theta \quad ; \quad t' = t - \frac{z}{c}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ddot{I}(t')\, L^2}{c^2 R}\sin\theta\, e^{i\omega t}\, dt =$$

$$= \left\{ \alpha = \frac{L^2 \sin\theta}{2\pi c^3 z} \right\} = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{I}(t')\, e^{i\omega t}\, dt =$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{I}(\tau)\, e^{i\omega(\tau + \frac{z}{c})}\, d\tau =$$

$$= \alpha\, e^{i\omega\frac{z}{c}} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{I}(\tau)\, d\tau = \left\{ \begin{array}{l} dv = \ddot{I}(\tau)\, d\tau \\ v = \dot{I}(\tau) \\ u = e^{i\omega\tau},\ du = i\omega e^{i\omega\tau} \end{array} \right\} =$$

$$= \alpha e^{i\omega z/c}\left[\underbrace{e^{i\omega\tau}\, \dot{I}(\tau)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{0} - i\omega \int \dot{J}\, e^{i\omega\tau} d\tau\right]$$

$$\left| \begin{array}{ll} u = e^{i\omega\tau} & du = i\omega e^{i\omega\tau} \\ dv = \dot{J}\, d\tau & V = J \end{array} \right| = \alpha(-i\omega) e^{i\omega\frac{z}{c}}\left[\underbrace{I(\tau) e^{i\omega\tau}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} - i\omega\int_{-\infty}^{+\infty} I e^{i\omega\tau} d\tau\right] =$$

$$= -\alpha\omega^2 \tau e^{i\omega\frac{z}{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\tau) e^{i\omega\tau}\, d\tau$$

N42 Знайти функцію відгуку NaCl (Система складається із двохатомних молекул типу NaCl, що не взаємодіють між собою і розстав. хаотично із середньою густиною N. Знайти резон. частоту Ω, її силу осцилятора ф-цію відгуку

Маємо рівняння руху:

$$m\ddot{z} - 2\gamma m\dot{z} + 2\alpha z = E_0 e^{i\omega t}$$

$$\ddot{z} - 2\gamma\dot{z} + \frac{2\alpha}{m} z = E_0 e^{-i\omega t}$$

$$\ddot{z} - 2\gamma\dot{z} + \Omega^2 z = E_0 e^{-i\omega t}$$

Внесок частоти ω уособлює потенціал, який створений усіма частинками для одного іона; z - відстань зміщення; m - ефективна маса

Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$z(t) = Ae^{-i\omega t};$$

$$A(-i\omega)^2 e^{-i\omega t} - 2\gamma(-i\omega)Ae^{-i\omega t} + \Omega^2 Ae^{-i\omega t} = E_0 e^{-\omega t}$$

$$A(2\gamma i\omega + \Omega^2 - \omega^2) = E_0$$

$$A = \frac{E_0}{2\gamma i\omega + \Omega^2 - \omega^2}$$

Маємо:

$$\bar{P} = \alpha\bar{E} \quad ; \quad nq\bar{z} = \alpha E$$

$$\frac{nqE_0}{2\gamma i\omega + \Omega^2 - \omega^2} = \alpha E_0$$

$$\alpha(\omega) = \frac{nqE_0}{\Omega^2 - \omega^2 + 2\gamma i\omega}$$

N43 Математичний маятник довж. l, масою m і заряд. q робить малі коливання. Знайти $\frac{d\mathcal{E}_\omega}{d\omega} = ?$ з урахуванням тертя.

Запишемо р-ня руху : $m\ddot{z} = -nz - \frac{2e^2(\dddot{z})}{3c^3}$ або $m\ddot{z} = -kz - \alpha\dddot{z}$
де $\alpha = \frac{2e^2}{3c^3}$

Візьмемо Фур'є перетворення від лівої і правої частини:

$$m(\ddot{z})_\omega = -k(z)_\omega - \alpha(\dddot{z})_\omega$$

$$m(\ddot{z})_\omega = -k(z)_\omega - i\omega\alpha(\ddot{z})_\omega \Rightarrow (\ddot{z})_\omega = -\frac{k(z)_\omega}{m+i\omega\alpha}$$

З механіки відомо, що ф-ція $z(t) = a(t)\sin\omega_0 t$, де $\omega_0 = 2\pi\sqrt{T}$

Крім того $\dot{a}(t) \ll 1$ затухання малі, таким чином маємо:

$$(z(t))_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} a(t)\sin\omega_0 t \cdot e^{-i\omega t}dt = \left\| \begin{matrix} u = a(t) & du = \dot{a}(t)dt \\ dv = \sin\omega_0 t\, e^{-i\omega t}dt & v = \int \sin\omega_0 t \cdot e^{-i\omega t}dt \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(a(t)\int \sin\omega_0 t \cdot e^{-i\omega t}dt\right)\Big|_{t=-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\dot{a}(t)\int \sin\omega_0 t\, e^{-i\omega t}dt\right)dt =$$

$$= \|\dot{a}(t) \ll 1\| \approx \frac{a_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\omega_0 t\, e^{-i\omega t}dt = \frac{a_0}{2\pi \cdot 2i}(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0))$$, де:

$a_0 = a(t)\big|_{t=0}$, так як не буває від'ємних частот;

$$(z(t))_\omega = a_0\,\delta(\omega-\omega_0)/4\pi i$$

N44

Заряд, що летить зі швидкістю v_0 тормозиться силою $F \sim v$. Знайти $\vec{A}$ в дипольній зоні.

Розв'язання

Виберемо систему координат таким чином, щоб її початок співпадав із положенням частинки в момент часу $t=0$, а віcь z паралельна напрямку руху.

$F = \alpha \dot{x}$

$m\ddot{x} = -\alpha v = -\alpha \dot{x}$

$m\ddot{x} + \alpha \dot{x} = 0$

$m(\dot{x})^{\cdot} + \alpha \dot{x} = 0$

$m\lambda + \alpha = 0$ - характеристичне рівняння

$\lambda = -\frac{\alpha}{m}$

$\dot{x} = C e^{-\frac{\alpha}{m}t}$

$\dot{x}(0) = v_0 = C \Rightarrow$

$\dot{x} = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}$

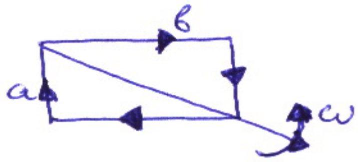
$x \to z,\ t \to t - \frac{|r|}{c}$

$\vec{A} = \frac{1}{|r| \cdot c} \cdot q\dot{z}\vec{e}_z = \frac{1}{|r| \cdot c} q v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}(t - \frac{|r|}{c})} \vec{e}_z$

Відповідь: $\vec{A} = \frac{1}{|r| \cdot c} q v_0 \cdot \exp\left(-\frac{\alpha}{m}\left(t - \frac{|r|}{c}\right)\right) \cdot \vec{e}_z$

N45

Знайти кутовий розподіл випромінювання $\frac{dI}{d\Omega}$ та магнітне поле $\vec{B}$, якщо струм $j = const$.



Розв'язання

Магнітний момент рамки $M = \frac{SI}{c}$

$\vec{M} = \frac{jab}{c}(\vec{e}_x \cos(\omega t') + \vec{e}_y \sin(\omega t'))$

Маємо $\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2|r|} \cdot [[\ddot{\vec{M}}(t') \times \vec{n}] \times \vec{n}]$, де $\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

$\ddot{\vec{M}} = -\frac{jab\omega^2}{c}(\vec{e}_x \cos(\omega t') + \vec{e}_y \sin(\omega t'))$, позначимо $K = -\frac{jab\omega^2}{c}$

$\vec{B} = \frac{1}{c^2|r|}[\vec{n} \times [\ddot{\vec{M}}(t') \times \vec{n}]] = -\frac{1}{c^2 r}((\ddot{\vec{M}}\vec{n})\vec{n} - (\vec{n}\vec{n})\ddot{\vec{M}}) =$

$= -\frac{K}{c^2|r|}((\cos(\omega t') \cdot \sin\theta\cos\varphi + \sin(\omega t') \cdot \sin\theta\sin\varphi) \cdot \vec{n} - \ddot{\vec{M}}) =$

$= -\frac{K}{c^2|r|}[\vec{e}_x(\cos(\omega t')\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin(\omega t')\sin^2\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi - \cos(\omega t')) +$

$+ \vec{e}_y(\cos(\omega t')\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi + \sin(\omega t')\sin^2\theta \cdot \sin^2\varphi - \sin(\omega t')) +$

$+ \vec{e}_z(\cos(\omega t')\sin\theta\cos\theta + \sin(\omega t') \cdot \sin\theta\sin\varphi\cos\theta)] = -\frac{K}{c^2|r|}\varphi(\theta, \varphi, t')$

$dI = Sr^2 d\Omega = \frac{c}{4\pi} \cdot |B|^2|r|^2 = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{j^2a^2b^2\omega^4}{c^6 r^2} \cdot f(\theta) \cdot r^2 d\Omega \Rightarrow$

$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{j^2a^2b^2\omega^4}{c^5} f(\theta)$, де $f(\theta) = \langle(\varphi(\theta, \varphi, t'))^2\rangle$

N 46

Як перетворюються компоненти вектора F^{43}?

Розв'язання

$$\|F^{ik}\| = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$F'^{43} = E'_z = A'^4 \cdot B'^3 \ominus$$

$$\begin{cases} A'^1 = \gamma(A^1 - \beta A^4) \\ A'^2 = A^2 \\ A'^3 = A^3 \\ A'^4 = \gamma(A^4 - \beta A^1) \end{cases} \qquad \begin{cases} B'^1 = \gamma(B^1 - \beta B^4) \\ B'^2 = B^2 \\ B'^3 = B^3 \\ B'^4 = \gamma(B^4 - \beta B^1) \end{cases}$$

$$\ominus\ \gamma(A^4 - \beta A^1) B^3 = \gamma(A^4 B^3 - \beta A^1 B^3) = \gamma(F^{43} - \beta F^{13}) =$$
$$= \gamma(E_z + \beta B_y)$$

Відповідь: $F'^{43} = \gamma(F^{43} - \beta F^{13})$.

N 47

Знайти ненульові компоненти тензора діелектричної проникності.

Розв'язання

C_x^4, C_y^4, C_z^4 – компоненти симетрії

Розглянемо дійсний тензор діелектричної проникності. Приведемо його до діагонального вигляду. Приймемо систему координат за базову

$$\varepsilon_{ij}^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}^0 \end{pmatrix}$$

Розглянемо вісі симетрії C_z^4. Її тензор перетворення має вигляд

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким чином маємо: $a_{ii'} \varepsilon_{i'j'}^0 \tilde{a}_{j'j} = \varepsilon_{ij}^0$

$$a_{ii'} \varepsilon_{i'j'}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{yy}^0 & 0 \\ -\varepsilon_{xx}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}^0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij}^0 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{yy}^0 & 0 \\ -\varepsilon_{xx}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{yy}^0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{xx}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}^0 \end{pmatrix}$$

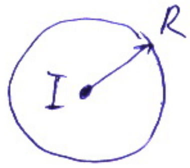
Таким чином $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$ для осей симетрії C_x^4, C_y^4

Аналогічно $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$

Таким чином

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} \varepsilon_0$$

Задача N 48



$\rho \sim r^7$, q – повний заряд.

Знайти φ, E – зовні і всередині.

Маємо: $\rho = \alpha r^7$. Знайдемо α

$$q = \int_0^R 4\pi r^7 \rho\, dr = \alpha 4\pi \int_0^R r^9 dr = \frac{\alpha \cdot 4\pi}{10} R^{10}$$

$$\alpha = \frac{10}{4\pi R^{10}} q$$

(I) $\Delta\varphi = 4\pi\rho$, так, як немає залежності по φ, θ: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = 4\pi \alpha r^7$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = 4\pi\alpha r^9$$

$-\text{grad}\,\varphi|_{r=0} = 0$

$\frac{\partial \varphi}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0$

$\varphi|_{r=0} = \text{const}$

$$r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{4\pi\alpha r^{10}}{10} + C_1'$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{4\pi\alpha r^8}{10} + \frac{C_1'}{r^2}$$

$$\varphi_I = \frac{4\pi\alpha r^9}{90} - \underbrace{\frac{C_1'}{r}}_{=0} + C_2'$$

(II) $\Delta\varphi = 0$ $\quad \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = 0$

$$r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = C_1'' ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{C_1''}{r^2}$$

$$\varphi_{II} = -\frac{C_1''}{r} + C_2'' = 0 \quad ; \quad \varphi(r=\infty) = 0$$

$$\varphi_{II}(R) = -\frac{C_1''}{R} = \frac{q}{R} \Rightarrow C_1'' = -q$$

$$\varphi_I(R) = \frac{4\pi\alpha R^9}{90} + C_2' = \frac{q}{R}$$

$$C_2' = \frac{q}{R} - \frac{4\pi\alpha R^9}{90}$$

Задача № 49

Дослідити випромінювання диполя Герца у близькій зоні. Знайти E і H. Проаналізувати залежність

$\frac{|E|}{|H|} = f(k,r)\bar{z} = -\frac{1}{R}\vec{d}\left(t-\frac{R}{c}\right); \vec{E} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{z}$

$\vec{H} = -\frac{1}{R}\mathrm{rot}\,\vec{z}$. Знайти $\vec{d}(t) = d\,K e^{-i\omega t}$, $k = \frac{\omega}{c}$

$\vec{H} = \dot{H}\omega e^{-i\omega t}$; $\vec{E} = \bar{E}\omega e^{-i\omega t} \Rightarrow \bar{H}\omega = -ik\,\mathrm{rot}\,\vec{d}\,\times$

$\times\,\omega \exp\left(\frac{ikt}{R}\right) = ik\left(\bar{d}\omega - \bar{k}\right]\left(\frac{ik}{R} - \frac{1}{R^2}\right)e^{ikR}$

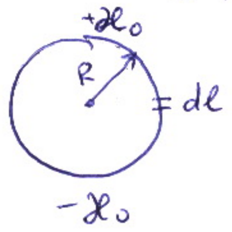
$\bar{n} = \frac{\bar{R}}{|R|}$, $\bar{E}_\omega = \omega t - \frac{1}{c}[\bar{d\omega} - \bar{n}]\left(\frac{ik}{R} - \frac{1}{R^2}\right)e^{-ikR} =$

$= [d\omega\left(\frac{k^2}{R} - \frac{ik}{R^2} - \frac{1}{R^3}\right) + \vec{n}(\bar{n}\,\bar{d\omega})\left(-\frac{R^2K^2}{R} - \frac{3ik}{R^2} + \frac{3}{R^3}\right)]e^{ikR}$

$f(k,r) = \frac{|\bar{E}\omega|}{|\bar{H}\omega|} = \frac{\sqrt{\frac{K^2}{R^2} - \frac{1}{R^3} + \cos\omega\left(-\frac{K^2}{R} + \frac{3}{R^3}\right)^2 + \left(\frac{K}{R^2} - \cos\theta\pi R^2\right)^2}}{R\sin\theta\sqrt{\frac{1}{R^4} + \frac{K^2}{R^2}}}$

№50

Є кільце, $\varkappa_0$ - лінійна густина заряду. $\vec{P}$ - ? (P - дипольний момент)



Розв'язок

Дипольний момент

$$|\vec{P}| = \oint_L \varkappa R\,dl \ominus$$

Запишемо $dl = R\,d\varphi$ тоді

$$\ominus \int_0^{\pi} \varkappa_0 R^2 d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} (-\varkappa_0) R^2 d\varphi =$$

$$= \pi \varkappa_0 R^2 - 2\pi \varkappa_0 R^2 + \pi \varkappa_0 R^2 = 0$$

№51

Записати розподіл заряду, якщо

$$\varphi = \begin{cases} \frac{c}{3}(r^2 - 3R^2) \\ -\frac{3cR^3}{r} \end{cases}$$

Розв'язок

Запишемо р-ння Пуасона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho$$

Так як потенціал залежить тільки від $\vec{r}$ і залежить від θ і φ, то маємо

1) $$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\right) = -4\pi\rho$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{c}{3} 2r\right) = \frac{1}{r^2} 2r^2 c = -4\pi\rho$$

$$2c = -4\pi\rho \Rightarrow \rho = -\frac{c}{2\pi}$$

~~2) $\varphi = -\frac{3cR^2}{r}$~~

~~$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{3cR^3}{r^2}\right)\right) = -4\pi\rho$~~

~~$\rho = 0$~~

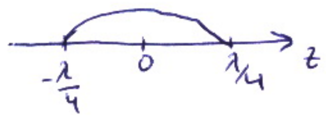
2) $$\varphi = -\frac{3cR^2}{r}$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{3cR^3}{r^2}\right)\right) = -4\pi\rho$$

$$\rho = 0$$

N52

Маємо антену $m=1$. Знайти індикатрису випромінювання (m - кількість напівхвиль струму)



$m=1 \Rightarrow$ струм симетричний

$$I(z') = I_k^0 \cos(kz')$$

Граничні умови

$$I\left(z' = +\frac{L}{2}\right) = I\left(z' = -\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$L = \left(\frac{\lambda}{2}\right) m$$

$$\frac{\omega}{c} = |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi m}{L}$$ – хвильове число

$$I(z') = I_m^0 \cos\frac{\pi m z'}{L}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{c|r|} \iiint_V \vec{j}\left(r', t - \frac{|r|}{c} + \frac{(\vec{r}', \vec{n})}{c}\right) d^3 r' =$$

$$= \frac{1}{c|r|} \iiint_V \vec{e}_z I(z', t') e^{-i\omega t'} \delta(x')\delta(y')\Theta\left(\frac{L}{2} - |z'|\right) dx'dy'dz' =$$

$$= \frac{1}{c|r|} \vec{e}_z I_m^0 \int \cos\frac{\pi m z'}{L} e^{\left[-i\omega\left(t - \frac{|r|}{c} + \frac{(\vec{r}', \vec{n})}{c}\right)\right]} dz' =$$

$$= \frac{\vec{e}_z I_m^0 e^{-i\omega\left(t - \frac{|r|}{c}\right)}}{c|r|} \int \cos\frac{\pi m z'}{L} e^{-i\omega\left(\frac{\vec{r}', \vec{n}}{c}\right)} dz' \ominus$$

$$(\vec{r}', \vec{n}) = r n_x + r_y n_y + r_z n_z = z' \cos\theta$$

$$\ominus \frac{\vec{e}_z I_m^0 e^{-i\omega\left(t - \frac{|r|}{c}\right)}}{c|r|} \int \cos\frac{\pi m z'}{L} \cos\frac{\omega z' \cos\theta}{c} dz' =$$

$$= \frac{k'}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{\pi m}{L} - \frac{\omega \cos\theta}{c}\right) z' + \cos\left(\frac{\pi m}{L} + \frac{\omega \cos\theta}{c}\right) z' \, dz' =$$

$$= \frac{k'}{2} \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi m}{L} - \frac{\omega\cos\theta}{c}\right) z'}{\frac{\pi m}{L} - \frac{\omega\cos\theta}{c}} \Bigg|_{-L/2}^{L/2} + \frac{\sin\left(\frac{\pi m}{L} + \frac{\omega\cos\theta}{c}\right) z'}{\frac{\pi m}{L} + \frac{\omega\cos\theta}{c}} \Bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \right) =$$

$$= \frac{k'}{2} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi m}{L} - \frac{\omega\cos\theta}{c}\right)\frac{L}{2} - \sin\left(\frac{\pi m}{L} + \frac{\omega\cos\theta}{c}\right)\left(-\frac{L}{2}\right)}{\frac{\pi m}{L} - \frac{\omega\cos\theta}{c}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\sin\left(\frac{\pi m}{L} + \frac{\omega\cos\theta}{c}\right)\left(-\frac{L}{2}\right)}{\frac{\pi m}{L} + \frac{\omega\cos\theta}{c}} \right] = k' \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi m}{2} - \frac{L\omega\cos\theta}{2c}\right)}{\frac{\pi m}{L} - \frac{\omega\cos\theta}{c}} + \right.$$

~~Одних з перших філософів~~

$$+ \frac{\sin\left(\frac{\pi m}{2} + \frac{L\omega\cos\theta}{2c}\right)}{\frac{\pi m}{L} + \frac{\omega\cos\theta}{c}} \Bigg] =$$

$$= \frac{\vec{e}_z I_m^0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{|r|}{c}\right)\right)}{c|r|} \cdot \frac{\sin\frac{L\omega\cos\theta}{2c} \, \frac{2\pi m}{L}}{\left(\frac{\pi^2 m^2}{L^2} - \frac{\omega^2\cos^2\theta}{c^2}\right)}$$

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\vec{e}_z I_m^0 \sin\frac{L\omega\cos\theta}{2c}}{c|r|} \cdot \frac{2\pi m \cdot \left(-\omega \sin\left(t - \frac{r}{c}\right)\omega\right)}{L\left(\frac{\pi^2 m^2}{L^2} - \frac{\omega^2\cos^2\theta}{c^2}\right)}$$

$$\vec{S} = \frac{\vec{n}}{4\pi c} \left\langle \left\{ \left(\dot{\vec{A}}^2 - (\vec{n}\dot{\vec{A}})^2\right\} \right\rangle = \frac{\vec{n}}{4\pi c}\langle (\dot{A})^2\rangle \sin^2\theta =$$

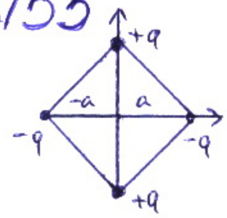
$$= \frac{\vec{n}\sin^2\theta}{4\pi c}\,\frac{I_m^0}{2}\,\frac{\sin^2\frac{L\omega\cos\theta}{2c}}{c^2|r|^2} \cdot \frac{4\pi^2 m^2\omega^2 \sin^2\left(t-\frac{r}{c}\right)\omega}{L^2\left(\frac{\pi^2 m^2}{L^2} - \frac{\omega^2\cos^2\theta}{c^2}\right)^2}$$

$$\frac{dI}{d\Omega} = |\vec{S}|\, r^2 = \frac{I_m^0\, \pi m^2\omega^2}{2c^3L^2}\sin\left(t-\frac{r}{c}\right)\omega \cdot$$

$$\cdot \frac{\sin^2\theta\, \sin^2\frac{L\omega\cos\theta}{2c}}{\frac{\pi^2 m^2}{L^2} - \frac{\omega^2\cos^2\theta}{c^2}} = \frac{\sin^2\theta\,\sin^2\frac{\lambda\omega m\cos\theta}{4c}}{\frac{4\pi^2 m^2}{m^2\lambda^2} - k^2\cos^2\theta} =$$

$$= \frac{k''\sin^2\frac{L}{c}\,k\cos\theta}{k^2} = \left| L = \frac{\lambda}{2}m = \frac{\lambda}{2}\right| = \frac{k''\sin\frac{\lambda}{2c}\,k\cos\theta}{k^2}$$

№53



Знайти $\frac{dI}{d\Omega}$ (індикатрису, кутовий розподіл)

	x_k	y_k
1	$a\cos\omega t$	$a\sin\omega t$
2	$-a\sin\omega t$	$a\cos\omega t$
3	$-a\cos\omega t$	$-a\sin\omega t$
4	$+a\sin\omega t$	$-a\cos\omega t$

$\vec{p} = \sum_m q_m \vec{r}_m = a[-q(\vec{e}_x\cos\omega t + \vec{e}_y\sin\omega t) +$
$+ q(\vec{e}_x(-\sin\omega t) + \vec{e}_y(\cos\omega t)) - q(\vec{e}_x(-\cos\omega t) +$
$+ \vec{e}_y(-\sin\omega t)) + q(\vec{e}_x\sin\omega t - \vec{e}_y\cos\omega t)] =$
$= aq[\vec{e}_x(-\cos\omega t - \sin\omega t + \cos\omega t + \sin\omega t) +$
$+ \vec{e}_y(-\sin\omega t + \cos\omega t + \sin\omega t - \cos\omega t)] = 0$

$\vec{M} = \frac{1}{2c}\sum_m q_m[\vec{r}_m \times \vec{v}]$

Так як відстань до осі обертання не змінюється, і швидкості частинок також не змінюються, то $\vec{M} = \overrightarrow{const}$ і не впливає на випромінювання

Розглянемо квадрупольний внесок:

$Q_{ij} = \sum_m q_m (r_m)_i (r_m)_j$

Так як в задачі немає z-компоненти, то

$Q_{xz} = Q_{zx} = Q_{zy} = Q_{yz} = Q_{zz} = 0$

$Q_{xy} = Q_{yx} = qa^2(-\cos\omega t\sin\omega t - \cos\omega t\sin\omega t -$
$- \sin\omega t\cos\omega t - \sin\omega t\cos\omega t) = 4qa^2(-\sin\omega t\cos\omega t) =$
$= -2qa^2\sin 2\omega t$

$Q_{xx} = qa^2(-\cos^2\omega t + \sin^2\omega t - \cos^2\omega t + \sin^2\omega t) =$
$= -2qa^2(\cos^2\omega t - \sin^2\omega t) = -2qa^2\cos 2\omega t$

$Q_{yy} = qa^2(-\sin^2\omega t + \cos^2\omega t - \sin^2\omega t + \cos^2\omega t) =$
$= 2qa^2\cos 2\omega t$

$$\ddot{Q} = 2qa^2(2\omega)^2 \begin{Vmatrix} \cos 2\omega t & \sin 2\omega t & 0 \\ \sin 2\omega t & -\cos 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$(\ddot{Q}\cdot\vec{n}) = \begin{pmatrix} \cos 2\omega t & \sin 2\omega t & 0 \\ \sin 2\omega t & -\cos 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\omega t\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi + \sin 2\omega t\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ \sin 2\omega t\,\sin\theta\cos\varphi - \cos 2\omega t\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = \frac{1}{2c^2|r|}(\ddot{Q}\cdot\vec{n}) = \frac{qa^2(2\omega)^2}{c^2|r|}\begin{pmatrix} \cos 2\omega t\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi + \sin 2\omega t\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ \sin 2\omega t\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi - \cos 2\omega t\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

* *

$* * *$

$$\bar{S} = \bar{n}\left[(\dot{\bar{A}})^2 - (\dot{\bar{A}} \times \bar{n})^2\right]$$

$$\dot{\bar{A}} = \frac{Bw^3}{|r|}\begin{pmatrix} -\sin 2wt \cdot n_x + \cos 2wt \cdot n_y \\ \cos 2wt \cdot n_x + \sin wt \cdot n_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\dot{\bar{A}})^2 = \frac{B^2w^6}{r^2}\left[\sin^2 2wt \cdot n_x^2 + \cos^2 2wt\, n_y - 2\sin wt \cdot \cos 2wt\, n_x \cdot n_y + \cos^2 2wt\, n_x^2 + \sin^2 2wt \cdot n_y^2 + \right.$$

$$\left. + 2\sin 2wt \cdot \cos^2 wt\, n_x \cdot n_y\right] =$$

$$= \frac{B^2w^6}{r^2}\left[\sin^2 2wt (n_x^2 + n_y^2) + \cos^2 2wt (n_x^2 + n_y^2)\right] = \frac{B^2w^6}{r^2}\left[n_x^2 + n_y^2\right] =$$

$$= \frac{B^2w^6}{r^2}(\sin^2\Theta\cos^2\varphi + \sin^2\Theta\sin^2\varphi) = \frac{B^2w^6}{r^2}\sin^2\Theta$$

$$(\dot{\bar{A}} \cdot \bar{n}) = \frac{Bw^6}{r^2}(-\sin 2wt \cdot n_x^2 + \cos 2wt \cdot n_x \cdot n_y + \cos 2wt\, n_x \cdot n_y + \sin 2wt \cdot n_y^2)^2 =$$

$$= \frac{Bw^6}{r^2}\left(2\cos 2wt \cdot \sin^2\Theta \frac{\sin 2\varphi}{2} + \sin 2wt (n_y^2 - n_x^2)\right) =$$

$$= \frac{Bw^6}{r^2}(\cos 2wt \cdot \sin^2\Theta \cdot \sin 2\varphi + \sin 2wt \cdot \sin^2\Theta(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi))^2 =$$

$$= \frac{Bw^6}{r^2}\sin^4\Theta\,(\cos 2wt \cdot \sin 2\varphi - \sin 2wt \cdot \cos^2\varphi)^2 = \frac{Bw^6}{r^2}\sin^4\Theta\sin^2 2(\varphi - wt)$$

$$\bar{S} = \bar{n}\,\frac{B^2w^6}{r^2}\sin^2\Theta\,(1 - \sin^2\Theta\sin^2 2(\varphi - wt))$$

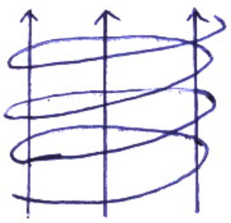
$$\langle\bar{S}\rangle_T = \bar{n}\,\frac{B^2w^6}{r^2}\sin^2\Theta\left(1 - \frac{\sin^2\Theta}{2}\right)$$

$$dI = \langle\bar{S}\rangle_T\, r^2\, d\Omega = B^2w^6\sin^2\Theta\left(1 - \frac{\sin^2\Theta}{2}\right)d\Omega$$

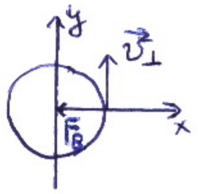
$$\frac{dI}{d\Omega} = B^2w^6\sin^2\Theta\left(1 - \frac{\sin^2\Theta}{2}\right)$$

N54 Заряд влітає в магнітне поле $\vec{H}$ із швидкістю v_0
Знайти середню потужність випромінювання за період

$\frac{dI}{d\Omega}$



$\vec{v}_0 = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$
$\perp$ і $\parallel$ компоненти відносно $\vec{H}$



$v_\perp = \omega R$, $\vec{F}_B = \frac{q}{c}[\vec{v}_\perp \times \vec{B}]$

$\frac{q}{c} v_\perp H = \frac{m v_\perp^2}{R}$; $R = \frac{qH}{mcv_\perp}$, $\omega = \frac{v_\perp}{R} = \frac{mcv_\perp^2}{qH}$

Розглянемо дипольне наближення
$\vec{p} = (\vec{e}_x R\cos\omega t + \vec{e}_y R\sin\omega t)q$
Таким чином ми можемо розкласти диполь на два коливання вздовж осі Ox і Oy
Потужність дипольного випромінення осцилятора з однією степінню свободи записується:

$$P_1 = \frac{2\langle(\ddot{r})^2\rangle q^2}{3c^3} \quad \text{(усереднення за період)}$$

Загальна потужність випромінення

$$P_\Sigma = \frac{2q}{3c^3}\left(\langle(\ddot{x})^2\rangle + \langle(\ddot{y})^2\rangle\right) =$$

$\ddot{x} = -R\omega^2\cos\omega t$
$\ddot{y} = -R\omega^2\sin\omega t$

$$= \frac{2q^2}{3c^3} R^2\omega^4$$

Для знаходження $\frac{dI}{d\Omega}$ обчислимо вектор-потенціал:

$$\bar{A} = \frac{\dot{\bar{p}}(t')}{c|r|} = \frac{(-\vec{e}_x R\omega\sin\omega t + \vec{e}_y R\omega\cos\omega t)q}{c|r|}$$

Вектор Умова-Поінтінга:

$$S = \frac{c}{4\pi}\left[(\dot{\bar{A}}(t'))^2 - (\bar{n}\cdot\dot{\bar{A}})^2\right]$$

$$\dot{\bar{A}} = -\frac{qR\omega^2}{c|r|}$$

$$S = \frac{c}{4\pi}\frac{q^2R^2\omega^4}{r^2c^2}\left[(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) - (\cos\omega t\cdot n_x + \sin\omega t\cdot n_y)^2\right] = ☆☆☆$$

☆ ☆ ☆

$$= \frac{c}{4\pi}\frac{q^2R^2\omega^4}{r^2c^2}\left[1-\left[n_x^2\cos^2\omega t+n_y^2\sin^2\omega t+2n_xn_y\cos\omega t\cdot\sin\omega t\right]\right]$$

$$\langle S\rangle_T=\frac{c}{4\pi}\frac{q^2R^2\omega^4}{r^2c^2}\left[1-\frac{1}{2}(n_x^2+n_y^2)\right]=\alpha\frac{\omega^4}{r^2}\left[1-\frac{1}{2}\sin^2\Theta\right]$$

$$dI=Sr^2\,d\Omega=\alpha\omega^4\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\Theta\right)d\Omega$$

$$\frac{dI}{d\Omega}=\alpha\omega^4\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\Theta\right)$$