

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7

СЕРЕДОВИЩЕ ЧИСЕЛЬНИХ ТА СИМВОЛЬНИХ МАТЕМАТИЧНИХ РОЗРАХУНКІВ MATHCAD. РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Мета роботи:

Використання математичного середовища Mathcad для розв'язку широкого кола задач математичного аналізу, зокрема, побудова графіків функцій однієї і двох змінних, обчислення границь, похідних, визначених та невизначених інтегралів, розклад функцій в ряд Тейлора, операції з матрицями і векторами, знайомство з програмуванням (*всі підказки в роботі зроблені для версії Mathcad 14.0*).

Порядок виконання роботи:

7.1. Матриці.

7.1.1. Задекларуйте 3 вектори і виконайте 6 операцій з ними (*панелі Matrix*):

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} := \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 33 \quad \mathbf{a}^T = (3 \ 6 \ 1) \quad \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = (33)$$

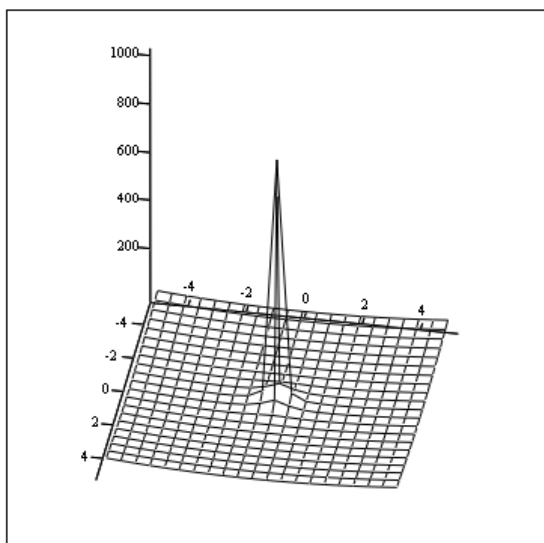
$$\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a} = (33) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T = \begin{pmatrix} -12 & 21 & 9 \\ -24 & 42 & 18 \\ -4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -277 \\ 361 \\ 172 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -277 \\ 361 \\ 172 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} -541 \\ 262 \\ 51 \end{pmatrix}$$

7.1.2. Побудуйте в тривимірній декартовій системі координат графік функції

$$z(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{10}{x^2 + y^2 + 0.01}, \text{ заданої аналітично (панель Graph):}$$

$$z(x, y) := x^2 + y^2 + \frac{10}{x^2 + y^2 + 0.01}$$



z

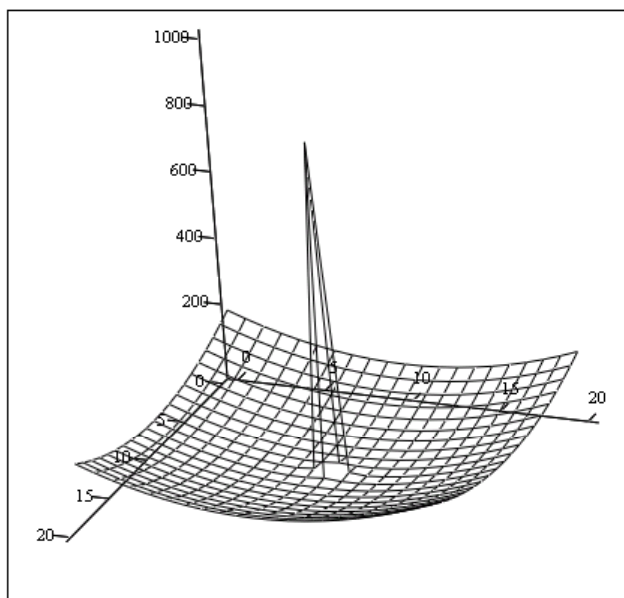
7.1.3. Побудуйте в тривимірній декартовій системі координат графік функції

$$z(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{10}{x^2 + y^2 + 0.01}, \text{ заданої як матриця точок } (x, y) \in [-10, 10]$$

(панелі **Matrix**):

$$z(x, y) := x^2 + y^2 + \frac{10}{x^2 + y^2 + 0.01}$$

$$i := 0..20 \quad j := 0..20 \quad W_{i,j} := z(i - 10, j - 10)$$



W =

	0	1
0	200.05	181.055
1	181.055	162.062
2	164.061	145.069
3	149.067	130.077
4	136.074	117.085
5	125.08	106.094
6	116.086	97.103
7	109.092	90.111
8	104.096	85.118
9	101.099	82.122
10	100.1	81.123
11	101.099	82.122
12	104.096	85.118
13	109.092	90.111
14	116.086	97.103
15	125.08	106.094

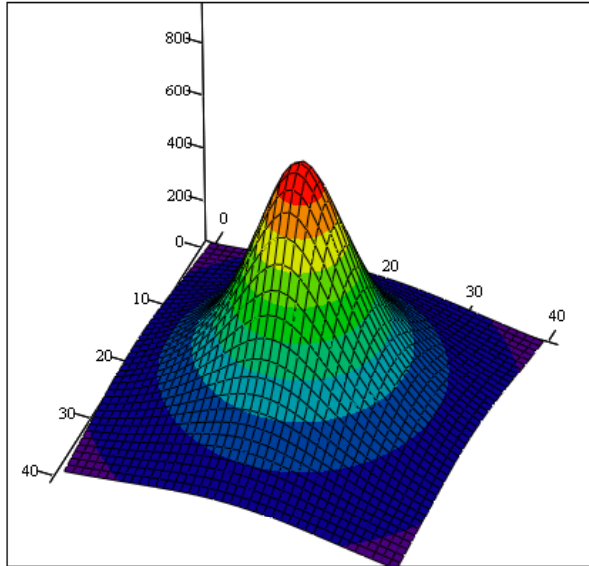
W

Порівняйте отриманий графік з графіком, отриманим в попередньому пункті.

7.1.4. Побудуйте в тривимірній декартовій системі координат графік цієї ж функції, заданої як матриця точок $(x, y) \in [-0.25, 0.25]$:

$$z(x, y) := x^2 + y^2 + \frac{10}{x^2 + y^2 + 0.01}$$

$$i := 0..40 \quad j := 0..40 \quad W_{i,j} := z\left[\frac{(i-20)}{80}, \frac{(j-20)}{80}\right]$$



W =

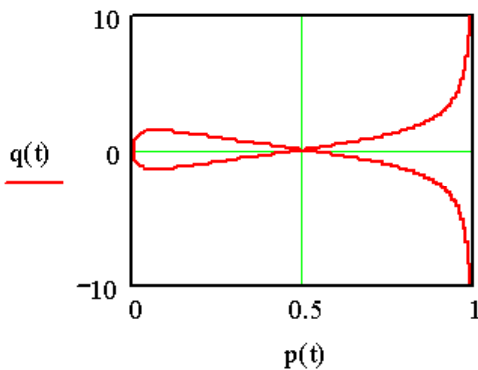
	0	1
0	74.199	77.695
1	77.695	81.538
2	81.331	85.554
3	85.101	89.737
4	88.991	94.076
5	92.986	98.553
6	97.063	103.147
7	101.195	107.827
8	105.348	112.557
9	109.483	117.291
10	113.553	121.977
11	117.506	126.551
12	121.285	130.946
13	124.826	135.085
14	128.068	138.891
15	130.946	142.283

W

7.2. Побудова графіків

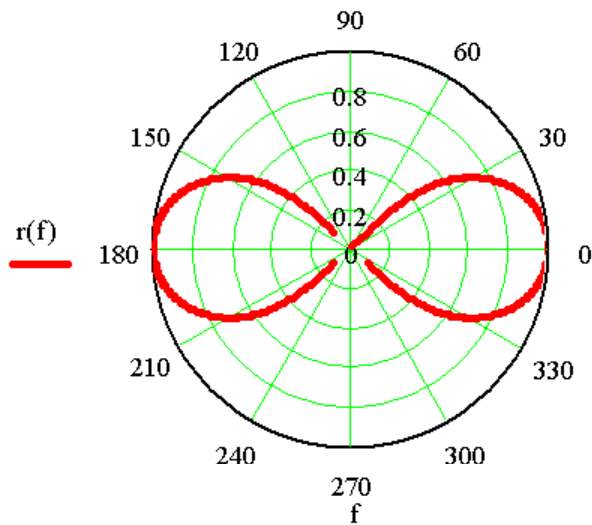
7.2.1. Побудувати графік в декартовій системі координат, заданий параметрично. Координата кожної точки графіка (x, y) розраховується як пара функцій від параметра t : $(x, y) = [x(t), y(t)]$ (панель **Graph**):

$$p(t) := \frac{t^2}{1+t^2} \quad q(t) := \frac{t(1-t^2)}{0.1+t^2}$$



7.2.2. Побудувати графік "лемніската Бернуллі" в полярній системі координат (панель **Graph**):

$$r(f) := \sqrt{\cos(2 \cdot f)}$$



7.3. Аналітичні та чисельні розрахунки

7.3.1. Порахувати 2 границі (lim візьміть з панелі **Calculus**, стрілку з панелі **Evaluation**):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}} \rightarrow 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + \tan(x)}{\sin(x)} \cdot \frac{1 - e^x}{x} \rightarrow -2$$

7.3.2. Порахувати число e :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow \exp(1) = 2.718$$

7.3.3. Порахувати похідну функції x^x (диференціал візьміть з панелі **Calculus**, стрілку з панелі **Evaluation**):

$$\frac{d}{dx} x^x \rightarrow x^x \cdot (\ln(x) + 1)$$

7.3.4. Порахувати другу похідну функції x^3 (диференціал візьміть з панелі **Calculus**, стрілку з панелі **Evaluation**):

$$\frac{d^2}{dx^2} x^3 \rightarrow 6 \cdot x$$

7.3.5. Порахувати невизначений інтеграл (панель **Calculus**):

$$\int \frac{1}{1 + \cos(x)} dx \rightarrow \tan\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$$

7.3.6. Порахувати визначений інтеграл від 0 до $\pi/2$ (панель **Calculus**):

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos(x)} dx = 1$$

7.3.7. Розкласти в ряд Тейлора функцію $\cos(x)$ при $x=0$ та при $x=\pi/2$ (Знак рівно візьміть з панелі **Boolean**, series з панелі **Symbolic**):

$$\cos(x) \text{ series, } x=0 \rightarrow 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot x^4$$

$$\cos(x) \text{ series, } x=\frac{\pi}{2} \rightarrow -1 \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot \pi\right) + \frac{1}{6} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot \pi\right)^3 - \frac{1}{120} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot \pi\right)^5$$

7.4. Елементи програмування

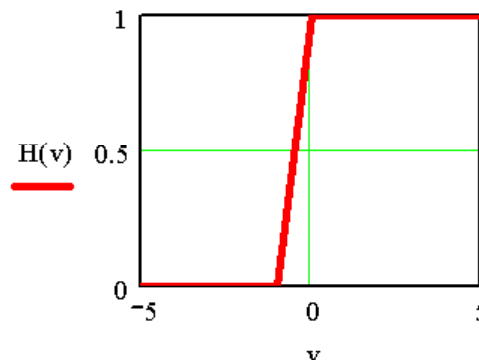
7.4.1. Задекларувати функцію Хевісайда (панель **Programming**), обчислити її значення при додатньому та від'ємному аргументі і побудувати її графік:

$$H(b) := \begin{cases} 0 & \text{if } b < 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$v := -5..5$$

$$H(-3) = 0$$

$$H(3) = 1$$



7.4.2. Задекларувати функцію "факторіал" (панель **Programming**) і порахувати її значення від 5:

$$F(b) := \begin{cases} q \leftarrow 1 \\ \text{for } i \in 1..b \\ \quad q \leftarrow q \cdot i \\ q \end{cases}$$

$$F(5) = 120$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

7.4.3. Збережіть результати Вашої роботи.

Результати роботи:

У результаті проведеної роботи студент повинен продемонструвати викладачеві файл Lab-07.mcd, що містить всі розв'язані, в даній роботі, задачі.