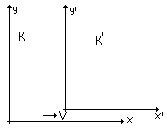
1. Принципи відносності: Галілея та Ейнштейна. Спеціальне перетворення Лоренца. (Kislyk)

Дальнодія. Принцип дальнодії-взаємодія поширюється миттєво. З появою рівняннь Максвела цей принцип був відкинутий, тобто існує посередник, що забезпечує взаємодію – поле.Типи взаємодії (поля): - гравітаційна; - електромагнітна; - слабка; - сильна. Кожне з цих полів має свій заряд.



Спеціальна теорія відносності. Принцип класичної механіки стверджує, що рівняння руху повинні інваріанти відносно перетворень Галілея. $\begin{bmatrix} x' = x - Ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{bmatrix}$ - час інваріант. Із перетворень Галілея випливає закон складання швидкостей в класичній механіці: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{U}t; \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{U}' = \vec{U} - \vec{V}$. U і U'-швидкості матеріальної точки відносно K і K'. Згідно з досвідом m'=m; F'=F. F,m – не змінюються при переході з однієї системи до іншої.

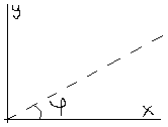
Принцип відносності Галілея. Всі закони механіки інваріантні відносно зміни системи координат $\vec{F} = m\dot{\vec{U}}; \vec{F} = m'\dot{\vec{U}}'$. Тобто немає якоїсь обратної системи координат. C=3*10^8-інваріант. Швидкість світла – максимальна швидкість передачі інформації. Швидкість може бути і більшою.

2. Загальне перетворення Лоренца. Основні властивості перетворення Лоренца. (Kislyk)

Узагальнені принципи (Ейнштейна): - всі закони фізики інваріантні, - швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі, зокрема швидкість світла, незмінюється при переході від однієї системи координат до іншої.

Перетворення Лоренца. Нехай в нас є дві системи. З початку відліку лавораторної системи рахується сферична хвиля. Потрібно знайти звязок (x,y,z,t)->(x',y',z',t'). Він має бути лінійними виходячи з однорідності простору і часу. $\vec{r}(t=0) = 0; \vec{r}(t'=0) = 0$ рівняння фронту хвилі: $r^2 = c^2t^2 \Rightarrow r'^2 = c'^2t'^2$ $\dot{\vec{V}} = 0 = \dot{\vec{V}}'$ $x' = x - Ut$ - за переторення Галілея.

$S^2 = r^2 - c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ S _ релятивістський інтервал. S^2=0; S'^2=0 S=0=inv- для події розповсдження світла. В загальному випадку S^2=k(U)S'^2. З однородності простору і часу може бути лінійним і явно залежати лише від U. S^2=f(S'^2) – як аналітична функція має розклад в ряд $S^2 = k_0 + k_1S'^2 + \ldots$ $k_0, k_1, \ldots \neq k(x, y, z, t)$. Якщо V=c – то k_0=0, V=0 => S^2=S'^2 – однакові системи Поміняємо місцями k->k', x->-x, U->U(як похідна), t->-t. S^2=k_1(U)S'^2, S'^2=k_1(U)S^2. Таким чином **S^2=r^2-c^2t^2=inv**. Вводимо поняття Евклідового простору:



$\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = inv$ - евклідів простір.

$\Delta S_{12}^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2t^2 = inv$ - псевдоевклідів простір, тут S_{12}^{2}-інтервал між двомаподіями в 4-х вимірному просторі.

(x,y)->(x',y') Перехід $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = inv$ $\begin{matrix} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{matrix}$ (x,y,z,ct) $\begin{matrix} x^2 - c^2t^2 = inv \\ x^2 + (ict)^2 = inv \end{matrix}$. Підставимо замість y->ict;

(x,t)->(x',y') $\begin{matrix} x' = x\cos\varphi + ict\sin\varphi; \\ ict' = -x\sin\varphi + ict\cos\varphi; \\ \psi = i\varphi, ch\psi = ch i\varphi = \cos x; sh\psi = i\sin\varphi; \end{matrix}$ Тоді: $\begin{cases} x' = x ch\psi + ct sh\psi \\ ct' = x sh\psi + ct ch\psi \end{cases}$ Розглянемо рух початку координат системи K', тобто точки x'=y'=z'=0 відносно системи K. Спостерігач системи K бачити, що відносноніго ця точкарухається зі швидкістю V. Координати цієї точки в ситемі K рівні: x=Vt, y=z=0. враховуючи ці співвідношення запишемо:

$0 = Vt ch\psi + ct sh\psi, ct' = Vt sh\psi + ct ch\psi$. Звідси $th\psi = -V/c, sh\psi = \frac{-V/t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, ch\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$, $\beta = \frac{V}{c}$ - нормована швидкість. $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ - Лоренц фактор. Таким чоном отримуємо перетворення Лоренца: $\begin{cases} x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{cases}$

$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases}$ (*) Для знаодження обернених перетворень потрібно розвязати рівняння (*) відносно x,y,z,t.

3. Релятивістська кінематіка. Власний час. Власна довжина. Релятивістське додавання швидкостей. (Kislyk)

Власний час. Розглянемо нерухому систему координат K та деяке тіло, що рухається довільним чином (його швидкість свою величину і напрям). З цим тілом повяжемо рухому систему координат. Звичайно ця система буде неінерційною, оскільки бере участь в усіх переміщеннях тіла. Але в деякий певний проміжок часу [t;t+dt] її можемо вважати локально інерціальною (для нескінченно малих перемішень і несхінченно малих проміжків часу). Інтервал, що повязує дві події, розділені несхінченно малим проміжком часу, очевидно, має однакову величину для нерухомої системи і системи повязаної з тілом $(ds)^2$=$(ds')^2$. При запису виразу для інтервалу врахуємо, щзо в системі тіла зміщення координат не відбувається, dx'=dy'=dz'=0. Отже,

$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2(dt)^2 = -c^2(d\tau)^2$ де $d\tau$ - елемент часу в системі координат, повязаній з рухомим тілом (так званий *власний час*). Звернемо увагу, що згідно з останнім співвідношенням, власний час є інваріантом відносно перетворень Лоренца: $d\tau = inv$. При виконанні математичних перетворень врахуємо, що $\frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{(dt)^2} = U^2$, і після нескладних (як на мій погляд) математичних перетворень отримуємо: $d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}$. Відміна власного часу від лабораторного суттєва лише при близьких до швидкості світла.

Закон додавання швидкостей. Нехай у системі K рухається матеріальна точка з координатами x(t),y(t),z(t). Ця ж сама точка в системі K' описується координатами x'(t'),y'(t'),z'(t'). Продиференціюємо координату x' за t', щоб знайти швидкість точки U'_x у системі K'.

Користуючись оберненими перетвореннями Лоренца отримуємо: $\frac{dx'}{dt'} = U_x' = \gamma\left(\frac{dx}{dt}\frac{dt}{dt'} - V\frac{dt}{dt'}\right) = \gamma(U_x - V)\frac{dt}{dt'}$ з перетвореннь не важко обчислити похідну dt'/dt: $\frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{U_xV}{c^2}\right)$. Підставляючи її в попередній вираз отримуємо: $U_x' = \frac{U_x - V}{1 - \frac{U_xV}{c^2}}$,

$U_y' = U_y\frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{U_xV}{c^2}}$, $U_z' = U_z\frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{U_xV}{c^2}}$, де вирази для U'_y та U'_z отримано цілком аналогічним способом. Зовсім неважко записати для зворотного переходу: $U_x = \frac{U'_x + V}{1 + \frac{U'_xV}{c^2}}$, $U_y = U'_y\frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - U'_xV/c^2}$, $U_z = U'_z\frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + U'_xV/c^2}$. В нерелятивістському випадку перетворення швидкостей мають вигляд перетворень Галілея.

Власна довжина. Скорочення масштабів. Нехай в системі K^1 є нерухома тверда лінійка довжиною l_0 (масштаб), орієнтована вздовж осі x'. Яку довжину буде мати цей же масштаб в системі K^2? Визначимо цю довжину наступним чином: одночасно (в системі K') зробимо зарубки на осі x проти кінців масштабу, який рухається в цій системі зі швидкістю V. Відстаньміж зарубками (нерухомими в K) і приймемо за довжину l масштабу, який рухається відносно K. Для обрахунку довжини l використаємо перетворення Лоренца. Нехай кінцям стержня в системі K' відповідають координати x_1', x_2' ($x_1' = \gamma(x_1 - \beta ct_1), x_2' = \gamma(x_2 - \beta ct_2)$). Зарубки робляться в один і той же момент t_1=t_2=t в системі K в точках x_1,x_2. Тоді $x_2' - x_1' = (x_2 - x_1)\sqrt{1 - V^2/c^2}$, але x_2'-x_1' рівне l_0- довжині нерухомого стержня, а x_2-x_1 рівне l- довжині рухомого стержня. Тому $l = l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$ - при русі стержень скорочується.

4. Геометрія 4-простору: метрика, ко- та контра- варіантни величини. (Kislyk)

Евклідів простір при відсутності гравітації (кривини) називається простором Мінковького. Отримавши перетворення Лоренца, ми пересвідчимось у тому, що світ, який нас оточує, має в дійсності чотири виміри (4-радіус вектор (4)) $x^i = (x, y, z, ct) = (\vec{r}, ct), (4)$, а не три. На відміну від евклідової геоматрії у чотиривимірному просторі мірою довжєини є інтервал $\begin{matrix} x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = inv, (1) \\ \vec{r}^2 - (ct)^2 = inv, (2) \end{matrix}$.

Введемо низьку означень та правил, якими будемо коистуватися: 1. Сукупність координат події будемо вважати компонентами 4-радіус вектора. $x^i = (x^1, x^2, x^3, x^4), (3)$ 2.Квадрат довжини цього вектора дорівньє: $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 = inv, (5)$.

3. З геометричної точки зор кожні 4 величини, які при поворотах системи координат перетворюються так само як і x^i називають 4-вектор, закон перетворення має такий вигляд: $\begin{cases} x' = \gamma(x - 3ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases}$ $\begin{cases} (x')^1 = \gamma(x' + \beta x^4) \\ (x')^2 = x^2 \\ (x')^3 = x^3 \\ (x')^4 = \gamma(x^4 - \beta x') \end{cases}$,(7) . *Def* Будь-які чотири величини (A^1,A^2,A^3,A^4), які при переході від лабораторної системи координат до рухомої перетворюються так само, як компоненти 4-радіус вектора, мають назву контрваріантного 4-вектора. $(A')^i = \Lambda^i_k A^k$ *Def* Будь-які чотири величини (B^1,B^2,B^3,B^4), які при переході від лабораторної системи координат до рухомої перетворюються так само, як компоненти 4-базіса вектора, мають назву коваріантного 4-вектора. $(B')_i = \left(\Lambda^{-1}\right)^k{}_i B_k$ Матриця перетворення: $(x')^i = \Lambda^i{}_k x^k$ $\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ - матриця спеціального перетворення Лоенца. $x_i = xe_i = \left(x^ke_k\right)e_i = x^ke_ke_i$ (на початку цього виразу стоїть коваріантна компонента). $x = x^ie_i = (x')^i(e')_i = \Lambda^i_kx^k(e')_i$ де e_ie_i-4-тензор 2 рангу(сукупність 16-ти величин, які при перетворенні системи координат, перетворюються як добуток 2 4-векторів. $x^k\left(e_k - \Lambda^i_k(e')_i\right) = 0, (8)$ $e_k = \Lambda^i_k(e')_i \Rightarrow (e')_i = \left(\Lambda^{-1}\right)^k{}_ie_k, (9)$ Коваріантні зв'язани з контрваріантними так (10): $x_i = xe_i = \left(x^ke_k\right)e_i = x^ke_ke_i, (10)$, T^{ik}-контрваріантний, T_{ik}-коваріантний, $T^i{}_k$,$T_i{}^k$-мішані.Симетричні тензори T_{ik}=T_{ki}, антисиметричні T_{ik}=-T_{ki}.

Приклад: знайдемо T^{12}. $T^{12} = A^1B^2 = \gamma\left(A^1 - \beta A^4\right) \times B^2 = \gamma\left(A^1B^2 - \gamma A^4B^2\right) = \gamma\left(T^{12} - \beta T^{42}\right)$. Інтервал (11):

$(x)^2 = \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2 - \left(x^4\right)^2 = inv, (11)$. $(x)^2 = x \cdot x = \left(x^ke_k\right)\left(x^ie_i\right) = x^kx^ie_ke_i = x^kx^ig_{ki}$ Квадрат 4-вектора може бути додатнім, від'ємним та дорівнювати нулю. Відповідно до цього будемо називати 4-вектори просторовоподібними часоподібними або нульвими. Можливі такі закони перетворення 4-тензора 2-рангу $T'^{ik} = \Lambda^i{}_m\Lambda^k{}_nT^{mn}$ $T_i{}^{k\prime} = \Lambda_i{}^m\Lambda^k{}_nT_m{}^n$ $T'_{ik} = a_i{}^ma_k{}^nT_{mn}$

$T_k{}^{i\prime} = \Lambda^i{}_m\Lambda_k{}^nT^m{}_n$. Діє загальне правило підняття або опускання просторових індексів не змінює знак компоненти, а переміщення часового індексу змінює знак на протилежний: $T^{11} = T_{11}; T^{22} = T_{22}; T_{12} = T^{12}; T^{14} = -T_{14}; T^{44} = T_{44}$. *Найважливіше правило,* яким постійно користуються при обчисленні: у всякий тензорний добуток (зокрема і векторний) рівності вирази в обох частинах повинні містити однакові й однаково розташовані вільні індекси (до німих індексів це звичайно не відноситься). Вільні індекси можемо переміщувати вверх або вниз, але обов'язково одночасно у всіх частинах рівності. Один з просторових тензорів другого рангу – це так званий метричний тензор: $\left\|G_K\right\| = \mathrm{diag}(1,1,1,-1) = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}$ - матричний тензор простору Міньковського. За допомогою нього можна зв'язати контр- та коваріантні елементи метричного простуру. X_i=$X^k g_{ki}$;A_i=$A^k g_{ki}$;A^1=A_1;A^2=A_2;A^3=A_3;A^4=-A_4 Для ортогональних некосокутих координат різниці між ко- та контраваріантними величинами немає. Для координат косокутих різниця полягає в тому, що коваріантні компоненти утворюються при проектуванні точки шляхом опущення перпендикуляра, а контраваріантний –шляхом паралельного переносу (див мал)

$A^k = \left(\vec{A}, \Phi\right)$ – просторовакомпонента ,

$A_k = \left(\vec{A}, -\Phi\right)$ – часовакомпонента .

5. Диференціальні операції в 4-просторі. 4-швидкість і 4-прискорення. (Kislyk)

Диференціальні операції: 4-градієнт деякого скаляра $\phi\left(x^1,x^2,x^3,x^4\right)$ має бути 4-вектором: $\frac{\delta\phi}{\delta x^i}=\left(\nabla\phi,\frac{1}{c}\frac{\delta\phi}{\delta t}\right)$. Для того щоб визначити який це вектор – ко- чи контраваріантний, обчислимо повний диференціал скаляра Ф: $d\phi=\frac{\delta\phi}{\delta x^i}dx^i$. Очевидно, що диференціал скаляра має бути також скаляром. Оскільки диференціали кнтраваріантних величин є все одно контраваріантними величинами, а результатом множення є скаляр (величина, що не змінюється при переході від однієї системи координат до іншої) є величини коваріантні. Отже, при диференціюванні за контраваріантною зміною утворюється коваріантна величина і навпаки, при диференціюванні за коваріантною зміною – контраваріанта. Таким чином, величина $\delta\phi/\delta x^i$ є коваріантний градієнт. Відповідно контраваріантний оператор градієнта має вигляд: $\frac{\delta\phi}{\delta x_i}=\left(\nabla\phi,-\frac{1}{c}\frac{\delta\phi}{\delta t}\right)$. 2. 4-дивергенція деякого 4-вектора A^i має бути скаляр, тобто інваріантом відносно перетворень Лоренца: $\frac{\delta A^i}{\delta x^i}=\frac{\delta A_i}{\delta x_i}=\mathrm{div}A+\frac{1}{c}\frac{\delta A^4}{\delta t}$. 3. 4-ротор деякого 4-вектора A^i є антисиметричним тензором другого (порядку) ранг: $\frac{\delta A_i}{\delta x^k}=-\frac{\delta A_k}{\delta x^i}$. 4. Оператор д'Аламбера в чотирьохвимірних позначеннях має вигляд: $\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x_k}=\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=$ (дорівнює „квадратіку", це спеціальне позначення, якого немає в редакторі формул, і не зміг його підстаити (Макс)).

4-швидкість. У трьохвимірному просторі швидкість U=dr/dt не є 4-вектор. Природно ввести 4-швидкість, як похідну від 4-радіус-вектора події за власним часом: $U^i=dx^i/d\tau$. Користуючись цим означенням можемо обчислити його компоненти. У попередньомі виразі перейдемо від диференціювання за власним часом до диференціювання за часом лабораторної системи координат, ураховуючи $d\tau=dt\sqrt{1-U^2/c^2}$: $U^i=\gamma\frac{dx^i}{dt}$. Розглянемо окрему просторову частину 4-швидкості та окрему часову. Для довілної просторової компоненти (візьмемо як приклад перше, а останні обчислюються аналогічно): $U^1=\gamma\,dx^1/dt=\gamma U_x$, $U^2=\gamma U_y$, $U^3=\gamma U_z$.

Часова компонента, очевидно $U^4=\gamma\,dx^4/dt=\gamma\,dct/dt=\gamma c$. Тому повністю 4-вектор швидкості дорівнює: $U^i=(\gamma U,\gamma c)$. Інваріантність квадрата швидкост отримуємо майже автоматично: $U_iU^i=\gamma^2\left(U_x^2+U_y^2+U_z^2\right)-\gamma^2c^2=\frac{U^2-c^2}{1-U^2/c^2}$ (*).

4-прискорення Цілком аналогічно до того, як було введено 4-швидкість, вводять 4-прискорення: $\omega^i=dU^i/d\tau=\frac{dU^i}{dt}\frac{dt}{d\tau}=\gamma\,dU^i/dt=\gamma\,d/dt\left(\gamma\,dx^i/dt\right)$. Диференцюючи співвідношення (*) для квадрата 4-швидкості, матимемо $U_i\omega^i=0$, тобто вектори 4-щвидкості та 4-привкорення взаємно ортогональні. Розглянемо окремо просторову та часову частини 4-прискорення $\omega^i=(\omega,\omega^4)$. $\omega=\gamma\,d/dt\left(\gamma\,dr/dt\right)=\gamma\left(\dot\gamma U+\gamma\dot U\right)$ (#). Обчислимо похідну $\dot\gamma=\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-U^2/c^2}}=\frac{1}{2c^2\left(1-U^2/c^2\right)^{3/2}}\cdot\frac{d}{dt}\left(U^2\right)$.

Похідна від квадрата в $\frac{d}{dt}\left(U^2\right)=2\left(U\cdot\dot U\right)$, тому, продовжуючи обчислення, маємо $\dot\gamma=\frac{\gamma^3}{c^2}\left(U\dot U\right)$. Подальші обчислення в (#) ніяких ускладнень не викликають. Отже, просторові компоненти 4-прискорення: $\omega=\frac{\gamma^4\left(U\dot U\right)}{c^2}U+\gamma^2\dot U$. Обчислимо часову компоненту:

$$\omega^4=\gamma\frac{d}{dt}\left(\gamma\frac{dx^4}{dt}\right)=\gamma c\frac{d}{dt}(\gamma)=\frac{\gamma^4}{c}\left(U\dot U\right).$$ Таким чином, вектор 4-прискорення записуємо у вигляді

$$\omega^i=\left(\frac{\gamma^4\left(U\dot U\right)}{c^2}U+\gamma^2\dot U,\frac{\gamma^4}{c}\left(U\dot U\right)\right).$$

6. Функції Лагранжа та Гамільтона релятивістської частинки. (Kislyk)

Функції Лагранжа та Гамільтона в СТВ. Якщо 4-швидкість вже визначено, то 4-імпульс треба визначити як $p^i=mU^i$ (1). Так його й визначають, але це суперечить визначенню функції Лакранжа. Для вільної матеріальної точки функція Лагранжа має вигляд $L=\frac{mU^2}{2}$ (2). Кожна компонента обчислюється згідно з означенням як $p_i=dL/dU_i$. Якщо обчислити, наприклад, компоненту p_x за цією формулою., то одержимо $p_x=mU_x$, що не збігається з (1), $p_x=mU_x\Big/\sqrt{1-U^2/c^2}$. Причина в тому, що слід перевизначити функцію Лагранжа. Механіку релятивістських частинок зручно будувати, виходячи з *принципу найменшої дії*, добре відомого з класичної механіки: реалізується такий рух, для якого інтеграл дії S набуває мінімального значення. Визначимо дію S для вільної матеріальної частинки. Очевидно, що значення дії не повинно залежати від вибору системи координат, тобто має бути лоренц-інваріантним. Однак для вільної частинки єдиним можливим інваріантом є інтервал. Отже,

$dS\sim ds=icd\tau=icdt\sqrt{1-U^2/c^2}$. Таким чином, $S=\alpha\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-U^2/c^2}\,dt$, α - деяка, поки невизначена, стала. Як відомо, дія S повязана з функцією Лагранжа співвідношенням $S=\int_{t_1}^{t_2}L\,dt$. Тому функція Лагранжа вільної частинки має вигляд

$L=\alpha\sqrt{1-U^2/c^2}$. Для визначення сталої α скористаємось граничним нерелятивіським випадком, U/c->0:

$L=\alpha\sqrt{1-U^2/c^2}\approx\alpha-\alpha U^2/2c^2$. Перший доданок є сталим, тобто не впливає на рух і може бути відкинутим. Другий має пееходити на класичний вираз (2), звідки α =-mc^2. Враховано також можливі потенціальні взаємодії, запишемо остаточно функцію Лагранжа релятивістської частинки маси m, що рухається із швидкістю U у потенціалі U:

$L=mc^2\sqrt{1-U^2/c^2}-U(r)$. Зроблене означення зобовязує нас перевизначити відповідним чином енергію частинки та функцію Гамільтона, оскільки ці величини з функцією Лагранжа нерозривно повязані. Справді, енергія матріальної точки є:

$$\varepsilon=-pU-L=\frac{mU^2}{\sqrt{1-U^2/c^2}}+mc^2\sqrt{1-U^2/c^2}+U(r)=\frac{mc^2}{\sqrt{1-U^2/c^2}}\left(U^2/c^2+1-U^2/c^2\right)+U(r)=\frac{mc^2}{\sqrt{1-U^2/c^2}}+U(r)$$ (3). При обчисленні було враховано, що просторові компоненти 4-імпульсу дорівнюють $p=\gamma mU$. Крім того, при малих шаидкостях цей вираз переходить в $\varepsilon\approx\frac{mU^2}{2}+U(r)+mc^2$. Вираз для функції Гамільтона можемо отримати, якщо запишемо енергію через узагальнені координати та узагальнені імпульси: $H=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}+U(r)$, що для малих швикостей переходить у $H\approx mc^2+\frac{p^2}{2m}+U(r)$. Перший доданок хоча й великий, але постійний (і не впливає на рівняння руху), а другий є добре відоме нерелятивістське значення енергії. Отже, з усіма необхідними перевизначеннями ми ввели 4-імпульс: $p^i=(\gamma mU,\gamma mc)$. Відмітимо також ще одне співвідношення, яке можливо буде використовуватись у квантовій механіці та оптиці. Просторові компоненти 4-імпульсу повязані з просторовими компонентами швидкості як $p=\gamma mU$, з іншого боку множник $m\gamma$ можемо, використовуючи (3) при $U(r)=0$, записати як $m\gamma=\frac{\varepsilon}{c^2}$ і тому $p=\frac{\varepsilon}{c^2}U$. Отже, вираз для 4-імпульсу можемо переписати у вигляді $p^i=\left(p,\frac{\varepsilon}{c}\right)$.

7. Коваріантне рівняння руха. (Kislyk)

Коваріантне рівняння руху. Рівняння Ньютона (а також рівняння Лагранжа) не інваріантні відносно перетворень Лоренца і тому не можуть адекватно описувати рух із швидкостями світла. Сформулюєморівняння руху, яке б було інваріантним відносно перетворень Лоренца, тобто описувало рух із вшилкістб, рівняною зі швидкістю світла, а при малих швидкостях переходило б у рівняння руху Ньютона. Введемо поняття 4-сили $K^i=\left(K,K^4\right)$ як $K^i=m\omega^i$. Аналогічно до 4-прискорення, 4-сила ортогональна до 4-швидкості. $U_iK^i=0$ (1). Просторові компонентиповязані з трьохвимірним вектором сил елементарним співвідношенням

$K=m\omega=\gamma m\frac{dU}{dt}=\frac{F}{\sqrt{1-U^2/c^2}}$ (2а), підставивши цей вираз у (1), знаходимо рівняння для K^4:

$U_iK^i=\frac{(UF)}{1-U^2/c^2}-\frac{cK^4}{\sqrt{1-U^2/c^2}}=0$, звідки легко визначити часову компоненту 4-сили $K^4=\frac{1}{c}\frac{(UF)}{\sqrt{1-U^2/c^2}}$ (2б). Отже, компонента 4-сили (вона має назву 4-сили Мінковського) згудно з (2) мають вигляд $K^i=\left(\gamma F,\frac{\gamma}{c}(UF)\right)$. Релятивістське рівняння руху набуває форми $\frac{dp^i}{dt}=K^i$. Просторові компоненти цього рівняння становлять релятивістське співвідношення між прискоренням і силою, що в граничному випадку малих швидкостей перетворюється на рівняння Ньютона. Часова компонента, з огляду на $p^i=\left(p,\frac{\varepsilon}{c}\right)$, набуає вигляду $\frac{d\varepsilon}{dt}=(UF)$. Тобто швидкість зміни енергії частинки дорівнює потужнот сил, що діють на неї.

8. Загальні принципи побудови теорії поля. Елементарний заряд в класичній теорії поля. (Roger)

Взаимодействие частиц друг с другом можно описывать с помощью понятия силового поля. Вместо того чтобы говорить о том , что одна частица действует на другую , можно сказать что частица создает вокруг себя поле; на всякую другую частицу, находящуюся в этом поле действует некоторая сила . В классической механике поле является лишь некоторым способом описания физического явления – взаимодействия частиц. В теории же относительности благодаря конечности скорости расосстранения взаимодействий положение вещей существенным образом меняется. Силы, действующие в данный момент на частицу , не определяются их расположением в этот момент. Изменение положения одной из частиц отражается на других лишь спустя некоторый промежуток времени. Это значит что поле само по себе становиться физической реальностью. Мы не можем говорить о непосредственном взаимодействии частиц, находящихся на расстоянии друг от друга. Взаимодействие может происходить в каждый момент лишь между соседними точками пространства (близкодействие). Поэтому мы должны говорить о взаимодействии одной частицы с полем и о последующем взаимодействии поля с другой частицей.

Мы будем рассматривать два вида полей поля гравитационные и электромагнитные. Изучению взаимодействий частиц с электромагнитным полем предпошлем некоторые общие соображения, относящиеся к понятию «частицы» в релятивистской механике.

В классической механике можно ввести понятие абсолютно трердого тела , т.е. тела , которое ни при каких условиях не может быть деформировано.

В теории относительности под абсолютно твердыми телами следовало бы соответственно подразумеевать тела , все размеры которых остаются неизменными в системе отсчета , где они покоятся. Легко , однако можна видеть , что теория относительности делает вообще невозможным существование абсолютно твердых тел.

Рассмотрим например круглый диск , вращающийся вокруг своей оси , и предположим , что он абсолютно тверд. Связанная ……

В невозможности существования абсолютно твердых тел можно убедиться другим путем. Пусть какое-нибудь твердое тело внешним воздействием с какой-нибудь одной его точке приводится в движение. Если бы тело было абсолютно твердым , то все его точки должны были бы прийти в движение одновременно с той , которая подверглась воздействию ; в противном случае тело деформировалось бы. Теория относительности , однако , делает это невозможным, так как воздействие от данной точки передается другим с конечной скоростью , а потому все точки тела не смогут одновременно начать двигаться .

Из сказанного вытекает определенные выводы , относящиеся к рассмотрению элементарных частиц , т.е. частиц , для которых мы считаем , что их механическое состояние полностью описывается заданием трех координат и трех компонент скорости движения как целого.

Очевидно, что если бы элементарная частица обладала конечными размерами , т.е. была бы протяженной , то она не могла бы деформироваться так как понятие деформации связано с возможностью независимого движения отдельных частей тела. Но как мы только что видели , теория относительности показывает невозможность существования абсолютно твердых тел.

9. 4-потенціал електромагнітного поля. Функції Лагранжа та Гамільтона релятивістської зарядженої частинки в електромагнітному полі. (Roger)

Действие для частицы , движущейся в заданном электромагнитном поле , складывается из двух частей : из действия свободной частицы и из члена , описывающего взаимодействие частицы и из члена , описывающего взаимодействие частицы с полем . Последний должен содержать как величины характеризующие частицу, так и величины ,характеririzирующие поле. Оказывается , что свойства частицы в отношении ее взаимодействия с электромагнитным полем определяются всего одним параметром , так называемым зарадом частицы е , который может быть как положительной, так и отрицательной (или равной нулю) величиной. Свойства же поля характеризуются 4-вектором Аi , так названемым 4-потенциалом , компоненты которого являются функциями координат и времени. Эти величины входят в действие виде члена $-e/c\int_a^b A_i dx^i$ где функции Аi берутся в точках мировой линии частицы. Множитель 1/с введен здесь для удобства. Следует отметить , что до тех пор , пока у нас нет никаких формул, связывающих заряд или потенциалы с известными уже величинами, единицы для их измерения могут быть выбраны произвольным образом. Таким образом, действие для заряда в электромагнитном поле имеет вид $S=\int_a^b\left(-mcds-e/cA_idx^i\right)$. При пространственные компоненты 4-вектора Аi образуют трехмерный вектор **A** , называемый векторным потенциалом поля. Временную же компоненту называют скалярным потенциалом; обозначим ее как $A^i=\varphi$. Таким образом $A^i=(\varphi,A)$. Поэтому интеграл действия можно написать в виде $S=\int_a^b\left(-mcds+e/cAdr-e\varphi dt\right)$ или вводя скорость частицы $V=dr/dt$ и переходя к интегрированию по времени $S=\int_{t_1}^{t_2}\left(-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}+e/cAv-e\varphi\right)dt$ Подынтегральное выражение есть функция Лагранжа для заряда в электромагнитном поле: $L=-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}+e/c\mathbf{Av}-e\varphi$.

Это выражение отличается от функции Лагранжа для свободной частицы членами $e/c\mathbf{Av}-e\varphi$, которые описывают взаимодействие заряда с полем. Произведение $\partial L/\partial v$ есть обобщенный импульс частицы; обозначим его посредством **P**.Производя дифференцирование , находим : $\mathbf{P}=-mv\Big/\sqrt{1-v^2/c^2}-e/c\mathbf{A}=\mathbf{p}+e/c\mathbf{A}$.Здесь мы обозначили посредством **p** обычный импульс частицы, который мы и будем называть просто импульсом. Из функции Лагранжа можно найти функцию Гамильтона частицы в поле по известной общей формуле $\mathbf{H}=v\partial L/\partial v-L$ Откуда находим $\mathbf{H}=mc^2\Big/\sqrt{1-v^2/c^2}+e\varphi$ Функция Гамильтона однако должна быть выражена не через скорость а через обобщенный импульс частицы. Из предыдущей формулы видно , что соотношение между $\mathbf{H}-e\varphi$ и $\mathbf{P}-e/c\mathbf{A}$ - такое же ,как между **H** и **p** в отсутствие поля, т.е. $(\mathbf{H}-e\varphi/c)^2=m^2c^2+(\mathbf{P}-e/c\mathbf{A})^2$ или иначе:

$\mathbf{H}=\sqrt{m^2c^4+c^2\left(\mathbf{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}+e\varphi$ Для малых скоростей, т.е. с классической механике, функция Лагранжа переходит в $L=mv^2/2+e/c\mathbf{A}v-e\varphi$ В этом приближении $\mathbf{p}=m\mathbf{v}=\mathbf{P}-e/c\,\mathbf{A}$ и мы находим следующее выражение для функции Гамильтона: $\mathbf{H}=\frac{1}{2m}\left(\mathbf{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2+e\varphi$. Наконец , выпишем уравнение Гамильтона-Якоби для частицы в электромагнитном поле. Оно получается заменой в функции Гамильтона обобщенного импульса **P** на $\partial S/\partial r$, а самого **H** – на $-\partial S/\partial t$. Таким образом , получим

$$\left(\mathrm{grad}S-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\varphi\right)^2+m^2c^2=0$$

9. 4-потенціал електромагнітного поля. Функції Лагранжа та Гамільтона релятивістської зарядженої частинки в електромагнітному полі. (Reaper)

4-потенціал електромагнітного поля. При вивченні руху матеріальних частинок ми користуємось принципом найменьої дії. Цей принцип полягає в тому, що для довільної механічної системи існує такий інтеграл S, який називається дією, який для дійсного руху має мінммум і варіація δS якого дорівнює нулю. Згідно із СТВ дія вільної матеріальної частинки має вигляд

$$S=-mc\int_a^b ds=-\int_{t_1}^{t_2} mc^2\sqrt{1-\beta^2}\,dt;\ ds=\sqrt{c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2},\ \beta=v/c;\ (1).$$

Дія для частинки, яка рухається в заданому електромагнітному полі складається із двох частин: із дії (1) вільної частинки та із члена, який описує взаємодію частинки з полем. Остання дія має включати в себе як величини, що характеризують частинку, так і поле. Виявляється, що властивості частинки у відношенні її взаємодії з полем визначаються оним параметром – зарядом частинки. Властивості ж поля характеризуються 4-вектором A_j, так званим 4-потенціалом, компоненти якого є ф-ями координат та часу. Ці величини входять в дію у вигляді члена

$$-\frac{e}{c}\int_a^b A_j dx^j=\frac{e}{c}\left(c\int_{t_1}^{t_2}\varphi dt-\int_{x_1}^{x_2}A_x dx-\int_{y_1}^{y_2}A_y dy-\int_{z_1}^{z_2}A_z dz\right),$$

де φ - скалярний а $\mathbf{A}$ -векторний потенціал. Звернемо увагу, що 4-потенціал визначається як $A^j=(ct,\mathbf{A});\Rightarrow A_j=(ct,-\mathbf{A})$.

Функції Лагранжа та Гамільтона релятивістської зарядженої частинки в електромагнітному полі. Використовуючи мікування попереднього пункту можна записати дію частинки в заданому електромагнітному полі:

$$S=\int_a^b\left(-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}+\frac{e}{c}\mathbf{Av}-e\varphi\right)dt$$

. Підінтегральний вираз є функцією Лагранжа для зарядя в електромагнітному полі:

$L=-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}+\frac{e}{c}\mathbf{Av}-e\varphi$. Із функції Лагранжа можно знайти функцію Гамільтона частинки в електромагнітному полі, за відомою загальною формулою: $H=\mathbf{v}\frac{\partial L}{\partial v}-L$. Підставляючи сюди функію Лагранжа матимемо: $H=\gamma mc^2+e\varphi,\ \gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}$. Але, так як функція Гамільтона має бути виражена через узагальнений імпульс частинки $\mathbf{P}=\frac{\partial L}{\partial v}=\gamma m\mathbf{v}+\frac{e}{c}\mathbf{A}=\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}$, то виконавши досить тривіальні перетворення отримаємо шуканий вираз: $\left(\frac{H-e\varphi}{c}\right)^2=m^2c^2+\left(\mathbf{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\Leftrightarrow H=\sqrt{m^2c^4+c^2\left(\mathbf{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}+e\varphi$. Останній вираз і є шуканим.

Для нерелятивістський частинок використовують спрощену функцію Гамільтона: $H=\frac{1}{2m}\left(\mathbf{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2+e\varphi$.

10. Рівняння руха зарядженої частинки в електромагнітному полу. Сила Лоренца. Напруженість електромагнітного поля. Обернений рух в електромагнітному полі. (Roger)

Заряд, находящійся в поле, не только подвергается воздействию со стороны поля , но в свою очередь сам влияет на поле, изменяя его. Однако если заряд е невелик, то его действием на поле можно пренебречь. В этом случае рассматривая движение в заданном поле , можно считать ,что само поле не зависит ни от координат , ни от скорости заряда. Точные условия, которым должен удовлетворять заряд для того , чтобы он мог считаться в указанном смысле малым , будут выяснены в дальнейшем. Ниже мы будем считать это условие выполненным. Итак , нам надо найти уравнения движения заряда в заданном электромагнитном поле. Эти уравнения получаются варьированием действия , т.е. даются уравнением Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}=\frac{\partial L}{\partial r}$ где L определено в предыдущей шпоре (Функция Лагранжа для тех кто шарит.) Производная $\partial L/\partial v$ есть обобщенный импульс частицы. Далее пишем :

$\frac{\partial L}{\partial r}\equiv\nabla L=\frac{e}{c}\,\mathrm{grad}\mathbf{Av}-e\cdot\mathrm{grad}\varphi$. Но по известной формуле векторного анализа

$\mathrm{grad}\mathbf{AB}=(\mathbf{A}\nabla)\mathbf{B}+(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{A}+[\mathbf{B}\,rot\mathbf{A}]+[\mathbf{A}\,rot\mathbf{B}]$ где **A** и **B** –любые два вектора. Применяя это формулу к **Av** и помня, что дифференцирование по **r** производится при постоянном **v**, находим : $\frac{\partial L}{\partial r}=\frac{e}{c}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A}+\frac{e}{c}[\mathbf{v}\,rot\mathbf{A}]-e\cdot\mathrm{grad}\varphi$ Уравнение Лагранжа, следовательно , имеют вид $\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)=\frac{e}{c}(v\nabla)\mathbf{A}+\frac{e}{c}[\mathbf{v}\,rot\mathbf{A}]-e\cdot\mathrm{grad}\varphi$. Но полный дифференциал $\frac{d\mathbf{A}}{dt}dt$ векторного потенциала со временем в данной точке пространства и из изменения про переходе от одной точки пространства у другой на расстояние dr . Эта творая часть равно $(d\mathbf{r}\nabla)\mathbf{A}$.Таким образом , $\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A}$ Подставляя это в предыдущее уравнение , получаем: $\frac{d\mathbf{p}}{dt}=-\frac{e}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-e\,\mathrm{grad}\varphi+\frac{e}{c}[\mathbf{v}\,rot\mathbf{A}]$. Это и есть уравнение движения частицы в электромагнитном поле. Мы увидим что эта сила состоит из двух частей. Первая часть (первый и второй члены в правой части) не зависит от скорости частицы. Вторая часть (третий член) зависит от этой скорости:пропорциональна величине этой скорости и перпендикулярна к ней. Силу первого рода , отнесенного к заряду , равному единице называют *напряженностью электрического поля*; обозначим ее посредством **E**. Итак по определению, $\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\mathrm{grad}\varphi$.

Множитель при скорости , точнее при v/c , в силе второго рода , действующей на единственный заряд, называют *напряженностью магнитного поля* ; обозначим ее через **H** . Итак по определению , $\mathbf{H}=rot\mathbf{A}$. Если в электромагнитном поле $\mathbf{E}\neq 0,\mathbf{H}=0$ то говорят об *электрическом поле*; если же $\mathbf{E}=0,\mathbf{H}\neq 0$, то поле называют *магнитным* . В общем случае электромагнитное поле является наложение полей электрического и магнитного. Отметим что **E** представляет собой полярный ,а **H** –аксиальный вектор. Уравнения движения заряда в электромагнитном поле можно теперь написать в виде $\frac{d\mathbf{p}}{dt}=e\mathbf{E}+\frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$ Стоящие справа выражение носит название *Лоренцевой силы.*

Первая ее часть – сила ,с которой действует электрическое поле на заряд , - не зависит от скорости заряда и ориентирована по направлению поля **E** . Вторая чать , - сила , оказываемая магнитым полем на заряд, - пропорциональна скорости зарядаи направленна перпендикулярно к этой скорости и к направлению магнитного поля **H**. Для скоростей , малых по сравнению с скоростью света , импульс **p** приближенно равен своему классическому выражению m**v** , и уравнение движения переходит в $m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=e\mathbf{E}+\frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$ Выведем еще уравнение ,определяющее изменение кинетической энергии частицы со временем, т.е. производную $\frac{dE_{кин}}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.Легко убедиться что $\frac{dE_{кин}}{dt}=\mathbf{v}\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ подставляя $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ и замечая что $[\mathbf{vH}]\mathbf{v}=0$ имеем $\frac{dE_{кин}}{dt}=e\mathbf{Ev}$ Изменение кинетической энергии со временем есть работа , произведенная полем над частицей (в единицу времени). Видно, что эта работаравна произведению скорости заряда на силу с которой действует не него электрическое поле. Работа поля за время dt ,т.е.при перемещении заряда на dr , равна e**E**dr . Подчеркнем , что работу над зарядом производит только электрическое поле;магнитное поле не производит работы над движущимися в нем зарядом. Последнее связано с тем, что сила, с которой магнитное поле действует на частицу , всегда перпендикулярна к ее скорости. Уравнение механики инвариантны по отношение к перемене знака у времени ,т.е. по отношению к замене будущего прошедшим. Другими словами ,в механике оба направления времени эквивалентны. Это значит , что если согласно механики возможно какое нибудь движение , то возможно и обратное движение , при котором система проходит те же состояния в обратном порядке. Легко видеть , что то же самое имеет место и в электромагнитном поле в теории относительности . При это однако вместе с заменой t ,на –t надо изменить знак магнитного поля. Действительно , легко видеть , что уравнения движения не меняются , если произвести замену $t\to -t,\mathbf{E}\to\mathbf{E},\mathbf{H}\to-\mathbf{H}$

10. Рівняння руха зарядженої частинки в електромагнітному полі. Сила Лоренца. Напруженість електромагнітного поля. Обернений рух в електромагнітному полі. (Reaper)

Рівняння руха зарядженої частинки в електромагнітному полі. Вважатимемо, що заряд є настільки малим, що не змінює поле навколо себе. Рівнянн руху можна отримати варіюванням функції Лагранжа, тобто це рівняннями Лагранжа: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)=\frac{\partial L}{\partial r}$. Похідна $\partial L/\partial v\equiv\mathbf{P}$. Далі:

$\frac{\partial L}{\partial r}\equiv\nabla L=\frac{e}{c}grad[\mathbf{Av}]-e\,grad\varphi.\ grad[\mathbf{ab}]=(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}+(\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a}+[\mathbf{b}\,rot\mathbf{a}]+[\mathbf{a}\,rot\mathbf{b}]\Rightarrow\frac{\partial L}{\partial r}=\frac{e}{c}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A}+\frac{e}{c}[\mathbf{v}\,rot\mathbf{A}]-e\,grad\varphi.\Rightarrow$

Рівняння Лагранжа: $\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)=\frac{e}{c}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A}+\frac{e}{c}[\mathbf{v}\,rot\mathbf{A}]-e\,grad\varphi.\ \frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A}\Rightarrow\frac{d\mathbf{p}}{dt}=-\frac{e}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-e\,grad\varphi+\frac{e}{c}[\mathbf{v}\,rot\mathbf{A}].$

$\mathbf{E}\equiv-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-grad\varphi;\mathbf{H}=rot\mathbf{A}$. Рівняннруху тепер запишеться через напруженості полів: $\frac{d\mathbf{p}}{dt}=e\mathbf{E}+\frac{e}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]$.

Сила Лоренца. Вираз, що стоїть справа в рівнянні руху має назву лоренцевої сили. Перша її частина – сила, з якою діє електричне поле на заряд, - не залежить від швидкості зарада та орієнтована в напрямку напруженості електричного поля. Друга частина – сила, яка виникає завдяки магнітному полю, - пропорціональна швидкості зарада та направлена перпендикулярно до швидкості і до напрямку напруженості магнітного поля. Ця сила має назву сили Лоренца, та ніколи не змінює модуля імпульса частинки.

Напруженість електромагнітного поля. Напруженості електричного та магнітного полів вже були використані при розгляді рівняння руху частинки. Напруженість електричного поля було отримано із закона Кулона (експеримента), а напруженість магнітного поля – із закона Біо – Савара – Лапласа. Пізніше їх зв'язали з векторним та скалярним потенціалом. Покажемо цей зв'язок, отримавши його із рівнянь Максвела: $\begin{cases}(1)\ div\mathbf{B}=0\\(2)\ rot\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\end{cases}(1)\Rightarrow(5)\ \mathbf{B}=rot\mathbf{A}\Leftrightarrow div[rot\mathbf{B}]=0;(2),(5)\Rightarrow(6)\ rot\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0;\ rot[grad\varphi]=0,(6)\Rightarrow\mathbf{E}=-grad\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$. .

Отже остаточно: $\mathbf{E}=-grad\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t};\mathbf{B}=\mathbf{H}=rot\mathbf{A};$

Обернений рух в електромагнітному полі. Рівняння механіки інваріантні по відношенню до зміни знака часу, тобто по відношенню до заміни майбутнього минулим. Іншими словами, в механіці обидва напрямку часу є еквівалентними. Це означає, що якщо згідно з рівняннями механики можливий якійсь рух, то можливим є і обернений рух, при якому система проходить ті ж стани в оберненому порядку.

Легко бачити, що теж саме має місце і в електромагнітному полі в теорії відносності. При цьому, однак, разом із інверсією часу ми повинні поміняти знак магнітного поля. Дійсно, легко бачити, що рівняння руху не змінюються, якщо провести заміну $t\to -t,\mathbf{E}\to\mathbf{E},\mathbf{H}\to-\mathbf{H}$. При цьому скалярний потенціал не зміниться, а векторний поміняє знак: $\varphi\to\varphi;\mathbf{A}\to-\mathbf{A}$. Таким чином, якщо в електромагнітному полі можливим є деякий рух, то є можливим і обернений рух в полі, з оберненим напрямком **H**

11. Калібрувальна інваріантність. Типи калібровок. Фізичний зміст скалярного і векторного потенціала. (Roger)

Рассотрим теперь вопрос о том ,насколько однозначно определены потенциалы поля. Это зрим следует ,что поле характеризуется тем действием , которое оно оказывает на движение находящихся в нем зарядов. Но в уравнения движения входят не потенциалы , а непряженности поля **E** и **H** . Поэтому два поля физически тождественны, если они характеризуются одними и теми же векторами **E** и **H.** Если заданы потенциалы **A** и φ , то этим вполне однозначно определены **E** и **H** (ЮЗАЙТЕ ПРЕДЫДУЩУЮ ШПОРУ). Однако одному и тоиу же полю могут соответствовать различные потенциалы. Чтобы убедиться в этом прибавим к каждой компоненте потенциала A_k величину $-\partial f/\partial x^k$, где f – произвольная функция от координат и времени. Тогда потенциал A_k переходит в $A_k'=A_k-\frac{\partial f}{\partial x^k}$. При такой замене в интеграле действия появится дополнительный член, представляющий собой полный дифференциал: $\frac{e}{c}\frac{\partial f}{\partial x^k}dx^k=d\left(\frac{e}{c}f\right)$ что не влияет на уравнения движения. Если вместо четырехмерного потенциала ввести векторный и скалярный и вместо координат x^i - координаты ct,x,y,z , то четыре равенства (первое уравнение) можно записать в виде $\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\mathrm{grad}f;\varphi'=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$ Легко убедиться в том ,что электрическое и магнитное поля,определенные равенствами, действительно не изменяются при подстановке вместо **A** и φ потенциалов $\mathbf{A}',\varphi'$. Таким образом ,преобразование потенциалов не изменяет поля.Потенциалы определены поэтому неоднозначно – векторный потенциал с точностью до производной по времени от той же фикции. В частности к векторному потенциалу можно прибавить любой постоянный вектор , а к скалярному любую постоянную. Это видно и непосредственно из того , что в определение **E** и **H** входят только производные от **A** и φ , и потому прибавление к последним постоянніх не влияет на напряженности поля. Физический смісл имеют лишь те величині по отношению к которые инвариантны по отношению к преобразованию потенциалов;поэтому все уравнения должны быть инвариантны по отнишению к этому преобразованию. Эту инвариантность называют *калибровочной* или *градиентной* . Описаная неоднозначность потенциалов дает всегда возможность выбрать их так , чтобы они удовлетворяли одному произвольному дополнительному условию, - одному , так как мы можем произвольно выбрать одну функцию f . В частности всегда можно вібрать потенциал поля так , чтобы скалярный потенциал φ был равен нулю. Сделать же векторный потенциал равным нулю вообще говоря невозможно, так как условие **A** = 0 представляет собой три дополнительныих условия (для трех компонент **A**).

Постоянное электромагнитное поле.

Постоянным электромагнитным полем мы называем поле не зависящее от времени. Очевидно , что потенциалы постоянного пол можно выбрать так чтобы они были функциями только от координат, но не от времени. Постоянное магнитоное поле по прежнему равно $\mathbf{H}=rot\mathbf{A}$. Постоянное же электрическое поле $\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\varphi$. Таким образом постоянное электрическое поле определяется только скалярным потенциалом, а магнитное - векторным потенциалом. Мы видели , что потенциалы поля не поределены однозначно. Легко однако ,убедиться в том что если описывать постоянное электромагнитное поле с помощью не зависящих от времени потенциалов, то к скалярному потенциалу можно прибавить , не изменяя поля лишь произвольную (не зависящую от координат , ни от времени). Обычно на φ накладывают еще дополнительное условие, требуя чтобы он не имел определенное значение в определенной точке пространства ; чаще всего выбирают φ так Жчтобы он был равен нулю на бесконечности . Тогда упомяняьая произвольная постоянная становится поределенной , и скалярный потенциал постостоянного поля , таким образом становится вполне однозначным. Напротив , векторны потенциал по-прежнему не однозначендаже для постоянного электромагнитного поля; к нему можно прибавить градиент любой функции координат. Определим ,чесу равна энергия заряда в постоянном электромагнитном поле. Если поле постоянно , то и функция Лагранжа для заряда не зависит явно от времени. Как известно в этом случае энергия сохраняется , совпадая с функцией Гамильтона. Имеем :

$$E_{енер}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2c^2}{c^2}}}+e\varphi$$

.Таким образом ,вследствие наличия поля к энергии этой частицы прибавляется $e\varphi$ - потенциальная энергия в поле. Отметим существенное обстоятельство , что энергия зависит только от скалярного , но не от векторного потенциала. Другими соловами ,магнитное поле не влияет на энергию зарядов;энергию частицы может изсенить только электрическое поле. Это связано с тем что магнитное поле , в противоположность электрическому не производит над зарядом работы. Если напряженность поля во всех точках одинакова, то поле называют однородным. Скалярный потенциал однородного электрического поля может быть выражен через напряженность поля согласно равенству $\varphi=-\mathbf{Er}$ Действительно ,при $\mathbf{E}=\mathrm{const}$ имеем $\mathrm{grad}(\mathbf{Er})=(\mathbf{E}\nabla)\mathbf{r}=\mathbf{E}$.Векторный же потенциал однородного магнитного поля выражается через напряженность этого поля **H** в виде $\mathbf{A}=\frac{1}{2}[\mathbf{Hr}]$ Действительно при $\mathbf{H}=\mathrm{const}$ находим с помощью известных формул векторного анализа $rot[\mathbf{Hr}]=\mathbf{H}\,div\mathbf{r}-(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{r}=2\mathbf{H}$ (Напомним что $div\mathbf{r}=3$) Векторній потенциал однородного магнитного поля можно выбрать и иначе,например в виде $A_x=-Hy,A_y=A_z=0$ (ось z выбрана вдоль направления **H**). Легко убедиться, что и при таком выборе **A** имеет место равенство $\mathbf{H}=rot\mathbf{A}$ В соответствии с формулами преобразования потенциалы отличаются друг от друга градиентом некоторой функции : новый потенциал получается из старого прибавлением ∇f , где $f=-xyH/2$

11. Калібрувальна інваріантність. Типи калібровок. Фізичний зміст скалярного і векторного потенціала. (Reaper)

Калібрувальна інваріантність. Відомо, що електромагнітне поле характеризується своєю дією на заряди, що в рухаються в цьому полі. Рівняння руху заряда в електромагнітному полі можна записати у вигляді $\frac{d\bar{p}}{dt}=e\bar{E}+\frac{e}{c}[\bar{v}\bar{H}]$ (1). Як бачимо, в нього входять не потенціали а напруженості ***E*** і ***H***. Отже два поля є фізично еквівалентні, якщо вони характеризуються одними і тими ж векторами ***E*** і ***H***. Відомо, що задані потенціали однозначно визначають напруженість поля: $\bar{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}-grad[\varphi]$ (2), $\bar{H}=rot[\bar{A}]$ (3), але одній напруженості поля може відповідати необмежена кількість потенціалів. Щоб переконатись в цьому додамо до кожної компоненти чотирьохвимірного потенціала A_k величину $-\partial f/\partial x^k$, де *f* – довільна функція від координат та часу: $A_k'=A_k-\frac{\partial f}{\partial x^k}$ (4). Якщо переписати цю рівність через векторний та скалярний потенціали отримаємо: $\bar{A}'=\bar{A}+grad[f]$ (5), $\varphi'=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$ (6). Отже, напруженості електричного та магнітного плів при такому перетворенні не зміняться, для того, щоб це побачити потрібно лише підставити перетворені потенціали (5) та (6) у формули (2) та (3) і скористатись рівностями $rot[grad[\bar{A}]]=0$ та $\partial(grad[f])/\partial t=grad[\partial f/\partial t]$. Таким чином, перетворення потенціалів (4) не змінює поля. Потенціали тому визначено неоднозначно – векторний потенціал з точністю до градієнта довільної функції а скалярний – з точністю до часової похідної тієї ж функції. *Фізичний зміст мають лише ті величини, що є інваріантними по відношенню до перетворення потенціалів* (5) і (6) або (4), тому всі рівняння повинні бути інваріантними по відношенню до цього перетворення. Таку інваріантність називають *калібрувальною* або *градієнтною.* Описана фізична багатозначність потенціала завжди дає можливість обирати їх так, щоб вони відповідали одній додатковій умові, - одній, бо ми можемо довільно обирати одну функцію *f*.

Типи калібровок. Калібровка, тобто умова, що накладається на функцію *f*, виконується в залежності від умови задачі з міркувань простоти її розв'язку, узгоджеості з іншими задачами і т. і. Найбільш поширеними є такі калібровки: *Гамільтонова калібровка* $\varphi=0$; *Кулонова калібровка* $div[\bar{A}]=0$; *Лоренцева калібровка* $div[A]+\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}=0$; *Аксіальна калібровка* $\bar{A}_z=0$. Для динамічних задач найбільш зручною є Лоренцева калібровка, що зберігається при релятивістських перетвореннях.

Фізичний зміст скалярного та векторного потенціалів. Фізичний зміст скалярного потенціалу – це робота по перенесенню одиничного заряду з нескінченності в точку спостереження. Для того, щоб визначити фізичний зміст векторного потенціалу, запишемо функцію стану зарядженої частинки в електромагнітному полі, тобто функцію Лагранжа: $L=\frac{mv^2}{2}+\frac{e}{c}(\bar{A},\bar{v})-e\varphi$. На підставі останнього виразу можна легко сказати, що фізичний зміст векторного потенціалу – це зміна імпульсу частинки за рахунок взаємодії з полем. Векторний потенціал є реальною а *не* тільки "математичною" характеристикою поля.

12. Тензор електромагнітного поля. Полярні і аксіальні вектори. Коваріантне рівняння руха заряда в електромагнітному полі. (Roger)

Мы вывели уравнение движения заряда в поле , исходя из функции Лагранжа , написанной в трехмерном виде. Выведем теперь те же уравнения непосредственно из действия написанного в четырехмерных обозначениях. Принцип наименьшего действия гласит

$\delta S = \delta\int_a^b\left(-mcds - \frac{e}{c}a_i dx^i\right) = 0$ Замечая что $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$,находим (пределы интегрирования a и b мы будем ниже для

краткости опускать): $\delta S = -\int\left(mc\frac{dx_i dx^i}{ds} + \frac{e}{c}A_i d\delta x^i + \frac{e}{c}\delta A_i dx^i\right) = 0$ Первые два члена в подынтегральном выражении

проинтегрируем по частям. Кроме того , в первом члене 4-скорость $dx_i/ds = u_i$. Тогда

$\int\left(mcdu_i\delta x^i + \frac{e}{c}\delta x^i dA_i - \frac{e}{c}\delta A_i dx^i\right) - \left(mcu_i + \frac{e}{c}A_i\right)\delta x^i\Big| = 0$ **(1)** Второй член этого равенства равен нулю, так как интеграл

варьируется при заданных значениях координат в пределах .Далее, $\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\delta x^k, dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}dx^k$ и поэтому

$\int\left(mcdu_i\delta x^i + \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\delta x^i dx^k - \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^k}dx^i\delta x^k\right) = 0$ Напишем в первом члене $du_i = \frac{du_i}{ds}ds$, во втором и третьем поменяем

индексы i и k местами (это ничего не изменит , так как по значкам i и k производится сумирование). Тогда

$\int\left[mc\frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)u^k\right]\delta x^i ds = 0$.Ввиду произвольности δx^i отсюда следует что подынтегральное выражение равно

нулю: $mc\frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)u^k = 0$.Введем обозначение $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ этот антисимметричный тензор называется

тензором электромагнитного поля. Тогда полученное уравнение напишется в виде $mc\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k$ Это – уравнение

движения заряда в четырехмерной форме. Смысл отдельных компонент тензора F_{ik} легко выяснить , подставив значения

$A_i = (\varphi, -\mathbf{A})$ в определение.

Результат можно записать в виде таблицы в которой индекс i=0,1,2,3 … нумареут строки, а индекс k

столбцы: $F_{ik} = \begin{Bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -Hz & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & Hx & 0 \end{Bmatrix}$, $F^{ik} = \begin{Bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -Hz & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & Hx & 0 \end{Bmatrix}$.Короче, можно

записать : $F_{ik} = (\mathbf{E}, \mathbf{H}), F^{ik} = (-\mathbf{E}, \mathbf{H})$ Таким образом компоненты напряженности электрического поля и магнитного поля являются компонентами одного 4-тензора электромагнитного поля. Переходя к трехмерным обозначениям , легко убедиться в том, что три пространственные компоненты $(i = 1,2,3)$ уравнения тождественны с векторным уравнением движения, а временная компонента $(i = 0)$ с

уравнением работы. Последнее есть следствие уравнения движения $mc\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k$; тот факт что из четырех уравнений только три

независимы, можно легко обнаружить также и непосредственно, умножив обе стороны на u^i . Тогда левая сторона равенства обратится в

нуль ввиду ортогональности 4-векторов u^i и $\frac{du_i}{ds_i}$,а правая сторона – ввиду антисимметричности тензора F_{ik} .Если рассматривать в

вариации δS только истинные траектории , то первый в **(1)** член тождественно превратится в нуль. Тогда второй член, в котором верхний предел рассматривается как переменный, дает дифференциал действия как функции координат. Таким образом,

$\delta S = -\left(mcu_i + \frac{e}{c}A_i\right)\delta x^i$. Отсюда $-\frac{\partial S}{\partial x^i} = mcu_i + \frac{e}{c}A_i = p_i + \frac{e}{c}A_i$. 4-вектор - $\partial S/\partial x^i$ есть 4-вектор обобщенного импульса

частицы P_i .Подставляя значения компонент p_i и A_i найдем, что $P^i = \left(\frac{E_{кин} + e\varphi}{c}, \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)$. Как и следовало, пространственные

компоненты 4-вектора P_i образуют трехмерный вектор обобщенного импульса , в временная компонента есть $\frac{E}{c}$, где E – полная энергия

заряда в поле.

12. Тензор електромагнітного поля. Полярні і аксіальні вектори. Коваріантне рівняння руха заряда в електромагнітному полі. (Reaper)

Тензор електромагнітного поля. Чотирьохвимірний вектор потенціал вводиться таким чином: $A^i = (\bar{A}, \varphi)$. Його просторова частина є векторний потенціал, а часова – скалярний. Аналогом ротора в СТВ є тензор. Позначивши 4-ротор як F^{ik}, можемо записати його як $F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k}$. Це є асиметричний тензор: $F^{ik} = -F^{ki}$. Відповідно всі діагональні елементи цього тензора дорівнюють нулю: $F^{ii} = 0$. Обчислимо його компоненти:

$$F^{11} = \frac{\partial A^1}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_1} = 0;\ F^{12} = \frac{\partial A^2}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_2} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_z;$$

$$F^{13} = \frac{\partial A^3}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_3} = \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} = -B_y;\ F^{14} = \frac{\partial A^4}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_4} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} = -E_x;$$

Аналогічним чином обчислюється решта компонент. Отже ко- і контраваріантний вигляд тензора електромагнітного поля відповідно запишуться як:

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix};\qquad F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & E_x \\ -B_z & 0 & B_x & E_y \\ B_y & -B_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{pmatrix};$$

Полярні та аксіальні вектори. До *полярних* векторів відносять такі векторні величини, що змінюють знак при інверсії декартових осей координат. Таку властивість мають, очевидно швидкість, прискорення, імпульс, електричне поле і деякі інші. Але легко бачити, що такі величини як момент імпульсу, момент сили та взагалі ті, що пропорційні векторним добуткам не змінюють знак при інверсії координат. Отже, такою простою та природньою властивістю названі величини не наділені. Їх називають псевдовекторами або аксіальними векторами. До них звичайно належить і магнітне поле $\bar{B} \sim [\bar{j} \times \bar{r}]/r^3$, магнітний момент та деякі інші величини.

Аксіальні вектори мають матричну природу. Для її пояснення можна навести суто математичний приклад. Нехай потрібно наведену нижче матрицю помножити на вектор-стовбчик (зліва), та вектор помножити векторно на вектор (справа):

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix};\qquad [\bar{C} \times \bar{B}] = \begin{pmatrix} c_2b_3 - c_3b_2 \\ c_3b_1 - c_1b_3 \\ c_1b_2 - c_2b_1 \end{pmatrix};$$

Результат множення такої спеціальних матриці на вектор-стовпчик співпадає з результатом векторного добутка (справа).

Таким чином виявилось, що електричне та магнітне поля є єдина, нероздільна субстанція. Вони є компоненти однієї й тієї самої величини – тензора електромагнітного поля. Магнітне поле є антисиметричний тензор другого рангу в трьохвимірному просторі, а електричне поле – трьохвимірний вектор. Отже, теорія відносності допомогла виявити математичну природу магнітного поля.

Коваріантне рівняння руху заряда в електромагнітному полі. Виведення цього рівняння дуже пацавате, тому приводимо його без пояснень:

$$\delta S = \delta\int_a^b(-mc\cdot ds - \frac{e}{c}A_i dx^i) = 0;\qquad \delta S = -\int(mc\frac{dx_i d\delta x^i}{ds} + \frac{e}{c}A_i d\delta x^i + \frac{e}{c}\delta A_i dx^i) = 0;\qquad dx_i/ds \equiv u_i(\text{швидкість});$$

$$\int(mc\cdot du_i\delta x^i + \frac{e}{c}\delta x^i dA_i - \frac{e}{c}\delta A_i dx^i) - (mcu_i + \frac{e}{c}A_i)\delta x = 0;\qquad \delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\delta x^k;\qquad dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}dx^k;$$

$$\Rightarrow\quad \int(mc\cdot du_i\delta x^i + \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{dx^k}\delta x^i dx^k - \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^k}dx^i\delta x^k) = 0;\qquad du_i = \frac{du_i}{ds}ds;\qquad dx^i = u^i ds;$$

$$\Rightarrow\quad \int\left[mc\frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)u^k\right]\delta x^i ds = 0.$$

Оскільки δx^i є довільним, то підінтегральний вираз рівний нулю:

$mc\frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)u^k = mc\frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c}F^{ik}u^k = 0 \Leftrightarrow mc\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k \Leftrightarrow c^2K^i = F^{ik}u_k$. Останнє та передостаннє і є шукане рівняння руху заряда в електромагнітному полі. Більш докладно про це можна почитати в Ландау т.2 с.88 – 89. В останньому рівнянні було введено 4-силу. Більш докладно про неї можна почитати в Жмудський-Шека "Основи електродинаміки" с.147 коваріантне рівняння руху (доречі воно має вигляд: $\frac{dp^i}{dt} = K^i$).

13. Перетворення Лоренца для поля. Інваріанти електромагнітного поля. (Roger)

Преобразование Лорентса ☻

Напишем формулы преобразования поля, т.е. формулы по которім можно определить поле в одной инерциальной системе отсчета , зная єто же поле в другой системе. Формулы преобразования для потенциалов находятся непосредственно из общих формул

проебразования 4-вектора. Помня что $A_i = (\varphi, \mathbf{A})$, находим $\varphi = \frac{\varphi' + \frac{V}{c}A_x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, A_x = \frac{A_x' + \frac{V}{c}\varphi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ $A_y = A_y', A_z = A_z'$ Формулы

преобразования для антисиметричного 4-тензора второго ранга (каковым является тензор F^{ik}) найдены : компоненты F^{23}, F^{10} не меняются при преобразовании,а компоненты $F^{02}, F^{03}, F^{12}, F13$ преобразуются соответственно как x^0, x^1 . Выразив компоненты

тензора F^{ik} через компоненты полей **E** и **H** ,получим следующие формулы

$E_x = E_x'$ $E_y = \frac{E_y' + V/c\cdot H_z'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$ $E_z = \frac{E_z' - V/c\cdot H_y'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$ и для магнитного поля

$H_x = H_x'$, $H_y = \frac{H_y' - V/c\cdot E_z'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$, $H_z = \frac{H_z + V/c\cdot E_y'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$ Таким образом ,электрическое и магнитное поля ,как и большинство

физических величин ,относительны, т.е. их свойства различны в разных системах отсчета. В частности , электрическое или магнитное поле в одной системе отсчета может быть равно нулю и в то же время присутсвовать в другой системе. Формулы преобразования значительно упрощаются для случая $V << c$ С точностью до членов порядка V/c Имеем : $E_x = E_x'$,

$E_y = E_y' + \frac{V}{c}H_z'$, $E_z = E_z' - \frac{V}{c}H_y'$; $H_x = H_x'$, $H_y = H_y' - \frac{V}{c}E_z'$, $H_z = H_z' + \frac{V}{c}E_y'$ Эти формулы могут быть

переписаны в векторном виде: $\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \frac{1}{c}[\mathbf{H}'\mathbf{V}]$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}' - \frac{1}{c}[\mathbf{E}'\mathbf{V}]$ Формулы обратного преобразования от K ' к K получаются

перестановкой штриха и изменением знака у **V** . Если в системе K ' магнитное поле $\mathbf{H}' = 0$,то между электрическими и магнитными

полями в системе K существует отношение $\mathbf{H} = \frac{1}{c}[\mathbf{VE}]$, Если же в K ' поле $\mathbf{E}' = 0$, то в системе K $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{VH}]$ В обоих

случаях ,следовательно ,в системе K магнитные и электрические поля перпендикулярны. Это формулы имеют, разумеется, и обратный смысл: если в некоторой системе отсчета K поля **E** и **H** взаимно перпендикулярны (но не равны по величине), то существует такая система K ' , в которой поле чисто электрическое или чисто магнитное .Скорость **V** этой системы (по отношению к K) может быть выбрана перпендикулярно к **E** или **H** , тогда по величине она равно в первом случае cH/E (причем должно быть H < E) , а во втором случае cE/H (причем E < H).

Инварианты поля.

Из векторов напряженностей электрического и магнитного полей можно составить инвариантные величины, остающиеся неизменными при преобразованиях от одной инерциальной системы отсчета к другой. Вид этих инвариантов легко найти исходя из четырехмерного

представления поля с помощью антисимметричного 4-тензора F^{ik} . Очевидно ,что из компонент этого тензора можно составить следующие

инвариантные величины: $F_{ik}F^{ik} = inv$, $e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = inv$, где e^{iklm} - совершенно антисимметричный единичный тензор. Первая из всех

этих величин – истинный скаляр, а вторая – псевдоскаляр (произведение тензора F^{ik} на дуальный ему тензор). Выражая компоненты F^{ik} через компоненты **E** и **H** ,легко убедиться в том , что в трехмерной форме эти инварианты имеют вид

$H^2 - E^2 = inv$ $\mathbf{EH} = inv$ Псевдоскалярность второго из них очевидна из того ,что он представляет собой произведение полярного

вектора **E** на аксиальный вектор **H** (квадрат же $(\mathbf{EH})^2$ будет истинным скаляром). Из инвариантности двух выражений вытекают следующие

выводы. Если в какой-нибудь системе отсчета электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны , т.е. **EH**=0, то они перпендикулярны и во всякой другой инерциальной системе отсчета. Если в какой-нибудь системе отсчета абсолютные величины **E** и **H** равны друг другу , то они одинаковы и в любой другой системе. Имеют, очевидно, место также и следующие неравенства. Если в какой-нибудь системе отсчета $E > H$ (или $E < H$), то и во всякой другой системе будет $E > H$ (или $E < H$). Если в какой либо системе отсчета векторы образуют острый (или тупой угол, то они будут образовывать острый (или тупой угол) и во всякой другой системе отсчета. Преобразованием Лоренца можно всегда достичь того, чтобы **E** и **H** получили любые значения, удовлетворяющие только условию , чтобы

$E^2 - H^2$ и **EH** имели заданные определенные значения. В частности , можно найти такую инерциальную систему отсчета ,в которой электрическое и магнитное поля в данной точке параллельны друг другу. В это системе **EH**=EH ,и из двух уравнений

$E^2 - H^2 = E_0^2 - H_0^2, EH = \mathbf{E_0H_0}$ можно найти значения **E** и **H** в этой системе отсчета (E_0 и H_0 - электрическое и магнитное поля в исходной системе отсчета). Исключением является случай , когда оба инварианты равны нулю. В этом случае **E** и **H** во всех системах отсчета равны по величине и взаимно перпендикулярны по направлению. Если лишь **EH**=0, то можно найти такую систему отсчета , в

которой **E**=0 и **H**=0 (смотря по тому $E^2 - H^2 <$ или > 0), т.е. поле чисто магнитное или чисто электрическое; наоборот если в какой-нибудь системе отсчета **E**=0 или **H**=0 , то во всякой другой системе они будут взаимно перпендикулярны в соответствии со сказанным в конце преобразований Лоренца. Изложим еще и другой способ перехода к вопросу об инвариантах антисимметричного 4-тензора. Этот способ делает очевидным естественность двух независимых инвариантов и в то же время выявляет некоторые поучительные

математические свойства преобразований Лоренца в применении к 4-тензору. Рассмотрим комплексный вектор $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$ Легко видеть ,что преобразование Лоренца (вдоль оси x) для этого вектора имеет вид

$F_x = F_x'$ $F_y = F_y'\mathrm{ch}\varphi - iF_y'\mathrm{sh}\varphi = F_y'\cos i\varphi - F_z'\sin i\varphi$, $F_z = F_z'\cos i\varphi + F_y'\sin i\varphi$, $\mathrm{th}\varphi = \frac{V}{c}$. Мы видим ,что вращение в

плоскости xt 4-пространства (каковым и является рассматриваемое преобразование Лоренца) для вектора **F** эквивалентно вращению на мнимый угол в плоскости yz трехмерного пространства (включая в себе также и простые повороты осей x,y,z) эквивалентна совокупности всех возможных поворотов на комплексные углы в трехмерном пространстве (шести углам поворота в 4-пространстве соответствуют комплексных угла поворота в трехмарное системы). Единственным Инвариантом вектора по отношению к повороту там является его квадрат

$\mathbf{F}^2 = E^2 - H^2 + 2i\mathbf{EH}$ Поэтому вещественные величины $E^2 - H^2$ и **EH** являются единственными инвариантами тензора F_{ik} . Если

$\mathbf{F}^2 \neq 0$, то вектор **F** можно представить в виде **F**=a**n** где **n** единичный ($\mathbf{n}^2 = 1$) комплексный вектор. Путем надлежащего комплексного поворота можно направить **n** вдоль одной из координатных осей; при этом ,очевидно , **n** станет вещественным и тем самым определит направления обоих векторов **E** и **H** : $\mathbf{F} = (\mathbf{E} + i\mathbf{H})\mathbf{n}$. Другими словами, векторы **E** и **H** станут параллельными друг другу.

13. Перетворення Лоренца для поля. Інваріанти електромагнітного поля. (Reaper)

Перетворення Лоренца для поля. Електромагнітне поле описується тензором електромагнітного пля F^{ik}. Тоді, закон перетворення полів при переході від однієї системи координат до іншої можно отримати як закон перетворення компонент тензора електромагнітного поля: $F'^{\mu\nu} = \alpha^{\mu}_{i}\alpha^{\nu}_{k}F^{ik}$. Оскільки кожен тензор другого рангу F^{ik} може бути зображений як зовнішній добуток двох векторів $F^{ik} = G^{i}H^{k}$, то закон перетворення деякої компоненти тензора можемо отримати перетворивши кожен співмножник та потім перемноживши їх.

Випешемо у два стовпчики закони перетворення компонент векторів G^{i} і H^{k} і утворимо всі можливі добутки цих велечин:

$$G'^{1} = \gamma(G^{1} - \beta G^{4}), G'^{2} = G^{2}, G'^{3} = G^{3}, G'^{4} = \gamma(G^{4} - \beta G^{1});$$
$$H'^{1} = \gamma(H^{1} - \beta H^{4}), H'^{2} = H^{2}, H'^{3} = H^{3}, H'^{4} = \gamma(H^{4} - \beta H^{1});$$

Врахуємо також, що тензор електромагнітного поля є антисиметричним. Оскільки координати x^2 і y^2 не змінюються, залишиться назмінною також компонента F^{23} (тобто $B'_x = B_x$). Для компоненти F^{12} перетворення має вигляд:

$$F'^{12} = G'^{1}H'^{1} = \gamma(G^{1} - \beta G^{4})H^{2} = \gamma(F^{12} - \beta F^{42}) \text{ , або } B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y).$$

Цілком аналогічно для F^{13}: $F'^{13} = \gamma(F^{13} - \beta F^{43})$, або $-B'_y = \gamma(-B_y - \beta E_z)$. Легко побачити, що компонента тензора електромагнітного поля F^{14} не змінюється при перетвореннях Лоренца (тобто $E'_x = E_x$). Дійсно, для неї маємо таку низку рівностей: $F'^{14} = G'^{1}H'^{4} = \gamma^{2}(G^{1} - \beta G^{4})(H^{4} - \beta H^{1}) = \gamma^{2}(G^{1}H^{4} - \beta G^{4}H^{4} - \beta G^{1}H^{1} + \beta^{2}G^{4}H^{1}) =$

$\gamma^{2}(F^{14} + \beta^{2}F^{41}) = \gamma^{2}(1-\beta)F^{14} = F^{14}$. Розпишемо аналогічно решту компонент:

$$F'^{24} = G'^{4} = \gamma G^{2}(H^{4} - \beta H^{1}) = \gamma(F^{24} - \beta F^{21}), \text{ або } -E'_y = \gamma(-E_y + \beta B_z),$$

$$F'^{34} = G'^{3}H'^{4} = \gamma G^{3}(H^{4} - \beta H^{1}) = \gamma(F^{34} - \beta F^{31}), \text{ або } -E'_z = \gamma(-E_z + \beta B_y).$$

Перетворення тривимірних компонент неважко записати в досить компактному вигляді, якщо розкласти поле на поздовжні та поперечні до напрямку руху складові:

$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}$, $\mathbf{E}_{\parallel} = (E_x, 0, 0)$, $\mathbf{E}_{\perp} = (0, E_y, E_z)$

$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp}$, $\mathbf{B}_{\parallel} = (B_x, 0, 0)$, $\mathbf{B}_{\perp} = (0, B_y, B_z)$.

Позначемо $\mathbf{V} = (V, 0, 0)$, і врахуємо, що

$$[\mathbf{V}\times\mathbf{B}_{\perp}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ V & 0 & 0 \\ 0 & B_y & B_z \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_y VB_z + \mathbf{e}_z VB_y; \; [\mathbf{V}\times\mathbf{E}_{\perp}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ V & 0 & 0 \\ 0 & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_y VE_z + \mathbf{e}_z VE_y.$$

Тоді формули для перетворень полів можна подати у формі:

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}\times\mathbf{B}_{\perp}]}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c}[\mathbf{V}\times\mathbf{E}_{\perp}]}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Формули для оберненого переходу отримаємо помінявши знак у швидкості та виконавши взаємну заміну штрихових і нештрихових змінних:

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel}, \mathbf{E}_{\perp} = \frac{\mathbf{E}'_{\perp} - \frac{1}{c}[\mathbf{V}\times\mathbf{B}'_{\perp}]}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{B}'_{\parallel}, \mathbf{B}_{\perp} = \frac{\mathbf{B}'_{\perp} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}\times\mathbf{E}'_{\perp}]}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Досить часто ці формули використовують в лінійному наближенні за малим параметром $V/c << 1$. Запишемо ці формули у вигляді:

$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}\times\mathbf{B}]$, $\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c}[\mathbf{V}\times\mathbf{E}]$. Отже, якщо в рухомій системі коорзинат магнітне поле відсутнє, $\mathbf{H}' = 0$, то між електричним та магнітним полями існує співвідношення: $\mathbf{B} = \frac{1}{c}[\mathbf{V}\times\mathbf{E}]$. Тобто заряд, що рухається зі швидкістю $\mathbf{V}$, утворює магнітне поле, яке зберігається з добре відомим магнітостатичним результатом.

Інваріанти електромагнітного поля. Припустимо, що із велечин $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$ можна побудувати інваріантні велечини відносно переходів до інших інерціальних систем координат. Для побудови інваріантів розглянемо комплексний вектор $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{B}$. Використовуючи формули перетворення полів, легко показати, що формули перетворення для цього вектора мають вигляд:

$F_x = F'_x, F_y = F'_y\cos[i\psi] - F'_z\sin[i\psi], F_z = F'_z\cos[i\psi] + F'_y\sin[i\psi]$, де $th[\psi] = V/c$. Бачимо, що перетворення Лоренца для вектора $\mathbf{F}$ еквівалентне повороту на уявний кут у площині YOZ. Єдиним інваріантом відносно такого повороту є квадрат вектора:

$\mathbf{F}^2 = E^2 - B^2 + 2i(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})$. Відокремлюючи дійсну та уявну частини, маємо остаточно, що *інваріантами електромагнітного поля* є комбінації:

$E^2 - B^2 = inv; (\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}) = inv$. Так, наприклад, якщо в деякій системі відліку електричне та магнітне поле взаємоортогональні, то ця властивість буде зберігатись для довільної інерціальної системи відліку.

14. 4-вектор струму та рівняння неперевності. (Yogeniy)

Запишемо вираз для об"ємної густини системи точкових зарядів $\rho(\vec{r},t) = \sum_{\alpha} e_{\alpha}\delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}(t))$ Сумування ведеться по всіх зарядах.

Тоді величина заряду $\int \rho(\vec{r},t)dV = \sum_{\alpha} e_{\alpha}$. А оскільки заряди весь час рухаються, то вони переносять електричний струм величиною $\vec{j}(\vec{r},t) = \rho\vec{V}(\vec{r},t)$, де $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$-середнє значення швидкості зарядів в об"ємі ΔV. Якщо ж ми маємо справу з системою точкових зарядів і не використовуємо усереднення по макроскопічно малих об"ємах, то $\vec{j}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha} e_{\alpha}\vec{V}_{\alpha}\delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}(t))$. Знайдемо

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \sum_{\alpha} e_{\alpha}\frac{\partial\delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}(t))}{\partial t} = \sum_{\alpha} e_{\alpha}\frac{\partial\delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha})}{\partial\vec{r}_{\alpha}}\cdot\frac{\partial\vec{r}_{\alpha}}{\partial t} = \sum_{\alpha} e_{\alpha}\frac{-\partial\delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha})}{\partial\vec{r}}\cdot\frac{\partial\vec{r}_{\alpha}}{\partial t} = -\sum_{\alpha} e_{\alpha}\frac{-\partial\delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha})}{\partial\vec{r}}\vec{V}_{\alpha} =$$

$$\frac{-\partial}{\partial\vec{r}}\sum_{\alpha}\frac{e_{\alpha}\vec{V}_{\alpha}\delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha})}{j} = -\mathrm{div}\vec{j}.$$

Отримуємо закон збереження заряду в диференціальній формі (рівняння неперевності): $\mathrm{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$. Запишемо його в інтегральній формі, маючи на увазі, що Q-повний заряд системи: $\int\rho dV = \sum e_{\alpha} = Q$ => $\int \mathrm{div}\vec{j}\cdot dV = \oint\vec{j}d\vec{S}$ => $\frac{dQ}{dt} = -\oint\vec{j}d\vec{S}$. Доведемо, що отримані нами вирази 4-вектори, запишемо закон збереження заряду наступним чином $\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial(c\rho)}{\partial(ct)} = 0$. x^k=(x,y,z,ct) = (**r**,ct), отже, знаменник – 4-вектор, а тому і чисельник 4-вектор. Тобто $j^k = (\vec{j}, c\rho) = \rho\frac{dx^k}{dt}$. Вираз для 4-дивергенції густини струму має вигляд $\frac{\partial j^k}{\partial x^k} = j^k_{,k} = 0$

15.Дія системи, що складається із зарядів та та електромагнітного поля. Загальні принципи побудови теорії поля. (Yogeniy)

Теорія поля будується виходячи з принципа найменшої дії (реалізуються ті поля, для яких δS=0). Основні принципи побудови теорії поля такі: 1) Принцип близькодії (локальності) – інтервал дії має бути локальним, величина дії залежить від координати точки $S = \int L(x,\dot{x})dt = \int f(x^k, \sigma_i(x^k))dx^k = \mathrm{inv}$, де σ_i-польові координати, dx^k-елементи 4-простору (простір не відокремлюється від часу). 2) Принцип відносності – величини мають бути інваріантними відносно системи координат. 3) Принцип дійсноначитності – S є R.

16. Виведення рівняннь Максвелла в коваріантній формі з варіаційного принципу. (Yogeniy)

17. Виведення рівнянь Максквелла в тривимірній диференціальній формі. (Yogeniy)

$E^{ijkl}F_{jkl} = 0$ Де елемент E визначається кількістю перестановок індексів до отримання елемента E^{1234} і дорівнюють -1 при непарній к-кості перестановок та 1 при парній. Перебрави всі можливі варіанти комбінацій ijkl у таблиці отримаємо Тензор антисиметричний, бо: $F_{ij} = -F_{ji}$, користуючись цим позбуваємося двох доданків у попередньому виразі для F, внаслідок чого отримуємо

i	j	k	l	E^{ijkl}
1	2	3	4	1
1	2	4	3	−1
1	3	2	4	−1
1	3	4	2	1
1	4	2	3	1
1	4	3	2	−1

$$F_{23,4} + F_{42,3} + F_{34,2} = 0 \quad \|F_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & E_x \\ -B_z & 0 & B_x & E_y \\ B_z & -B_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{pmatrix}$$ Маємо $\frac{\partial B_x}{\partial(ct)} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0$,

отже $\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t}$ При i=1 ліва та права частини виразу змінюються таким чином, що отримується вираз $(\mathrm{rot}\vec{E})_x = -\left(\frac{1\cdot\partial\vec{B}}{c\cdot\partial t}\right)_x$ Узагальнивши цей вираз, та аналогічні рівняння, що отримуються при i=2,3 маємо

$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1\cdot\partial\vec{B}}{c\cdot\partial t}$ -це перше з шуканих нами рівнянь

Максвела в тривимірній формі. При i=4 $\frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$ => $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ - ще одне рівняння Максвела. Тепер запишемо контраваріантний тензор $\|F^{ki}\| = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -E_y \\ B_y & -B_y & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix}$ Для k=1 запишемо $F^{1i}{}_{,1} = \frac{4\pi}{c}j^1$ Коли індекс і пробігає всі значення від 1 до 4 то ми отримаємо наступний вираз $F^{11}{}_{,1} + F^{12}{}_{,2} + F^{13}{}_{,3} + F^{14}{}_{,4} = 4\pi j^1/c$ => $0 + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial E_x}{\partial(ct)} = j_x$ або

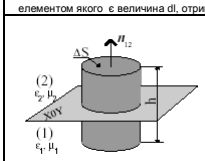
$(\mathrm{rot}\vec{B})_x = \frac{4\pi}{c}j_x + \frac{1\cdot\partial E_x}{c\cdot\partial t}$ При k=2,3 отримуємо такі ж рівняння, узагальнивши їх запишемо $\mathrm{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1\cdot\partial\vec{E}}{\partial t}$ - наступне рівняння Максвела. І нарешті, при k=4 $F^{41}{}_{,1} + F^{42}{}_{,2} + F^{43}{}_{,3} + F^{44}{}_{,4} = \frac{4\pi}{c\rho}(c\rho)$ або $\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho$ - це останнє з рівнянь Максвела, які треба було вивести.

18.Інтегральна форма рівнянь Максвела, та її зв"язок з експериментальними законами електромагнетизму. (Yogeniy)

Для виведення інтегральних рівнянь Максвела будемо проводити інтегрування їх диференціальної форми. Спочатку розглянемо рівняння $\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho$, про інтегруємо обидві частини цього рівняння по довільному об"єму V, позначимо S – замкнену поверхню, що охоплює об"єм V, а dS=dSn-елементарний елемент площі на цій поверхні. Отримуємо $\int_V \mathrm{div}\vec{E}dV = \int_V 4\pi\rho dV = \oint_{(S)}\vec{E}d\vec{S}$ => $\oint\vec{E}d\vec{S} = 4\pi Q$ --це закон Кулона в інтегральній формі, який у випадку нерухомого точкового заряду переходить у вигляд 4Eπr ^{2}=4πq => $\vec{E} = q\cdot\vec{r}/r^3$, де **r**-радіус-вектор, проведений з точки де знаходиться заряд у точку спостереження. Розглянемо тепер рівняння $\mathrm{div}\vec{B} = 0$, про інтегрувавши його аналогічним чином, отримаємо $\oint\vec{B}d\vec{S} = 0$ -- це закон відсутності магнітного заряду.

Перейдемо до рівняння $Q = \frac{2e_0{}^2}{3mc^3}$, про інтегруємо його по поверхні S, яка обмежується замкненим контуром Lелементарним елементом якого є величина dl, отримаємо

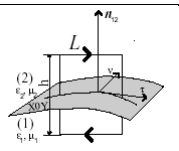
$\int\mathrm{rot}\vec{E}d\vec{S} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\vec{B}d\vec{S}$ => $\oint\vec{E}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\vec{B}d\vec{S}$, інтеграл у лівій частині це ЕРС, а $\int_S\vec{B}d\vec{S} = \Phi$ --магнітний потік через поверхню dS. Таким чином, останній вираз перепишеться у вигляді $\varepsilon_{ind} = -\frac{1\cdot\partial\Phi}{c\cdot\partial t}$ -це закон електромагнітної індукції Фарадея (ЕРС індукції викликана зміною магнітного потоку). Четверте рівняння $\mathrm{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1\cdot\partial\vec{E}}{c\cdot\partial t}$, в ньому складова $\frac{1\cdot\partial\vec{E}}{c\cdot\partial t}$ називається струмом зміщення. Інтегральна форма четвертого рівняння матиме вигляд $\oint\vec{B}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\vec{E}d\vec{S}$, де l (це буква L, але маленька) – довільний замкнутий контур, що обмежений поверхнею S, а $\vec{J} = \int\vec{j}d\vec{S}$. Розуміти інтегральну форму цього рівняння треба так- змінне електричне поле обумовлює виникнення змінного магнітного поля – це закон Біо-Савара-Лапласа.



19. Межові умови для векторів електромагнітного поля. (Yogeniy)

Для одержання межових умов на поверхнях розриву скористаємося інтегральною формою рівнянь Максвела. Почнемо з нормальних складовихіндукційелектричного та магнітного полів. Розглянемо рівняння $\int_S\vec{B}d\vec{S} = 0$ на межі поділу 2-ох середовищ, що збігається з площиною XOY, одне з якиххарактеризується ε_1 та μ_1 а друге ε_2 та μ_2, **n** – одиничний вектор нормалі, що спрямований з одного середовища в інше. В деякій точці поверхні будуємо нескінченно малий циліндр висотою h та площею основ ΔS, оскільки площа основ нескінченно мала, то ми можемо вважати, що в межах основ значення індукції **B** залишається постійним, а тому його можна винести за знак інтеграла. Зовнішня нормаль до верхньої основи має такий же напрям, як і вектор **n**, а зовнішня нормаль до нижньої - протилежний : $\mathbf{n}_{12} = \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$, крім того, ми не враховуємо потік через бічну поверхню, оскільки висота циліндра -> 0. Таким чином, наше рівняння прийме вигляд $\int_S\vec{B}^{(1)}\vec{n}_1dS - \int_S\vec{B}^{(2)}\vec{n}_2dS = \left(-\vec{B}^{(1)}\vec{n}_{12} + \vec{B}^{(2)}\vec{n}_{12}\right)\Delta S = 0$, скоротивши на ΔS, отримуємо межову умову для нормальних складовихмагнітної індукції $(-\vec{B}^{(1)} + \vec{B}^{(2)})\cdot\vec{n}_{12} = 0$ або у вигляді скалярної рівності $B_n{}^{(2)} = B_n{}^{(1)}$. Розглянемо тепер рівняння $\oint_S\vec{D}d\vec{S} = 4\pi Q$, враховуючи, що $Q = \int_{\Delta V}\rho dV = \sigma\Delta S$, виконуємо аналогічне інтегрування і отримуємо

$\int_S\vec{D}^{(1)}\vec{n}_1dS - \int_S\vec{D}^{(2)}\vec{n}_2dS = (-\vec{D}^{(1)}\vec{n}_{12} + \vec{D}^{(2)}\vec{n}_{12})\Delta S = 4\pi\sigma\Delta S$, скортивши на ΔS отримуємо межову умовудля нормальних компонент електричної індукції $(\vec{D}^{(2)} - \vec{D}^{(1)})\cdot\vec{n}_{12} = 4\pi\sigma$, або в скалярному вигляді $D_n{}^{(2)} - D_n{}^{(1)} = 4\pi\sigma$.



Розгля немо тепер тангенціальні слкадові полів. Запишемо закон електромагнітної індукції $\oint\vec{E}d\vec{\ell} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\vec{B}d\vec{S}$. На межі поділу двох середовищ виберемо нескінченно малий контур інтегрування L , в межах якого значення електричного поля контуру змінюватися не буде. Вектор нормалі спрямовуємо з середовища (1) в середовище (2) . Введемо ще 2 одиничних вектори **τ** та **ν**, дотичних до межової поверхні, вектор **τ** лежить у площині контуру L, а вектор **ν** перепндикулярний до нього. Причому в середовищі (2) вектори dl та **τ** паралельні, а в середовищі (1) – антипаралельні. З урахуванням вищесказаногго закон електромагнетної індукції запишеться у вигляді $(\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)})\cdot\vec{\tau}\cdot L = 0$, права частина = 0, бо потік вектора **B** через елемент поверхні, що стягується до 0 = 0. Для введених нми векторів має виконуватися рівність $\vec{\tau} = [\vec{\upsilon}\times\vec{n}_{12}]$, тому, виконавши циклічну перестановку отримаємо $[\vec{n}_{12}\times(\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)})] = 0$ - це межова умова для тангенціальних складових електричних полів.

У скалярному вигляді $E_\tau{}^{(2)} - E_\tau{}^{(1)} = 0$. І нарешті закон Біо-Савара $\oint\vec{B}d\vec{\ell} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\int\vec{E}d\vec{S}$ внаслідок аналогічних перетворень матиме вигляд $(\vec{B}^{(2)} - \vec{B}^{(1)})\cdot\vec{\tau}\cdot L = \frac{4\pi}{c}\vec{\nu}\cdot\vec{j}_S\cdot L$, де j_S- поверхнева густина струму, що тече по межі розподілу двох середовищ, внеском вертикальних компонент контуру нехтуємо, бо h -> 0 , і підставивши вираз для **τ** , та виконавшм циклічну перестановку отримаємо: ε у скалярному вигляді $B_\tau{}^{(2)} - B_\tau{}^{(1)} = 4\pi j_s/c$. ВСЄ КОНЕЦ ! ♣

20.Закон збереження енергії електромагнітного поля, теорема Умова-Пойтінга. (Yogeniy)

Теорема Умова-Пойтінга ---Розглянемо тривимірні рівняння Максвела у диференціальній формі $\mathrm{div}\vec{B}=0$ (1), $\mathrm{rot}\vec{E}=-\frac{1\cdot\partial\vec{B}}{c\cdot\partial t}$ (2), $\mathrm{rot}\vec{B}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1\cdot\partial\vec{E}}{c\cdot\partial t}$ (3), $\mathrm{div}\vec{E}=4\pi\rho$ (4) Домножимо рівняння (2) на (-**B**) **[не забудьте поставити над B стрілку, адже це векторна величина]** а рівняння (3) на **векор E**, після чого додамо ліві та праві частини цих виразів, отримаємо

$\vec{E}\mathrm{rot}\vec{B}-\vec{B}\mathrm{rot}\vec{E}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}\vec{E}+\frac{1}{c}\left(\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\vec{B}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$ => $-\mathrm{div}\left[\vec{E}\times\vec{B}\right]=\frac{4\pi}{c}\vec{j}\vec{E}+\frac{1}{c}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(E^2+B^2\right)\right)$ Домножимо ліву та праву частини виразу на с/4пі, внаслідок чого отримаємо $\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{8\pi}\left(E^2+B^2\right)\right]=-\vec{j}\cdot\vec{E}-\mathrm{div}\left(\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\times\vec{B}\right]\right)$ (1). Оскільки величина $\vec{j}\cdot\vec{E}=e\vec{V}\vec{E}=\vec{V}\vec{F}=\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$ - це потужність, то величина $\varpi=\frac{E^2+B^2}{8\pi}$ має розмірність роботи і називається густиною енергії електромагнітного поля. Величина $\vec{S}=\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\times\vec{B}\right]$ -це потік енергії, або вектор Умова-Пойтінга.

Підставивши величини **ω** та **S** у вираз (1) отримуємо рівняння $\frac{\partial\varpi}{\partial t}=-\vec{j}\cdot\vec{E}-\mathrm{div}\vec{S}$ - це диференціальна форма теореми Умова-Пойтінга.

Про інтегрувавши цей вираз по об"єму dV отримуємо власне **теорему Умова-Пойтінга** (закон збереження енергії електромагнітного поля) $\frac{\partial}{\partial t}\int\varpi dV=-\int\vec{j}\cdot\vec{E}dV-\oint\vec{S}\cdot d\vec{\sigma}$ (заміна, що була виконана: $\int\mathrm{div}\vec{S}dV=\oint\vec{S}d\vec{\sigma}$ - це теорема Гаусса). Зміст теореми Умова-Пойтінга полягає в тому, що зміна електромагнітної енергії в замкненому об"ємі може відбуватися за рахунок потоку енергії назовні чи всередину, або за рахунок роботи, що виконується над частинками, які знаходяться в цьому об"ємі.

Розглянемо 2 граничні випадки : 1) Система замкнена, тобто ізольована від зовнішнього середовища, тоді потік через обмежуючу поверхню = 0, тому $\frac{\partial}{\partial t}\int_V\varpi dV=-\int_V\vec{j}\cdot\vec{E}dV$ тобто, зміна енергії об"ємі може відбуватися лише за рахунок роботи виконаної над частинками. 2) Якщо в об"ємі нема речовини, тобто j=0 то $\frac{\partial}{\partial t}\int_V\varpi dV=-\int_S\vec{S}\cdot d\vec{s}$, тобто зміна густини енергії в об"ємі відбувається лише за рахунок потоку її черз обмежуючу поверхню.

21. Рівняння для електромагнітних потенціалів (рівняння д"Аламбера) (Yogeniy).

Розглянемо рівняння Максвела у 4-вимірному вигляді: $F^{ki}{}_{,j}=\frac{4\pi}{c}j^k$,виразивши величину F через векторні потенціали підставимо отриманий вираз $F^{ki}=A^{i,k}-A^{k,i}$ у рівняння Максвела, в результаті отримаємо $A^{i,k}{}_{,j}-A^{k,i}{}_{,j}=\frac{4\pi}{c}j^k$, або $\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial A^i}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial A^k}{\partial x_i}\right)=\frac{4\pi}{c}j^k$, переставивши місцями мішані похідні отримаємо $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial A^i}{\partial x^i}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x_i}A^k=\frac{4\pi}{c}j^k$ (1).

Величина $\frac{\partial A^i}{\partial x^i}$ -це 4-дивергенція, яка згідно умови Лоренцо має бути рівна 0, розписавши вираз для ;-дивергенції наступним чином отримуємо $\frac{\partial A^i}{\partial x^i}=\nabla\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0$ -це так звана калібровка Лоренца. Скориставшись нею перепишемо вираз (1) у тривимірній формі наступним чином $\Delta\vec{A}-\frac{1}{c}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}$, в 4-вимірному вигляді воно запшеться наступним чином $\bar{i}A^k=-4\pi j^k/c$ (2), де оператор $\bar{i}=\Delta-1/c^2\cdot\partial^2/\partial t^2$ має назву оператор д"Аламбера, а рівняння (2) називається рівнянням для 4-потенціалу. Запишемо тепер рівняння д"Аламбера (хвильові рівняння), їх 2 : $\bar{i}\vec{A}=-4\pi\vec{j}/c$ та $\bar{i}\Phi=-4\pi\rho$ (жирним шрифтом позначены векторны величини). Таким чином, замість системи 4-ох рівнянь Максвела можна використовувати 2 рівняння д"Аламбера, ці рівняння незалежні та мають певні загальні розв"язки.

21. Рівняння для електромагнітних потенціалов (рівняння д'Аламбера). (Taurus)

Система диференціальних рівнянь Максвела для статичних полів: $\mathrm{div}B=0$ $\mathrm{rot}E=0$ $\mathrm{div}E=4\pi\rho$ $\mathrm{rot}B=\frac{4\pi}{c}j$.

Розглянемо векторний та скалярний потенціал <u>для статичного випадку</u>. *Векторний потенціал:* розглянемо перше рівняння Максвела $\mathrm{div}B=0$.З цього рівняння випливає, що $B=\mathrm{rot}A$ (1) ($\mathrm{div}B=\mathrm{div}(\mathrm{rot}A)$, а $\mathrm{div}(\mathrm{rot}A)=0$), де велечина **A** має назву векторного потенціалу, і являє собою деяке векторне поле, яке при заданій залежності густини струмів від координат обчислюється за вормулою: $A(r)=\frac{1}{c}\int\frac{j(r')}{|r-r'|}dV'$. Фізичний зміст- векторний потенціал є реальною фізичною характеристикою електромагнітного поля. *Скалярний потенціал:* запишемо друге рівняння Максвела для стат. полів: $\mathrm{rot}E=0$, очевидно що це рівняння має розв'язок $E=-\mathrm{grad}\phi$ ($\mathrm{div}(\mathrm{grad}\phi)=0$), явний вигляд для ϕ , що має назву скалярний потенціал: $\phi(r)=\int_V\frac{\rho(r')dV'}{|r-r'|}$. Фізичний зміст – це робота по перенесенню одиничного заряду з нескінченності в точку спостереження. Поняття скалярного та векторного потенціалів, які щойно розглянули для статичних задач, можуть бути узагальнені і для <u>динамічних задач</u>. Система рівнянь Максвела для вакууму: $\mathrm{div}B=0$ $\mathrm{rot}E=-\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$ $\mathrm{div}E=4\pi\rho$ $\mathrm{rot}B=\frac{4\pi}{c}j+\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$ (2). Як і в статичному випадку розв'язок першого рівняння Максвела буде: $B=\mathrm{rot}A$. Підставимо одержаний вираз у рівняння $\mathrm{rot}E=-\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$, і виконаємо нескладні перетворення. ($\mathrm{rot}E+\frac{1}{c}\frac{\partial(\mathrm{rot}A)}{\partial t}=0\Rightarrow$ $\mathrm{rot}(E+\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t})=0$). Це рівняння має розв'язок $E=-\mathrm{grad}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$ (3), (знак перед градієнтом вибераємо так, щоб силові лінії біли спрямовані від додатнього заряду до від'ємного).

<u>Рівняння д'Аламбера</u> Запишемо рівняння, які задовільняють потенціали (1) та (3). Підставимо їх в рівняння (2), врахувавши, що $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}A)=\mathrm{grad}(\mathrm{div}A)-\Delta A$, отримаємо $\Delta A-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2A}{\partial t^2}-\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}A+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=\frac{4\pi}{c}j$, та наклавши лоренцеву калібровку ($\mathrm{div}A+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$) матимемо: $\Delta A-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2A}{\partial t^2}=\frac{4\pi}{c}j$, Позначемо $\#\equiv\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, де #- квадратик який використовується для позначення оператора д"Аламбера. А відповідно рівняння $\#A=-\frac{4\pi}{c}j$, називається рівнянням д'Аламбера. Також можна вивести друге рівняння підставивши рівняння (3) в рівняння $\mathrm{div}E=4\pi\rho$, отримаємо $-\Delta\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}A=-\frac{4\pi}{c}\rho$, та з урахуванням Лоренцевої калібровки отримаємо $\Delta\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi=-\frac{4\pi}{c}\rho$, яке можна записати у вигляді: $\#\phi=-4\pi\rho$ і також назвати рівнянням д'Аламбера.

Формула	Статичний випадок	Динамічний випадок
Вираз для магнітної індукції через векторний потенціал	$B=\mathrm{rot}A$	$B=\mathrm{rot}A$
Віраз для електричного поля через скалярний потенціал	$E=-\mathrm{grad}\phi$	$E=-\mathrm{grad}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$
Рівняння для скалярного потенціалу	$\Delta\phi=-4\pi\rho$	$\#\phi=-4\pi\rho$
Рівняння для векторного потенціалу	$\Delta A=-\frac{4\pi}{c}j$	$\#A=-\frac{4\pi}{c}j$

22. Стале електричне поле. Рівняння Лапласа та Пуассона та їх загальний розв'язок. (Taurus)

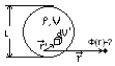
При <u>сталому електричному полі</u> всі похідні за часом дорівнюють нулю ($\frac{\partial}{\partial t}=0$). Отже система рівнянь Максвела приймає вигляд: $\mathrm{div}B=0$, $\mathrm{rot}B=\frac{4\pi}{c}j$, $\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{\vec{n}\left(\vec{n}\ddot{\vec{p}}\right)-\ddot{\vec{p}}}{c^2r}$, $\mathrm{div}E=4\pi\rho$. Це тепер є дві незалежні системи для електричного та магнітного поля. Отже для сталого електричного поля нам досить розглянути тільки два рівняння: $\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{\vec{n}\left(\vec{n}\ddot{\vec{p}}\right)-\ddot{\vec{p}}}{c^2r}$, $\mathrm{div}E=4\pi\rho$. До речі $\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{\vec{n}\left(\vec{n}\ddot{\vec{p}}\right)-\ddot{\vec{p}}}{c^2r}$, вказуєна безвихрьовий характер сталого електричного поля. Це рівняння задовольняється, якщо вектор *E*, буде представляти собою $E=-\mathrm{grad}\phi$, де ϕ - електростатичний потенціал. (розписано в шпорі 21). Оскільки ротор від довільного градієнта тотожно дорівнює нулеві, то підставляючи цей вираз у рівняння $\mathrm{div}E=4\pi\rho$, отримуємо рівняння: $\Delta\phi=-4\pi\rho$, яке називається <u>рівнянням Пуассона</u>. Там де немає зарядів рівняння Пуассона перетворюється на <u>рівняння Лапласа</u>: $\Delta\phi=0$, з цього рівняння ми бачимо, що потенціал електричного поля ніде не може мати ні максимуму, ні мінімуму. Тому, що для того щоб ϕ приймало екстримальне значення, необхідно щоб всі перші похідні від ϕ по координатам дорівнювали нулю, а другі похідні $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2},\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2},\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$ мали однаковий знак. Останнє просто неможливо, так як при цьому на задовільняється рівняння Лапласа. Звернемо увагу, що коли заряди задано, розв'язок рівняння Пуассона має вигляд: $\phi(r)=\int_V\frac{\rho(r')dV'}{|r-r'|}$, доведемо це:

$\Delta\phi=\Delta\int_V\frac{\rho(r')dV'}{|r-r'|}=\int_V\rho(r')\Delta\frac{1}{|r-r'|}dV'=-4\pi\int_V\rho(r')\delta(r-r')dV'=-4\pi\rho(r)$.

<u>Закон Кулона</u>. Визначимо поле створене точковим зарядом. З уявлень про симетрію ясно, що воно буде направлено в кожній точці по радіу вектору, проведеному з точки, в якій знаходиться заряд *e*. З тих самих роздумів ясно, що абсолютна велечина *E* поля буде залежати тільки від відстані *R* до заряду. Для знаходження цієї абсолютної велечини використаємо рівняння $\mathrm{div}E=4\pi\rho$, тільки запишемо його в інтегральній формі: $\int\mathrm{div}EdV=\oint Edf$, таким чином потік електричного поля через замкнену поверхню дорівнює повному заряду, що знаходиться в нашому об'ємі, помноженому на 4π . Тобто потік електричного поля через шарову поверхню с радіусом *R*, проведену навколо заряду *e*, дорівнює $4\pi R^2E$, і цей потік повинен бути рівний $4\pi e$. Звідси маємо $E=\frac{e}{R^2}$. У векторному вигляді $E=\frac{e\vec{R}}{R^3}$. Таким чином, поле створюване точковим зарядом, обратно пропорційне квадрату відстані до цього заряду. Це і є закон Кулона. Потенціал цього поля: $\varphi=\frac{e}{R}$. Якщо ми маємо систему зарядів, то створюване нею поле, згідно принципу суперпозиції, дорівнює сумі полів, створюваних кожним зарядо окремо. В часності потенціал такого поля дорівнює: $\varphi=\sum_a\frac{e_a}{R_a}$, де R_a – відстань від заряду e_a до точки в якій ми шукаємо потенцал.

23. Стале електричне поле на далеких відстанях. Дипольний і квадрупольний моменти. (Taurus)

Якщо відомо розподіл в просторі всіх зарядів, то згідно з законом Кулона для системи зарядів $\phi(\vec r)=\sum_k \frac{q_k}{|\vec r-\vec r_k|}$ (1), потенціал цього поля буде: $\phi(\vec r)=\int_V \frac{\rho(\vec r')dV'}{|\vec r-\vec r'|}$ (2). Якщо $L<<\vec r$, то формула (2) набагато спрощується. L-характерний розмір. Характерні розміри зміни $|\vec r'|\le L<<|\vec r|$, тому нехтуємо $\vec r'$, тоді



$\phi(\vec r)=\frac{1}{r}\int_V \rho dV'=\frac{q}{r}$, тобто ми бачимо систему як точковий заряд. Якщо трохи наблизитись то квадруполь. Повернемося до загального розв'язку. Введемо параметр $\frac{|\vec r'|}{|\vec r|}$, який є малим. Розкладемо по ньому в ряд Тейлора:

$f(x'^\alpha)=f|_{x'^\alpha=0}+\frac{\partial f}{\partial x'^\alpha}|_{x'^\alpha=0}+\frac{\partial f}{\partial x'^\alpha\partial x'^\beta}\Big|_{x'^\alpha=0x'^\beta=0}+\dots$. Тут $f=\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}$; $f|_{x'^\alpha=0}=\frac{1}{r}$;

$$\frac{\partial f}{\partial x'^\alpha}=\frac{\partial}{\partial x'^\alpha}\left(\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\right)=\frac{1}{|\vec r-\vec r'|^2}*\frac{|\vec r-\vec r'|}{\partial x'^\alpha}=\left|\begin{array}{l}|\vec r-\vec r'|=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}\\ \frac{\partial|\vec r-\vec r'|}{\partial x'}=\frac{-2(x\cdot x')}{2|\vec r-\vec r'|}=-\frac{x-x'}{|\vec r-\vec r'|}\end{array}\right|=\frac{x^\alpha-x'^\alpha}{|\vec r-\vec r'|^3};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x'^\alpha}\Big|_{x'^\alpha=0}=\frac{x^\alpha}{r^3};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x'^\alpha\partial x'^\alpha}=-\frac{1}{|\vec r-\vec r'|^3}+\left(x^\alpha-x'^\alpha\right)\frac{\partial}{\partial x'^\alpha}\left(\frac{1}{|\vec r-\vec r'|^3}\right)=-\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}+\frac{3\left(x^\alpha-x'^\alpha\right)\left(x^\beta-x'^\beta\right)}{|\vec r-\vec r'|^3}=$$

$$\left(x^\alpha-x'^\alpha\right)\frac{1}{\partial x'^\beta}\left(\frac{1}{|\vec r-\vec r'|^3}\right)=\frac{3\left(x^\alpha-x'^\alpha\right)\left(x^\beta-x'^\beta\right)}{|\vec r-\vec r'|^5};$$ Для всіх α і β: $\frac{\partial^2 f}{\partial x'^\alpha\partial x'^\beta}=-\frac{\delta_{\alpha\beta}}{|\vec r-\vec r'|^3}+$

$$\frac{3\left(x^\alpha-x'^\alpha\right)\left(x^\beta-x'^\beta\right)}{|\vec r-\vec r'|^5};\quad f|_{x'\alpha=0}=\frac{1}{r};\quad \frac{\partial f}{\partial x'^\alpha}\Big|_{x'^\alpha=0}=\frac{x^\alpha}{r^3};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x'^\alpha\partial x'^\beta}\Big|_{x'^\alpha=x'^\beta 0}=-\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3}\cdot\frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5};$$ Сам розклад має вигляд:

$$\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}=\frac{1}{r}+\frac{x^\alpha}{r^3}\cdot x'_\alpha+\frac{1}{2}\left(-\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r}+\frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5}\right)x'^\alpha x'^\beta+\dots=\frac{1}{r}+\frac{\vec r\vec r'}{r^3}+\frac{1}{2r^5}\underbrace{\left(3x_\alpha x_\beta-r^2\delta_{\alpha\beta}\right)x'^\alpha x'^\beta}_{=(3x'_\alpha x'_\beta-r'^2\delta_{\alpha\beta})x^\alpha x^\beta};$$

$\phi(\vec r)=\int\frac{\rho(\vec r)dV'}{|\vec r-\vec r'|}=\frac{1}{r}\int\rho dV'+$ Де

$$\frac{\vec r}{r^3}\int\vec r'\rho(\vec r')dV'+\frac{x^\alpha x^\beta}{2r^5}\int\rho(\vec r')(3x_\alpha' x_\beta'-r'^2\delta_{\alpha\beta})dV'+\dots$$ $q=\int\rho(\vec r')dV'$ - <u>сумарний заряд системи</u>. $\vec p=\int\vec r\rho(\vec r)dV'$ - <u>дипольний момент системи (електр)</u>. $Q_{\alpha\beta}=\int\rho(\vec r)(3x'_\alpha x'_\beta-r'^2\delta_{\alpha\beta})dV'$ - <u>тензор електричного квадрупольного моменту</u>.

$\phi(\vec r)=\frac{q}{r}+\frac{\vec p\vec r}{r^3}+\frac{Q_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta}{2r^5}+\dots$ - розклад електростатичного потенціала по мультипольних моментах, або конкретніше по мультиполях.

Фактично це розклад за степенями $\frac{1}{r}$

Повний заряд	$q=\int\rho(\vec r')dV'$	$q=\sum_k q_k$
Дипольний момент	$\vec p=\int\vec r'\rho(\vec r')dV'$	$\vec p=\sum_k q_k\vec r_k$
Тензор квадрупольного момента	$Q_{\alpha\beta}=\int\rho(\vec r)(3x'_\alpha x'_\beta-r'^2\delta_{\alpha\beta})dV'$	$Q_{\alpha\beta}=\sum_k q_k(3x'_\alpha x'_\beta-r'^2\delta_{\alpha\beta})$

Властивості тензора квадрупольного моменту: 1) симетричність $Q^{\alpha\beta}=Q^{\beta\alpha}$; 2) тензор 2-го рангу: $\alpha,\beta=1,2,3=x,y,z$; 3) Зводиться до діагонального вигляду: $\left\|Q^{\alpha\beta}\right\|=\begin{pmatrix}Q_{11}&0&0\\0&Q_{22}&0\\0&0&Q_{33}\end{pmatrix}$. (Слід тензора- це сума діагональних елементів) Слід:

$Q^\alpha{}_\alpha=\int\rho(\vec r')(3x'^\alpha x'_\alpha-r'^2\delta^\alpha{}_\alpha)dV=\int\rho(\vec r')(3\vec r'-3\vec r')dV'=0$ Отже тільки дві компоненти лінійно незалежні:

$Q_{zz}=-(Q_{xx}+Q_{yy})$. Якщо ж система зарядів аксіально симетрична: $Q_{xx}=Q_{yy}=-\frac{1}{2}Q_{zz}$, величину Q_{zz} називають в цьому випадку просторово квадрупольним моментом. Квадрупольний потенціал тоді спрощується: $\phi_{quad}(\vec r)=\frac{Q_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta}{2r^5}=$

$$\frac{1}{2r^5}\left(Q_{xx}x^2+Q_{yy}y^2+Q_{zz}z^2\right)=\frac{1}{2r^5}\left(-\frac{Q}{2}x^2-\frac{Q}{2}y^2+Qz^2\right)=\frac{Q}{2r^5}\left(z^2-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$. В сферичній системі координат:

$x=r\sin\theta\cos\varphi$; $y=r\sin\theta\sin\varphi$; $z=r\cos\theta$.=> $\phi(\vec r)=\frac{Q}{2r^3}\left(\cos^2\theta-\frac{\sin2\theta}{2}\right)$. А $\phi_{quad}(\vec r)=\frac{Q}{2r^5}\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}+z^2\right)=$

$\frac{Q}{2r^3}\left(\cos^2\theta-\frac{\sin^2\theta}{2}\right)=\frac{Q}{4r^3}\left(3\cos^2\theta-1\right)$. Отже <u>квадрупольний потенціал</u>: $\phi_{quad}=\frac{Q}{4r}\left(3\cos^2\theta-1\right)$.

24. Розклад електростатичного поля за мультиполями. Система зарядів у зовнішньому електростатичному полі. (Taurus)

25. Стале магнітне поле. Рівняння Лапласа та Пуассона та їх загальний розв'язок. (Taurus)

При відсутності залежності від часу (магнітостатика) напруженість магнітного поля можна задовольняє системі рівнянь:

$\operatorname{div}\vec B=0$ (1), $\operatorname{rot}\vec B=\frac{4\pi}{c}\vec j$ (2). (Поскільки співвідношення (2) можна одержати з рівняння (1): ($B=\frac{1}{c}\int\frac{[\vec j(\vec r')\times(\vec r-\vec r')]}{|\vec r-\vec r'|^3}dV'$ та $\operatorname{rot}\frac{a}{r}=\frac{[a\times r]}{r^3}$ то маємо $B=\frac{1}{c}\operatorname{rot}\int\frac{j(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}dV'$, та якщо застосувати формулу $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}A)=\operatorname{grad}(\operatorname{div}A)-\Delta A$ то отримаємо $\operatorname{rot}\vec B=\frac{1}{c}\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\int\frac{\vec j(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}dV'\right)=\frac{1}{c}\operatorname{grad}\int_V\operatorname{div}\frac{\vec j(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}-\frac{1}{c}\int_V\vec j(\vec r')\Delta\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}dV'=\frac{4\pi}{c}\int_V\vec j(\vec r')\delta(\vec r-\vec r')dV'=$

$\frac{4\pi}{c}\vec j(\vec r)$ отже отримали рівняння (2))).

Поскільки $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$, то з рівняння нерозривності випливає умова стаціонарності струмів: $\operatorname{div}\vec j=0$, рівняння (2) можна представити у вигляді ротора деякого вектора $\vec A$ - векторного потенціала: $\vec B=\operatorname{rot}\vec A$. Векторний потенціал задовільняє рівнянню Пуассона: $\Delta\vec A=-\frac{4\pi}{c}\vec j$. Запишемо розв'язок рівняння для випадку обмеженої системи стаціонарних струмів, виходячи з аналогії з рівнянням електродинаміки: $\Delta\varphi'=-4\pi\rho$. Це рівняння системи зарядів має розв'язок $\varphi(\vec r)=\frac{1}{c}\int\frac{\vec j(\vec r')dV'}{|\vec r-\vec r'|}$. Тому розв'язок для векторного потенціалу можна записати у вигляді: $A(\vec r)=\frac{1}{c}\int\frac{\vec j(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}dV'$. Більш докладно про векторний та скалярний потенціал розписано в Шпорі №21. Рівняння Лапласа та Пуассона докладно розписані в Шпорі №22.

26. Стале магнітне поле на далеких відстанях. Магнітний дипольний момент. (Taurus)

Знайдемо магнітне поле на великих відстанях від обмеженої системи стаціонарних струмів. Нехай струми течуть в скінченному об'ємі з лінійним розміром L. Якщо відстань до точки спостереження $r<<L$, то можна розкласти: $\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}=\frac{1}{r}+\frac{\vec r\cdot\vec r'}{r^3}$, підставивши цей розклад в розв'язок рівняння для векторного потенціалу: $\vec A(\vec r)=\frac{1}{c}\int\frac{\vec j(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}dV'$, отримаємо $\vec A(\vec r)=\frac{1}{cr}\int\vec j(\vec r')dV'+$

$\frac{1}{cr^3}\int(\vec r\cdot\vec r')\vec j(\vec r')dV'$ (1). Покажемо, що $\int\vec j(\vec r')dV=0$. Виходячи при цьому з тотожності: $\operatorname{div}'\left[\vec j(\vec r')(\vec b\cdot\vec r)\right]=$

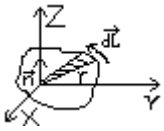
$$\left|\begin{array}{l}\operatorname{div}(\vec A\cdot\phi)=\phi\cdot\operatorname{div}\vec A+\vec A\operatorname{grad}\phi\\ \nabla(\vec A\cdot\phi)=\phi\cdot\nabla\vec A+\vec A\cdot\nabla\phi\end{array}\right|=(\vec b\cdot\vec r')\underbrace{\operatorname{div}\vec j}_{\frac{\partial\rho}{\partial t}=0}+\vec j\cdot\underbrace{\operatorname{grad}(\vec b\cdot\vec r)}_{\vec b}=\vec b\cdot\vec j(\vec r')$$, де $\vec b$ - довільний сталий вектор.

Проінтегрувавши цей вираз по всЁму просторі і використовуючи теорему Остроградського- Гаусса, одержимо: $\int\vec b\cdot\vec j(\vec r')dV'=$

$\int j_n(\vec r')(\vec b\vec r)bS=0$, так як $j_n=0$ на нескінченно віддаленій поверхні. Перетворемо тепер другий інтеграл в (1). Виходячи з тотожності $\left[\vec r'\times\vec j(\vec r')\right]\times\vec r=\vec j(\vec r')(\vec r\cdot\vec r')-\vec r'(\vec j\cdot\vec r)$. В останній складовій зробимо заміну: $\vec j\cdot\vec r=\operatorname{div}'\left[\vec j(\vec r\cdot\vec r')\right]$. Домноживши потім обидві частини цього рівняння скалярно на довільний сталий вектор $\vec b$ і проінтегруємо по всьому просторі:

$\vec b\left[\int\left[\vec r'\times\vec j(\vec r')\right]dV'\times\vec r\right]=\vec b\int\vec j(\vec r')(\vec r\cdot\vec r')dV'-\int(\vec b\cdot\vec r)\operatorname{div}'\left[\vec j(\vec r')(\vec r\cdot\vec r')\right]dV'$ (2). Останній інтеграл перетворемо з допомогою тотожності: $(\vec b\cdot\vec r)\operatorname{div}'\left[\vec j(\vec r')(\vec r-\vec r')\right]=\operatorname{div}'\left[\vec j(\vec r\cdot\vec r')(\vec b\cdot\vec r')\right]-(\vec b\cdot\vec j)(\vec r\cdot\vec r')$. Після інтегрування по всьому просторі і застосування теореми Остроградського- Гаусса складова в лівій частині яка містить div', перетворюється в нуль. В результаті рівність (2) матиме вигляд. $\vec b\left[\int\left[\vec r'\times\vec j(\vec r')\right]dV'\times\vec r\right]=2\vec b\int\vec j(\vec r')(\vec r\cdot\vec r')dV'$.

Оскільки вектор $\vec b$ довільний звідси випливає: $\int\left[\vec r'\times\vec j(\vec r')\right]dV'\times\vec r=2\int\vec j(\vec r')(\vec r\cdot\vec r')dV'$. Підставивши цей вираз та вираз $\int\vec j(\vec r')dV'=0$ в розклад (1), одержимо: $\vec A(\vec r)=\frac{\vec M\times\vec r}{r^3}$, де вектор $\vec M=\frac{1}{2c}\int\left[\vec r\times\vec j(\vec r')\right]dV$ - називається <u>магнітним дипольним моментом</u>.Ці дві формули рішають задачу про знаходження векторного потенціалу, далеко від системи стаціонарних струмів. Слід відзначити, що магнітний момент *M* інваріантний відносно зсуву, системи відліку і заміна $\vec r$ на $\vec r+\vec b$ не змінює інтеграла. В якості прикладу знайдемо магнітний момент плоского контура з сталим струмом *I*, який лежить в площині xy. Здійснивши заміну



$\vec j dV\to I\vec dL$, запишемо $M=\frac{I}{2c}\int\left[\vec r\times\vec dL\right]$. Не важко помітити, що вектор $\frac{1}{2}\left[\vec r\times\vec dL\right]$ по величині рівний площі заштрихованого трикутника і напрямлений вздовж нормалі $\vec n$ до площини трикутника.Тому $\frac{1}{2}\int\left[\vec r\times\vec dL\right]=S\vec n$, де S - площа, обмежена контуром з струмом.

В результаті магнітний момент плоского контура з струмом запишемо в вигляді: $\vec M=\frac{I}{c}S\vec n$.

Запишемо векторний потенціал через магнітний дипольний момент: $\vec B=\operatorname{rot}\vec A=\operatorname{rot}\left(\frac{\vec M\times\vec r}{r^3}\right)=\dots=-\frac{\vec M-3\vec n(\vec M\cdot\vec n)}{r^3}$, де $\vec n=\frac{\vec r}{r}$,

Пояснимо докладніше яким чином ми знайшли $\vec B$: $\vec B=\nabla\times\frac{\vec M\times\vec r}{r^3}=\frac{1}{r^3}\cdot\underbrace{\nabla\times\left[\vec M\times\vec r\right]}_{\nabla\times\vec M\times\vec r=\vec M(\nabla\cdot\vec r)-(\vec M\nabla)\vec r=2\vec M}-\left[\vec M\times\vec r\right]\times\overbrace{\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)}^{-\frac{3\vec r}{r^5}}\Rightarrow$

$\vec B=\frac{3\vec r(\vec M\cdot\vec r)}{r^5}-\frac{M}{r^3}$. ВСЁ.

27. Векторний потенціал сталого магнітного поля. Магнітний момент у зовнішньому магнітному поля. Гіромагнітне відношення. (Taurus)

Система диференціальних рівнянь Максвела для статичних полів: $\mathrm{div}\mathbf{B}=0$ $\mathrm{rot}\mathbf{E}=0$ $\mathrm{div}\mathbf{E}=4\pi\rho$ $\mathrm{rot}\mathbf{B}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$.

Розглянемо векторний потенціал для статичного випадку. Векторний потенціал: розглянемо перше рівняння Максвела $\mathrm{div}\mathbf{B}=0$.З цього рівняння випливає, що $\mathbf{B}=\mathrm{rot}\mathbf{A}$ (1) ($\mathrm{div}\mathbf{B}=\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{A})$, а $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{A})=0$), де велечина **A** має назву векторного потенціалу, і являє собою деяке векторне поле, яке при заданій залежності густини струмів від координат обчислюється за формулою:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'$$. Фізичний зміст- векторний потенціал є реальною фізичною характеристикою електромагнітного поля.

Магнітний момент. Основні положення, що стосуються магнітних явищ: магнітних зарядів не існує, у дослідженнях використовують магнітний диполь (диполь має малі розміри та слабке магнітне поле- для того щоб не збурювати поле в яке він внесений). Диполем може бути шматок магніту- магнітна стрілка, або петля зі стумом. У присутності магнітного поля диполь орієнтується у певному напрямку. Цей напрям вважають за напрям вектора магнітної індукції, який позначається *B*. Велечина магнітної індукції може бути виміряна через механічний момент сил $\vec{N}=\left[\vec{m}\times\vec{B}\right]$, де $\vec{m}=\frac{j\vec{S}}{c}$.–магнітний момент. Також: $\vec{B}=\frac{3\vec{n}(\vec{m}\vec{n})-\vec{m}}{R_0^3}$, тут ми бачимо, що магнітне поле виражається через магнітний момент, такою ж самою формулою як і електричне поле виражається через дипольний момент. При чому відношення магнітного моменту до механічного, постійне і = $\frac{e}{2mc}$.

При вивченні магнітних явищ будемо спиратися на два експериментальні закони для магнітостатичних полів: 1) Закон Био-Савара-Лапласа: згідно з цим законом елемент стуму $\mathbf{J}\cdot d\mathbf{L}$ на відстані *r* від себе створює елемент індукції *dB*: $d\mathbf{B}=\frac{\mathbf{J}}{c}\frac{\left[d\mathbf{L}\times\mathbf{r}\right]}{r^3}$; 2) Принцип суперпозиції магнітостатичних полів: згідно з цим принципом при знахожденні поля, утвореного багатьма струмами, результуюча індукція дорівнює векторній сумі індукцій, створених окремими струмами: $\mathbf{B}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{B}_i$, де B_i індукція, створювана i-тим струмом. Гіромагнітне відношення – це відношення магнітного моменту до механічного.

Далі приведено гіромагнітне відношення та магнітні моменти для деяких елементарних частинок:

Назва частинки	Для орбітального руху	Для власних моментів	
		Гіромагнітне відношення	Магнітний момент
Електрон	$\gamma=-\frac{\lvert e\rvert}{2m_e c}$	$\gamma=-2\frac{\lvert e\rvert}{2m_e c}$	$\mu_e=-2\cdot\mu_B$
Протон	$\gamma=\frac{\lvert e\rvert}{2m_p c}$	$\gamma=2.79\frac{\lvert e\rvert}{2m_p c}$	$\mu_p=2.79\cdot\mu_{nuc}$
Нейтрон	Не створює орбітального струму	$\gamma=-1.91\frac{\lvert e\rvert}{2m_n c}$	$\mu_n=-1.91\cdot\mu_{nuc}$

Copyright by T@uRu$ FoR€VeR © 2002

28. Плоскі електромагнитні хвилі. Загальний розв'язок хвильового рівняння. Основні властивості. (Yurun)

Плоскі хвилі. Поле залежить від однієї координати і від часу. Рівняння поля приймають вигляд: $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$ Де під f будь яка компонента **E** або **H.** Для вирішення перепишемо його у виді $\left(\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)f=0$ і введемо такі позначення $\xi=t-\frac{x}{c},\eta=t+\frac{x}{c}$, тоді $t=1/2(\eta+\xi),x=c/2(\eta-\xi)$ тоді маємо $\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\right),\frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)$ Рівняння для f має вигляд $\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}=0,$ Рішення цього р-ня очевидно $f=f_1\left(t-\frac{x}{c}\right)+f_2\left(t+\frac{x}{c}\right)$ Де f1 f2 довільні функції. Ці рішення описують дві хвилі. Перша що біжить по осі x в додатньому напрямку – друга у протилежному. Вибираємо потенціали таким чином щоб divA=0 та $\varphi=0$ Перша умова дає $\frac{\partial A_x}{\partial x}=0$ Оскільке це поле не впливає на ЕМ хвилю, отже покладемо Ax=0. Запишемо

$\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},\vec{H}=\mathrm{rot}\vec{A}$ Звідси маємо $\vec{E}=-\frac{1}{c}\vec{A}',\vec{H}=\left[\nabla\vec{A}\right]=\left[\nabla\left(t-\frac{x}{c}\vec{A}'\right)\right]=-\frac{1}{c}\left[\vec{n}\vec{A}'\right]$ Штрих позначає диференціювання по t-x/c, а n – одиничний вектор вздовж напрямку розповсюдження хвилі. Підставляючи перше рівняння у друге маємо $\vec{H}=\left[\vec{n}\vec{E}\right]$ Поток енергії в плоскій хвилі $\vec{S}=c/4\pi\left[\vec{E}\vec{H}\right]=\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\left[\vec{n}\vec{E}\right]\right]$ Оскільки En=0, то $\vec{S}=\frac{c}{4\pi}E^2\vec{n}=\frac{c}{4\pi}H^2\vec{n}$ Оскільки $W=\frac{1}{8\pi}\left(E^2+H^2\right)=\frac{E^2}{4\pi}$ плотність енергії, можна записати $\vec{S}=cW\vec{n}$. Імпульс одиниці обєму $\vec{S}/c^2$ Для плоскої хвилі це (W/c)n. Поток імпульса дається максвеловським тензором напруженостей $\sigma_{\alpha\beta}$. Єдина ненульова компонента тензора $T^{\alpha\beta}$ є $T^{xx}=-\sigma_{xx}=W$

29. Хвильовий 4-вектор і повздовжній ефект Доплера. (Yurun)

Розглянемо деяку плоску хвилю. Просторово часова залежність поля визначається експонентою: exp(-iwt+i**kr**). Умови за яких значення поля є постійними: Коли **kr**-w_0t=const – фаза. Фаза – інваріант перетворень: $k_x x+k_y y+k_z z-\frac{w}{c}ct=\mathrm{const}$ цей вираз є скалярний добуток 2-х 4-векторів. Чотири множники x,y,z,-ct є коваріантними координатами 4-вектора після множення на інші чотири множники, утворюється величина, що не залежить від системі відліку, отже маємо право назвати її хвильовим 4-вектором і позначити k'=(k_x, k_y, k_z,w/c). Нехай у системі K' є джерело (рухається разом з K') плоскої ЕМ хвилі. Нехай також компоненти хвилевого вектора в системі K дорівнюють: k'=(k_x, k_y, k_z,w/c) а в системі K' відповідно $k^{\prime\prime}$=(k'_x, k'_y, k'_z,w'/c) Оскільки квадрат 4-вектора є інваріант перетворення , то $k'^2-w'^2/c^2=k^{\prime\prime2}-w^{\prime\prime2}/c^2=0$ цей квадрат дорівнює нулю, оскільке йдеться про поширення світла із швидкістю c тому інтервал =0. Нехай кут між віссю x та вектором **k** дорівнює θ. Тоді хвильові 4-вектори запишемо у вигляді $k^i=\left(\frac{w}{c}\cos\Theta,\frac{w}{c}\sin\Theta,0,\frac{w}{c}\right),k'^i=\left(\frac{w'}{c}\cos\Theta',\frac{w'}{c}\sin\Theta',0,\frac{w'}{c}\right)$ тут враховано що хвильовий вектор відповідним поворотом системи координат можна розташувати в площині XOY. Запишемо перетворення Лоренца для переходу хвильового вектора у з K у K':

$k'_x=\frac{k_x-\frac{w}{c}\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},k'_y=k_y,k'_z=k_z,\frac{w}{c}=\frac{\frac{w'}{c}-\frac{v}{c}k_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ Перепишемо 4-те р-ня у вигляді $w=w'\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\cos\Theta}$ Це є абсолютно точна формула для ефекту Доплера в оптиці. Розглянемо 3 випадки: 1) θ=0 Якщо рухома система „доганяє" нерухому. Тоді останнє співвідношення спрощується до $w=w'\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$ 2) θ=π Система віддаляється. У цьому випадку $w=w'\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$

3) θ=π/2 Коли система K пролітає повз K' випромінюючи у момент «перпендикулярності» Це і є поперечний ефект Доплера. $w=w'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ Він повязаний із тим що час у системах іде по різному. Тобто він чисто релятивістський. І ще він квадратичний

30. Хвильовий 4-вектор і поперечний ефект Доплера. (Yurun)

Дивись попередній білет.

31. Червоний зсув. (Yurun)

Як раніше вимірювали відстань до зірок: як показано на малянку визначали кут, і за відомим катетом і кутом з прямокутного трикутнику визначали. Потім зявився інший спосіб. Хабблом експерементально було встановлено, що всесвіт „розбігається", за зміщенням спектральних ліній далеких зірок. Якщо спрямувати спектральний прилад на далеку зірку, то спектр хімічних елементів буде зсунуто у бік подовження хвилі. Оскільки іде в бік подовження, то це називається червоний зсув. Якщо відстань до галактики позначити через R, а радіальну компоненту швидкості її віддалення dR/dt, то закон встановлений Хабблом має вигляд: dR/dt=HR, де H=(1.6-3.2)10^{-18}1/c – стала Хаббла.

Міряється частота одного елемента, вона відома. Тому легко визначити відстань, знаючи швидкість. А тепер про гравітаційний червоний зсув: зміщення спектральних ліній також може статися внаслідок гравітаційного поля великих тіл. Один із висновків загальної теорії відності полягає в тому що годинники ідуть по різному при різній гравітації. Наприклад годинник на сонці має йти повільніше ніж на землі. Я понял єто так: внаслідок того що час у нас уповільнється, то випромінювання ніби то трохи розтягується у порівнянні з годинником який не в гравітації. Тому падає і частота, і зявляється червоний зсув.

32. Сферичні хвилі. Потенціали спізнення і випередження. (Yurun)

Знайдемо розвязок хвилевого рівняння у вигляді сферичних хвиль. Розвязок шукаємо у вигляді u=u(r,t), ща перетворює хвелеве рівняння у вигляд $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$ заміною u=h(r,t)/r воно зводиться до ефективного одновимірного хвильового рівняння $\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}=0$ (іде виведення таке ж саме як і у білеті 28) Розвязок – дві плоскі хвилі

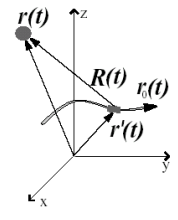
$h(r,t)=f(r-ct)+g(r+ct)$ для нашого випадку $u(r,t)=\frac{f(r-ct)}{r}+\frac{g(r+ct)}{r}$ ї

Потенціали запізнення: Розглянемо рівняння Даламбера $*\phi=-4\pi\rho,*\vec{A}=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}$ (зірочку замінюмо на квадратик – оператор Даламбера). Для вирішення розглянемо сферичну хвилю що біжить від центра. Перепишемо розвязок для скалярного потенціалу у вигляді: $\vec{\phi}(r,t)=\frac{\psi(t-r/c)}{r}$ На підставі цього можемо побудувати розвязок, для хвилі що розповсюджується з точки r'

$\vec{\phi}(r,t)=\frac{\psi(t-\frac{|r-r'|}{c})}{|r-r'|}$ Очевидним узагальненням є суперпозиція хвиль:

$\vec{\phi}(r,t)=\sum_{r'}\frac{\psi(t-\frac{|r-r'|}{c})}{|r-r'|},\vec{\phi}(r,t)=\int_V\frac{\psi(t-\frac{|r-r'|}{c})}{|r-r'|}dV'$ Перший вираз для дискретного набору хвиль. Для того щоб визначити явний вигляд функції ψ нагадаємо, що якби б заряд був нерухомий, то вираз би був такий: $\vec{\phi}(r,t)=\int_V\frac{\rho(r,t)}{|\vec{r}'-\vec{r}|}dV'$ Просте порівняння двох рівнянь дозволяє зробити висновок що ця функція несе смисл густини зарядів. Отже розвязок р-нь Даламбера: $\vec{\phi}(r,t)=\int_V\frac{\rho(r,t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}'-\vec{r}|}dV'$ Тоді аналогічно можемо записати вираз для векторного потенціалу $\vec{A}=\frac{1}{c}\int\frac{\vec{j}(r,t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$ Два попередні результати мають назву потенціалів спізнення. Якщо після t поставити + а не – то це будуть потенціали випередження. Фізичного змісту у них немає, адже не виконуються принцип причинності. Але вони також підходять як розвязки.

33. Потенціали Льєнара-Віхерта. (Yurun)



Нехай вектор $r_0(t)$ описує траєкторію частинки, а вектор v= r_0' її швидкість. Позначаємо заряд частинки q. Запишемо густини заряду і струму як функції координат і часу: $\rho(r,t)=q\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t)),\vec{j}(r,t)=qv_0(t)\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t))$ Запишемо розвязок рівнянь Даламбера у формі потенціалів спізнення $\vec{\phi}(r,t)=\int_V\frac{\rho(r',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}'-\vec{r}|}dV'$ Використовуючи властивість дельта функцій переписуємо:

$$\vec{\rho}(r,t)=\int_V dV'\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\frac{\rho(\vec{r},t^*)\delta(\tau-t^*(r'))}{|\vec{r}'-\vec{r}|}=q\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_V dV'\frac{\delta(r_0-r')\delta(\tau-t^*(r'))}{|\vec{r}'-\vec{r}|}=$$

$$q\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\frac{\delta(\tau-t^*(r_0))}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}=\quad=q\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\frac{\delta(\tau-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

Інтегрування в останній формулі відбувається з використанням властивості дельта функцій, яку перепишемо у вигляді: $\delta(F(\tau))=\sum\frac{\delta(\tau-t')}{|F'(t')|}$ У нашому випадку $F(\tau)=\tau-t+\frac{R}{c},R(t)=r-r_0(t)$ Нулі цієї функції визначають t' як розвязків рівняння: R(t')=c(t-t') Обчислимо похідну F'(t'): $\frac{\partial F}{\partial\tau}=1+\frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial\tau}$ Диференціюючи ліву та праву частину тотожності $R^2=r^2+2\vec{r}\vec{r}_0+r_0^2$ матимемо

$2R\frac{\partial R}{\partial\tau}=-2\vec{r}_0\vec{r}+2\vec{r}_0\vec{r}_0=-2\vec{R}\vec{v}$ звідки $\frac{\partial R}{\partial\tau}_{t'}=-\frac{\vec{R}\vec{v}}{R}$ у результаті похідня набуває вигляду $\frac{\partial F}{\partial\tau}=1-\frac{\vec{R}\vec{v}}{cR}$ і для потенціалу маємо

$$\vec{\phi}(r,t)=q\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\tau}{R}\frac{\delta(\tau-t')}{\left|1-\frac{\vec{R}\vec{v}}{cR}\right|}=\frac{q}{R-\frac{\vec{R}\vec{v}}{c}}_{t'}$$ Цілком аналогічно рахується векторний потенціал. Остаточно потенціали Лєнара –Віхерта запишемо у вигляді $\vec{\phi}(r,t)=\frac{q}{(R-\frac{\vec{R}\vec{v}}{c})_{t'}},\vec{A}(r,t)=\frac{qv}{c\left(R-\frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)_{t'}}$

34. Електричне та магнітне поле точкового заряду, що рухається довільним чином. (Stalker)

Поле точкового заряду

Для обчислення полів точкового заряду за формулами (1):

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$$

слід диференціювати за точкою спостереження r у момент часу t, однак вирази для потенціалів **Льєнара-Віхерта** (див. Білет №33) залежать явним чином лише від t', У зв'язку з цим при диференціюванні за часовими та просторовими змінними у формулах (1) необхідно враховувати залежність t' від t (як похідну від складної функції). Обчислимо перш за все значення похідних *dt'/dt* та grad t'. Для цього продиференціюємо рівність R(t') = c(t - t') по t:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{R}\cdot\frac{\partial t'}{\partial t},$$

де dR/dt' = -**R*v**/R. Отже, можемо записати похідну у вигляді

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{s}.$$

Цілком аналогічно, обчислюючи градієнт від виразу R(t') = c(t – t'), матимемо

$$\mathrm{grad}\,t' = -\frac{\boldsymbol{R}}{cs}.$$

Таким чином, ми знайшли правила диференціювання у виразах (1):

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{R}{s}\cdot\frac{\partial}{\partial t'}, \quad \mathrm{grad}_t = \mathrm{grad}_{t'} - \frac{\boldsymbol{R}}{cs}\cdot\frac{\partial}{\partial t'}.$$

В останньому виразі за grad, позначено градієнт у деякій точці простору в момент часу *t*.

Перейдемо тепер до обчислювання полів. Використовуючи отримані правила диференціювання, для градієнта скалярного потенціалу маємо

$$\mathrm{grad}\,\phi = -\frac{q}{s^3}\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\right) - \frac{q\boldsymbol{R}}{cs^3}\left(\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{R} + \frac{\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}}{c} - \frac{v^2}{c}\right).$$

Диференціювання явного виразу для *s* приводить до таких формул (6.25)

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{q\boldsymbol{R}}{cs}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{s}\right) = \frac{q\boldsymbol{R}}{cs^2}\left(s\dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}\left(\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{R} + \frac{\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}}{c} - \frac{v^2}{c}\right)\right).$$

Враховуючи ці співвідношення, можемо записати вираз:

$$\boldsymbol{E} = \frac{q(1-v^2/c^2)}{s^3}\left(\boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}R\right) + \frac{q}{cs^3}\left[\boldsymbol{R}\times\left[\left(\boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}R\right)\times\dot{\boldsymbol{v}}\right]\right]. \quad (1)$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{R}[\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{E}].$$

Ці два рівняння описують поле заряду, що рухається довільним чином. Для того щоб відповісти на питання білету розберемося для початку, що собою представляють обидва доданки в першій формулі.

Перший доданок залежить лише від швидкості частинки і на великій відстані від системи змінюється як $1/R^2$ (це досить легко побачити в нерелятивістському наближенні v << c). Тобто, у хвильовій зоні напруженості електричного та магнітного полів пропорційні $1/R^2$. Це означає, що абсолютна величина вектора Умова-Пойнтінга буде пропорційна $1/R^4$. Але згідно з означенням абсолютна величина цього вектора дорівнює кількості енергії, яка щосекунди проходить через одиницю поверхні (потік енергії). Помноживши його на елемент поверхні $R^2d\omega$ та проінтегрувавши за повним тілесним кутом Ω = 4π, одержимо кількість енергії, яка щосекунди проходить через сферу радіуса R. Узявши до уваги наведені оцінки для полів, неважко збагнути, що ця величина буде пропорційна до $1/R^2$. Тобто, чим більшого радіуса сферу ми візьмемо, тим меншим буде загальне значення енергії, яка через неї пройшла. Цт суперечить загальноприйнятому уявленню про випромінювання, тому необхідно зробити висновок, що **перший доданок у формулі (1), який представляє собою поле заряду при рівномірному і прямолінійному русі, внеску в поле випромінювання не дає.**

Більше того, якщо записати перший доданок у наближенні малих швидкостей руху, то в ньому неважко впізнати кулонівське поле частинки.

Для другого доданку (1) напруженості електричного та магнітного полів у хвильовій зоні змінюються як 1/R, тому абсолютна величина вектора Умова — Пойнтінга пропорційна $1/R^2$. Після інтегрування за повним тілесним кутом одержимо значення енергії, яка щосекунди перетинає: поверхню радіуса R, пропорційне $1/R^2$. Тому для сфери довільного радіуса ця величина буде сталою: кількість енергії, яка щосекунди випромінюється джерелом, проходить через поверхню довільного радіуса *R*. Отже другий доданок відповідає за поле випромінювання.

Зроблені нами висновки стосуються випадку руху у вакуумі. Ситуація змінюється, якщо частинка рухається в суцільному середовищі. В цьому випадку частинка може випромінювати електромагнітні хвилі навіть, якщо її швидкість постійна. Отже остаточно відповідь на питання можна сформулювати так:

Заряджена частинка при рівномірному і прямолінійному русі у вакуумі не випромінює електромагнітні хвилі і її загальне поле описується тільки першим доданком виразу (1). Якщо ж частинка рухається рівномірно, але не прямолінійно (тобто з прискоренням), то її поле складається як з кулонівського поля (перший доданок) так і з поля випромінювання (другий доданок).

36. Випромінювання електромагнітних хвиль точковим зарядом. Хвильова зона. Кутовий розподіл випромінювання. (Stalker)

На больших расстояниях от частицы (в волновой зоне) выражения для напряженности поля упрощаются; остается только волновое поле:

$$E = \left.\frac{en\times[(n - v/c)\times\dot{v}]}{c^2R(1 - nv/c)^3}\right|_{t'}, \quad H = n\times E$$

Вычислим поток энергии внутри телесного угла dΩ на больших расстояниях от частицы:

$$dI = \bar{\gamma}nR^2d\Omega = \frac{c}{4\pi}E^2R^2d\Omega$$

или подставляя выражение для *E*

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2[n\times([n - v/c]\times\dot{v})]^2}{4\pi c^3(1 - nv/c)^6},$$

где величины в правой части берутся в запаздывающий момент t'. Проведем анализ углового распределения излучения для некоторых частных случаев.

1. Нерелятивистская частица, v<<c. Пренебрегая членами порядка v/c, получим

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^e}{4\pi c^3}[\dot{v}^2 - (n - \dot{v})^2] = \frac{e^2\dot{v}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta$$

где θ – угол между ускорением (в запаздывающий момент t') и направлением наблюдения. Излучение распределено симметрично относительно направления $\dot{v}$ и максимально в направлении, перпендикулярном $\dot{v}$.

2. Ультрарелятивистская частица, $v = (1-v^2/c^2)^{-1/2}$>>1, ускорение направлено вдоль скорости: $\dot{v}$ || v. Обозначая через θ угол между n и v, получаем

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2\dot{v}^2\sin^2\theta}{4\pi c^3[1 - (v/c)\cos\theta]^6}$$

Высокая степень знаменателя, весьма малого при $\cos\theta \approx 1$, приводит к тому, что почти всё излучение сосредоточено в области малых θ (хотя при θ =0 интенсивность обращается в нуль). В наиболее интересной области малых углов произведем разложения $\sin\theta \approx \theta^2$, $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$. Учитывая, что $\dot{v} \approx c$, получим

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{16e^2\dot{v}^2\gamma^{10}(\gamma\theta)^2}{\pi c^3[1 + \gamma^2\theta^2]^6}$$

Излучение сосредоточено в конусе с углом раствора порядка нескольких 1/γ .

3. Ультрарелятивистская частица, ускорение перпендикулярно скорости: $\dot{v} \perp v$.

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3}\left\{\frac{\dot{v}^2}{(1 - nv/c)^4} - \frac{(1 - v^2c^2)(n\cdot\dot{v})^2}{(1 - n\cdot v/c)^6}\right\}$$

которая после введения угла θ между n и v записываем в виде

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3}\left\{\frac{1}{(1 - (v/c)\cos\theta)^4} - \frac{(1 - v^2c^2)\sin^2\theta\cos^2\phi}{(1 - (v/c)\cos\theta)^6}\right\}$$

Здесь φ – угол между плоскостями (v ,n) и (v , $\dot{v}$). Распределение сконцентрировано в направлении вперед. При малых θ оно имеет вид

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{4e^2\dot{v}^2\gamma^8}{\pi c^3(1 + \gamma^2\theta^2)^4}\left[1 - \frac{4\gamma^2\theta^2\cos^2\phi}{(1 + \gamma^2\theta^2)^2}\right]$$

Выражение в скобках, как и должно быть неотрицательно ни при каких значениях углов.

37. Випромінювання точкового заряда, що рухається прямолінійно. Формула Лармора. Діаграма направленості. (Stalker)

На больших расстояниях от частицы (в волновой зоне) выражения для напряженности поля упрощаются; остается только волновое поле:

$$E = \left.\frac{en\times[(n - v/c)\times\dot{v}]}{c^2R(1 - nv/c)^3}\right|_{t'}, \quad H = n\times E$$

Вычислим поток энергии внутри телесного угла dΩ на больших расстояниях от частицы:

$$dI = \bar{\gamma}nR^2d\Omega = \frac{c}{4\pi}E^2R^2d\Omega$$

или подставляя выражение для *E*

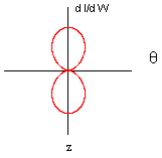
$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2[n\times([n - v/c]\times\dot{v})]^2}{4\pi c^3(1 - nv/c)^6},$$

где величины в правой части берутся в запаздывающий момент t'. Проведем анализ углового распределения излучения для некоторых частных случав при прямолинейном движении частицы.

1. Нерелятивистская частица, v<<c. Пренебрегая членами порядка v/c, получим

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^e}{4\pi c^3}[\dot{v}^2 - (n - \dot{v})^2] = \frac{e^2\dot{v}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta \quad (1)$$

где θ – угол между ускорением (в запаздывающий момент t') и направлением наблюдения. Излучение распределено симметрично относительно направления $\dot{v}$ и максимально в направлении, перпендикулярном $\dot{v}$.



Діаграма направленості для нерелятивістського руху.

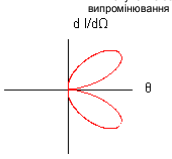
2. Ультрарелятивистская частица, $v = (1-v^2/c^2)^{-1/2}$>>1, ускорение направлено вдоль скорости: $\dot{v}$ || v. Обозначая через θ угол между n и v, получаем

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2\dot{v}^2\sin^2\theta}{4\pi c^3[1 - (v/c)\cos\theta]^6}$$

Высокая степень знаменателя, весьма малого при $\cos\theta \approx 1$, приводит к тому, что почти всё излучение сосредоточено в области малых θ (хотя при θ =0 интенсивность обращается в нуль). В наиболее интересной области малых углов произведем разложения $\sin\theta \approx \theta^2$, $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$. Учитывая, что $\dot{v} \approx c$, получим

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{16e^2\dot{v}^2\gamma^{10}(\gamma\theta)^2}{\pi c^3[1 + \gamma^2\theta^2]^6}$$

Излучение сосредоточено в конусе с углом раствора порядка нескольких 1/γ . Нижче подано діаграму направленості випромінювання для цього випадку.



Якщо проінтегрувати вираз (1) по тілесному куту, то отримаємо формулу Лармора:

$-dE / dt = 2e^2a^2(t)/3c^3$

де a – прискорення в такій с-мі відліку, в якій v << c.

38. Циклотронне та синхротронне випромінювання точкового заряда. Діаграма направленості. (Stalker)

????

39. Запізнювальні та випереджаючі потенціали (Stalker)

Повернемось тепер до загальної постановки електродинамічної задачі. У системі існують заряди з густиною ***ρ(r,t)*** і струми ***j(r,t)***. Потрібно визначити електромагнітне поле, що створюється такою системою. Як було зазначено вище, замість прямого обчислювання полів, простіше буває спочатку обчислити потенціали. Отже, знайдемо загальний розв'язок рівняння д'Аламбера : $\Box\Phi = -4\pi\rho$

Розглянемо розв'язок у вигляді сферичної хвилі, що біжить «від центра». Перепишемо розв'язок для скалярного потенціалу у вигляді

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{\psi(t - r/c)}{r}.$$

На підставі цього виразу можемо побудувати розв'язок у вигляді хвилі, що поширюється не з початку координат, а з точки *r'*:

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{\psi\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Очевидним узагальненням є суперпозиція сферичних хвиль:

(1)

$$\phi(\mathbf{r},t) = \sum_{\mathbf{r}'} \frac{\psi'\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

$$\phi(\mathbf{r},t) = \int_V \frac{\psi\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'.$$

Перший з цих виразів відповідає дискретному набору хвиль, центри яких розташовані в точках ***r'***, другий — неперервному набору (у функції *ψ* з'явився ще один аргумент, завдяки тому, що для різних хвиль вибір функції *ψ* може бути різним).

Зазначимо, що ці хвилі будуть розв'язкам рівнянь д'Алам-бера в усьому просторі, крім точки ***r = r'***, тому що знаменник обертається на нуль. Однак, якщо в цих точках знаходяться заряди, така розбіжність не несе суперечностей (нагадаємо, що потенціал точкового заряду *ϕ ~ q/r* так само розбігається в точці розташування)

Для того, щоб визначити явний вигляд функції *ψ* (**r**, t), нагадаємо, якщо б заряд був нерухомий, розв'язок відповідної електростатичної задачі мав би вигляд: (2)

$$\phi(\mathbf{r},t) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'.$$

У цьому виразі навмисне відмічено час у правій та лівій частинах рівності, хоча для статичних задач це не потрібно, адже зрозуміло, що значення потенціалу в точці спостереження в момент t пов'язане зі значенням заряду елемента *dV'* у той самий момент.

Просте порівняння (1) і (2) дозволяє зробити висновок, що функція *ψ* у виразі для сферичної хвилі (1) несе зміст густини зарядів. Отже, розв'язок рівнянь д'Аламбера має вигляд

$$\phi(\mathbf{r},t) = \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'.$$

Тоді цілком аналогічно можемо записати розв'язок для векторного потенціалу:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int_V \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'.$$

(4)

Розв'язки електродинамічної задачі у такому вигляді мають назву *потенціалів спізнення*. Вигляд часового аргументу в цих виразах свідчить про те, що поле в точці *r* у момент часу *t* визначається станом джерел у попередній момент часу:

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}.$$

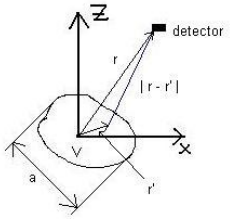
Запізнення в цих формулах відповідає принципу причинності: рух зарядів (причина) передує появі поля (наслідок) на час **|r - r'|**/c, необхідний для передачі електромагнітної хвилі з *r'* у *r*.

Цікаво, що рівнянням д'Аламбера будуть задовольняти також вирази (4), якщо замість знака мінус (спізнення) поставити знак плюс (випередження). Відповідно до цього потенціали мають назву потенціалів випередження: Відмітимо, що надати фізичний зміст потенціалам випередження не вдається, оскільки в ньому випадку не виконується принцип причинності.

40. Потенціали електромагнітного поля в хвильовій зоні: (Squash)

(Для тех кто не в курсе: *φ* – скалярный потенциал, $\vec{A}$ - векторный потенциал). Хвилевою зоною зветься область простору де φ(r), A(r) ~ 1/|r|.

Маємо систему зарядів с густиною ρ(**r**,t) і струми **j**(**r**,t), а–характерний розмір системи. Для хвилі що поширюється з точки **r'**



$$\varphi(\vec{r},t) = \int_V \frac{\rho\left(\vec{r}', t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' \quad \textbf{(1)},$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' \quad \textbf{(2).}$$

Вважатимемо що детектор знаходиться далеко: |r|>>a **(3)**. $|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{\vec{r}^2 - 2(\vec{r}*\vec{r}') + (\vec{r}')^2} =$ (Так как $(\vec{r}')^2$ мало в сравнении с остальными слагаемыми, то его не будем учитывать, это нужно написать !!) $= |\vec{r}|\sqrt{1 - 2(\vec{r}'*\vec{n})} \cong$ (a/|r|<<1, $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{a}|}$ - одиничний вектор в напрямку детектора, $\sqrt{1-x} \cong 1 - 1/2*x$) $\cong |\vec{r}|\left(1 - \frac{(\vec{r}'\vec{n})}{|\vec{r}|}\right)$. $|\vec{r}-\vec{r}'| \approx |\vec{r}| - (\vec{r}'\vec{n})$ **(4).**

$$\varphi(\vec{r},t) \cong \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t - |\vec{r}| + (\vec{r}'\vec{n})/c)}{|\vec{r}| - (\vec{r}'\vec{n})} d^3r' \quad \textbf{(5)}$$

(тут треба знехтувати добутком (r'n) в знаменнику тому що r' дуже мале в порівнянні з r **).**

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r}| + (\vec{r}'\vec{n})/c)}{|\vec{r}| - (\vec{r}'\vec{n})} d^3r \quad \textbf{(6).}$$

(Тут також треба знехтувати (r'n) в знаменнику. Зауважте, що таким же самим добутком (r'n) в чисельнику знехтувати не можна!!**).** $\exp[i\psi] = \exp[i(-|\vec{r}|/c + (\vec{r}'\vec{n})/c)]$ **(7).** ω=2πc/λ. $\exp[i\Delta\psi] = \exp\left[-i\frac{2\pi c}{\lambda}\frac{(\vec{r}'\vec{k})}{c}\right] \sim$ (Дужка (r'k) пропорційна до a, тому) $\sim \exp[2\pi i a/\lambda]$ **(8).** $\varphi(\vec{r},t) \approx \frac{1}{|\vec{r}|}\int_V \rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}|}{c} + \frac{(\vec{r}'\vec{n})}{c}) d^3\vec{r}'$ **(9).**

$$\vec{A}(\vec{r},t) \approx \frac{1}{c|\vec{r}|}\int_V \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}|}{c} + \frac{(\vec{r}'\vec{n})}{c}\right) d^3\vec{r}' \quad \textbf{(10).}$$

41. Електричне дипольне випромінювання : (Squash)

Дипольне наближення має місце коли виконується умова a<<λ<<r. (a – характерний розмір системи, λ – довжина хвилі, r – вектор з початку координат в точку спостереження). $\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{|\vec{r}|}\int_V \rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right) d^3r'$ **(3).** $\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c|\vec{r}|}\int_V \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}|}{c}) d^3r'$ **(4).**

$\vec{p} = \sum_m q_m \vec{r}_m'\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right)$ **(5).** Где **p**-дипольный момент системы. $\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right) = \sum_m q_m \vec{v}_m(t - \frac{|\vec{r}|}{c})$ **(6).** Где v-скорость m-ой частички. Густина струму $\int_V \vec{j}(\vec{r}',t')d^3r' = \sum_m q_m v_m \delta(\vec{r}' - \vec{r}_m'(t'))d^3r'$ **(7).** $\int_V \vec{j}'(\vec{r}',t')d^3r = \sum_{m\in V} q_m \vec{v}_m'$ **(8).** Векторний потенціал має вигляд $\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{|\vec{r}|}{c})}{c|\vec{r}|}$ **(9) . <u>Означення</u>** Дипольним називається таке наближення, при якому всі величини виражається через одну величину – а саме другу похідну дипольного моменту. $\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{\left[\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right)\times\vec{n}\right]}{c^2 r}$ **(10).** $\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\vec{n}\left(\vec{n}\ddot{\vec{p}}\right) - \ddot{\vec{p}}}{c^2 r}$ **(11).**

$\vec{E} = \left[\vec{H}\times\vec{n}\right]$ **(12).**

Обчислимо кутовий розподіл інтенсивності випромінювання. (В подальших формулах **d**-це також дипольний момент). Підставляючи (12) в формуду для потоку енергії в елемент тілесного кута dΩ, отримаємо $\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\left[\ddot{\vec{d}}\times\vec{n}\right]^2}{4\pi c^3}$. Після інтегрування за тілесним кутом отримаємо повну інтенсивність дипольного випромінювання $I = \frac{2}{3c^3}\ddot{d}^2$. Треба звернути увагу на те, що для замкненої системи однакових частинок дипольне випромінювання відсутнє. Адже у цьому разі прискорення повного дипольного моменту $\ddot{\vec{d}}_\Sigma = \sum q\ddot{\vec{d}} = \frac{q}{m}\sum m\ddot{\vec{r}} = \frac{q}{m}\vec{F}_\Sigma = 0$

Простійшим випромінювачем є вібратор Герца – це такий штир з потовщеннями на кінцях та і розривом посередині для підключення джерела змінного струму. Дипольний момент вібратора d(t)=$d_0$cos(iωt). Для того, щоб він випромінював дипольно, необхідно щоб його розміри були менше задовжину випромінюваної хвилі a<<λ=2πc/ω. Кут мыж вібратором і напрямом на спостерігача θ, запишемо кутовий розподіл і повну інтенсивність випромінювання у вигляді $\frac{dI}{d\Omega} = \frac{d_0^2\omega^4}{4\pi c^3}\cos^2\omega t\sin^2\theta$, $I = \frac{2d_0^2\omega^4}{3c^3}\cos^2\omega t$. Усереднивши ці залежності за період коливань вібратора маємо $\left\langle\frac{dI}{d\Omega}\right\rangle = \frac{d_0^2\omega^4}{8\pi c^3}\sin^2\theta$, $\langle I\rangle = \frac{d_0^2\omega^4}{3c^3}$. Ці формули описують діаграму направленості розглянутої штирової антени, тобто кутовий розподіл інтенсивності випромінювання $\frac{\langle dI/d\Omega\rangle}{\langle I\rangle} = \frac{3}{8\pi}\sin^2\theta$

42. Скалярний потенціал в дипольному наближенні (Squash) :

$\vec{r}''$ - "трохи інша функція" – щоб розірвати зв'язок r' і ρ. $\varphi(\vec{r},t) \cong \int_V \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}|}{c} + \frac{(\vec{r}'\vec{n})}{c}\right)}{|\vec{r}|} d^3r'$ **(1).** Запишемо цей потенціал в найближчому ненульовому наближенні $Q = \int \rho(\vec{r},t')d^3r = 0$ **(2).** t'=t-|r|/c . Розглядаємо дипольне наближення

$$\rho\left(\vec{r}'', t - \frac{|\vec{r}|}{c}(1-\alpha)\right) = \left(\alpha = \frac{(\vec{r}'\vec{n})}{|\vec{r}|} << 1,\ \alpha = 0\right) = \rho\left(\vec{r}'', t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right) + \alpha\frac{\partial\rho}{\partial\alpha} = \rho\left(\vec{r}'', t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right) + \frac{(\vec{r}'\vec{n})}{|\vec{r}|}\frac{\partial\rho(\vec{r}'',t')}{\partial t}\frac{|\vec{r}|}{c} \quad \textbf{(3).}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\alpha} = \frac{\partial\rho}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\alpha} = \frac{\partial\rho}{\partial\tau}\frac{|\vec{r}|}{c} = \frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{|\vec{r}|}{c}, \quad \tau = t - \frac{|\vec{r}|}{c}(1-\alpha). \quad \vec{r}'' \to \vec{r}'.$$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{|\vec{r}|}\int_V \rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right) d^3r' + \frac{1}{|\vec{r}|c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{n}\int \vec{r}'\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right) d^3r'\right) \quad \textbf{(4).}$$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{Q(t)}{|\vec{r}|} + \left(\vec{n}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{p}(t')}{|\vec{r}|c}\right)\right) = \frac{Q(t)}{|\vec{r}|} + \left(\vec{n}\vec{A}(\vec{r},t)\right) \quad \textbf{(5).}$$

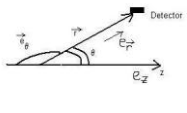
– перше наближення.

При виводі формули **(5)** ми скористались тим що $\left[\rho(\vec{r}', t) = \sum_n q_n \sum_n (t)\delta(\vec{r} - \vec{r}_n'(t))\right]$ та $\vec{A} = \frac{1}{|\vec{r}|c}\int \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}|}{c} + \frac{(\vec{r}'\vec{n})}{c}\right) d^3r'$. В нульовому наближенні $\vec{A} = \frac{\dot{\vec{p}}}{|\vec{r}|c}$. $\varphi(\vec{r},t) = \frac{Q(t)}{|\vec{r}|} + (\vec{n}\vec{A}(\vec{r},t))$. Для електронейтральних систем $\varphi = (\vec{n}\vec{A})$

43. Випромінювання елементарного вібратора (Squash) : Маємо елементарний вібратор довжиною L. |r|>>L, λ>>L **(1)** Так як розглядаємо в хвильовій зоні, то можемо обмежитись дипольним наближенням. $\vec{p}(t') = \vec{e}_z p_0' \cos(\omega t')$ **(2).** $\dot{\vec{p}}(t') = \vec{e}_z p_0 e^{-i\omega t'}$.

t'=t-|r|/c **(3).** $\ddot{\vec{p}} = -\omega^2\vec{p}$ $\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{e}_\alpha H_\alpha^0 e^{-i\omega t'}$ **(5).** $H_\alpha^0 = -(\frac{\omega}{c})^2\frac{p_0}{|\vec{r}|}\sin\theta$ **(6).** $\left[\vec{A}\times\vec{n}\right] \sim \left[\vec{e}_z\times\vec{e}_r\right] = \vec{e}_\alpha\sin\theta$ **(7).**

$\vec{E} = \vec{e}_\theta E_\theta^0 e^{-i\omega t'}$ **(8).** $E_\theta^0 = H_\alpha^0$ **(9).** $\langle\vec{S}\rangle = \frac{c}{4\pi}\left\langle\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]\right\rangle$ **(10).** (Для тех кто не к курсе – S – вектор Умова-Пойнтинга.)



$\vec{S} = \vec{e}_z S_0 \cos^2\left(\omega(t - \frac{|\vec{r}|}{c})\right)$ **(11),** $S_0 = \sin^2\theta\frac{cp_0^2}{4\pi|\vec{r}|^2}(\frac{\omega}{c})^4$.

$\langle\vec{S}\rangle = \vec{e}_z S_0 \langle\cos^2\omega t'\rangle$, $\langle\cos^2\omega t'\rangle = 1/2$ **(12).** $\langle\vec{S}\rangle = \vec{e}_r\frac{c}{8p}\frac{p_0^2}{|\vec{r}|^2}(\frac{\omega}{c})^4\sin^2\theta$

44. Вектор Умова-Пойнтінга в електродипольному наближенні. (Squash)

45. Опір випромінювання короткого диполя. (Squash)

Розглянемо простійший диполь – диполь Герца. Ми знаємо, що його дипольний момент $\vec{p}(t) = p_0\cos\omega t$ **(1)**. Розподіл інтенсивності за тілесним кутом $\frac{dI}{d\Omega} = \frac{[\vec{n}\times\ddot{\vec{p}}]^2}{4\pi c^3} = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta$, де θ це кут між векторами **n** та **p.** Врахувавши (1) маємо

$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{p_0^2\omega^4}{4\pi c^3}\sin^2\theta\cos^2\omega t$. Середнє випромінення за період $\langle\frac{dI}{d\Omega}\rangle = \frac{p_0^2\omega^4}{4\pi c^3}\sin^2\theta\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2\omega t dt = \frac{p_0^2\omega^4}{8\pi c^3}\sin^2\theta$ так як середнє значення cos за період = ½. $\langle I\rangle = \langle\frac{2\ddot{p}^2}{3c^3}\rangle = \frac{p_0^2\omega^4}{3c^3}$ **(2).**

Енергія, що випромінюється диполем у вигляді електромагнітних хвиль береться з енергії джерела змінного струму, що підключений до диполя. Тому з випромінюванням можна зв'язати деякий додатковий опір, який називається опором випромінювання та характеризує втрати електромагнітної енергії на випромінювання. Визначимо опір випромбнювання через наступне співвідношення $\langle I\rangle = \langle J^2\rangle R_\lambda$ = (J – струм. Та використовуючи (2)). $= \frac{p_0^2\omega^4}{3c^3}$ (Допомміжні викладки : $p = qL$; $\dot{p} = \dot{q}L = JL$; $\dot{p}^2 = J^2L^2 \Rightarrow \langle J^2\rangle = \frac{\langle\dot{p}^2\rangle}{L^2}$)

$= \frac{\langle\dot{p}^2\rangle}{L^2}R_\lambda = \frac{p_0^2\omega^2}{2L^2}R_\lambda$. Тобто $\frac{p_0^2\omega^2}{2L^2}R_\lambda = \frac{p_0^2\omega^4}{3c^3} \Rightarrow R_\lambda = \frac{2}{3c^3}\omega^2L^2$ = (ω=2π/T) $= \frac{2}{3c}\frac{4\pi^2}{c^2T^2}L^2$ = (cT=λ) $= \frac{8\pi^2}{3c}(\frac{L}{\lambda})^2$.

Отже остаточно $R_\lambda = \frac{8\pi^2}{3c}(\frac{L}{\lambda})^2$

46. Випромінювання диполя, що рівномірно обертається. (Raol)

Выберем плоскость вращениявкачестве плоскости xy тогда $d_x = d_0\cos\Omega t$, и $d_y = d_0\sin\Omega t$. Ввиду монохроматичности этих функций излучение будет тоже монохроматично и будет иметь частоту **ω = Ω.** Запишем формулу углового распределения излучения

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3}\left[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}\right]^2 d\Omega = \frac{\ddot{\vec{d}}}{4\pi c^3}\sin^2\theta d\Omega$$

, **Ω** – здесь это телесный угол (у Ландау корявые обозначения) где **θ** угол между векторами **d** и **n**.

Подставив в эту формулу наш дипольный моменты получим $dI = \frac{\mathbf{d}_0\Omega^4}{8\pi c^3}\left(1 + \cos^2\theta\right)d\Omega_{\text{тел}}$, где **θ** – угол между направлением **n** и осью **z**. Полное излучение равно $I = \frac{2d_0^2\Omega^4}{3c^3}$

47. Магнітне дипольне випромінювання. Потенціали поля. (Raol)
48. Напруженності полів для магніто-дипольного випромінювання. 49. Електроквадрупольне випромінювання. Потенціали полів. 50. Напруженності полів електроквадрупольного випромінювання.

Тут есть все эти вопросы. Их надо просто вставить в разные шпоры.

Разлагая в ряд $\mathbf{A}=\frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'+\mathbf{rn}/c}dV$ подынтегральное выражение по степеням **rn**/c и сохраняя два первых члена находим:

$$\mathbf{A}=\frac{1}{c\mathbf{R}_0}\int \mathbf{j}_{t'}dV+\frac{1}{c^2\mathbf{R}_0}\frac{\partial}{\partial t'}\int(\mathbf{rn})\mathbf{j}_{t'}dV$$ как известно **A** – это векторный потенциал. так как j = ρv и переходя к точечным зарядам

$$\mathbf{A}=\frac{1}{c\mathbf{R}_0}\sum e\mathbf{v}+\frac{1}{c^2\mathbf{R}_0}\frac{\partial}{\partial t'}\sum e\mathbf{v}(\mathbf{rn})$$. Во вотором слагаемом пишем

$$\mathbf{v}(\mathbf{rn})=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{nr})+\frac{1}{2}\mathbf{v}(\mathbf{nr})-\frac{1}{2}\mathbf{r}(\mathbf{nv})=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{nr})+\frac{1}{2}[[\mathbf{rv}]\mathbf{n}]$$. Находим тогда для **A** выражение

$$\mathbf{A}=\frac{\dot{\mathbf{d}}}{c\mathbf{R}_0}+\frac{1}{2c^2\mathbf{R}_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e\mathbf{r}(\mathbf{nr})+\frac{1}{c\mathbf{R}_0}[\dot{\mathbf{m}}\mathbf{n}]$$, где **d** диапольный момент системы, а $\mathbf{m}=\sum\frac{1}{2c}\sum e[\mathbf{rv}]$ – магнитный.

Известно что если к **A** прибавтиь лбой вектор пропорциональный **n**, то поля **E** и **H** от этого не изменятся. Поэтому предыдущую

формфлу можно переписать так $\mathbf{A}=\frac{\dot{\mathbf{d}}}{c\mathbf{R}_0}+\frac{1}{2c^2\mathbf{R}_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e\left[3\mathbf{r}(\mathbf{nr})-\mathbf{n}r^2\right]+\frac{1}{c\mathbf{R}_0}[\dot{\mathbf{m}}\mathbf{n}]$, но под знаком $\partial^2/\partial t^2$ есть

произведение $n_\beta D_{\alpha\beta}$ вектора **n** на тензор квадрупольного момента $D_{\alpha\beta}=\sum e(3x_\alpha x_\beta-\delta_{\alpha\beta}r^2)$ вводя вектор **D** с

компонентами $D_\alpha=D_{\alpha\beta}n_\beta$ находим окончательное выражение для векторного потенциала:

$$\mathbf{A}=\frac{\dot{\mathbf{d}}}{c\mathbf{R}_0}+\frac{1}{6c^2\mathbf{R}_0}\ddot{\mathbf{D}}+\frac{1}{c\mathbf{R}_0}+\frac{1}{c\mathbf{R}_0}[\dot{\mathbf{m}}\mathbf{n}]$$. Известно что зная **A** мы можем найти **E** и **H** по следующим формулам

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c}[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}],\ \mathbf{E}=\frac{1}{c}[[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]$$ то есть

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c^2\mathbf{R}_0}\left\{\left[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}\right]+\frac{1}{6c\mathbf{R}_0}\left[\dddot{\mathbf{D}}\mathbf{n}\right]+\frac{1}{c\mathbf{R}_0}\left[\left[\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}\right]\mathbf{n}\right]\right\},\ \mathbf{E}=\frac{1}{c^2\mathbf{R}_0}\left\{\left[[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]\mathbf{n}\right]+\frac{1}{6c\mathbf{R}_0}\left[[\dddot{\mathbf{D}}\mathbf{n}]\mathbf{n}\right]+\frac{1}{c\mathbf{R}_0}\left[\mathbf{n}\ddot{\mathbf{m}}\right]\right\}$$. Интенсивность *dI* в

телесный угол считается по формуле $dI=c\frac{H^2}{4\pi}R_0^2d\Omega$ (1) эта величина следует их потока энергии, для определяемого вектором

Пойнтинга. Для плоской волны он $\mathbf{S}=c\frac{H^2}{4\pi}\mathbf{n}$ интесивность определяют как кол-во энергии протекающей в единицу времени через

элемент $df=R_0^2d\Omega$ шаровой ☺ поверхности с центром в начале координат с радиусом $\mathbf{R}_0$. Это кол-во энергии равно плотности потока

энергии **S** помноженной на *df* то есть (1). Определим полное излучение т.е энергию, излучаемую системой в единицу времени по всем направлениям. Для этого усредним *dI* по всем направлениям **n**; полное излучение равно этому среднему умноженному на 4π. При усреднении квадрата магнитного поля все взаимные произведения первого, второго и третьего членов в **H** исчезают так что остаются только

средние квадраты каждого из них. В результате имеем $I=\frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2+\frac{1}{180c^5}\dddot{\mathbf{D}}^2+\frac{2}{3c}\ddot{\mathbf{m}}^2$.Таким образом полное излучение состоит из

трех частей: Дипольного, квадрупольного и магнито-дипольного. Магнито-дипольное во многих случаях отсутствует. Например у системы в которой отношение заряда к массе одинаково в этом случае отсутствует и магнито-дипольное излучение.

51. Опір випромінюванню для квадрупольної антени. (Raol)
Сопротивление излучению квадрупольной антенны

Имеем антенну длниой l в котрой возбуждается ток частоты ω. Направим ось z вдоль антенны и заметим, что на ее концах j = 0, исследуем тот случай когда в антенне возбуждена волна стоячая гармоническая тока плотностью

$\mathbf{j}=\mathbf{I}_0\sin[\pi N(z/l+l/2)]\delta(x)\delta(y)\exp(-i\omega t)$ где $\mathbf{I}_o=I_o\mathbf{e}_z$; *N* – целое число определяющее тип возбуждения антенны. Для поучения

поля вибратора воспользуемся формулами $\mathbf{E}=-4\pi\mathbf{P}+\mathrm{rotrot}\prod-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{Z}$ и $\mathbf{B}=\mathrm{rotrot}\mathbf{Z}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\prod$. Учитывая то что

вне вибратора **П** = 0 т.е. **E** = rotrot**П** и **B** = $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{\Pi}$. Аспишем вектор **П** $\mathrm{rot}\mathbf{\Pi}=\mathrm{rot}\frac{\mathbf{p}(t-r/c)}{r}=-\frac{1}{3}[\mathbf{rp}]-\frac{1}{r^2c}[\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}]$ где **p** –

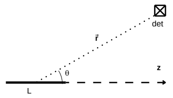
функция запаздывающего аргумента t' = t – r/c.

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{\Pi}=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}\mathrm{div}\mathbf{p}+\mathbf{p}\mathrm{div}\frac{\mathbf{r}}{r^3}-(\mathbf{p}\nabla)\frac{\mathbf{r}}{r^3}+\frac{1}{r^3}(\mathbf{r}\nabla)-\frac{\mathbf{r}}{r^2c}\mathrm{div}\dot{\mathbf{p}}+\dot{\mathbf{p}}\mathrm{div}\frac{\mathbf{r}}{r^2c}-(\dot{\mathbf{p}}\nabla)\frac{\mathbf{r}}{r^2c}+\frac{1}{r^2c}(\mathbf{r}\nabla)\dot{\mathbf{p}}=$$
и в результате получаем
$$=\frac{\mathbf{r}}{r^4c}(\mathbf{rp})-\frac{\mathbf{p}}{r^3}+3\frac{\mathbf{r}(\mathbf{pr})}{r^5}-\frac{\dot{\mathbf{p}}}{r^2c}+\frac{\mathbf{r}}{r^3c^2}(\mathbf{r}\ddot{\mathbf{p}})+2\frac{\mathbf{r}(\dot{\mathbf{p}}\mathbf{r})}{r^4c}-\frac{\ddot{\mathbf{p}}}{rc^2}$$

следующие выражения для поля вибратора. $\mathbf{E}=\frac{1}{r^3}\left\{3\mathbf{n}(\mathbf{np})-\mathbf{p}+\frac{r}{c}\left[3\mathbf{n}(\mathbf{n}\dot{\mathbf{p}})-\dot{\mathbf{p}}\right]+\frac{r^2}{c^2}\left[\mathbf{n}[\mathbf{n}\ddot{\mathbf{p}}]\right]\right\}$ и $\mathbf{B}=-\frac{1}{r^2c}\left[\mathbf{n}\dot{\mathbf{p}}\right]-\frac{1}{rc^2}\left[\mathbf{n}\ddot{\mathbf{p}}\right]$

52. Випромінювання короткого диполя в ближній зоні. (Almi)
53. Потенціали поля в ближній зоні.

Нехай ми маємо систему, що випромінює. Будемо намагатись наблизити детектор поближче до випромінювача.



$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{c}\int_V\frac{\vec{j}(\vec{r}',t-|\vec{r}|-\frac{|\vec{r}|-(\vec{r}'\vec{n})}{c})}{|\vec{r}|-(\vec{r}'\vec{n})}dV' \quad (1)$$

- це в припущенні (**rn**)<<|**r**| (2)

Дипольне наближення – це наближення, в якому розглядають <u>тільки</u> дипольні поля.

Маємо: $\left(|\vec{r}|-(\vec{r}'\vec{n})\right)^{-1}\approx\frac{1}{|\vec{r}|}+\frac{(\vec{r}'\vec{n})}{|\vec{r}|^2}$

Як відомо $\vec{j}\sim\dot{\vec{p}}\sim q\dot{\vec{r}}'$ тоді $\vec{j}\vec{r}'=q\dot{\vec{r}}'\vec{r}'=\frac{d}{dt}\left(q\vec{r}'\right)\vec{r}'$ - це квадрупольне наближення, яке ми не враховуємо. Отже,

$\left(\vec{r}'\vec{n}\right)=0$ (нехтуємо квадруполем). Якщо розкласти чисельник виразу (1) в ряд, то

ми отримаємо $\vec{j}\sim\vec{j}_0\Big|_{\vec{r}'=0}+(...)\,\vec{j}'(\vec{r}'\vec{n})+...$ Оскільки ми домовились, що (**r'n**)=0, то нехтуємо другим доданком.

Тоді можемо записати вираз для вектор-потенціала: $\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\dot{\vec{p}}(t-|r|/c)}{|r|c}$

Для скалярного потенціалу з урахуванням наближення (2) маємо: $\varphi=\int_V\frac{\rho(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}|-(\vec{r}'\vec{n})}{c})}{|\vec{r}|-(\vec{r}'\vec{n})}dV'$

позначимо $\alpha=\frac{(\vec{r}'\vec{n})}{|\vec{r}|}<<1$ -- малий параметр

Розкладемо по ньому густину заряду: $\rho=(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}|}{t}(1-\alpha))\approx\rho(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}|}{t})+\frac{\partial\rho}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\alpha}\alpha$

Таким чином: $\varphi(\vec{r},t)=\int_V\left[\frac{1}{|\vec{r}|}+\frac{(\vec{r}'\vec{n})}{|\vec{r}|^2}\right]\left\{\rho(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}|}{c})+\rho(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}|}{c})\frac{(\vec{r}'\vec{n})}{c}\right\}dV'$

Степінь 1/|r| визначає наближення. Після відповідних перетворень:

$\varphi(\vec{r}',t)=\frac{\left(\vec{n}\vec{p}(t-1/|\vec{r}|)\right)}{|\vec{r}|^2}+\frac{\vec{n}\dot{\vec{p}}(t-1/|\vec{r}|)}{c|\vec{r}|}$ Тут покладено, що $\int_V\rho dV=0$ - система нейтральна

54. Поле випромінювання в ближній зоні. Напруженності полів в сферичній системі координат. (Almi)

В питаннях 52, 53 ми отримали $\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\dot{\vec{p}}(t-|r|/c)}{|r|c}$

Маємо: **H**=rot**A**. Згадаємо формулу: rot(f **F**)=[grad f × **F**] + f rot **F** Підставимо в цю формулу f=1/(c|r|), **F**=$(\mathbf{p})_t$ (похідна по часу):

$$\vec{H}(\vec{r},t)=z\frac{[\ddot{\vec{p}}(t')\times\vec{n}]}{c^2|r|}+\frac{[\dot{\vec{p}}\times\vec{n}]}{c|r|^2}\text{ , де }t'=t-\frac{|\vec{r}|}{c}$$

Другий доданок схожий на закон Біо-Савара. Він відповідає за сталі струми, а отже і сталі поля. ($(\mathbf{p})_t\sim\mathbf{j}$)

Покладемо $\vec{p}(t)=\vec{p}_0e^{-i\omega t}$ Підставляючи дипольний момент в вираз для магнітного поля, отримаємо:

$$\vec{H}(\vec{r},t)=-\frac{\omega^2}{c^2}\frac{1}{|r|}[\vec{p}(t')\times\vec{n}]\left(1+i\frac{\lambda}{2\pi|\vec{r}|}\right)$$

З останньої рівності видно, що хвильова зона визначається нерівністю: |r|>>λ. Маємо: $\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

Тут скалярний потенціал взято з попередніх питань – 52,53:

$$\varphi(\vec{r}',t)=\frac{\left(\vec{n}\vec{p}(t-1/|\vec{r}|)\right)}{|\vec{r}|^2}+\frac{\vec{n}\dot{\vec{p}}(t-1/|\vec{r}|)}{c|\vec{r}|}$$

Отже, нескладними математичними перетвореннями для сферичної системи координат (r,α,θ) маємо:

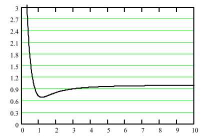
$$H^0_\alpha=\left(1+i\frac{\lambda}{2\pi|\vec{r}|}\right)B^\infty\mathrm{Sin}\theta\ ;\quad \vec{H}=\vec{e}_\alpha H^0_\alpha e^{-i\omega t}\ ;\quad \vec{E}=(\vec{e}_rE^0_r+\vec{e}_\theta E^0_\theta)e^{-i\omega t}$$

$$E^0_\theta=\left[1-\left(\frac{\lambda}{2\pi|\vec{r}|}\right)^2+i\frac{\lambda}{2\pi|\vec{r}|}\right]B^\infty\mathrm{Sin}\theta\ ;\quad E^0_r=-2i\left(\frac{\lambda}{2\pi|\vec{r}|}\right)\left(1+i\frac{\lambda}{2\pi|\vec{r}|}\right)B^\infty\mathrm{Cos}\theta$$

Де B^∞-напруженість магнітного поля в хвильовій зоні. В ближній зоні:

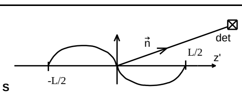
$|\vec{H}|\sim\frac{1}{|\vec{r}|^2}$ $\quad|\vec{E}|\sim\frac{1}{|\vec{r}|^3}$ Розглянемо θ=π/2. Введемо позначання Q=2π|**r**|/λ. Розглянемо

функцію: $f=\frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|}=\frac{E^0_\theta}{H^0_\alpha}=\frac{|1-\frac{1}{Q^2}+i\frac{1}{Q}|}{1+\frac{1}{Q}}=\frac{1}{Q}\sqrt{\frac{Q^4-Q^2+1}{Q^2+1}}$



На малюнку зображена залежність f(Q)

55. Випромінювання лінійної антени (Almi)



Технологія рішення задачі про випромінення: 1) **A**(**r**,t) 2) **E**,**H** 3) **S**

Нехай маємо лінійну антену, по ній протікає струм: $\vec{j}=\vec{e}_zI(z',t)e^{-i\omega t}\delta(x')\delta(y')\theta(L/2-|z|)$ Функція I(z',t) є огинаючою сигналу

(модуляція). Вона відрізняє антени одну від одної. Вектор-потенціал: $\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{c|r|}\int\vec{j}(r',t-\frac{|r|}{c}+\frac{(\vec{r}'\vec{n})}{c})dV'$ або після

підстановки явно значення струму: $\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\vec{e}_z}{c|r|}e^{-i\omega(t-\frac{|r|}{c})}\int_{-L/2}^{L/2}I(z')e^{-i\omega\frac{z'n_z}{c}}dz'$ n_z =Cos θ. Розглянемо випадок, коли в антені

існує стояча хвиля. Тоді I(z'=±L/2,t')=0. ΔP(-z')= ΔP(z') – потужності випромінення пов'язані із проходженням струму крізь –z' і +z'. $[I(-z')]^2=[I(z')]^2$ Коли існує стояча хвиля, то розподіл струмів є або симетричний ("+") або антисиметричний ("-"). Вважаємо, що можна виділити одну гармоніку на виході: $I(z')=I^0\mathrm{Cos}(kz')$ – сим. або $I(z')=I^0\mathrm{Sin}(kz')$ – а/сим. Знайдемо параметр k=2π/λ (хвильове число), що характеризує антену: kL=mπ, де m-парне для сим. і m-непарне для а/сим. Це випливає з умови існування стоячої хвилі.

$$F_m=I^0_mi\frac{\lambda}{\pi}\frac{\mathrm{Cos}(\frac{m\pi}{2}\mathrm{Cos}\theta)\mathrm{Sin}(\frac{m\pi}{2})}{\mathrm{Sin}^2\theta}\quad F_m=I^0_mi\frac{\lambda}{\pi}\frac{\mathrm{Sin}(\frac{m\pi}{2}\mathrm{Cos}\theta)\mathrm{Cos}(\frac{m\pi}{2})}{\mathrm{Sin}^2\theta}$$

Перший вираз для симетричного розподілу (m-парне) струму, другий-для антисиметричного. F_m- функція електричного чи магнітного полів
З теорії ЕМХ:

$$\vec{M}(\vec{r},t)=\frac{1}{c}\left[\dot{\vec{A}}(\vec{r},t)\times\vec{n}\right]\qquad\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{1}{c}\left[\left[\dot{\vec{A}}(\vec{r},t)\times\vec{n}\right]\times\vec{n}\right]$$

вектор Умова-Поінтінга:

$$<S>=<\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]>=\frac{\vec{n}}{4\pi c}\left\{<(\dot{\vec{A}})^2>-<\left(\vec{n}\dot{\vec{A}}\right)^2>\right\}\Bigg|_{t'=t-\frac{|r|}{c}}\sim\mathrm{Cos}^2(\omega t)$$ - тобто лапочка повина миготіти, але прилади,якими ми

фіксуємо випромінювання, да і сама лампочка – інертні.

$$S_m=\vec{n}S_0\frac{\mathrm{Sin}^2(m\pi/2(\mathrm{Cos}\theta-1))}{\mathrm{Sin}^2\theta},$$ m=1,2,3,4…Антенна вздовж напрямку струму не випромінюєся

56. Випромінювання колового струму (Almi)

Розглянемо випромінення колового витка радіуса a<<λ, по якому тече змінний струм однаковий у всіх точках провідної рамки (витка). Виберемо систему координат так, що площина витка перпендикулярна OZ і початок координат співпадає з центром витка. Нехай по

рамці тече струм $I=I_0\mathrm{Sin}\omega t$. Магнітний момент, що створює рамка буде $\vec{M}=\frac{1}{2c}\int_{V'}\left[\vec{r}'\times\vec{I}\right]dV'=\vec{e}_z\frac{1}{2c}I_0a\mathrm{Sin}\omega t$. Для вектор-

потенціала маємо: $\vec{A}=\frac{1}{c|\vec{r}|}\left[\dot{\vec{M}}(t-\frac{|\vec{r}|}{c})\times\vec{n}\right]$

З нього можна виразити **E** і **H**:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{1}{c^2|\vec{r}|}\left[\vec{n}\times\ddot{\vec{M}}(t-\frac{|\vec{r}|}{c})\right]=\frac{I_0a\omega^2\mathrm{Sin}\,\omega(t-|\vec{r}|/c)}{2c^3|\vec{r}|}\left[\vec{e}_z\times\vec{n}\right]$$

$$\vec{H}=\frac{1}{c^2|\vec{r}|}\left[\left[\ddot{\vec{M}}(t-|\vec{r}|/c)\times\vec{n}\right]\times\vec{n}\right]=\frac{I_0a\omega^2\mathrm{Sin}\,\omega(t-|\vec{r}|/c)}{2c^3|\vec{r}|}\left[\left[\vec{n}\times\vec{e}_z\right]\times\vec{n}\right]$$

57. Антенний опір випромінюванню (Almi)

Накачку роблять у максимумі. У випадку b) випромінення не буде. Якщо L=λ/2m, то опір антени активний. В противному випадку опір антени має ще і реактивну складову. Наявність реактивного опору виникає за рахунок неузгодженості антени і генератора. На великих відстанях потужність, яку випромінює антена в усіх напрямках можна записати так: $P_m = \int \vec{S} d\vec{\Omega}$

Використовуючи формулу для вектора Умова-Пойнтінга, отримаємо:

$$P_m = S_0 \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\sin^2(m\frac{\pi}{2}(\cos\theta+1))}{\sin^2\theta} R^2 \sin\theta$$ заміна: Cosθ=x

$$= \frac{\left(I_m^0\right)^2}{2c} \int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(m\frac{\pi}{2}(x+1))}{1-x^2} dx$$

Прилади (очі і т.п.) усереднюють $<I^2>=<\cos^2 wt>=1/2$
$<I^2>=1/2<(I^0_m)^2>$
$P_m=R<I^2>$ - потужність, що випромінюється

$$R = \frac{1}{c} \int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(m\frac{\pi}{2}(x+1))}{1-x^2} dx$$ - опір антени. R~m – недоцільно використовувати антени з m>>1

58. Випромінювання в ближній зоні (Necro)

59. Класичний час життя атомів (Necro)

60. Ширина ліній випромінювання (Necro)

$m\ddot{x} = F_x + \frac{2e_0^2 \dddot{x}}{3c^3}$ **тут F_x- зовнішня повертаюча сила.** t=0 , x'(0)=v_0. F_x=0, $m\ddot{x} = \frac{2e_0^2 \dddot{x}}{3c^3}$ Робимо такі заміни:

$\ddot{x} = \xi$ $B = \frac{2e_0^2}{3mc^3}$ тоді $\ddot{x}(t) = U_0 e^{Bt}$. Тепер приймаємо що F_x не рівна 0: $m\ddot{x} = -kx + \frac{2e_0^2 \dddot{x}}{3c^3}$ $(\dddot{\vec{r}}\dddot{\vec{r}}) = 0$

$\ddot{x} + w_0^2 x + Q\dddot{x} = 0$ $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $Q = \frac{2e_0^2}{3mc^3}$ - малий параметр. Будемо використовувати метод послідовних наближень (що це таке хрен його знає). $\ddot{x} + w_0^2 x - Q\dddot{x} \cong 0$ |x-x₀|<<|x₀| $\dddot{x}_0 = -w_o^2 \dot{x}$ $Q_1 = Qw_0^2$ $\ddot{x} + w_0^2 x + Q_1 \dot{x}_0 = 0$

$x = Ue^{\mu t}$ $\mu^2 + \mu Q_1 + w_0^2 = 0$ $\mu_{1,2} = \pm i w_0 - \frac{\gamma}{2}$

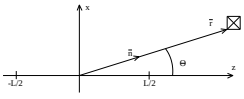
X(t=0)=U₀ $\dot{x}(t=0) = 0$ $x(t) = U_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos w_0 t$ $E_x(t) = E_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos w_0 t$ $E(w) = \frac{1}{2\pi}\int E(t) e^{iwt} dt = \frac{E_0}{2\pi} \frac{1}{\frac{\gamma}{2} - i(w - w_0)}$

$\lhd w_{1,2} = \sqrt{3}\gamma$

$\lhd w_{1,2}/w_2 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \frac{(\frac{e_0}{x_0})^2}{x_0 m e^2}$

61. Індикатриса випромінювання напівхвильової та однохвильової антен. (Necro)

Розглянемо антену у вигляді дроту довжиною L. Штриховані позначення означають що ми розглядаємо точку на самій антенні, а не штриховані вказують що ми розглядаємо точку що відноситься до детектору. В нашому випадку розподіл густини струму буде: $\vec{j}(\vec{r}',t') = \vec{e}_z I(\vec{r}',t') e^{-iwt'} \delta(x')\delta(y')\theta(L/2 - |z|)$ Тут дельта-функціями ми вказуємо, що нас друт нескінченно тонкий, а функцією Хевісайда вказуємо на довжину антени. Ми будемо працювати в хвилевій зоні, тобто r'<<r. Запишемо вираз для



векторпотенціала: $\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c|r|}\iiint_V \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|r|}{c} + \frac{(\vec{r}'\vec{n})}{c}) dv' =$

$$= \frac{\vec{e}_z}{c|r|} e^{-iw(t-\frac{|r|}{c})} \int_{-L/2}^{L/2} I(z',t') e^{-iw\frac{(x'n_x + y'n_y + z'n_z)}{c}} dz'$$ Тут було враховано такі

твердження: $t' = t - \frac{|r|}{c} + \frac{(\vec{r}'\vec{n})}{c}$. Тепер візьмемо до уваги те що x'=0 y'=0 n_z=cosθ, а також візьмемо випадок стоячої хвилі тобто I(z') не буде залежати від часу.

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\vec{e}_z}{c|r|} e^{-iw(t-\frac{|r|}{c})} \int_{-L/2}^{L/2} I(z') e^{-i\frac{w\cos\theta}{c}z'} dz'$$ Інтеграл позначимо через F_m. Розглянемо два випадки розподілу струму:

симетричний I(-z')=I(z') та антисиметричний I(-z')=-I(z'). Візьмемо для цих випадків такі розподіли струмів: $I(z') = I^0 \cos(kz')$ -для симертичного, та $I(z') = I^0 \sin(kz')$ для антисиметричного(k=2π/λ). З граничних умов ($I(\frac{L}{2}) = 0$ $I(-\frac{L}{2}) = 0$) знаходимо умову збудження стоячої хвилі: L=(λ/2)m

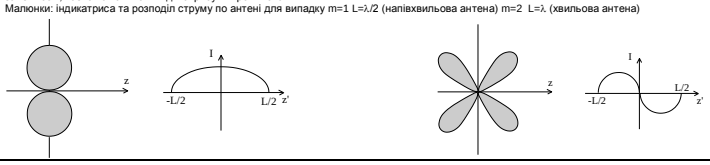
Тепер підставляємо вираз для розподілу струму в F_m і інтегруємо. Отримаємо: $F_m = iI_m^0 (\frac{\lambda}{\pi}) \frac{\cos(\frac{m\pi}{2}\cos\theta)\sin(\frac{m\pi}{2})}{\sin^2(\theta)}$ (m=1,3,5…)

$F_m = iI_m^0 (\frac{\lambda}{\pi}) \frac{\sin(\frac{m\pi}{2}\cos\theta)\cos(\frac{m\pi}{2})}{\sin^2(\theta)}$ (m=2,4,6…)

З попередніх курсів фізики ми маємо знати такі формули: $\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}[\dot{\vec{A}}(\vec{r},t) \times \vec{n}]$ $\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}[[\dot{\vec{A}}(\vec{r},t) \times \vec{n}] \times \vec{n}]$ За означенням ветор

Умова-Пойтінга рівний: $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E} \times \vec{H}]$ Так от, якщо ми все це попідставимо та виконаємо деякі "очевидні" перетворення то

отримаємо: $\vec{S}_m = \vec{n} S_0 \frac{\sin^2(m\frac{\pi}{2}(\cos\theta+1))}{\sin^2\theta}$ де $S_0 = \frac{(I_m^0)^2}{4\pi c|r|^2}$ Фактично задача розвязана, залиштлось лише графічно зообразити ці залежності, тобто намалювати індикатрису випромінювання:
Малюнки: індикатриса та розподіл струму по антені для випадку m=1 L=λ/2 (напівхвильова антена) m=2 L=λ (хвильова антена)



62. Сила променевого тертя. (Necro)

Розглянемо модель атому: маємо ядро та електрон,що рухається навколо ядра. Електрон рухається з прискоренням(доцентровим), отже він буде випромінювати, тобто буде втрачати енергію і "падати" на ядро. Нехай в момент часу t=0 електрон знаходиться на відстані r_0 від ядра. Будемо вважати, що електрон досить повільно падає, тобто його орбіта майже колова. Отже координати електрона: $\vec{r}(t) = \vec{e}_x r_x(t) + \vec{e}_y(t) r_y(t)$ (1) тут:

$r_x(t) = r_0 \cos(wt)$ і $r_y(t) = r_0 \sin(wt)$ Як говорилося вище вважаємо, що r_0 майже не залежить від часу.

Якщо у нас буде одновимірний осцилятор, то потужність його втрат буде рівна(цю формулу нам тіпа давали раніше): $P_s^x = \int_{S_0} \vec{S} d\sigma = \frac{2(\ddot{x})^2 * e_0^2}{3c^3}$ тут: S-вектор умова пойтінга, S_0-замкнута поверхня, e_0-заряд. Очевидно, якщо ми візьмемо трьохвимірний осцилятор, то отримаємо: $P_s = \frac{2<(\ddot{\vec{r}})^2> e_0^2}{3c^3}$. З іншого боку цю потужність можна розрахувати так:

Частинка перемістилась з т.1 в т.2(див. Мал.) виконано таку роботу: dA=f*dl. Потужність за означенням рівна:

$P = \frac{dA}{dt} = \vec{f}\frac{d\vec{l}}{dt} = (\vec{f} * \vec{v}) = (\vec{f} * \dot{\vec{r}})$ Отже ми отримали рівняння: $<(\vec{f} * \dot{\vec{r}})> = -\frac{2e_0 <(\ddot{\vec{r}})^2>}{3c^3}$ Щоб розвязати це рівняння розглянемо такі похідні: $\frac{d}{dt}(\ddot{\vec{r}} * \ddot{\vec{r}}) = (\ddot{\vec{r}})^2 + (\dot{\vec{r}} * \dddot{\vec{r}})$ У нашому випадку: $\dot{\vec{r}} = w r_0(-\vec{e}_x \sin wt + \vec{e}_y \cos wt)$ $\ddot{\vec{r}} = -w^2\vec{r}$ $\dddot{\vec{r}} = -w^3\dot{\vec{r}}$.

Любому ЛОХу ясно, що $(\dot{\vec{r}} * \ddot{\vec{r}}) = 0$ тобто $(\ddot{\vec{r}})^2 = -(\dot{\vec{r}} * \dddot{\vec{r}})$ Підставляючи це в наше рівняння отримаємо $<((\vec{f} - \frac{2e_0^2 \dddot{\vec{r}}}{3c^3})\dot{\vec{r}})> = 0$. Така рівність можлива лише в тому випадку, коли множник в дужках рівний 0 або він перпендикулярний v Отже: $f = \frac{2e_0^2 \dddot{\vec{r}}}{3c^3} + \vec{f}_p$ де fp- деякий вектор перпендикулярний швидкості. Всі нормальні пацани вже здогадались, що цей вектор буде кулонівською силою: $f_p = -\frac{e_0^2 \dot{\vec{r}}}{r^2}$. Отже остаточно маємо, що сила променевого тертя(сила, що гальмує рух) рівна: $f_{тертя} = \frac{2e_0^2 \dddot{\vec{r}}}{3c^3}$

63. Зв'язані заряди і поляризація. Внесок магнітного момента в середній струм. (Necro)

64. Матеріальні рівняння. Електрти та сегнетоелектрики. (Vini)

Застосовуючи div до першого рівняння Максвела , маємо $div(j) + dp/dt = 0$ –(1) => $\int_V j ds + d\theta/dt = 0$ (2) –закон збереження заряду , де V – довільний об'єм
S(V) – поверхня що натягнута на об'єм V . Розглянемо систему напівпровідників. При фотоефекті зв'язані частинки переходять в вільні $div(\vec{j}) + dp/dt = S_0$ (3) $S_0 = \beta I(\vec{r})$ – джерело інтенсивності. За Максвелом 12- невідомих функцій, та 8 – рівняння, тоді ми величину $\vec{D}$ і $\vec{B}$ будемо розглядати як функції $\vec{D}(\vec{E},\vec{H}), \vec{B}(\vec{E},\vec{H})$, а також $\vec{j}(\vec{E},\vec{H})$ та $\vec{\rho}(\vec{E},\vec{H})$ => отримаємо матеріальні рівняння $\vec{D}(\vec{E},\vec{H}), \vec{B}(\vec{E},\vec{H}), \vec{j}(\vec{E},\vec{H}), \vec{\rho}(\vec{E},\vec{H})$ (5) De перші два рівняння зв'язані а другі для вільних частинок. Існує два типи векторів : аксіальні та полярні.
Полярні – це вектори які змінюють свій знак при дії оператора інверсії(це оператор який переводить {x,y,z} в {–x,–y,-z}), а аксіальний вектор навпаки.

Залежність між двома полярними векторами набагато сильніша ніж між аксіальним и полярним тому наближено можна записати $\vec{D}(\vec{E}), \vec{B}(\vec{H})$.величина $\alpha = |E|/|E_{вн}| << 1$ тому розглядаючи одновимірний випадок маємо

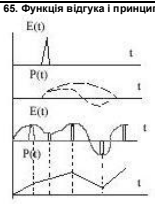
$D_x(E_x) = D_x^o + \varepsilon E_x + C_2 E_x^2 + C_3 E_x^3 + ...$ ε –діелектрична проникливістьC_2, C_3 – нелінійні діелектричні проникливості. Речовини в яких $\vec{D}_x^o \neq 0$ –сегнетоелектрики, піроелектрики, – це категорія полярних речовин . Матеріальний параметр характеризує поле а не речовину

Обмежуючись лінійними складовими маємо $D_i = \sum_j \varepsilon_{ij} E_j$ (12)

$\vec{D}_i = D_i^o + \varepsilon_{ij} E_j + \chi_{ijk} E_j E_k + \chi_{ijkl} E_j E_k E_l + ...$ (13) На випадок залежності від двох елементів $D_i = \varepsilon_{ij} E_j + \beta_{ij} H_j, B_i = \mu_{ij} E_j + \gamma_{ij} H_j$ (14)

μ_{ij} – магнітна сприйнятливість, μ_{ij}, β_{ij} псевдотензори такі що $\hat{I}\hat{\beta} = -\hat{\beta}$ –

65. Функція відгука і принцип причинності. (Vini)



Нехай е система на яку діє електричне поле E яке залежить від часу по формулі

$E_x(t) = E_0 \delta(t - t_0)$ (1)

Де P– поляризація – зсув частинок одна відносно одноїю За рахунок інертності

$P_x(t) = E_0 \chi(t - t_0)$ (2)Отже для сукупності частинок маємо $P_x(t) = \sum_n E_n \chi(t - t_n)$ (3)

переходячи до интегралу маємо топто для неперервного сигналу маємо

$P_x(t) = \int_0^{\infty} \chi(t - t_1) E_x(t_1) dt_1$ (4) Нехай $t - t_1 = \tau$ тоді $P_x(t) = \int_0^{\infty} \chi(\tau) E_x(t - \tau) d\tau$ (5) будемо

ввахаті що $x(\tau < 0) = 0$,тоді можемо змінити границі інтегрування

$P_x(t) = \int_{\infty}^{\infty} \chi(\tau) E_x(t - \tau) d\tau$ де χ - поляризованість $\chi(\tau = 0) = 0$ - за рахунок інерційності $\chi(\tau \to \infty) = 0$ (7)

(частинка забуває тро вплив на неї) Використовуючи (5) та $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{p}$ маємо $D_i(t) = \int_{\infty}^{\infty} \varepsilon_{ij}(\tau) E_j(t - \tau) d\tau$ (8) та

$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}\delta(\tau) + 4\pi\chi_{ij}(\tau)$ (9) Переходячи до розкладів Фур'є

Маємо $\vec{D}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} \vec{D}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega$
$\vec{E}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} \vec{E}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega$ (10) а також використовуючи формулу $\vec{D}(t) = \int_{\infty}^{\infty} \hat{\varepsilon}(\tau) \vec{E}(\vec{r}, t - \tau) d\tau$ підставляюли (10.1) і (10.2) в

(8)та міняючи порядок інтегрування маємо $\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} \vec{D}(\vec{r},\omega) \exp(-i\omega t) d\omega = \int_{\infty}^{\infty} d\omega (\int_{\infty}^{\infty} \hat{\varepsilon}(\tau) \vec{E}(\vec{r}, t - \tau) d\tau) \vec{E}(\vec{r},\omega) \exp(-i\omega(t - \tau))$ (13)

66. Нелінійні ефекти другого порядка. (Vini)

67. Симетрія і тензорні характеристики речовини. Операції симетрії в кристалах. (Vini)

Озн : Операцією симетрії називається алгоритмами руху при яких реальзується тотожність перетворення системи.

Озн : групою називається повна сукупність операцій симетрії що відносяться до одного одекту. А кожною такою операцією називається елементом групи $\hat{G}$ - група G_1 , G_2 , G_3 –елементи групи.

Властивості груп

1) В групі введенено операцію групового добутку

$G_1 * G_2 = G_3$ – операція множення. Для двох перетворень разом (*)- Асоціативна операція груповоло добутку.

$(G_1G_2)G_3 = G_1(G_2G_3)$

2) Властивість тотожного елементу $EG_n = G_n$

3) Ясщо існує G_n то існує і обернений елемент G_n^{-1} $G_n^{-1}G_n = G_nG_n^{-1} = E$

Озн :Точкові групи складаються з елементів групи що залишають хочаб одну точку нудухомою

а) Операція обертання $G_n^{(вісь)}; \phi_n = 2\pi / N$ n – порядок осі , n = 1,2,3,4,6 – шнших не бувае

б) G_n – операція відбивання в горизонтальній площині

в) G_v – операція відбивання в вертикальній площині

г) G_d – операція відбивання відносно діагональної величини

б) S_{2n} – дзеркально – поворотна опереція

б) Инверсій $\hat{I}\,\phi(x,y,z) = \phi(-x,-y,-z)$

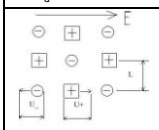
Ці операції описуються за допомогою матриці перетвовень , якщо є вектор $\vec{r}$ який переходить в $\vec{r}'(G)$,тоді $\vec{r}'(G) = a(G)\vec{r}$

$\vec{r}_i(G) = a_{ij}(G)\vec{r}_j$ (1)

$$\hat{a}(G_4^z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{a}(G_n^z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{a}(I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{a}(S_4^z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Теорема : Тензор який предстасляює матеріальні параметри речовини є інваріантом групи симетрій цієї речовини

Візьмемо як базовий тензор $\hat{T}^0$, після операцій симетрій оператор буде $\hat{T}(G)$, а при нваріантності $\hat{T}^0 = \hat{T}(G)$ (3) $\vec{r}'(G)$



68. Класична теорія діелектричної проникливості. Діюче поле. (Vini)

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (1)$$

доведемо цю формулу в новому вигляді, та зробимо деякі розширення. Нехай є рівняння руху частинки $m\ddot{\vec{r}} + \gamma\dot{\vec{r}} + f_0\vec{r} = E_o \exp(i\vec{k}\vec{r} - \omega t)$ (2) з цього рівняння отримаємо зв'язок $\vec{r} \to \vec{E}$, потім $\vec{r}$ пов'яжемо з $\vec{d}$, а $\vec{d} \to \vec{p} = \chi\vec{E}$

Розглянемо еле.-маг. випромінювання в кристалах Натрій – Хлор, та використовуючи наближення $\lambda >> L_0$ Хвиля велика порівняно з ФНМО Введемо поняття підградка – гадка з вузлами одного типу. Зсув додатної гradки U_+ , а зсув від'ємної гradки U_-. Підградка обирається по відношення до властивостей атому Запишемо рівняння зсуву підградки

$M_+\ddot{\vec{U}}_+ = -\theta_o(\vec{U}_+ - \vec{U}_-) - b_o(\vec{U}_+ - \vec{U}_-)^2(\vec{U}_+ - \vec{U}_-) + q\vec{E}_d(t)$ Перший доданок – пружна сила, другий - ангармонічний внесок E_d – - діюче поле. Для від'ємно зарядженої гradки $M_-\ddot{\vec{U}}_- = -\theta_o(\vec{U}_- - \vec{U}_+) - b_o(\vec{U}_- - \vec{U}_+)^2(\vec{U}_- - \vec{U}_+) - q\vec{E}_d(t)$

Введемо $\vec{U} = \vec{U}_+ - \vec{U}_-$ - відносне зміщення. Розділимо ці рівняння на M_+ та M_- ш віднімемо їх

тоді $M_*\ddot{\vec{U}} = -\theta\vec{U} - b_o(\vec{U})^2\vec{U} - q\vec{E}_d(t)$ (4) , де $\frac{1}{M_*} = \frac{1}{M_+} + \frac{1}{M_-}$

Застосуємо формулу Лоренса для E_d тоді $\vec{E}_d = \vec{E} + \frac{4}{3}\pi\vec{P}$ (5) $\vec{P}$ – переполяризація середовища.

При дії зовнішнього поля атом буде набувати дипольний момент(за рахунок зміщення електронної хмари). Поляризацію ми можемо розкласти на іонну і електронну відповідно $\vec{P} = \vec{P}_{ion} + \vec{P}_{en}$ (6) Поляризація іонів $\vec{P}_{ion} = q(\vec{U}_+ - \vec{U}_-)N$ (7) N – кількість іонних нар на одиницю об'єму , вона створюється за рахунок руху іонів $\vec{P}_{ion} = q\vec{U}N$ (7-а) електронна поляризація $\vec{P}_{en} = q(\alpha_+ - \alpha_-)\vec{E}_d$ (8)

$\vec{E}_d = \vec{E} + \frac{4\pi}{3}Nq\vec{U} + N(\alpha_+ - \alpha_-)\vec{E}_d$ (9)

виразивши поляризацію через поле $\vec{P} = N\bar{q}_*\vec{U} + \chi_{en}\vec{E}$ (12) де $q_* = \frac{\bar{q}}{1 - \frac{4\pi}{3}N(\alpha_+ + \alpha_-)}$ – ефективний заряд

$-\chi_{en} = \frac{N(\alpha_+ - \alpha_-)}{1 - \frac{4\pi}{3}N(\alpha_+ - \alpha_-)}$ – звичайна поляризованість яка враховує внесок лише електронів. Перейшовши до формули (4)

$M_*\ddot{\vec{U}} = -Q\vec{U} - b_o(\vec{U})^2\vec{U} + q[\vec{E} + \frac{4\pi}{3}Nq_*\vec{U} + \frac{4\pi}{3}\chi_{en}\vec{E}]$ (13) зробивши перенормування $M_*\ddot{\vec{U}} = -Q_*\vec{U} - b_o(\vec{U})^2\vec{U} + q_*\vec{E}$ (14) де

$\theta_1 = \theta_0 - \frac{4\pi}{3}Nqq_*$

69. Фотони і поляритони. Співвідношення невизначенності для фази хвилі і кількості фотонів. (Delf)

Плоска хвиля $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t))$ (1)

Фотон – квазічастинка E = ħω, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, $|\vec{p}| = \frac{\hbar\omega}{c}$ (2)

$I = |\vec{S}| = n_f\hbar\omega$ (3) де n_f – кількість фотонів, що перетинають одиницю площі за одиницю часу

стан системи K = (k_x, k_y, k_z, ω) ; S – спін фотона (поляризація)

ΔN(K) – середньоквадратичний розклад кількості фотонів.

Δφ(K) – розклад фази

ΔN(K) ·Δφ(K)≥2π (4)

Δφ=0 ΔN→∞ (5)

Існують ферміони та бозони N(K) = 0,1,2,3….∞ (6)

Розподіл Бозе: $<N(K)> = \frac{1}{\exp[\frac{\hbar\omega(K) - \mu}{k_0T}] - 1}$ μ=0

$\delta(K) = \frac{\sqrt{<\Delta N^2>}}{<N>} = \sqrt{\frac{<N>+1}{<N>}}$ (8)

I→0, <N>→0, δ→∞

I→∞, <N>→∞, δ→100% (9)

70. Дисперсія поляритонів. (Delf)

71. Поздовжні хвилі. Представлення плоских хвиль . Співвідношення Саха-Теллера. (Delf)

72. Рівняння Максвелла-Лоренця (Fluffy)

Для дослідження полів в електродинаміці абстрагуються від безглуздих точкових значень напруженостей **e** і **h,** для цьогоі вводять поняття „нескінчено-малого об'єму" (НМО).

Def: НМО – частина досліджуваного об'єму, розмір якої менший за характеристичні значення шуканих параметрів. Таким чином мікроскопічні параметри речовини **e** і **h** усереднюються по НМО і вводяться відповідні значення <e>=E, <h>=B

Система диф. р-нь отримана Максвелом для статистичних полів має вигляд : $\mathrm{rot}E = 0, \mathrm{div}E = 4\pi\rho$, $\mathrm{div}B = 0, \mathrm{rot}B = 4\pi j / c$, **ρ** і **j** – густини мікроскопічних зарядів і мікро струмів відповідно

Нам також відоме одне динамічне р-ня – закон Фарадея в диф. формі : $\mathrm{rot}E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$ → тобто це р-ня вірне як у динамічному так і в статистичному випадку.

Оскільки довести р-ня Максвела неможливо, то спробуємо шляхом логічних переходів (як це напевно робив Максвел) побудувати с-му р-нь, що адекватно описує змінні в часі поля.

1. Магнітних зарядів також немає і в динамічному випадку – статистичне р-ня: divB=0 не змінюється
2. Диф. форма закону Фарадея є узагальненим р-ям rotε=0 – тому для динамічного випадку будемо вважати rotε=(-dB)/(cdt)
3. Диф. форма закону Гауса має бути справедливою і в динаміці, оскільки потік Ечерез замкнену поверхню має бути пропорційним внутрішньому заряду: divE=4¶ρ
4. Єдине р-ня, що має змінитись є rotB=4πj/c. Воно суперечить закону збереження заряду, бо взявши div від обох частин оримаємо 0=4¶div j/c. Помилка зникає якщо записати закон Біо-Савара-Лапласа у вигляді: rotB=4¶j/c+dE/(cdt)

В результаті отримаємо с-му р-нь Максвела - Лоренца :

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}B = 0 \\ &\mathrm{rot}E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \\ &\mathrm{div}E = 4\pi\rho \\ &\mathrm{rot}B = \frac{4\pi}{c}j + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} \end{aligned}$$

, яку довести неможливо (бо, бля, постулат перевірений роками).

73. Макроскопичні рівняння Максвелла (Fluffy)

Основна ідея полягає в тому, що беруть відомі всім р-ня Максвела-Лоренца (питання 72), які насправді стосуються мікроскопічних параметрів речовини і шляхом узагальнень та усереднеь переходять до макроскопічних параметрів

Модель Максвела: всі заряди діляться на 2 категорії: вільні та зв'язані, вони можуть характеризуватися такими величинами: швидкість та магнітний момент. Заряди складають: сторонні заряди і струми та внутрішні заряди і струми. В нашому розгляді сторонні заряди та струми не враховують (рівні 0). Розглянемо величину $<\rho(мікро)> = \rho(вільні) + \rho(звязані)$. (1) Середня густина вільного заряду визначається як: $\rho(r,t) = \frac{1}{\Delta V}\sum q_n$ (2), виразимо густину зв'язаних зарядів через поляризацію ρ(зв)= -divP(r,t), P – питомий дипольний момент зарядженої частинки P(r,t)=1/VΣq(m)r(m). Мікро струм можна розкласти на такі складові: <J(micro)>=J+Jp+Jm, де J – струм вільних зарядів, Jp – поляризаційний струм, Jm – струм магнітного моменту.

Причому Jp=dP/dt, Jm=CrotM. Для того щоб абстрагуватись від локальних та миттєвих значень вводимо усереднення по часу та по об'єму, тоді остаточно отримуємо макроскопічні р-ня Максвела

$$\begin{aligned} &\mathrm{rot}H = \frac{4\pi}{c}j + \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} \\ &\mathrm{rot}E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \\ &\mathrm{div}B = 0 \\ &\mathrm{div}D = 4\pi\rho \\ &D = E + 4\pi P \\ &B = H + 4\pi M \end{aligned}$$

74. Динамічний відгук (Fluffy)

Нехай маємо деякий імпульс Ex(t)=Eoδ(t-to). Поляризація **p** речовини прореагує на даний імпульс : $p_x(t)$=EoX(t-to), правда з деяким запізненням в наслідок інерційності **p**. Аналогічно під дією неперервного змінного імпульсу **p** змінюватиметься:

$Px(t) = \int_{-\infty}^{t} X(t - t1)Ex(t1)dt1$ /після елементарного спрощення: t-t1=τ, будемо вважати $\begin{cases} X(\tau < 0) = 0 \\ X(\tau = 0) = 0 \quad \text{інерційність} \\ X(\tau \to \infty) = 0 \quad \text{невічність пам'яті} \end{cases}$ /

$$Px(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau)Ex(t - \tau)d\tau .$$

Звідси можемо записати вираз для **D** : D=E+4¶p, $D(t) = \int \varepsilon_{ij}E_j(t - \tau)d\tau$, –де – $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}\delta(\tau) + 4\pi X_{ij}(\tau)$ (1).

Із спектрального представлення $D(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} D(w)e^{-iwt}dw$ та виразу (1) отримуємо рівність $E(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E(w)e^{-iwt}dw$

$\int_{-\infty}^{+\infty} D(w)e^{-iwt}dw = \int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon(t)e^{iw\tau}d\tau]e^{-iwt}E(w)dw$ → $D(r,w) = \hat{\varepsilon}(w)E(r,w)$ – згортка . Ф-ія **ε(t)** – назив. функцією відгуку (функцією пам'яті)

Із співвідношення: $\varepsilon(w) = \int \varepsilon(\tau)e^{iw\tau}d\tau$ та вищеподаних виразів можна записати $\varepsilon_{ij}(\tau) = \delta_{ij}\delta(\tau) + 4\pi X_{ij}(\tau)$, $\varepsilon_{ij}(w) = 1 + 4\pi X_{ij}(w)$, де δ(τ) – є миттєва ф-ія відгуку

75. Симетрія і тензорні характеристики речовини (Fluffy)

Операція симетрії – це алгоритм рухів при яких реалізуються тотожні перетворення системи.

Групою зветься повна сукупність операцій симетрії, що відноситься до одного об'єкту. Кожна операція – ел-т групи.

Групи мають такі властивості: **1.** асоціативність (G1G2)G3=G1(G2G3) **2.** існує E: EGn=Gn **3.** GnGn^{-1}=E

Точкові групи – групи, що складаються з ел-ів, які при виконанні будь-якої операції симетрії залишають принаймні одну точку нерухомою.

Операції симетрії: 1. вісь симетрії n-го порядку 2.горизонтальне відбивання 3.вертикальне відбивання 4.дзеркальний поворот 5.інверсія. Всі операції описуються за допомогою матриці перетворень. Приклад матриці симетричних перетворень (вісь симетрії 4-го порядку):

$$\hat{a}(C_4^z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ дзеркальний поворот $$\hat{a}(S_4^z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Теорема: тензори, що представляють матеріальні параметри речовини є інваріантами групи симетрії цієї речовини.

Прикладом тензору 2-го порядку є діелектрична проникливість $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}' + i\varepsilon_{ik}''$

76. Тензори вищих рангів (Fluffy)

77. Діелектрична проникливість (Fluffy)

По конспекту :В класичній теорії діел. проникливості $\varepsilon(w) = 1 + \frac{A}{w_o^2 - w^2}$ – (1) Запишемо р-ня руху

$m\ddot{r} + 2\gamma\dot{r} + f_0r = E_0 \exp(i(kr - wt))$ – (2) - неоднорідне і нелінійне р-ня. Розглянемо коливання кристалічної гратки NaCl (взаємодію е.м. випромінювання з кристалом), для цього запишемо р-ня руху кожної підгратки. Для катіонів:

$M_+\ddot{U}_+ = -Q_0(U_+ - U_-) - b_0(U_+ - U_-)^2(U_+ - U_-) + qE_g(t)$ (3), де перший член є пружна сила, другий – ангармонічний внесок, третій – поле в речовині. Для анінов р-ня руху буде аналогічним (треба лише U+ та U- поміняти місцями). Зо відносне зміщення сприймемо величину U=U+ - U-. Поділивши р-ня руху на M+ та M- та ввівши нову величину 1/μ=(1/M+)+(1/M-) отримуємо

$\mu_a\ddot{U} = -Q_0U - b_0U^2U + qE_g(t)$ (7). Eg =E+P4π/3 (8)- діюче поле. Поляризацію P можна розкласти на дві частини: зміщення іона та зміщення електронних оболонок.

P=P(іон)+P(en). P(іон)=Nq(U+)-Nq(U-)=NqU, P(el)=(α+)NEg + N(α-) Eg=NEg(α+ - α-). Тоді P=NqU+NEg(α+ - α-) (9).

Підставимо (9) у (8) і виразимо Eg: $Eg = \frac{E + \frac{4\pi}{3}NqU}{1 - \frac{4\pi}{3}N(\alpha_+ + \alpha_-)}$, а P запишемо відповідно $P = \frac{NqU + N(\alpha_+ + \alpha_-)E}{1 - \frac{4\pi}{3}N(\alpha_+ + \alpha_-)}$ причому має виконуватись $0 < \frac{4\pi}{3}N(\alpha_+ + \alpha_-) < 1$. **Від себе** :У звичайному представленні зручно писати P=XεoE, де X – є електрична сприйнятливість речовини і виражає міру активності речовину до електричного процесу.

$D = \varepsilon E, -\varepsilon = \varepsilon_0(1 + X)$ - діелектрична проникливість середовища. Для того щоб оцінювати середовище в порівнянні з вакуумом:

$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} = 1 + X$

У випадку розгляду однорідних середовищ величина **ε** є константою і не залежить від E. А в загальному випадку можна записати :

$\varepsilon(E) = \varepsilon_k + \sum_i \varepsilon_i E^i, -\varepsilon_{i\sim 1} = \frac{1}{i!}\frac{\partial^i D(0)}{\partial E^i}$ і похідними різних порядків нехтувати не можна (принаймні першою)

Коли маємо справу із анізотропними середовищами (проблядські кристали) тоді вектори E і D вже не є колінеарними, а **ε є** тензором другого рангу (матриця 3X3).

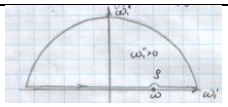
78. Співвідношення Крамерса-Кронінга (Fluffy)

Діелектрична проникливість – ф-ія відгуку **ε(τ)** та поляризація **χ(τ)** є дійсними ф-ми. А от $\varepsilon(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\tau) e^{iw\tau} d\tau$ (1) вже комплексна величина. Тоді запишемо (1) так $\varepsilon(w) = \varepsilon'(w) + i\varepsilon''(w)$ (2) Члени ε' та ε'' являють собою

$$\begin{cases} \varepsilon'(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\tau)\cos(w\tau)d\tau - \text{рефракція} \\ \varepsilon''(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\tau)\sin(w\tau)d\tau - \text{поглинання} \end{cases}$$

(3) Ф-ії **ε'** та **ε''** мають бути пов'язані між собою.

Запишемо розклад **ε(w)** по **w'+iw''**: $\varepsilon(w) = 1 + 4\pi\int_0^{\infty} \chi(\tau) e^{iw'\tau} e^{-w''\tau} d\tau$ (4). Ф-ія **χ** має таку властивість, що коли **τ<0, χ<0**. Запишемо (4) в статистичному випадку: $\varepsilon_0 = 1 + 4\pi\int_0^{\infty} \chi(\tau) d\tau$ (5).



Розглянемо інтеграл $I_L = \oint_L \frac{\varepsilon(w_1) \sim 1}{w_1 \sim w} dw_1$ (6) по деякому замкненому контуру L. Розіб'ємо даний інтеграл на частини $I_L = \int_{\sim\infty}^{w-p} \frac{\varepsilon(w_1) \sim 1}{w_1 \sim w} dw_1 + \int_{w+p}^{\infty} f dw_1 + I_\gamma + Ic = 0$ (7), де Ic – інтеграл по замкненому півколу. Зробимо такі позначення $P\int_{\sim\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon(w_1) \sim 1}{w_1 \sim w} dw_1 + \frac{1}{2} I_{2\gamma} = 0$ (8), P – головне значення. Тоді

$I_{2\gamma} = \oint_{2\gamma} \frac{\varepsilon(w_1) \sim 1}{w_1 \sim w} dw_1 = \sim 2\pi i[\varepsilon(w) \sim 1]$ (9) знак „-" випливає внаслідок вибору напрямку. Тоді можна записати

$P\int_{\sim}^{+} \frac{\varepsilon(w_1) \sim 1}{w_1 \sim w} dw_1 = \pi i[\varepsilon(w) \sim 1]$ (10), отже

$$(\varepsilon'(w) \sim 1) = \frac{i}{\pi} P\int_{\sim\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon''(w_1)}{w_1 \sim w} dw_1$$

$$\varepsilon''(w) = \sim \frac{i}{\pi} P\int_{\sim\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon'(w_1) \sim 1}{w_1 \sim w} dw_1$$

(11). Отримані вирази (вирази 11) і є співвідношеннями Крамерса-Кронінга.

79. Ефект Гуса-Хенхена. Повне внутрішнє відбивання (Delf)

80. Укорочені рівняння. Солітони (Delf)

$\vec{D}(\vec{E})$ $\quad rot(rot\vec{E}) + 1\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0$ (1)

$\vec{j} = 0$ $\quad rot(rot\vec{F}) = grad(div\vec{F}) - \Delta\vec{F}$ (2) ($grad(div\vec{F}) \sim 0$ поле буде поперечним, лише наближено)

Зазвичай середовище слабко нелінійне. Розглянемо такі нелінійні процеси, де частоти не змінюються.

$|\Delta z_0| >> \lambda$ (4)

$\vec{E}(\vec{r},t) = A(r,t)e^{i(k_z z - \omega t)}$ (5)

(5)=>(3): $(\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} + 2ik_z \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} - k_z^2)e^{i(k_z z - \omega t)} + (\frac{\omega}{c})^2 D(\vec{E}) = 0$ (6)

Оскільки нелінійність слабка, то нехай $\vec{D} = (\varepsilon_0 + \Delta(\vec{r},t,\vec{E})) \cdot \vec{E}$ (7)

$(\Delta_\perp \vec{E} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} + 2ik_z \frac{\partial A}{\partial z} - k_z^2) + (\frac{\omega}{c})(\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon)\vec{A} = 0$ $\quad \Delta_\perp$ - поперечний Лаплас

Щоб спростити рівняння:

$k_z^2 = (\frac{\omega}{c})^2 \varepsilon_0$ (8) $\quad \left|\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}\right| \sim \frac{|A|}{\Delta z^2}$ (*) $\quad \left|2ik_z \frac{\partial A}{\partial z}\right| \sim 2\frac{2\pi n_0}{\lambda}\frac{|\vec{A}|}{\Delta z_0}$ (**)

$\frac{(*)}{(**)} = \frac{\lambda}{4\pi n_0 z_0} << 1$ (10) $\quad n_0 = \sqrt{\varepsilon_0}$

Отже $\Delta_\perp \vec{A} + 2ik_z \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} + (\frac{\omega}{c})^2 \Delta\varepsilon(\vec{E})\vec{A} = 0$ (11)

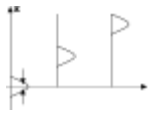
Керровська нелінійність: $\Delta\varepsilon = x_2 |A|^2$ (12)

$\vec{A} \neq \vec{A}(x,y)$ для плоских хвиль (відсутня поперечна залежність)

нелінійне рівняння Шредінгера : $i\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2|U^2|U = 0$ (13) z→t

Це рівняння має два типи розвязків

1. $U(x,t) = \frac{const \cdot \exp(i\varphi_s)}{ch(x - vt)}$ (14) $\quad \varphi_s = \varphi_s(x,t)$ (Солітони (солітонні рішення))



Солітон – поодинока хвиля.

$I(z.x) = |A|^2 = \frac{I_0}{ch(\frac{x - cz}{a_0})}$

81. Типи хвиль у хвилеводах (AlKov+Tim)
Структура е/м поля

Структура поля ***E*** и ***H*** различна. Вдоль z-бегущая волнаб x- стоячая волна h= β sin φ –продольное волновое число. $h^2+g^2 = \beta_0^2$ при любом phi. фазовая скорость *E* и *H* волн: $V_\phi = w/(\beta_0 \sin\varphi) = c/\sin\varphi$, $V_\phi > c$ (их называют быстрыми волнами). продольная и поперечная волны: $\lambda_{prod} = 2pi/h = 2pi/(\beta_0 \sin\varphi) = \lambda_0/\sin\varphi$; $\lambda_{poper} = 2pi/g = \lambda_0/\cos\varphi$. **Волны типа Т**(стоячие поперечные) существуют в полупространстве над идеально проводящей поверхностью *E(r,t)=E(x,y)e^{iθz-iωt}=> E=2Esin φ *cos(gx)*e^{-jhz}*ix+j2E_m cos φ singx*e^{jhz} i_z H=2E_m/z_0*cosgx-e^{jhz} i_y*

*E=j2E_m*singxe^{jhz} i_y ; H=-j2* $\frac{2E_m}{z_0}\sin(\varphi)\sin(gx)e^{-jhz} i_y$ *; E=j2E_m sin(gx)e^{jhz} i_y*; волны: H=-

$$j\frac{2E_m}{z_0}\sin\varphi\sin(gx)e^{-jhz} i_x - \frac{2E_m}{z_0}\cos\varphi\cos(gx)e^{-jhz} i_z \; ; \left.\begin{matrix} E = E_m e^{-j\beta_0 z} i_x \\ H = \frac{E_m}{z_0} e^{-j\beta_0 z} i_y \end{matrix}\right\} => \left|\begin{matrix} E(z,t) = E_m \cos(wt - \beta_0 z) i_x \\ H(z,t) = \frac{E_m}{z_0}\cos(wt - \beta_0 z) i_y \end{matrix}\right.$$

Волны типа H: $E(x,z,0) = 2E_m \sin(gx)\sin(hz) i_y$; $H(x,z,0) = -\frac{2E_m}{z_0}\sin\varphi\sin(gx)\sin(hz) i_x - \frac{2E_m}{z_0}\cos\varphi\cos(gx)\cos(hz) i_z$. Для H волны на границе раздела $H_n=0$, $E_\tau = 0$.

Предоставим связь продольных и поперечных компонент поля. полученную из трехмерной записи уравнений Максвелла. Если

$V(x,y,z) = V_0 e^{-jhz}$ $\quad \partial V/\partial z = -jhV$. *rotH=jw εE ; rotE=-jw μ H;* $\partial H_x/\partial y - \partial H_y/\partial z = jw\varepsilon E_x$,... *расписываем ротор по компонентам*

и все классно выходит:

$$E_x = -j/g^2(h\,\partial E_z/\partial x + w\mu\,\partial H_z/\partial y)$$
$$E_z = -j/g^2(h\,\partial E_z/\partial y - w\mu\,\partial H_z/\partial x)$$
$$H_x = j/g^2(w\varepsilon\,\partial E_z/\partial y - h\,\partial H_z/\partial x)$$
$$H_y = -j/g^2(w\varepsilon\,\partial E_z/\partial x + h\,\partial H_z/\partial y)$$

. $g = \sqrt{\beta^2 - h^2} = \sqrt{w^2\varepsilon\mu - h^2} => g^2 = (w/c)^2 - h^2$. Для получения E(x,y,z) используем уравнение гельмгольца $\nabla^2 E_z + g^2 E_z = 0$, где $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2, g = \sqrt{\beta^2 - h^2}$

82. TE і TM хвилі в прямокутному хвилеводі (AlKov+Tim)
Волны типа E в прямоугольном волноводе

гр. условие $E_\tau = 0$ на стенках E_z я=0б ч=0бч=фбн=ибн=0; Проекция E_x: E_x=0, y=0, y=b; Проекция E_y: E_y=0, x=0, x=a; =>E_z=0 if y=0, y=b; $\partial E_z/\partial x = 0, y = 0, y = b$; $\partial E_z/\partial y = 0, x = 0, x = a$ =>краевая задача $\nabla^2 E_z + g^2 E_z = 0$, x=0, x=a; E_z=0 if y=0, y=b.

E(x,y)=X(x)Y(y); X``/X=-$g^2_x$, Y``/Y=-g^2_y, $g_x^2+g_y^2=g^2$; Ez(x,y)=(Asing_xx+Bcosg_xx)(Csing_yy+cosg_yy). E_z =0 (x=0, y=0)=> B=D=0=>

$E_z(x,y)=E_0 \sin g_x x \sin g_y y$. $\sin g_x a=0$, $\sin g_y b=0$ => g_x=mpi/a, g_y=npi/b => решения существуют только при $g = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$. E_{mn}:

E_x= -j $\frac{hm\pi}{g^2 a} E_0 \cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{-jhz}$; E_y=-j $\frac{hn\pi}{g^2 b} E_0 \cos(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{-jhz}$;

E_z= $E_0 \sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{-jhz}$; H_x=j $w\varepsilon_0 \frac{n\pi}{g^2 b} E_0 \sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{-jhz}$; H_y=-

j $w\varepsilon_0 \frac{m\pi}{g^2 a} E_0 \cos(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{-jhz}$; H_z=0; длина волны в волноводе $\lambda_{voln ov} = 2\pi/h$.

Критическая длина волны

$h = \sqrt{\beta^2 - g^2}$, если $\beta > g$, то образуются бегущие волы постоянной амплитуды. $\beta = g$ --критическая длина волны.

$\beta_{critical} = \frac{2\pi}{\lambda_{critical}}$ =g , если $\beta < g$ --режим отсечки. $\lambda_{crit} = \frac{2\pi}{g} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}$. Дисперсионная характеристика:

$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_{crit})^2}}$. Коэффициент ослабления $f = .. = c/\lambda_{crit} = c/2\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}$ => $\beta = w_0/c$,

$g = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$, $h = \pm j\sqrt{g^2 - \beta^2}$.

Волны типа H в прямоугольном волноводе

H: имеет составляющую H_z, в то время как E_z=0 (электрическое поле поперечно).

$E_x = \frac{-jw\mu}{g^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}$ $\quad H_x = \frac{-jh}{g^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}$ $\quad E_y = \frac{-jw\mu}{g^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}$ $\quad H_y = \frac{-jh}{g^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}$; $H(x,y,z) = H_z(x,y)e^{-jhz}$ $\quad D_\perp^2 H_z + g^2 H_z = 0$.

Граничные условия:: E_x=0, y=0, y=z; E_y=0 x=0, x=a. => $\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$ $y = 0, y = b$, $\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0$, $x = a, x = 0$. Критическая длина волны

$\lambda_{crit} = \frac{2\pi}{g} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}$, $V_\Phi = \frac{c}{(1 - (\lambda_0/\lambda_{cr})^2)^{1/2}}$.

$$\begin{cases} E_x = jw\mu\frac{n\pi}{g^2 b}H_0 \cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{-jhz} \\ E_y = jw\mu\frac{m\pi}{g^2 a}H_0 \sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{-jhz} \\ E_z = 0 \\ H_x = j\frac{hm\pi}{g^2 a}H_0 \sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{-jhz} \\ H_y = j\frac{hn\pi}{g^2 b}H_0 \cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{-jhz} \\ H_z = H_0 \cos(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{-jhz} \end{cases}$$

волна типа H_{10}—критическая. Для справки: критическая длина волны определяется из минимальности значений индексов m,n, но при условии что все компоненты волны не обратятся в ноль или в константу (волна то должна существовать).

Краткие характеристики волна в волноводах.

TM—определяется требованием $H_{z=0}$ все решения выражаются через E_z.

TE--- E_z=0 ... решение через H_z

TEM—поперечная е.м волна E_z=0, H_z=0

Гибридная волна—когда H_z != 0 , E_z!=0.

83. ТЕ і ТМ хвилі в циліндричному хвилеводі (AlKov+Tim)
Круглий хвилевід.

Круглий металічний хвилевід – це трубка радіуса a, вважаємо, що провідність стінок хвилеводу нескінченна, він сам нескінченно довгий і однорідний вздовж осі z, а внутрішнім середовищем є повітря або вакуум. Можна бачити, що стінка хвилеводу співпадає з координатною поверхнею $r = a$ циліндричної системи координат (r, φ, z). Тому дана система координат є дуже зручною для розв'язку даного типу задач.

Розглянемо хвилі, що розповсюджуються вздовж осі z:

$$E(r,\varphi,z) = E(r,\varphi)e^{-jkz}$$

$$H(r,\varphi,z) = H(r,\varphi)e^{-jkz}$$

Слід розв'язати рівняння Гельмгольца: $\nabla^2 E_Z + \frac{\omega^2}{c^2}E_Z = 0$, $\nabla^2 H_Z + \frac{\omega^2}{c^2}H_Z = 0$, або переписати в циліндричних координатах і підставити характерну залежність від z, маємо $\frac{\partial^2 E_Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_Z}{\partial \varphi^2} + \xi^2 E_Z = 0$,

$$\frac{\partial^2 H_Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_Z}{\partial \varphi^2} + \xi^2 H_Z = 0$$

А) Хвилі типу Е: $\frac{\partial^2 E_Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_Z}{\partial \varphi^2} + \xi^2 E_Z = 0$, при граничних умовах, згідно яких дотична складова електричного вектора обертається в нуль на стінках хвилеводу, отже $E_Z = 0, r = a, E_\varphi = 0$ при $r = a$ (тому, що саме ці проекції дотичні до стінок, а E_r – ні). Ці умови не є залежними, тому, що $E_\varphi \sim \frac{\partial E_Z}{\partial \varphi}$, отже досить того, щоб виконувалась умова $E_Z = 0$.

$$E(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \Rightarrow \Phi''\frac{R}{r^2} + \Phi R'' + \Phi\frac{R'}{r} + \xi^2 R\Phi = 0, \quad r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \xi^2 r^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi};$$

$-\frac{\Phi''}{\Phi} = m^2$ $\quad \Phi(\varphi) = C_0 Cos(m\varphi)$ причому m – додатне ціле число або $\neq 0$ (з умови $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$)), тоді $\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + (\xi^2 - \frac{m^2}{r^2})R = 0$, зробивши заміну маємо $x = \xi r$, тоді

$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial R}{\partial x} + (1 - \frac{m^2}{x^2})R = 0$, розв'язками якого є циліндричні функції: $R(x) = A_1 J_m(x) + A_2 N_m(x)$, але $\lim_{x\to 0} N_m(x) = \infty \Rightarrow A_2 = 0$, отже $R(x) = A_1 J_m(x)$.

Позначимо υ_{mn} – n -й корінь рівняння $J_m(x) = 0$. Тоді $E_Z = E_0 J_m(\xi r)Cos(m\varphi)$, $E_Z = 0$ при $r = 0$ буде виконуватись лише тоді, коли $\xi_{mn} a = \upsilon_{mn} \Rightarrow \xi_{mn} = \frac{\upsilon_{mn}}{a}$. Номер кореня n – це другий індекс хвилі типу E_{mn}.

Критичні довжини хвиль $\lambda_{KP} E_{mn} = \frac{2\pi}{\xi_{mn}} = \frac{2\pi a}{\upsilon_{mn}}$, довжина хвилі в хвилеводі $\lambda_{XB} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda_0}{\lambda_{KP}})^2}}$, $\vartheta_\Phi = \frac{c}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda_0}{\lambda_{KP}})^2}}$.

Найбільшу λ_{KP} має хвиля $E_{01}: \lambda_{KP} = 2.61a$.

Тоді загалом $E_Z = E_0 J_m(\frac{\upsilon_{mn} r}{a})Cos(m\varphi)e^{-ikz}$; $\quad E_\varphi = ikE_0 \frac{ma^2}{\upsilon_{mn}^2 r} J_m(\frac{\upsilon_{mn} r}{a})Sin(m\varphi)e^{-ikz}$;

$$E_r = -ikE_0\left[\frac{ma^2}{\upsilon_{mn}^2 r} J_m(\frac{\upsilon_{mn} r}{a}) - \frac{a}{\upsilon_{mn}} J_{m+1}(\frac{\upsilon_{mn} r}{a})\right]Cos(m\varphi)e^{-ikz} \qquad H_r = -\frac{\omega\varepsilon_0}{k}E_\varphi \quad H_\varphi = \frac{\omega\varepsilon_0}{k}E_r$$

$H_Z = 0$.

Б) Хвилі Н-типу: аналогічно до попереднього $\frac{\partial^2 H_Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_Z}{\partial \varphi^2} + \xi^2 H_Z = 0$, оскільки $E_Z = 0$, то граничні умови мають вигляд $E_\varphi = \frac{i\omega\mu_0}{\xi^2}\frac{\partial H_Z}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial H_Z}{\partial r} = 0$, при $x = \xi a \Rightarrow \xi_{mn} a = \mu_{mn}$, а $\xi_{mn} = \frac{\mu_{mn}}{a}$. Тоді $E_Z = 0$

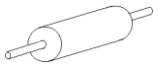
$$E_r = \frac{i\omega\mu_0 m a^2}{\mu_{mn}^2 r} H_0 J_m(\frac{\mu_{mn} r}{a})Sin(m\varphi)e^{-ikz}, \quad E_\varphi = i\omega\mu_0 H_0\left[\frac{ma^2}{\mu_{mn}^2 r} J_m(\frac{\mu_{mn} r}{a}) - \frac{a}{\mu_{mn}} J_{m+1}(\frac{\mu_{mn} r}{a})\right]Cos(m\varphi)e^{-ikz},$$

$H_r = -\frac{k}{\omega\mu_0}E_\varphi \qquad H_\varphi = \frac{k}{\omega\mu}E_r \qquad H_Z = H_0 J_m(\frac{\mu_{mn} r}{a})Cos(m\varphi)e^{-ikz}$, інші формули:

$\lambda_{KP} H_{mn} = \frac{2\pi a}{\mu_{mn}}$, $\quad \lambda_{XB} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda_0}{\lambda_{KP}})^2}}$, $\quad \vartheta_\Phi = \frac{c}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda_0}{\lambda_{KP}})^2}}$. Найбільше λ_{KP} для $H_n: \lambda_{KP} = 3.41a$.

84. ТЕМ-хвилі в коаксиальному хвилеводі (AlKov+Tim)

Коаксіальний хвилевід – 2 металевих циліндри радіуса a і b, розділені діелектриком.



Розглянемо циліндричну систему координат, де вісь z співпадає з віссю системи ($b > a$). Хвилею ТЕМ-типу (або поперечною електромагнітною хвилею) прийнято називати хвилю, у якої $E_Z = H_Z = 0$. Тоді перші два рівняння Максвела мають вигляд: $rotH = j\omega\varepsilon_a E$, $rotE = -j\omega\mu_a H$, або по координатам:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\varepsilon_a E_x \quad -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu_a H_x \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = j\omega\varepsilon_a E_y \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu_a H_y \quad -\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

Звідки можна отримати рівняння Гельмгольца $\frac{\partial^2 E}{\partial z} + \beta E_x = 0$, де $\beta = \frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}$, тоді можна переписати, що

$E_x(x,y,z) = E_x(x,y)e^{\pm j\beta z}$, отже $\vartheta_\Phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} = \frac{c}{n}$. Це означає, що хвилі типу ТЕМ на відміну від E - і H –хвиль, не мають частотної дисперсії фазової швидкості. Для циз хвиль $k = \beta = \frac{\omega}{c_n} \Rightarrow \xi = 0$, тобто $\lambda_{KP} = \frac{2\pi}{\xi} = \infty$. Значить хвилевод з хвилею типу Т пропускає коливання будь-яких частот, поглинаючи з постійного струму.

Як бачимо, рівняння $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$ задовольняється при $E = -grad\varphi$, де φ -потенціал. Оскільки $divE = 0 = \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_x}{\partial x} \Rightarrow \nabla^2\varphi = 0$ /

Для коаксіального хвилеводу $\nabla\varphi(r) = 0$, $\varphi(a) = U$, $\varphi(b) = 0$, або $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}) = 0 \Rightarrow r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = A$, $\varphi = A\ln r + B$, з крайових умов $A\ln a + B = U$; $A\ln b + B = 0$, тоді $A = \frac{U}{\ln\frac{a}{b}}$, $B = \frac{-U\ln b}{\ln\frac{a}{b}}$ $\Rightarrow$ $\varphi(r) = \frac{U\ln\frac{r}{b}}{\ln\frac{a}{b}}$. Тоді

$E(r) = -grad\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{i} = \frac{U}{\ln\frac{b}{a}r}\vec{i}$.

Припустимо, що простір між циліндрами заповнено діелектриком без втрат ($\sigma = 0$) з заданими ε_a, μ_a, тоді $E(r,z) = \frac{U}{\ln\frac{b}{a}r}e^{-j\beta z}\vec{i}$, де

$\beta = \frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}}$, тоді $\vec{H} = \frac{i}{\omega\mu_a}rotE = \frac{i}{\omega\mu_a}\frac{\partial E_r}{\partial z}\vec{i}_\varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}}\frac{U}{\ln\frac{b}{a}r}e^{-j\beta z}\vec{i}_\varphi$.

Отже $\vec{E}$ вектор має єдину проекцію, вздовж вектора $\vec{i}_r$, а силові лінії $\vec{H}$ вектора являють собою концентричні кола, які охоплюють внутрішній провідник хвилеводу.

85. Прямокутний резонатор (AlKov+Tim)
Резонаторы

Объемный резонатор—представляет собой полностью или частично заполненный объем с проводящими стенками. Рассмотрим сечение прямоугольного резонатора, ограниченного проводящими поверхностями при z=0, z=1 (ось z- вдоль резонатора). Пусть распространяется H_{10} волна $E_{упад} = E\sin(\pi x/a)e^{-ihz}$, возникает отраженная волна $E_{отр} = E\sin(\pi x/a)e^{ihz}$. При z=0 $E_y = E_{пад} + E_{отр}$ => A=1. За формулою Ейлера $E_y = -2iE\sin(\pi x/a)\sin(kz)$ => двухмерная стоячая волна. З граничных условий $E_y = 0$ при z=l => kl= πp =>k= $p\pi/l$, $\lambda = 2\pi/k = 2l/p$. Так як для H_{10} $\lambda_{critical} = 2a$. Для нашего значения параметра «р» определилась своя рез. длина волны. Для произвольной длинв волны $\lambda_{рез}\ 2l/p$, но $\frac{1}{\lambda^2_{рез}} = \frac{1}{\lambda^2_{хв.рез}} + \frac{1}{\lambda^2_{crit}}$, но

$\lambda = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 - (n/b)^2}}$. $\lambda_{рез} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2 + (p/l)^2}}$. Колебания E_{mn0} могут существовать, а H_{mn0} –нет.

Основной тип волны- мода с резонансной длиной волны (2 индекса равны, а другой 0). Учитывая уравнение Гельмгольца $\nabla^2 E_z + \beta^2 E_z = 0$. Гр усл. $E_r|_S = 0$ б $\beta^2 = (2\pi/\lambda)^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 + (p\pi/l)^2$ divE=0, H=rotE=0 (для E_{mn0}).

$$E_x = -c\frac{pmcos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right)}{al((m/a)^2 + (n/b)^2)}. \quad E_y = \frac{-cpn}{bc((m/a)^2 + (n/b)^2)}sin(\frac{m\pi}{a}x)cos(\frac{n\pi}{b}y)sin(\frac{p\pi}{l}z)$$

$$E_z = Csin(\frac{m\pi}{a}x)sin(\frac{n\pi}{b}y)cos(\frac{p\pi}{l}z)$$

$$H_x = iCh/b\frac{w\varepsilon}{}sin(\frac{m\pi}{a}x)cos(\frac{n\pi}{b}y)cos(\frac{p\pi}{l}z)$$

$$H_y = iC\frac{\mu}{a}w\varepsilon cos(\frac{m\pi}{a}x)sin(\frac{n\pi}{b}y)cos(\frac{p\pi}{l}z)$$

$$H_z = 0$$

86. Втрати хвиль в хвилеводах (AlKov+Tim)
Коефіцієнт затухання хвиль у хвилеводі.

Існує 2 основних джерела втрат:

1.) Скінчене значення провідності метала, з якого зроблені стінки хвилеводу (внаслідок чого силові лінії виникаються і виникає складова вектора Умова-Пойтінга, направлена всередину метала) $\Rightarrow$ Втрати на нагрівання хвилеводу.

2.) Струми провідності в діелектрику, яким заповнений хвилевод.

Таким чином слід вважати, що $k = k' - ik''$, а отже $E = E(x,y)e^{-k'z}e^{-ik'z}$, $H(x,y,z) = H(x,y)e^{-k'z}e^{-ik'z}$, де k'' – коефіцієнт затухання $k''(\omega)$.

Якщо в хвилевод довжиною 1м., за рахунок втрат, амплітуда зменшується до $E_{ВИХ} < E_{ВХ}$, то $k'' = \ln(\frac{E_{ВХ}}{E_{ВИХ}})$ (Нм/м), в радіотехніці використовують величину $\Delta = 20\lg(\frac{E_{ВХ}}{E_{ВИХ}})$ (дБ/м). Неважко переконатись, що $\Delta = 8{,}686k''$. Якщо мають справу з потужностями, то $\Delta = 10\lg(\frac{P_{ВХ}}{P_{ВИХ}})$. Розглянемо довільний хвилевод з втратами, вісь якого направлена вздовж осі z. Оскільки відомо $H(z)$ і $E(z)$, то середня потужність, яку переносить хвиля буде $P(z) = P_0 e^{\frac{-2k''}{z}}$, $P_0 = P(z = 0)$; продиференціювавши, маємо: $\frac{dP}{dz} = -2k''P$, або $k'' = -\frac{dP/dz}{2P}$. Величина dP – це витрати на відрізку хвилеводу довжиною dz, тоді маємо:

$dP = -dz\int_L |\Pi_{CPBT}|dl$, де Π_{CPBT} – вектор Пойтінга, контур L – це контур поперечного перерізу. $P = \int_S \Pi_{CP}dS$ – потужність, що переноситься. Тоді $k'' = \frac{\int_L |\Pi_{CPПОТ}|dl}{2\int_S \Pi_{CP}dS}$, E_τ і H_τ – потенціальні складові.

$\Pi_{CPПОТ} = \frac{1}{2}Re[E_\tau \cdot H_\tau]$. Вважаємо, що $E_\tau = H_\tau$, ($\sigma = \infty$) (тобто таке ж, як і у ідеального хвилеводу). Згідно з умовами Леонтовича $|E_\tau| = Z_m|H_\tau|$, де Z_m – характеристичний опір метала. $Z_m = \left|\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}\right|(1 + j)$, тоді $\int_L |\Pi_{CPПОТ}|dl = \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}} \cdot \int_L |H_\tau|^2 dl$, остаточно:

$$k'' = \frac{\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{8\sigma}}\int_L |H_\tau|^2 dl}{Re\int_S [E H^*]dS}$$ – затухання в хвилеводі на 1м.

Круглий волновод (затухание)

а и в – внутренние и внешние диаметры волновода. ε -диэл. проник. Положим $\mu = 1$ и что дэлектрические потери отсутствуют.

Амплитуды проекций составляющих ТЕМ волны в волноводе имеют вид: $E_r = A/r\ e^{-iz\beta}$, $H_\varphi = \frac{\sqrt{\varepsilon}Ae^{-j\beta z}}{120\pi r}$, где А-константа,

$\beta = w\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0}$ => $P = \frac{1}{2}Re\int[EH]dS = 1/2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_a^b E_\varphi H_r rdr = \frac{\sqrt{\varepsilon}A^2}{120}\ln(b/a)$. Для напряженности имеем

$\int_l H_\varphi dl = 2\pi[aH_\varphi^2(a) + bH_\varphi^2(b)] = \frac{2\varepsilon A^2}{(120)^2\pi}(1/a + 1/b)\sqrt{\varepsilon}/(120\pi\ln(b/a))$. Пусть в-константа. В зависимости можно положить

(1/a+1/b)/ln(b/a)=1/b((1+b/a))/ln(b/a). При b/a=3.6- наблюдается минимум зависимости. Физическая причина: при увеличении а –увеличивается плотность тока, а следовательно и потери, но и возрастает площадь через которую переносится энергия. В коротковолновой области НВЧ диапазона главные потери идут на рассеивании волн. На высоких частотах уменьшается площадь характерного слоя. При стремлениии частоты к критической волны испытывают все большее число отражений, следовательно, потери возрастают.

87. Добротність резонатора (AlKov+Tim)
Добротность резонаторов

Будем считать, что в момент времени t=0 источеик возбуждения отключается, тогда $E(t) = E_0 e^{-t/\tau} \cos wt$. Как известно,

$\tau = 2Q/w$. Пусть ц- начальное значение энергии в резонаторе при t=0. За первый период амплитуда уменьшится до уровня

$E_0 \exp(-2\pi/(w\tau))$ =exp(-pi/Q)=E(t). Следовательно, вследствии потерь будет рассасываться энергия

$W = w(1 - \exp(-2pi/Q))$. Так как в радиоэлектронике Q>>1, то exp(-2pi/Q)=1-2pi/Q=>W=TP$^{(средних потерь)}$=2pi/w*P => a=w^{рез}w$_0$/P$^{ср.потреть}$. $w_0 = \varepsilon_0 / 2\int E^2 dV = \mu_0 / 2\int H^2 dV$.

$\eta_{poter} = 1/2 Re z_m |H_\tau^2| = \sqrt{\frac{w\mu}{8\sigma}} |H_\tau^2| => P_{poter} = \sqrt{\frac{w\mu}{8\sigma}} \int |H_\tau^2| dV => Q = \frac{\int \sqrt{2w\mu_0\sigma} |H^2| dV}{\int |H_\tau^2| dS}$, где w –резонансная частота.

Рассмотрим отдельные случаи

1) E_{010}: $H_\varphi = H_0 J_1(\nu_{01} r/a)$ (круглый резлнатор длиной l и диаметром a)

$$\int H^2 dV = 2pilH_0^2 \int_0^a J_1(\nu_a r/a) r dr = pila^2 J_1(\nu_m))$$

$$\int H_\tau^2 dS = H_{01}^{2,2} J_1(\nu_a) 2pial + H_{01}^{2,2} J_1(\nu_a) 2pia^2 = 2pia(l+a) H_{01}^{2,2} J_1(\nu_a) => Q = \frac{\sqrt{w\mu\sigma} J_a}{\sqrt{2}(l+a)}$$. Для этой моды

$$\lambda_0^{рез} = 2b/a,\ w_{рез} = \frac{2\pi c}{\lambda_0^{рез}} = 2.40 rc/a \ => \ Q_{E_{010}} = 21.3\sqrt{\sigma a} l/(a+l)$$

88. Циліндричний резонатор (AlKov+Tim)

1. ПРИНЦИПИ ВІДНОСНОСТІ: ГАЛІЛЕЯ ТА ЕЙНШТЕЙНА. СПЕЦІАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛОРЕНЦА.
2. ЗАГАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛОРЕНЦА. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛОРЕНЦА.
3. РЕЛЯТИВІСТСЬКА КІНЕМАТІКА. ВЛАСНИЙ ЧАС. ВЛАСНА ДОВЖИНА. РЕЛЯТИВІСТСЬКЕ ДОДАВАННЯ ШВИДКОСТЕЙ.
4. ГЕОМЕТРІЯ 4-ПРОСТОРУ: МЕТРИКА, КО- ТА КОНТРА- ВАРІАНТНИ ВЕЛИЧИНИ.
5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАЦІЇ В 4-ПРОСТОРІ. 4-ШВИДКІСТЬ І 4-ПРИСКОРЕННЯ.
6. ФУНКЦІЇ ЛАГРАНЖА ТА ГАМІЛЬТОНА РЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ ЧАСТИНКИ.
7. КОВАРІАНТНЕ РІВНЯННЯ РУХА.
8. ЗАГАЛЬНІ ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ. ЕЛЕМЕНТАРНИЙ ЗАРЯД В КЛАСИЧНІЙ ТЕОРІЇ ПОЛЯ.
9. 4-ПОТЕНЦІАЛ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ. ФУНКЦІЇ ЛАГРАНЖА ТА ГАМІЛЬТОНА РЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ ЗАРЯДЖЕНОЇ ЧАСТИНКИ В ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПОЛІ.
10. РІВНЯННЯ РУХА ЗАРЯДЖЕНОЇ ЧАСТИНКИ В ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПОЛУ. СИЛА ЛОРЕНЦА. НАПРУЖЕНІСТЬ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ. ОБЕРНЕНИЙ РУХ В ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПОЛІ.
11. КАЛІБРУВАЛЬНА ІНВАРІАНТНІСТЬ. ТИПИ КАЛІБРОВОК. ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ СКАЛЯРНОГО І ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦІАЛА.
12. ТЕНЗОР ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ. ПОЛЯРНІ І АКСІАЛЬНІ ВЕКТОРИ. КОВАРІАНТНЕ РІВНЯННЯ РУХА ЗАРЯДА В ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПОЛІ.
13. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛОРЕНЦА ДЛЯ ПОЛЯ. ІНВАРІАНТИ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ.
14. 4-ВЕКТОР СТРУМУ ТА РІВНЯННЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ.
15. ДІЯ СИСТЕМИ, ЩО СКЛАДАЄТЬСЯ ІЗ ЗАРЯДІВ І ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ.ЗАГАЛЬНІ ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ.
16. ВИВЕДЕННЯ РІВНЯННЬ МАКСВЕЛЛА В КОВАРІАНТНІЙ ФОРМІ З ВАРІАЦІЙНОГО ПРИНЦИПУ.
17. ВИВЕДЕННЯ РІВНЯННЬ МАКСВЕЛЛА В ТРЬОХВИМІРНІЙ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІЙ ФОРМІ З КОВАРІАНТНИХ РІВНЯНЬ.
18. ІНТЕГРАЛЬНА ФОРМА РІВНЯНЬ МАКВЕЛЛА ТА ЇЇ ЗВ'ЯЗОК З ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИМИ ЗАКОНАМИ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА.
19. МЕЖОВІ УМОВИ ДЛЯ ВЕКТОРІВ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ.
20. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ ЕНЕРГІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ. ТЕОРЕМА УМОВА-ПОЙНТІНГА.
21. РІВНЯННЯ ДЛЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОТЕНЦІАЛОВ (РІВНЯННЯ Д'АЛАМБЕРА).
22. СТАЛЕ ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ. РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА ТА ПУАССОНА ТА ЇХ ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК.
23. СТАЛЕ ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ НА ДАЛЕКИХ ВІДСТАНЯХ. ДИПОЛЬНИЙ І КВАДРУПОЛЬНИЙ МОМЕНТИ.
24. РОЗКЛАД ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ ЗА МУЛЬТИПОЛЯМИ. СИСТЕМА ЗАРЯДІВ У ЗОВНІШНЬОМУ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОМУ ПОЛІ.
25. СТАЛЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ. РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА ТА ПУАССОНА ТА ЇХ ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК.
26. СТАЛЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ НА ДАЛЕКИХ ВІДСТАНЯХ. МАГНІТНИЙ ДИПОЛЬНИЙ МОМЕНТ.
27. ВЕКТОРНИЙ ПОТЕНЦІАЛ СТАЛОГО МАГНІТНОГО ПОЛЯ. МАГНІТНИЙ МОМЕНТ У ЗОВНІШНЬОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛЯ. ГІРОМАГНІТНЕ ВІДНОШЕННЯ.
28. ПЛОСКІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ. ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ.
29. ХВИЛЬОВИЙ 4-ВЕКТОР І ПОВЗДОВЖНІЙ ЕФЕКТ ДОПЛЕРА.
30. ХВИЛЬОВИЙ 4-ВЕКТОР І ПОПЕРЕЧНИЙ ЕФЕКТ ДОПЛЕРА.
31. ЧЕРВОНИЙ ЗСУВ.
32. СФЕРИЧНІ ХВИЛІ. ПОТЕНЦІАЛИ СПІЗНЕННЯ І ВИПЕРЕДЖЕННЯ.
33. ПОТЕНЦІАЛИ ЛЬЄНАРА-ВІХЕРТА.
34. ЕЛЕКТРИЧНЕ ТА МАГНІТНЕ ПОЛЕ ТОЧКОВОГО ЗАРЯДУ, ЩО РУХАЄТЬСЯ ДОВІЛЬНИМ ЧИНОМ.
35. ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ ТОЧКОВОГО ЗАРЯДУ, ЩО РІВНОМІРНО РУХАЄТЬСЯ.
36. ВИПРОМІНЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ ТОЧКОВИМ ЗАРЯДОМ. ХВИЛЬОВА ЗОНА. КУТОВИЙ РОЗПОДІЛ ВИПРОМІНЮВАННЯ.
37. ВИПРОМІНЮВАННЯ ТОЧКОВОГО ЗАРЯДА, ЩО РУХАЄТЬСЯ ПРЯМОЛІНІЙНО. ФОРМУЛА ЛАРМОРА. ДІАГРАМА НАПРАВЛЕНОСТІ.
38. ЦИКЛОТРОННЕ ТА СИНХРОТРОННЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ ТОЧКОВОГО ЗАРЯДА. ДІАГРАМА НАПРАВЛЕНОСТІ.
39. ЗАПІЗНЮВАЛЬНІ ТА ВИПЕРЕДЖАЮЧІ ПОТЕНЦІАЛИ
40. ПОТЕНЦІАЛИ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ В ХВИЛЬОВІЙ ЗОНІ
41. ЕЛЕКТРИЧНЕ ДИПОЛЬНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ
42. СКАЛЯРНИЙ ПОТЕНЦІАЛ В ДИПОЛЬНОМУ НАБЛИЖЕННІ
43. ВИПРОМІНЮВАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНОГО ВІБРАТОРА
44. ВЕКТОР УМОВА-ПОЙНТІНГА В ЕЛЕКТРОДИПОЛЬНОМУ НАБЛИЖЕННІ.
45. ОПІР ВИПРОМІНЮВАННЮ КОРОТКОГО ДИПОЛЯ.
46. ВИПРОМІНЮВАННЯ ДИПОЛЯ, ЩО РІВНОМІРНО ОБЕРТАЄТЬСЯ.
47. МАГНІТНЕ ДИПОЛЬНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ. ПОТЕНЦІАЛИ ПОЛЯ.
48. НАПРУЖЕННОСТІ ПОЛІВ ДЛЯ МАГНІТО-ДИПОЛЬНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ.
49. ЕЛЕКТРОКВАДРУПОЛЬНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ. ПОТЕНЦІАЛИ ПОЛІВ.
50. НАПРУЖЕННОСТІ ПОЛІВ ЕЛЕКТРОКВАДРУПОЛЬНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ.
51. ОПІР ВИПРОМІНЮВАННЮ ДЛЯ КВАДРУПОЛЬНОЇ АНТЕНИ.
52. ВИПРОМІНЮВАННЯ КОРОТКОГО ДИПОЛЯ В БЛИЖНІЙ ЗОНІ.
53. ПОТЕНЦІАЛИ ПОЛЯ В БЛИЖНІЙ ЗОНІ.
54. ПОЛЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ В БЛИЖНІЙ ЗОНІ. НАПРУЖЕННОСТІ ПОЛІВ В СФЕРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ.
55. ВИПРОМІНЮВАННЯ ЛІНІЙНОЇ АНТЕНИ
56. ВИПРОМІНЮВАННЯ КОЛОВОГО СТРУМУ
57. АНТЕННИЙ ОПІР ВИПРОМІНЮВАННЮ
58. ВИПРОМІНЮВАННЯ В БЛИЖНІЙ ЗОНІ
59. КЛАСИЧНИЙ ЧАС ЖИТТЯ АТОМІВ
60. ШИРИНА ЛІНІЙ ВИПРОМІНЮВАННЯ
61. ІНДИКАТРИСА ВИПРОМІНЮВАННЯ НАПІВХВИЛЬОВОЇ ТА ОДНОХВИЛЬОВОЇ АНТЕН.
62. СИЛА ПРОМЕНЕВОГО ТЕРТЯ.
63. ЗВ'ЯЗАНІ ЗАРЯДИ І ПОЛЯРИЗАЦІЯ. ВНЕСОК МАГНІТНОГО МОМЕНТА В СЕРЕДНІЙ СТРУМ.
64. МАТЕРІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. ЕЛЕКТРЕТИ ТА СЕГНЕТОЕЛЕКТРИКИ.
65. ФУНКЦІЯ ВІДГУКА І ПРИНЦИП ПРИЧИННОСТІ.
66. НЕЛІНІЙНІ ЕФЕКТИ ДРУГОГО ПОРЯДКА.
67. СИМЕТРІЯ І ТЕНЗОРНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕЧОВИНИ. ОПЕРАЦІЇ СИМЕТРІЇ В КРИСТАЛАХ.
68. КЛАСИЧНА ТЕОРІЯ ДІЕЛЕКТРИЧНОЇ ПРОНИКЛИВОСТІ. ДІЮЧЕ ПОЛЕ.
69. ФОТОНИ І ПОЛЯРИТОНИ. СПІВВІДНОШЕННЯ НЕВИЗНАЧЕННОСТІ ДЛЯ ФАЗИ ХВИЛІ І КІЛЬКОСТІ ФОТОНІВ.
70. ДИСПЕРСІЯ ПОЛЯРИТОНІВ.
71. ПОЗДОВЖНІ ХВИЛІ. ПРЕДСТАВЛЕННЯ ПЛОСКИХ ХВИЛЬ . СПІВВІДНОШЕННЯ САХА-ТЕЛЛЕРА.
72. РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА-ЛОРЕНЦЯ
73. МАКРОСКОПИЧНІ РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА
74. ДИНАМІЧНИЙ ВІДГУК
75. СИМЕТРІЯ І ТЕНЗОРНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕЧОВИНИ
76. ТЕНЗОРИ ВИЩИХ РАНГІВ
77. ДІЕЛЕКТРИЧНА ПРОНИКЛИВІСТЬ
78. СПІВВІДНОШЕННЯ КРАМЕРСА-КРОНІНГА
79. ЕФЕКТ ГУСА-ХЕНХЕНА. ПОВНЕ ВНУТРІШНЄ ВІДБИВАННЯ
80. УКОРОЧЕНІ РІВНЯННЯ. СОЛІТОНИ
ХВИЛЕВОДИ ТА РЕЗОНАТОРИ (САМОСТІЙНА РОБОТА)
81. ТИПИ ХВИЛЬ У ХВИЛЕВОДАХ
82. ТЕ І ТМ ХВИЛІ В ПРЯМОКУТНОМУ ХВИЛЕВОДІ
83. ТЕ І ТМ ХВИЛІ В ЦИЛІНДРИЧНОМУ ХВИЛЕВОДІ
84. ТЕМ-ХВИЛІ В КОАКСИАЛЬНОМУ ХВИЛЕВОДІ
85. ПРЯМОКУТНИЙ РЕЗОНАТОР
86. ВТРАТИ ХВИЛЬ В ХВИЛЕВОДАХ
87. ДОБРОТНІСТЬ РЕЗОНАТОРА
88. ЦИЛІНДРИЧНИЙ РЕЗОНАТОР