

Київський національний університет імені Тараса Шевченка



Колєнов С. О.

ЦИФРОВА ОБРОБКА ІНФОРМАЦІЇ

**Методичний посібник до лабораторного практикуму
для студентів радіофізичного факультету**

Київ 2008

УДК 681.3

Цифрова обробка інформації: Методичний посібник до лабораторного практикуму для студентів радіофізичного факультету / Колєнов С. О. – Київ: Радіофізичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2008. – 56 с.

Рецензент: доктор фізико-математичних наук, професор Ляшенко М. І. (радіофізичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка)

Методичний посібник до лабораторного практикуму складений у відповідності з навчальною програмою дисципліни "Цифрова обробка інформації", що викладається на кафедрі квантової радіофізики радіофізичного факультету. В описі лабораторних робіт вказані мета роботи, короткі теоретичні відомості, схема експериментальної установки, завдання до роботи, методичні вказівки щодо проведення досліджень та контрольні питання для самостійної роботи студентів. Посібник містить 4 лабораторні роботи, в яких вивчаються дискретизація аналогових сигналів, дискретне перетворення Фур'є, аналіз спектрів дискретних сигналів та цифрова фільтрація.

Ухвалено Вченою радою радіофізичного факультету
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол №4 від 17.11.2008)

© Видавництво радіофізичного факультету
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка, 2008
© Колєнов С. О., 2008

Вступ

Даний лабораторний практикум виконується в рамках дисципліни "Цифрова обробка інформації", що викладається студентам кафедри квантової радіофізики радіофізичного факультету. Метою практикуму є ознайомлення студентів з основними методами та технічною реалізацією цифрової обробки інформації, що включає перетворення аналогових сигналів у дискретні, аналіз дискретних сигналів та цифрових систем, а також цифрову фільтрацію.

В ході підготовки до роботи студенти повинні ознайомитись з описом лабораторної роботи, при наявності вимірювального стенду ознайомитись з його схемою та приладами, що необхідні для виконання роботи, а також з'ясувати призначення окремих елементів стенду та порядок їх увімкнення, скласти необхідні функціональні та принципові схеми, виконати передбачені описом попередні розрахунки. Перед виконанням роботи кожен студент зобов'язаний представити заготовлену форму звіту, що містить необхідні розрахунки, функціональні або принципові схеми. Виконанню роботи передуює перевірка готовності студента до роботи, в ході якої студент отримує питання за темою роботи. При задовільних відповідях студент допускається до виконання роботи.

Звіт по роботі оформлюється за встановленим зразком і повинен містити:

1. Опис явища або приладу, що досліджується у роботі (основні властивості, параметри, характеристики, області застосування).
2. Схему та опис вимірювальної установки (якщо присутня в роботі).
3. Хід роботи та коротке викладення суті вимірювань, що проводяться.
4. Результати вимірювань та розрахунків у вигляді таблиць та графіків, а також формули з прикладами розрахунків.
5. Висновки по роботі та критичні оцінки отриманих результатів, виходячи з співставлення їх з теоретичними розрахунками, довідковими даними чи лекційним матеріалом.

Студент отримує залік по роботі після представлення оформленого звіту та пояснення отриманих результатів. Студент, який не отримав залік по зробленій роботі, до наступної роботи не допускається.

Лабораторна робота № 1

ПЕРЕТВОРЕННЯ СИГНАЛІВ ЗА СХЕМОЮ «АНАЛОГ-КОД-АНАЛОГ»

Мета роботи: вивчення процесів дискретного представлення і зворотного перетворення аналогових сигналів та особливостей зміни сигналів внаслідок такого перетворення.

Література:

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Радио, 1986.
2. Никамин В. А. Аналого-цифровые и цифро-аналоговые преобразователи. Справочник. - М.: Альтекс, 2003. - 224 с.
3. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов. – Спб.: Питер, 2003. – 604 с.
4. Гольденберг Л. М. и др. Цифровая обработка сигналов: Учебное пособие для вузов.- М.: Радио и связь, 1990.- 256 с.

Теоретичні відомості

ДИСКРЕТИЗАЦІЯ СИГНАЛІВ

У першій половині ХХ століття при реєстрації та обробці інформації використовувалися, здебільшого, вимірювальні прилади і пристрої аналогового типу, що працюють у реальному масштабі часу, при цьому навіть для величин, дискретних у силу своєї природи, застосовувалося перетворення дискретних сигналів в аналогову форму. Положення змінилося з широким поширенням мікропроцесорної техніки та ЕОМ. Цифрова реєстрація та обробка інформації виявилася більш досконалою, точною, універсальною та гнучкою. Потужність і водночас простота цифрової обробки сигналів настільки переважають аналогову, що перетворення аналогових по природі сигналів у цифрову форму давно стало виробничим стандартом.

Під дискретизацією сигналів розуміють перетворення функцій неперервних змінних у функції дискретних змінних, за якими вихідні неперервні функції можуть бути відновлені із заданою точністю. Роль відліків виконують квантовані значення функцій у дискретній шкалі координат. Під квантуванням розуміють перетворення неперервної за значеннями величини у величину з дискретною шкалою значень з кінцевої множини дозволених, які називають рівнями квантування. Якщо рівні квантування нумеровані, то результатом перетворення є число, що може бути виражене в будь-якій числовій системі.

Дискретизація аналогового сигналу може бути *рівномірною* або *нерівномірною*. Дискретизація зветься *рівномірною* з частотою $\nu_d = 1/\Delta t$, якщо значення Δt постійне вздовж всього діапазону перетворення сигналу. При нерівномірній дискретизації значення Δt між відліками може змінюватись за заданою програмою або в залежності від зміни яких-небудь параметрів сигналу. Природною вимогою до вибору частоти дискретизації є внесення мінімальних спотворень у динаміку зміни сигнальних функцій. Логічно думати, що спотворення інформації будуть тим менше, чим вище частота дискретизації. З іншого боку очевидно, що чим більше значення, тим більше кількість цифрових даних, що відображають сигнал, і тим більший час потрібний на їх обробку. В оптимальному варіанті значення частоти дискретизації ν_d сигналу повинне бути необхідним і достатнім для обробки інформаційного сигналу із заданою точністю.

Припустимо, що для обробки задається довільний аналоговий сигнал $f(t)$, що має фур'є-образ $F(\nu)$. Рівномірна дискретизація неперервного сигналу $f(t)$ з частотою ν_d з математичної позиції означає множення функції $f(t)$ на гребінчасту функцію – суму імпульсів Дірака

$$\text{Ш}_{\Delta t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t), \quad (1)$$

що розділені проміжками $\Delta t = 1/\nu_d$. Тоді дискретизований сигнал можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= f(t) \cdot \text{Ш}_{\Delta t}(t) = f(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t). \end{aligned} \quad (2)$$

З врахуванням відомого перетворення Фур'є гребінчастої функції $\text{Ш}_{\Delta t}(t) \Leftrightarrow \nu_d \cdot \text{Ш}_{\nu_d}(\nu)$ фур'є-образ дискретної функції $\hat{f}(t)$ дорівнює:

$$\begin{aligned}\hat{F}(\nu) &= F(\nu) * \nu_d \cdot \text{Ш}_{\nu_d}(\nu) = \nu_d \cdot F(\nu) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - k\nu_d) = \\ &= \nu_d \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\nu - k\nu_d).\end{aligned}\quad (3)$$

З виразу випливає, що спектр дискретного сигналу є *неперервною періодичною функцією* з періодом ν_d , що співпадає з спектральною функцією $\nu_d \cdot F(\nu)$ неперервного сигналу $f(t)$ в межах центрального періоду від $-\nu_N$ до ν_N , де $\nu_N = 1/2\Delta t = \nu_d/2$. Частоту ν_N (або для кругової частоти $\omega_N = \pi/\Delta t$) називають *частотою Найквіста*, а центральний період функції $\hat{F}(\nu)$ називають *головним частотним діапазоном*.

Приклади рівномірної дискретизації аналогових сигналів $f_1(t) = e^{-a|t|}$ та $f_2(t) = e^{-bt^2}$ (дискретні відліки нанесені кружками) та спектри цих дискретних сигналів наведені на рисунках 1 та 2.

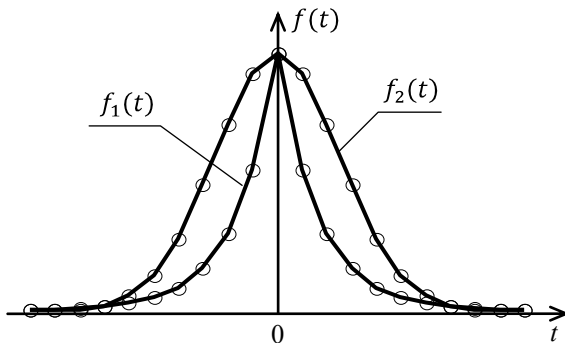


Рис. 1. Дискретні сигнали.

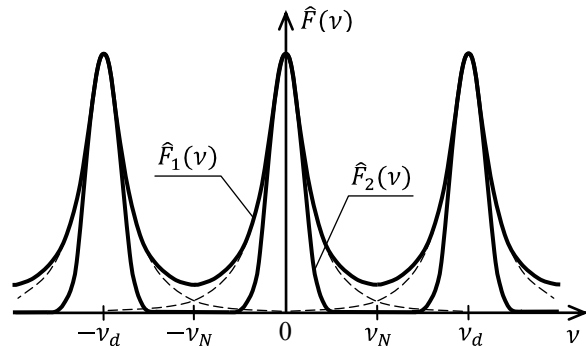


Рис. 2. Спектри дискретних сигналів.

Для того щоб періодичне повторення спектру, викликане дискретизацією аналогового сигналу, не змінювало спектр в головному частотному діапазоні (по відношенню до спектру вихідного аналогового сигналу), необхідно і достатньо, щоб максимальні частотні складові ν_{max} в спектрі аналогового сигналу не перевищували частоти Найквіста ($\nu_{max} \leq \nu_N = \nu_d/2$). Це означає, що частота дискретизації сигналу повинна бути принаймні вдвічі більшою за максимальну частотну складову в спектрі сигналу:

$$\nu_d = \frac{1}{\Delta t} \geq 2\nu_{max}, \quad (4)$$

що забезпечує вихід спектру на нульові значення на кінцях головного діапазону, як це має місце для спектру $\hat{F}_2(\nu)$ на рисунку 2. Це твердження також відоме як *теорема про рівномірну дискретизацію* або *теорема Найквіста*. У вітчизняній літературі умову (4) здебільшого називають *теоремою відліків Котельникова-Шеннона*.

Отже, іншими словами, на одному періоді коливань з частотою ν_{max} повинно бути мінімум дві точки відліку. Зрозуміло, що по одній точці відліку на періоді гармонічного сигналу неможливо визначити частоту та фазу даної гармоніки. Якщо умова (4) порушується, спотворення частотного спектру вихідного сигналу неминучі. Так на рисунку 2 можна наочно побачити, що частота дискретизації для сигналу $f_1(t)$ даній умові не задовольняє, спектри періодів перекрилися, і результуючий спектр дискретних відліків сигналу $f_1(t)$ відрізняється від фактичного спектру цього сигналу (фактичний спектр та його періодичні повторення показані пунктиром).

Характер виникаючих спотворень у часовій області при порушенні умови (4) можна наочно побачити на рисунку 3. На рисунку показані три можливі варіанти співвідношення частот гармонічних сигналів з

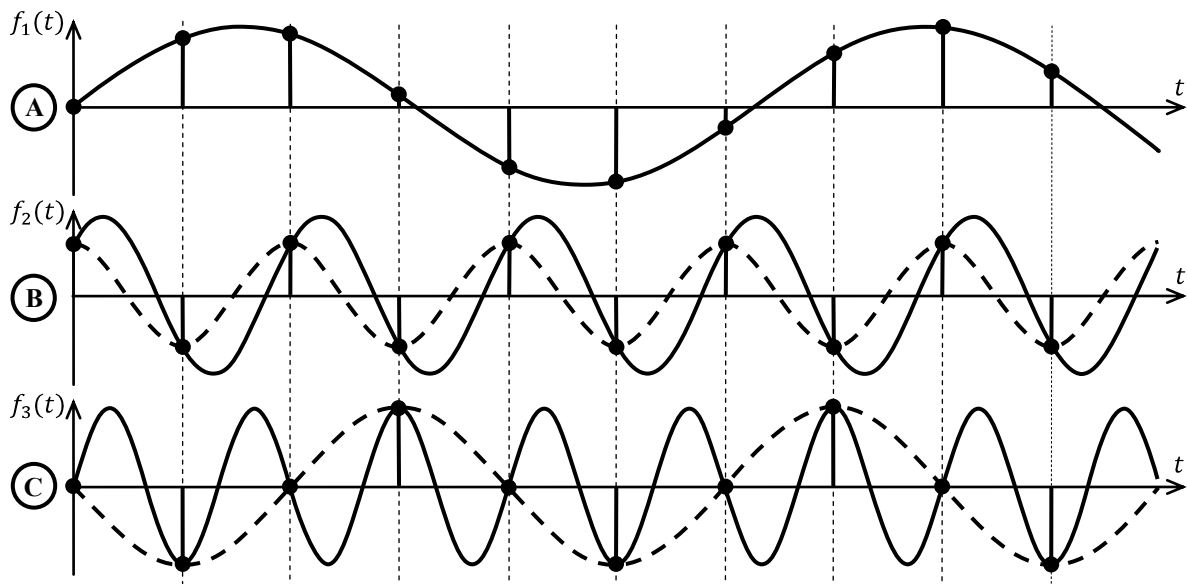


Рис. 3. Наслідки дискретизації гармонік з різною частотою:

- А – частота сигналу менша за частоту Найквіста;
- В – частота сигналу дорівнює частоті Найквіста;
- С – частота сигналу більша за частоту Найквіста.

постійною частотою їх дискретизації. Якщо частота гармонійного сигналу менша за частоту Найквіста, як показано на рис. 3А, то дискретним відлікам може відповідати тільки вихідна гармоніка, амплітуда, фаза та частота якої можуть бути визначені однозначно. Якщо частота гармонічного сигналу дорівнює частоті Найквіста, як показано на рис. 3В, то з дискретних відліків однозначно можна визначити тільки частоту цього сигналу, і то при умові, що початкова фаза сигналу не співпадає з початковою фазою частоти дискретизації (в цьому випадку усі відліки є нульовими). Якщо ж частота гармонічного сигналу більша за частоту Найквіста, як показано на рис. 3С, то значення частоти та фази коливань, визначені з дискретних відліків, будуть спотворені (показано пунктиром). Це так званий ефект *появи хибних (що здаються) частот (aliasing)*. Частоти гармонічних коливань вищі за частоту Найквіста як би дзеркально “віддзеркалюються” у головний частотний діапазон від його меж (на частоті Найквіста), що можна побачити на рисунку 2 для дійсного спектру сигналу $\hat{F}_1(\nu)$, що показаний пунктиром. Цей ефект аналогічний усім відомому ефекту зворотного обертання коліс автомобіля (і будь-який інших об’єктів, що швидко обертаються) на екранах кіно та телевізорів, коли швидкість їх обертання починає перевищувати частоту зміни кадрів.

Виходячи з того, що спектр дискретизованого сигналу є сумою зсунутих копій спектру аналогового сигналу з кроком зсуву, що дорівнює частоті дискретизації, очевидно, що якщо спектри копій не перекриваються, то по центральній копії спектру дискретного сигналу можна відтворити вихідний аналоговий сигнал з абсолютною точністю. Помножив функцію (3) на прямокутну вагову функцію $\Pi_{\nu_d}(\nu)$, що дорівнює одиниці в межах головного частотного діапазону $\left[-\frac{\nu_d}{2}, \frac{\nu_d}{2}\right]$ і нулю за його межами, отримаємо неперервний спектр в нескінчених за частотою межах, що дорівнює спектру $\nu_d \cdot F(\nu)$ в границях головного частотного діапазону:

$$\nu_d \cdot F(\nu) = \nu_d \cdot [F(\nu) * \text{Ш}_{\nu_d}(\nu)] \cdot \Pi_{\nu_d}(\nu). \quad (5)$$

Обернене перетворення Фур’є такого спектру повинно давати скінчений та неперервний сигнал:

$$f(t) = \hat{f}(t) * \text{sinc}(\pi \nu_d t) = \text{sinc}(\pi \nu_d t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t) \cdot \delta(t - k\Delta t). \quad (6)$$

Дискретизований сигнал $\hat{f}(t)$ є сумою послідовних вагових імпульсів, що зсунуті на інтервал Δt . При проходженні такого сигналу крізь фільтр (систему) з імпульсних відгуком $h(t) = \text{sinc}(\pi v_d t) = \sin(\pi v_d t) / \pi v_d t$ серія вагових імпульсів збудить на виході відповідну послідовну серію зсунутих і масштабованих копій оператора фільтру. Звідси сигнал на виході є сумою зсунутих вагових імпульсних відгуків фільтра, де значення ваги визначається відліками дискретного сигналу:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t) \cdot \text{sinc}[\pi(t/\Delta t - k)]. \quad (7)$$

Ця кінцева формула носить назву інтерполяційного ряду Котельникова-Шеннона. З неї і випливає сутність теореми відліків Котельникова-Шеннона, що якщо найбільша частота в спектрі довільної неперервної функції $f(t)$ не перевищує частоти її дискретизації, то вона без втрати точності може бути представлена у вигляді числової послідовності дискретних значень $f(k\Delta t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, і однозначно відтворена з цієї послідовності.

Фактично, ряд (7) є розкладом сигналу за системою ортогональних функцій $\text{sinc}[\pi(t/\Delta t - k)]$. Це простіше та зрозуміліше, ніж розклад в ряди Фур'є, що можна побачити на рисунку 4. Значення функції відліків в кожній точці дорівнює самому відліку (максимальне значення) і нулю у всіх інших точках дискретного сигналу. Значення аналогового сигналу в

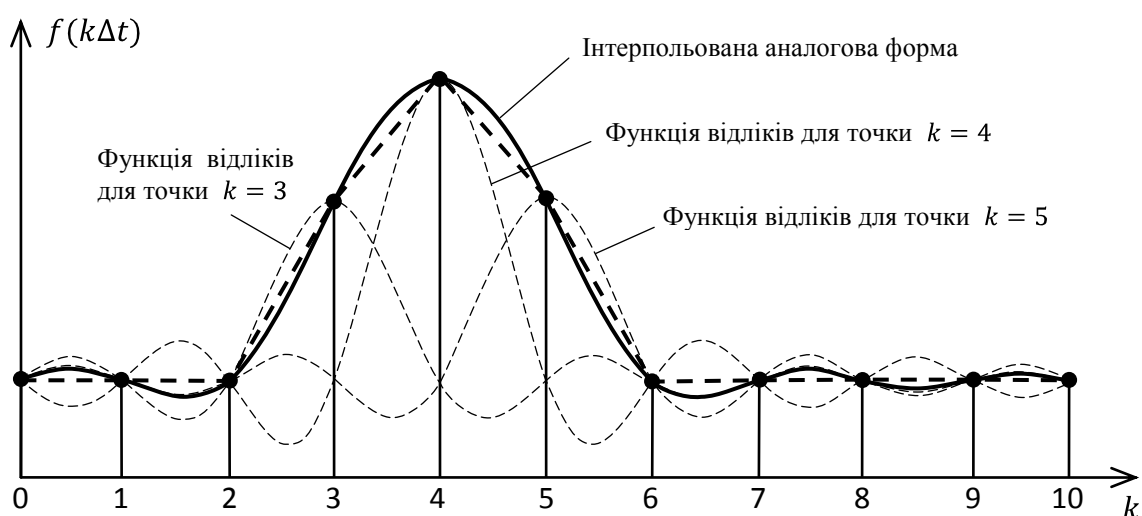


Рис. 4. Відновлення неперервного сигналу з дискретних відліків шляхом інтерполяції функції рядом Котельникова-Шеннона.

інтервалах між відліками утворюються суперпозицією значень функцій відліків у всіх точках, осциляції яких доходять до цього інтервалу. В принципі осциляції функції відліків є нескінченими і відновлення аналогового сигналу відбувається за нескінченим аргументом. Що стосується амплітуди осциляцій, то вона спадає достатньо повільно. Проте, як неважко помітити, функція відліків змінює свій знак на кожному інтервалі дискретизації. Це призводить до того, що осциляції кривої, яка відновлюється, згасають достатньо швидко і, якщо функція не має суттєвих викидів і великих перепадів значень, то ці осциляції визначаються здебільшого відліками, що є найближчими до інтервалу інтерполяції. Отже, даний факт дозволяє обмежити інтервал сумування у формулі (7) певним окомом поточних точок інтерполяції.

ЦИФРО-АНАЛОГОВЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДИСКРЕТНИХ СИГНАЛІВ

Цифро-аналогове перетворення є процесом зворотнім аналогово-цифровому перетворенню. В аналогово-цифровому перетворенні задача зводиться до квантування неперервного процесу і представлення його послідовністю двійкових чисел для здійснення подальшої обробки, наприклад, за допомогою електронно-обчислювальної машини (ЕОМ). В цифро-аналоговому перетворенні постає задача перетворення послідовності двійкових чисел, отриманої, наприклад, в результаті роботи ЕОМ, в неперервний сигнал, який в подальшому можна використовувати в аналогових пристроях та системах.

Перетворення сигналів з цифрової форми в аналогову, зазвичай, являє собою процес перетворення цифрової послідовності двійкових чисел в напругу або струм, що пропорційні значенням цифрового коду, і складається з двох основних операцій: 1) перетворення цифрової послідовності в імпульсний сигнал (декодування); 2) перетворення імпульсного сигналу в неперервний сигнал. Процес цифро-аналогового перетворення можна пояснити структурною схемою на рисунку 5.



Рис. 5. Процес цифро-аналогового перетворення.

В цілому декодуючий пристрій та синтезуючий каскад мають назву перетворювача цифрових величин в аналогові або *цифро-аналогового перетворювача* (ЦАП). Роль синтезуючого каскаду в схемах ЦАП зазвичай виконує звичайний фільтр низької частоти (ФНЧ).

Схемотехніка ЦАП вельми різноманітна. На рисунку 6 представлена відповідна класифікаційна схема, побудована за схемотехнічними ознаками.

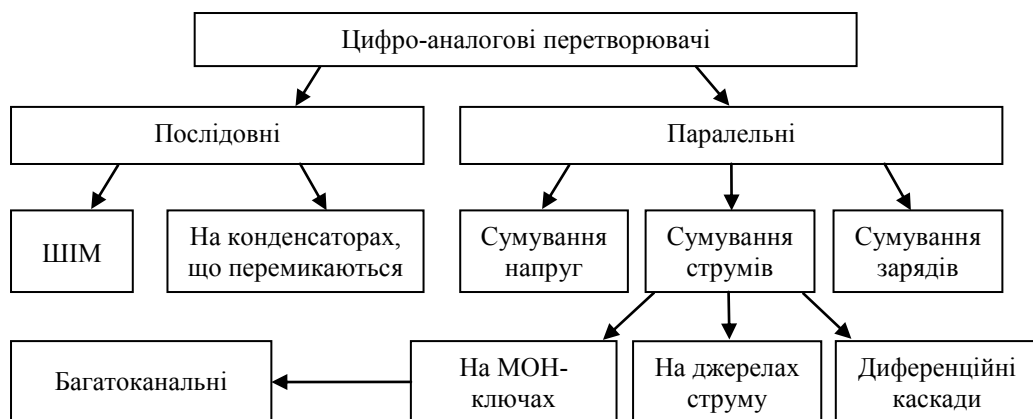


Рис. 6. Класифікація ЦАП.

Основним елементом схеми ЦАП, від якого залежить точність відтворення аналогового сигналу, є декодуючий пристрій. Як було зазначено вище, основною задачею декодуючого пристрою є перетворення послідовності двійкових чисел у відповідні рівні напруги або струму. При цьому встановлення нового рівня вихідного сигналу буде відбуватися синхронно з роботою тактового генератора, що керує частотою надходження даної послідовності двійкових чисел на вхід ЦАП. Отже, після декодуючого пристрою утворюватиметься аналоговий сигнал з *амплітудно-імпульсною модуляцією*. Така назва обумовлюється тим, що вихідний сигнал можна описати як послідовність прямокутних імпульсів з амплітудами, що визначаються відліками вхідного сигналу. Спектр такого сигналу буде дещо відрізнятися від спектру звичайного аналогового сигналу без модуляції і буде суттєво залежати від параметрів імпульсів, що утворюють вихідний сигнал. Для ілюстрації цього зручно розглянути, як змінюється спектр аналогового сигналу при його амплітудно-імпульсній модуляції імпульсами прямокутної форми (рисунок 7). Огинаюча спектру

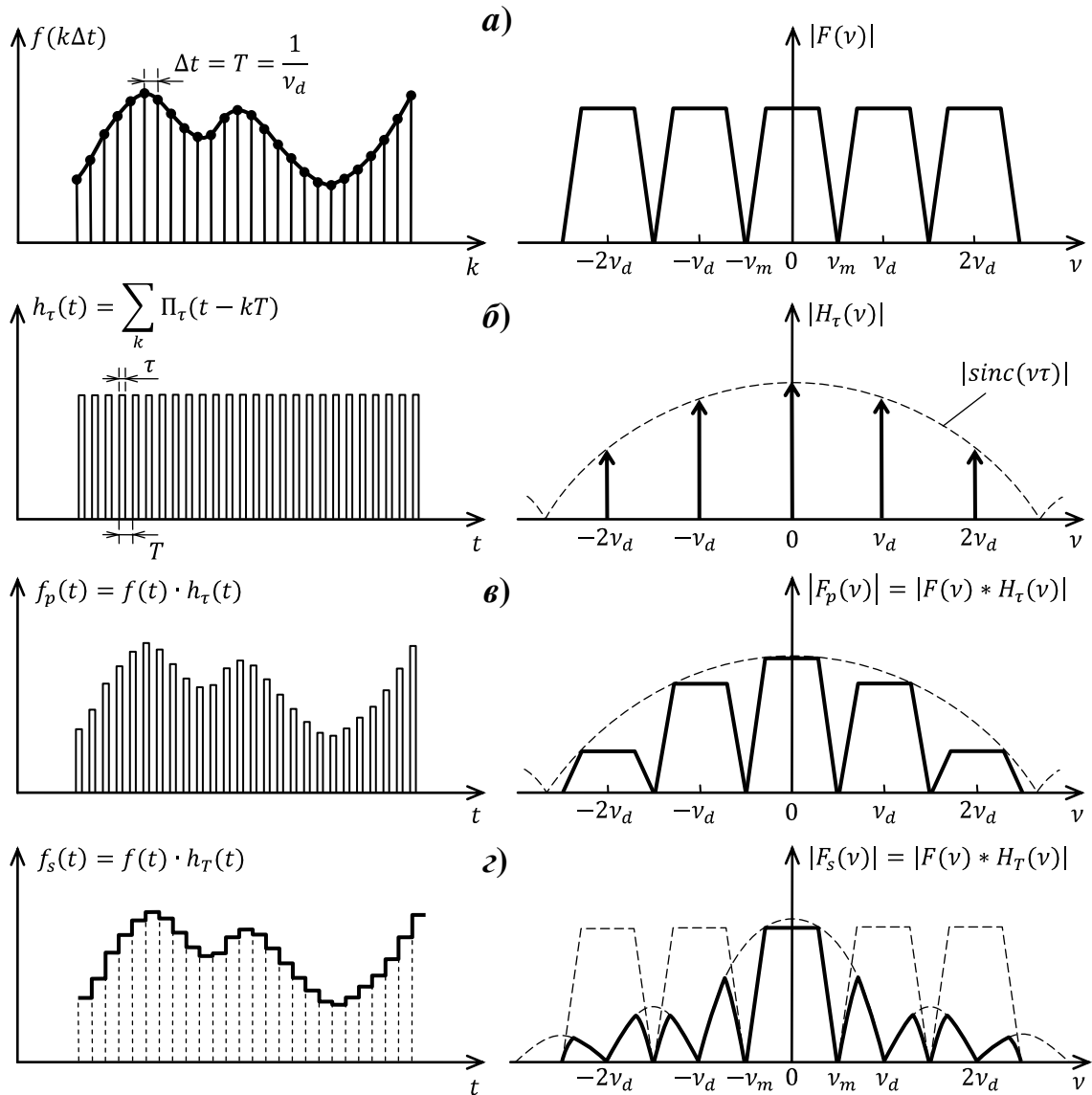


Рис. 7. Зміна спектру дискретного сигналу при декодуванні в ЦАП.

амплітуд серії імпульсів прямокутної форми має вигляд модуля функції *sinc* (рис. 7б). Оскільки при імпульсній модуляції вихідний сигнал все ще є дискретним за часом, то його спектр, як і спектр дискретного сигналу буде складатися з копій спектру неперервного сигналу (рис. 7а), які повторюються з частотою дискретизації, але складові цього спектру будуть зважені на коефіцієнти ряду Фур'є серії імпульсів, які використовувались при імпульсній модуляції (рис. 7в). Якщо б тривалість цих імпульсів прямувала до нуля, то спектр вихідного сигналу мало чим відрізнявся від спектру дискретного сигналу. Але здебільшого сигнал з виходу ЦАП є реалізацією операції типу «вибірка-зберігання». Це означає, що сигнал з амплітудною імпульсною модуляцією складається з імпульсів, тривалість

яких співпадає з періодом повторення цих імпульсів, що відповідно призводить до більш суттєвого пригнічення спектральних складових дзеркальних спектрів (рис. 7з).

Експериментальна установка

Схема експериментальної установки зображена на рисунку 8. Вона складається з генератора гармонічних сигналів (ГГС), спотворювача, аналого-цифрового перетворювача (АЦП), цифро-аналогового перетворювача (ЦАП), генератора імпульсів (ГІ), вимірювача нелінійних спотворень (ВНС), перемикача, осцилографа та аналізатора спектрів (АС).

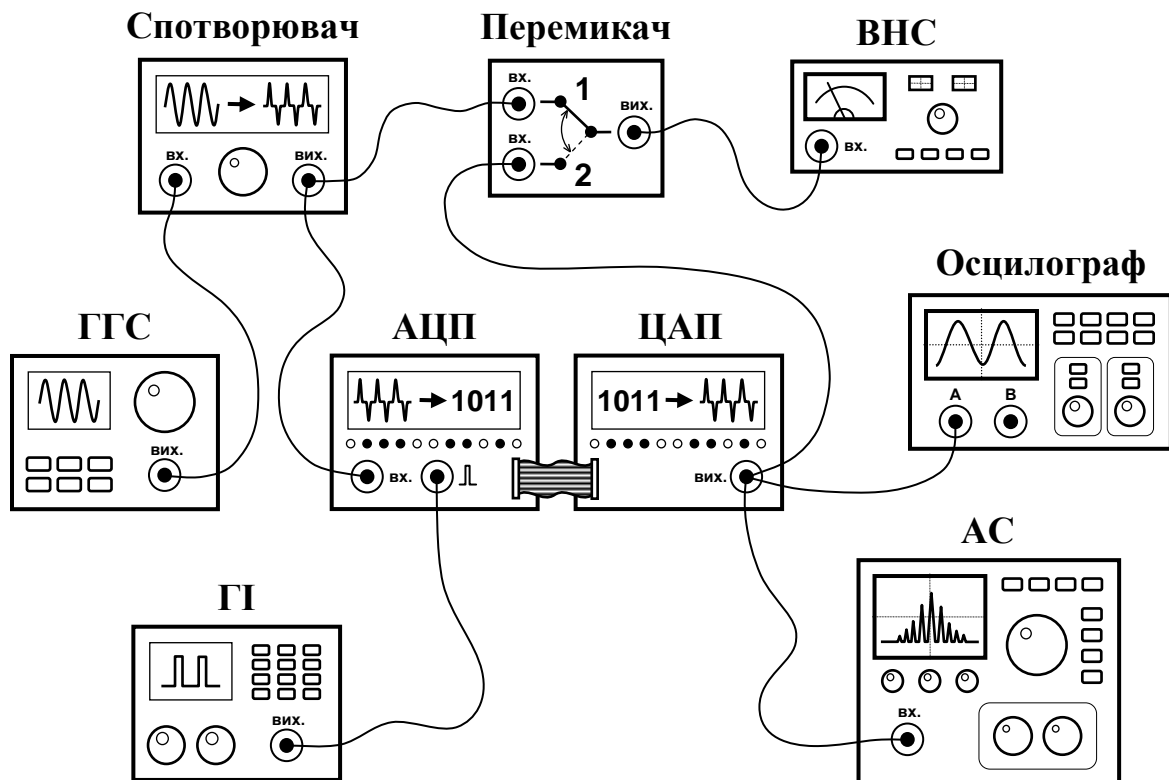


Рис. 8. Схема експериментальної установки.

Сигнал з виходу генератора гармонічних сигналів подається на вхід спотворювача, який призначений для розширення спектру вхідного сигналу. Кількість гармонік в спектрі сигналу на виході спотворювача регулюється за допомогою розташованого на спотворювачі потенціометра. Для кількісної оцінки величини спотворення отриманий сигнал подається

на вхід вимірювача нелінійних спотворень. Далі сигнал з виходу спотворювача дискретизується, перетворюючись у цифровий код, а потім знову повертається до аналогової форми, проходячи через систему послідовно з'єднаних АЦП та ЦАП, які тактуються за допомогою сигналу, що надходить з генератора імпульсів. Сигнал на виході ЦАП контролюється за допомогою осцилографа. Загальне спотворення сигналу, отриманого з виходу ЦАП, після його дискретизації та відновлення аналізується за допомогою вимірювача нелінійних спотворень, а спектр цього сигналу аналізується за допомогою аналізатора спектрів.

Завдання

1. Ознайомитись з рекомендованою літературою та роботою приладів даної лабораторної роботи. Особливу увагу приділити наступним питанням:
 - Теорема відліків.
 - Структурна схема установки лабораторної роботи.
 - Основні принципи та особливості роботи вимірювача коефіцієнту нелінійних спотворень.
 - Принцип роботи аналізатора спектрів.
2. Зібрати експериментальну установку у відповідності зі схемою, зображеною на рисунку 8.
3. Визначити залежність коефіцієнта спотворень перетворених сигналів, як функції частоти дискретизації – $\eta = f(\nu_d)$, для двох значень початкового коефіцієнту спотворення η_{01} та η_{02} (значення задаються викладачем).
4. Для заданих значень початкового коефіцієнту спотворення η_{01} та η_{02} визначити мінімальні значення частоти дискретизації, при яких відбувається відтворення оцифрованих сигналів з заданою точністю. По величині цих частот визначити максимальні частоти та номери гармонік, що формують сигнал.
5. За допомогою аналізатора спектрів провести аналіз спектру сигналу з виходу ЦАП, знайти амплітуди гармонік, якими можна знехтувати в результаті дискретного представлення сигналу при даних частотах дискретизації.
6. Зробити висновки по роботі та оформити звіт.

Методичні вказівки

До пункту 3 завдання: 1) для встановлення початкового коефіцієнту спотворення встановіть перемикач (див. рис. 8) в положення "1", та обертайте ручку потенціометра на спотворювачі до тих пір, доки не встановиться задане значення коефіцієнту спотворення на індикаторі вимірювача нелінійних спотворень; 2) зверніть увагу на те, що при зміні початкового коефіцієнту спотворення призводить до змін амплітуди сигналу з виходу спотворювача, що може вплинути на достовірність вимірювань у вимірювачі нелінійних спотворень; 3) після встановлення початкового коефіцієнту спотворення перевірте за допомогою осцилографа, що сигнал на вході АЦП не перевищує максимально допустимої амплітуди, оскільки це буде призводити до додаткового небажаного спотворення сигналу; 4) для вимірювання залежності коефіцієнту спотворення від частоти дискретизації встановіть перемикач (див. рис. 8) у положення "2"; 5) частоту дискретизації сигналу змінюйте шляхом зміни частоти вихідного сигналу генератора імпульсів (при цьому враховуйте обмеження, що накладаються на частоту дискретизації за теоремою відліків); 6) отримані залежності відобразити графічно, з графіків залежностей визначте максимальну точність відтворення, яку вдається досягти при заданому початковому спотворенні (поясніть отриманий результат).

До пункту 5 завдання: 1) для одного з заданих початкових спотворень та визначеної в пункті 4 завдання частоти дискретизації дослідити спектр сигналу з виходу ЦАП в першій зоні Найквіста (від 0 до $\nu_d/2$) шляхом визначення ослаблень усіх гармонік спектру сигналу по відношенню до першої гармоніки (в дБ); 2) отриманий спектр замалюйте із зазначенням номерів та амплітуд гармонік, що утворюють сигнал (гармоніки, що мають ослаблення більше ніж 40дБ не враховувати); 3) зробіть порівняння отриманих результатів з результатами, отриманими в пункті 4 завдання; 4) визначте співвідношення між амплітудами перших гармонік сигналу у всіх зонах Найквіста (в дБ), отримані результати представте графічно та поясніть причину та характер змін в амплітудах гармонік.

Контрольні питання

1. Які види дискретизації сигналів Ви знаєте?
2. Чим відрізняються рівномірна та нерівномірна дискретизації? В яких випадках краще застосовувати той чи інший тип дискретизації?
3. Чим відрізняється спектр дискретного сигналу від спектру неперервного сигналу?
4. Що таке частота Найквіста?
5. Сформулюйте теорему відліків Котельникова-Шеннона.
6. До яких наслідків може призвести дискретизація сигналу з частотою, що не задовільняє умовам теореми відліків?
7. З якою точністю можна оцифрувати сигнал, амплітуда якого змінюється в діапазоні від -1 до 1 , за допомогою 12-бітного АЦП?
8. Поясніть процес відтворення сигналу за його відліками у часовій області.
9. Які Ви знаєте типи цифро-аналогових перетворювачів?
10. Від чого залежить точність відтворення сигналу за допомогою ЦАП?
11. Для чого використовується ФНЧ на виході ЦАП?
12. З яких причин можуть виникати додаткові спотворення в аналоговому сигналі, що відтворюється з цифрової послідовності?

Лабораторна робота № 2

АНАЛІЗ СПЕКТРІВ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Мета роботи: вивчення особливостей спектрів відео сигналів, впливу на спектри ширини, кількості імпульсів, форми сигналів; вивчення методів дискретного та швидкого перетворення Фур'є, порівняння методів за швидкістю; спостереження ефекту Гіббса.

Література:

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Радио, 1986.
2. Харкевич А. А. Спектри і аналіз. – М.: Мир, 1987.
3. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов. – Спб.: Питер, 2003. – 604 с.
4. Гольденберг Л.М. и др. Цифровая обработка сигналов: Учебное пособие для вузов.- М.: Радио и связь, 1990.- 256 с.

Теоретичні відомості

РЯД ФУР'Є ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Будь-який періодичний сигнал, який описується функцією $f(t)$ з періодом повторення T можна розкласти в ряд Фур'є. Тригонометрична форма ряду Фур'є має вигляд:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)], \quad (1)$$

де $\omega_0 = 2\pi/T$ – циклічна частота повторення сигналу,

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Інакше вираз (1) можна записати у вигляді:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(k\omega_0 t - \Phi_k)], \quad (2)$$

де $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ – амплітуди гармонійних складових (гармоніки), k – номер гармоніки, $\Phi_k = \arctg \frac{b_k}{a_k}$ – початкові фази гармонійних складових.

Сукупність амплітуд A_k гармонійних складових утворює *амплітудну спектральну характеристику (амплітудний спектр)* функції $f(t)$, а сукупність початкових фаз Φ_k – *фазову спектральну характеристику* функції $f(t)$. Таким чином, для будь-якої періодичної функції спектральні характеристики будуть **дискретними**.

З наведених вище формул можна отримати спектральні характеристики, які мають лише додатні частоти, оскільки $k \in [0, \infty)$. Проте необхідно зазначити, що дискретний спектр може чати не тільки додатні, а і від’ємні частоти. Це легко побачити, якщо записати ряд Фур’є у комплексній (експотенційній) формі:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_k \cdot e^{ik\omega_0 t}, \quad (3)$$

де \tilde{A}_k є комплексним коефіцієнтом Фур’є, що дорівнює

$$\tilde{A}_k = A_k e^{-i\Phi_k} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-ik\omega_0 t} dt. \quad (4)$$

Оскільки в даному випадку $k \in (-\infty, \infty)$, то спектральні характеристики A_k та Φ_k будуть утворювати дискретний спектр, який має як додатні, так і від’ємні частоти. На практиці функція $f(t)$ завжди є дійсною функцією. Тому від’ємні частоти фактично не несуть ніякої додаткової інформації, що можна легко показати, використовуючи властивості симетрії модуля та фази фур’є-образу, з яких випливає, що внаслідок дійсності функції $f(t)$ при заміні додатних частот на від’ємні амплітуди гармонійних складових не змінюються, а початкові фази змінюються на протилежні (рис. 1), тобто амплітудний спектр є парною

функцією: $A(k\omega_0) = A(-k\omega_0)$, а фазовий спектр є непарною функцією: $\Phi(k\omega_0) = -\Phi(-k\omega_0)$. Через це, аналізуючи спектральні характеристики сигналів, від'ємними частотами зазвичай нехтують.

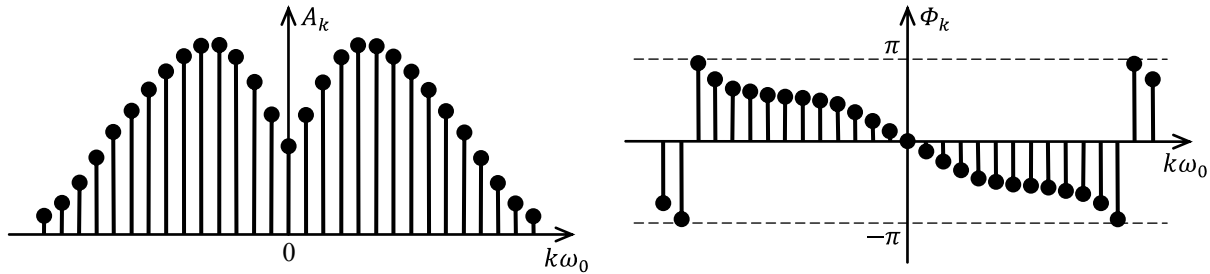


Рис. 1. Амплітудна A_k та фазова Φ_k спектральні характеристики періодичної функції.

При розгляді спектру фаз необхідно враховувати, періодичність 2π кутової частоти (при збільшенні фазового значення більше ніж на π або його зменшенні менше ніж $-\pi$ відбувається "стрибок" цього значення на -2π або $+2\pi$ відповідно).

Розглянемо тепер питання побудови спектру неперіодичного сигналу. Для цього скористаємось розкладом в ряд (3) періодичної функції $f(t)$ з періодом повторення T . Якщо спрямувати період повторення T до нескінченності, то функцію $f(t)$ можна розглядати як неперіодичний неперервний сигнал. Тоді вирази (3) та (4) будуть мати місце при умовах: $T \rightarrow \infty$, частота $\omega_0 = 2\pi/T$ прямує до нескінченно малої величини $d\omega$, відстань між гармоніками стає нескінченно малою, кількість гармонік k стає нескінченно великою, $k\omega_0$ набуває будь-яких значень і змінюється від $-\infty$ до $+\infty$. За таких умов ряд (3) перетворюється на інтеграл, де комплексні коефіцієнти розраховуються згідно (4). Вираз (4) у такому випадку можна переписати у вигляді:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (5)$$

Вираз (5) називається *прямим перетворенням Фур'є*. *Зворотнє перетворення Фур'є* записується наступним чином:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (6)$$

Функція $F(\omega)$ називається *спектральною густиною сигналу* $f(t)$ і дає змогу виявити частоти, які містяться в деякому залежному від часу сигналі. З теорії систем відомо, що за допомогою перетворення Фур'є обмеженої у часі функції $f(t)$ можна визначити спектр $F(\omega)$ і, навпаки – через зворотну трансформацію Фур'є можна з спектральної функції $F(\omega)$ визначити функцію залежності від часу $f(t)$. Спектральна функція $F(\omega)$ є комплексною функцією з дійсною та уявною частинами, інакше кажучи, з модулем та фазою:

$$F(\omega) = |F(\omega)| \cdot e^{-i\Phi(\omega)}. \quad (7)$$

Модуль спектральної густини $|F(\omega)|$ є парною функцією змінної ω і називається *амплітудно-частотною характеристикою* (АЧХ) сигналу. Фаза $\Phi(\omega)$ є непарною функцією і називається *фазочастотною характеристикою* (ФЧХ) сигналу.

Розглянемо, як приклад, спектри декількох стандартних сигналів, які досить часто зустрічаються в радіотехніці.

1. Прямокутний імпульс. Прямокутний імпульс є функцією, що представляється у вигляді (рис. 2):

$$\Pi_A(t) = \begin{cases} \frac{1}{2A}, & |t| < A, \\ 0, & |t| > A. \end{cases} \quad (8)$$

Спектр цієї функції дорівнює

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_A(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-A}^A \frac{1}{2A} e^{-i\omega t} dt = \frac{\sin \omega A}{\omega A} = \text{sinc} \frac{\omega A}{\pi}. \quad (9)$$

Функція $\text{sinc} \frac{\omega A}{\pi} = \frac{\sin x}{x}$ називається *функцією відліків*.

2. Трикутний імпульс. Функцію трикутного імпульсу (рис. 3) можна записати у вигляді

$$\Lambda_A(t) = \begin{cases} \frac{1}{A} \left(1 - \frac{|x|}{A} \right), & |t| < A, \\ 0, & |t| > A. \end{cases} \quad (10)$$

Легко пересвідчитись, що трикутний імпульс (10) є інтеграл від двох прямокутних імпульсів різної полярності, поділених на A . Як відомо з

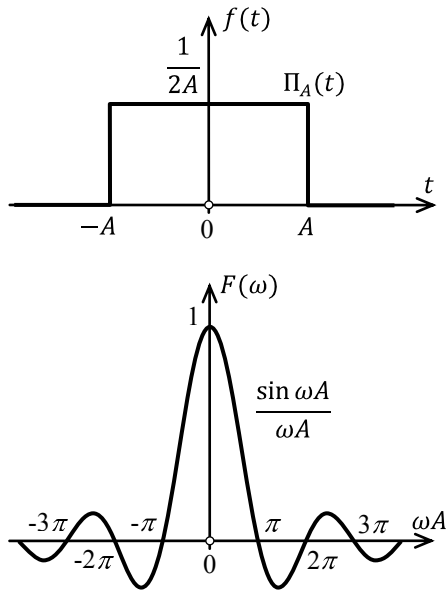


Рис. 2. Графіки прямокутного імпульсу $\Pi_A(t)$ та його спектральної функції $\text{sinc} \frac{\omega A}{\pi}$, де $2A$ – ширина прямокутного імпульсу.

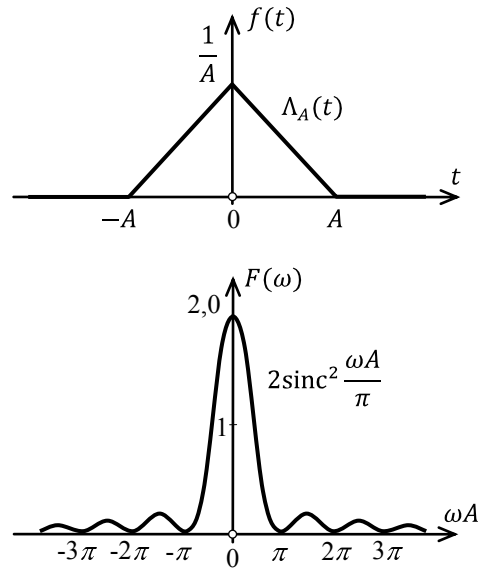


Рис. 3. Графіки трикутного імпульсу $\Lambda_A(t)$ та його спектральної функції $2\text{sinc}^2 \frac{\omega A}{\pi}$, де $2A$ – ширина трикутного імпульсу.

властивостей перетворення Фур'є, при інтегруванні вихідної функції $h(t)$ її спектр $H(\omega)$ змінюється наступним чином:

$$H(\omega) \rightarrow F(\omega) = \frac{H(\omega)}{i\omega}.$$

Якщо записати функцію $h(t)$ у вигляді суми двох прямокутних імпульсів різної полярності:

$$h(t) = \Pi_A(t - A) - \Pi_A(t + A), \quad (11)$$

то фур'є-образ такої функції, виходячи з властивостей перетворення Фур'є, дорівнює

$$H(\omega) = \frac{\sin \omega A}{\omega A} (e^{i\omega A} - e^{-i\omega A}) = 2i \frac{\sin^2 \omega A}{\omega A}. \quad (12)$$

За допомогою цього виразу тепер можна отримати спектральну функцію трикутного імпульсу:

$$F(\omega) = 2i \frac{\sin^2 \omega A}{\omega A} \frac{1}{i\omega} \cdot \frac{1}{A} = 2 \frac{\sin^2 \omega A}{\omega^2 A^2} = 2 \text{sinc}^2 \frac{\omega A}{\pi}. \quad (13)$$

2. Поодинокий дзвіноподібний сигнал. Функція такого сигналу має наступний вигляд:

$$f(t) = e^{-\beta^2 t^2}. \quad (14)$$

Спектр такого сигналу буде описувати функція:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2 t^2} e^{-i\omega t} dt = e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\beta t + i\frac{\omega}{2\beta}\right)^2} dt = \\ &= \frac{2}{\beta} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx. \end{aligned} \quad (15)$$

Останній інтеграл зводиться до звичайного інтеграла Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

звідси

$$F(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}}. \quad (16)$$

Отже спектр поодинокого дзвіноподібного сигналу має той самий вигляд, що і сам сигнал.

ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Дискретне перетворення Фур'є можна отримати безпосередньо з інтегральних перетворень (5) та (6) шляхом дискретизації аргументів:

$$t \rightarrow t_k = k\Delta t, \quad \omega \rightarrow \omega_n = n\Delta\omega.$$

Тоді співвідношення (5) та (6) перепишуться у вигляді:

$$F(\omega_n) = \Delta t \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k) e^{-i\omega_n k\Delta t}, \quad (17)$$

$$f(t_k) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{it_k n\Delta\omega}. \quad (18)$$

Тут варто нагадати, що дискретизація функції за часом призводить до періодизації її спектру і, навпаки, дискретизація спектру за частотою – до періодизації функції. Отже, звідси можна зробити наступне зауваження. **Для дискретних фур'є перетворень і функція, і її спектр є дискретними та періодичними.**

Розглядаючи вирази (17) та (18) можна побачити, що перетворення Фур'є дискретного сигналу має дві основні реалізаційні проблеми. По-перше, сумування нескінченного числа вхідних відліків в дійсності неможливе, тому потрібен який-небудь спосіб скорочення кількості відліків, що необхідна. По-друге, для реалізації процедури розрахунку потрібно замінити неперервну змінну ω на дискретну, тобто обрати крок дискретизації спектру $\Delta\omega$.

Перша проблема легко вирішується виділенням кінцевого числа відліків або, інакше кажучи, накладанням вікна. При цьому необхідно зауважити, що в цьому випадку **спектр дискретного сигналу буде являти собою згортку фур'є-образу цього сигналу з функцією вікна**. Згідно з теоремою відліків частотний спектр повторюється з періодом, що дорівнює частоті дискретизації ω_d , тому можливо встановити, яка кількість відліків N необхідна для точного опису сигналу, що визначається функцією $f(t)$. При дискретному перетворенні Фур'є кількість спектральних складових, що потрібно розрахувати, зазвичай дорівнює кількості відліків вхідного сигналу N (див. рисунок 4). Якщо покласти, що відстань між частотними відліками в спектрі $\Delta\omega$ є такою, що

$$N\Delta\omega = \omega_d \quad \text{або} \quad \Delta\omega = \omega_d/N. \quad (19)$$

Зазначені рівності дають змогу перетворити неперервну частотну шкалу в дискретну, враховуючи, що $\omega_d = 2\pi/\Delta t$ можна записати:

$$\Delta\omega \cdot \Delta t = \frac{\omega_d}{N} \cdot \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{N}. \quad (20)$$

Після підстановки (20) в (17) та (18) з відповідною заміною аргументів t_k та ω_n номерами відліків для N відліків отримаємо:

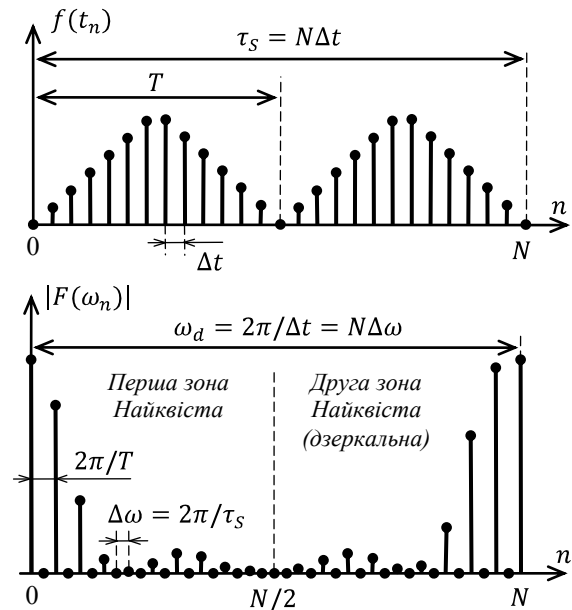


Рис. 4. Дискретизований сигнал $f(t_n)$ та його амплітудний спектр $F(\omega_n)$, отриманий шляхом дискретного перетворення Фур'є.

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot e^{-i \frac{2\pi kn}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (21)$$

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n \cdot e^{i \frac{2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (22)$$

Перетворення (21) та (22) називають *дискретними перетвореннями Фур'є* (ДПФ).

З виразів ДПФ можна побачити, що для розрахунку кожної гармоніки потрібно N операцій комплексного множення та додавання і відповідно N^2 операцій на повне виконання ДПФ. При великих об'ємах масивів даних це може призводити до суттєвих часових витрат. Прискорення розрахунків досягається при використанні швидкого перетворення Фур'є.

ШВИДКЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Оснoву швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) складає проріджування по частоті та пірамідальний алгоритм, який виключає повторний розрахунок членів ряду Фур'є, що періодично повторюються.

Припустимо, що масив чисел f_k містить $N = 2^r$ відліків (r – ціле число). Розділимо цей масив на два проміжних масиви з парними та непарними відліками:

$$f_k' = f_{2k}, \quad f_k'' = f_{2k+1}, \quad 0 \leq k \leq N/2 - 1.$$

Якщо тепер виконати ДПФ кожного з масивів з урахуванням того, що крок дискретизації функції збільшився вдвічі, отримаємо два проміжних спектри, період яких буде дорівнювати $N/2$:

$$f_k' \rightarrow F_n', \quad f_k'' \rightarrow F_n'', \quad 0 \leq n \leq N/2 - 1$$

Для отримання однієї половини спектру F_n складемо отримані спектри з врахуванням того, що відліки функції f_k'' зсунуті відносно функції f_k' на один крок дискретизації:

$$F_n = F_n' + F_n'' \cdot e^{-i \frac{2\pi n}{N}}. \quad (23)$$

Інша половина спектру, що комплексно спряжена з першою, з врахуванням періоду повторення $N/2$ проміжних спектрів визначається виразом:

$$F_{n+N/2} = F_n' + F_n'' \cdot e^{-i \frac{2\pi(n+N/2)}{N}} = F_n' - F_n'' \cdot e^{-i \frac{2\pi n}{N}}. \quad (24)$$

Неважко побачити, що для розрахунку повного спектру в даному випадку знадобиться $N^2/4$ операцій для розрахунку проміжних спектрів плюс ще N операцій комплексного додавання та множення, що створює досить відчутний ефект порівняно із звичайним ДПФ.

Але розділення масивів на дві частини може бути застосовано і до перших проміжних масивів, і до других, і т. і. до тих пір, доки в масивах не залишиться по одному відліку. Таким чином алгоритм перетворення стає пірамідальним алгоритмом перестановок зі складанням/відніманням та з одиничним множенням на значення $e^{-i2\pi n/N}$, що відповідає рівню піраміди. Виходячи з цього, загальна кількість операцій, що необхідна для повного розрахунку спектру дорівнює $N \log_2 N$. Отже, порівняно с ДПФ швидкість розрахунку збільшується в $N/\log_2 N$ разів. Причому чім більше N , тим більший ефект від ШПФ.

Алгоритми прямого та зворотного ШПФ сьогодні широко застосовуються в сучасному програмному забезпеченні для аналізу та обробки цифрових даних.

ЕФЕКТ ГІББСА

На практиці дуже часто доводиться мати справу з розривними ступінчастими функціями. Будь-який стрибок функції містить всі частоти діапазону до нескінченості, тобто являє собою нескінчену кількість синусоїд та косинусоїд. У зв'язку з цим ряд Фур'є такої функції також є нескінченим і дуже повільно згасає. Для того, щоб повністю відтворити форму стрибка цієї функції з ряду Фур'є необхідно виконати зворотне фур'є-перетворення, враховуючи всі члени цього ряду від 0 до нескінченості. Проте, як вже згадувалося вище, при дискретному перетворенні Фур'є кількість членів ряду завжди є обмеженою. Фактично це означає накладення на спектр вікна прямокутної форми, що має певну ширину.

Розглянемо наслідки обмеження (усікання) ряду Фур'є до деякої кінцевої кількості його членів на прикладі моделі сигналу з трьома розривами першого роду (стрибками) (рис. 5). На рисунку наведені значення перших 50 членів ряду Фур'є разом з огинаючою значень модулів коефіцієнтів ряду F_n . На рисунку 6 показана реконструкція сигналу за його спектром при обмеженні числа N членів ряду Фур'є для випадків, коли $N = 8$ (гармоніки першого максимуму спектра, центр якого відповідає головній гармоніці сигналу), $N = 16$ (гармоніки двох перших максимумів

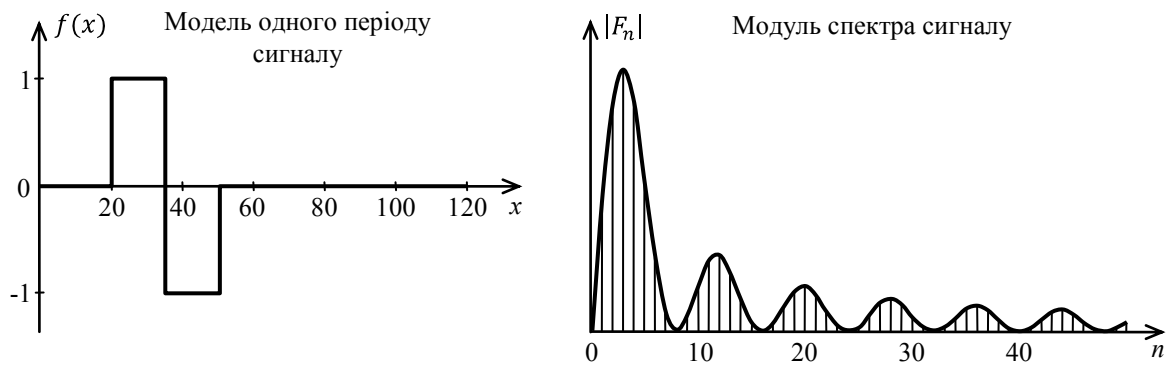


Рис. 5. Розклад сигналу з трьома розривами першого роду у комплексний ряд Фур'є.

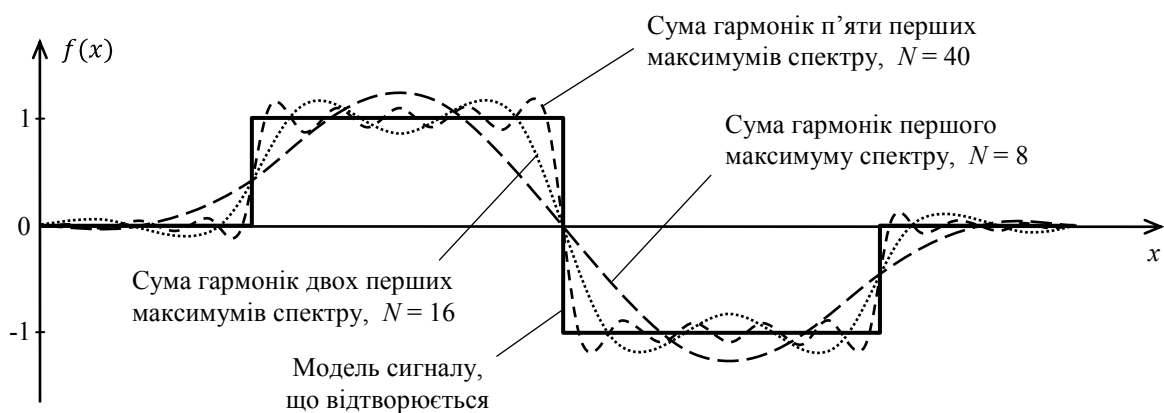


Рис. 6. Реконструкція сигналу з його спектру при обмеженні кількості гармонік.

спектру) та $N = 40$ (гармоніки п'яти перших максимумів спектру). Природно, чим більше членів ряду включено у реконструкцію, тим ближче сигнал, що реконструюється, до форми вихідного сигналу. При цьому добре видно, що при реконструкції стрибків функції з'являються пульсації, які носять назву *ефекту Гіббса*. Ефект Гіббса має місце завжди при різких порушеннях монотонності функції. На стрибках ефект максимальний, в усіх інших випадках амплітуда пульсацій залежить від характеру порушень монотонності функції. При зміні кількості членів ряду Фур'є, що сумують, ефект Гіббса не зникає. Не змінюється також відносна амплітуда пульсацій (по відношенню до амплітуди стрибка) та відносне згасання, змінюється тільки частота пульсацій, яка визначається частотою останніх гармонік, що сумують.

При усіканні рядів Фур'є певні спотворення функцій мають місце завжди. Проте, якщо енергія частки спектру сигналу, що відсікається, мала (при швидкому затуханні спектрів функцій), цей ефект може бути мало

помітним. На стрибках та розривах функцій він проявляється найяскравіше. Зазвичай граничні значення максимальних викидів по обидва боки від стрибка функції не перевищують 9% від значення амплітуди стрибка.

Завдання

1. Знайти аналітичні Фур'є представлення та зарисувати спектри для наступних сигналів:
 - поодинокий прямокутний імпульс;
 - поодинокий трикутний імпульс (форма імпульсу – прямокутний трикутник);
 - сигнал, заданий функцією $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$;
 - сигнал, заданий функцією Гаусса: $\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$.
2. Для заданого сигналу* знайти аналітичне Фур'є представлення. Користуючись отриманим аналітичним виразом, розрахувати та зарисувати Фур'є спектр даного сигналу.
3. За допомогою програми дискретного перетворення Фур'є одержати та зарисувати спектри сигналів, перелічених у пунктах 1 та 2.
4. Для заданого сигналу* дослідити особливості зміни спектру при:
 - подовженні тривалості поодинокого імпульсу у два, чотири, вісім разів;
 - повторенні сигналу – пакети з двох, чотирьох, восьми імпульсів.Отримані спектри зарисувати окремо та зіставити для кожного з підпунктів.
5. Для заданої кількості точок обчислення спектру сигналу теоретично розрахувати співвідношення в швидкодії між дискретним та швидким перетворенням Фур'є.
6. Дослідити зміну спектру гармонічного сигналу при обмеженні часу його спостереження.
7. Провести синтез прямокутного імпульсу за допомогою гармонічних складових. Дослідити вплив кількості гармонік, за допомогою яких синтезується імпульс на форму імпульсу (ефект Гіббса).
8. Зробити висновки по роботі та оформити звіт.

* Сигнал являє собою поодинокий імпульс, форма якого визначається з таблиці 1 (див. додаток) у відповідності з номером завдання, що задається викладачем

Методичні вказівки

До пункту 3 завдання: 1) при виконанні цього завдання рекомендується час спостереження сигналів зберігати постійним і таким, що складається з 512-1024 відліків; 2) для детальнішого відображення спектру сигналу оберіть тривалість сигналу по відношенню до загального часу спостереження такою, щоб отриманий в результаті спектр був як найширший, враховуючи при цьому обмеження, які накладає на сигнал обрана частота дискретизації.

До пункту 4 завдання: 1) при дослідженні заданого сигналу використовуйте параметри обрані при виконанні пункту 3 завдання; 2) для коректного порівняння результатів, що будуть отримані, в ході проведення вказаних досліджень заданого сигналу зверніть увагу на те, що змінюватись повинен тільки один з параметрів, що досліджується, зокрема, при зміні тривалості імпульсу або кількості імпульсів слідкуйте за тим, щоб загальний час спостереження та частота дискретизації залишались сталими; 3) при повторенні заданого сигналу потрібно враховувати, що часовий інтервал між усіма імпульсами повинен бути однаковим і його потрібно обирати враховуючи загальний час спостереження (поясніть, як період повторення імпульсу пов'язаний з часом спостереження).

Контрольні питання

1. Чим відрізняються спектральні характеристики періодичних та неперіодичних сигналів?
2. У чому полягає відмінність дискретного та неперервного перетворень Фур'є?
3. Для яких сигналів використовують дискретне перетворення Фур'є?
4. Яким чином впливає на спектр зміна кількості відліків сигналу?
5. Яким чином впливає на спектр періодичного сигналу зміна кількості його періодів на відрізок часу спостереження?
6. Для якої кількості відліків дискретного сигналу можна зробити швидко дискретне перетворення Фур'є?
7. Що таке ефект Гіббса? Чим обумовлений цей ефект? Які параметри ефекту Гіббса?

Лабораторна робота № 3

АНАЛІЗ СПЕКТРІВ ВІДЕО- ТА РАДІОІМПУЛЬСІВ

Мета роботи: отримання та аналіз спектрів відео- та радіоімпульсів цифровим методом (апаратна реалізація).

Література:

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Радио, 1986.
2. Харкевич А. А. Спектри і аналіз. – М.: Мир, 1987.
3. Робинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978.
4. Гольденберг Л.М. и др. Цифровая обработка сигналов: Учебное пособие для вузов.- М.: Радио и связь, 1990.- 256 с.

Теоретичні відомості

За своєю природою всі сигнали є аналоговими, чи то є сигнал постійного або змінного струму, цифровий або імпульсний. Тим не менш прийнято розрізняти аналогові та цифрові сигнали. Це виражається у тому, що в природі всі фізичні величини, які є вимірюваними, вважаються аналоговими сигналами. З іншого боку існують сигнали, які називають цифровими, де сигнал є певним чином оброблений, перетворений у цифри. Внаслідок такого перетворення цифровий сигнал приймає логічний формат двійкових нулів та одиниць і з метою передачі проходить етап імпульсної модуляції, внаслідок чого утворюються низькочастотні імпульсні сигнали, або *відеоімпульси*. Такі сигнали прийнято називати відеосигналами. Взагалі, термін “відеосигнал” визначає сигнал, спектр якого починається від (або біля) постійної складової і закінчується деяким кінцевим значенням, зазвичай не більше декількох мегагерц. Для імпульсної передачі повідомлень по реальним лініям зв’язку використовується додаткова модуляція відеоімпульсами високочастотної гармонічної несучої, внаслідок чого гармонічні коливання набувають вигляду

короткочасних *радіоімпульсів*, характеристики яких визначаються формою модулюючого відеоімпульсу.

Головною метою перетворення та обробки фізичних сигналів є необхідність отримання інформації, що в них міститься. Ще одна причина обробки сигналів полягає у стисненні смуги частот сигналу (без суттєвих втрат інформації) для її узгодження зі смугою пропускання каналу зв'язку. У випадку цифрової обробки сигналу аналоговий сигнал перетворюється у двійкову форму за допомогою аналого-цифрового перетворювача (АЦП). На виході АЦП отримується двійкове представлення аналогового сигналу, яке потім обробляється цифровим сигнальним процесором (ЦСП). Після обробки інформація, що міститься у сигналі, може бути перетворена назад в аналогову форму за допомогою цифро-аналогового перетворювача (ЦАП).

ДИСКРЕТИЗАЦІЯ АНАЛОГОВИХ СИГНАЛІВ

Аналоговий сигнал та його цифрова версія пов'язані процесом, який називається *дискретизацією*. В ході цього процесу з неперервного сигналу формується послідовність вибірок. Вибірка неперервних аналогових даних повинна здійснюватись через інтервал дискретизації $\Delta t = 1/\nu_d$, який необхідно ретельно підбирати для точного представлення первинного аналогового сигналу. Зрозуміло, що чим більша кількість відліків (більш високі частоти дискретизації), тим точнішим буде представлення сигналу в цифровому вигляді, тоді як у випадку малого числа відліків (низькі частоти дискретизації) може бути досягнуто критичне значення частоти дискретизації, при якому втрачається інформація про сигнал. Це впливає з відомого критерію Найквіста, який вимагає, щоб частота дискретизації була принаймні вдвічі більшою за смугу сигналу, інакше інформація про сигнал буде втрачена. Якщо частота дискретизації менше подвійної смуги аналогового сигналу, виникає ефект, відомий як *накладання спектрів* (*aliasing*).

Для розуміння накладання спектрів, як у часовій, так і у частотній областях, спочатку розглянемо випадок представлення у часовій області вибірки одного тонального сигналу синусоїдальної форми, що показано на рисунку 1. В цьому прикладі частота дискретизації ν_d лише трохи більше за частоту аналогового вхідного сигналу ν_s , що не задовольняє критерію Найквіста. З рисунку 1 добре видно, що зроблена вибірка відповідає

сигналу, частота якого є набагато меншою за частоту вхідного сигналу і насправді дорівнює різниці частоти дискретизації та частоти вхідного сигналу $\nu_d - \nu_s$. Відповідне представлення цього прикладу в частотній області показано на рисунку 2В.

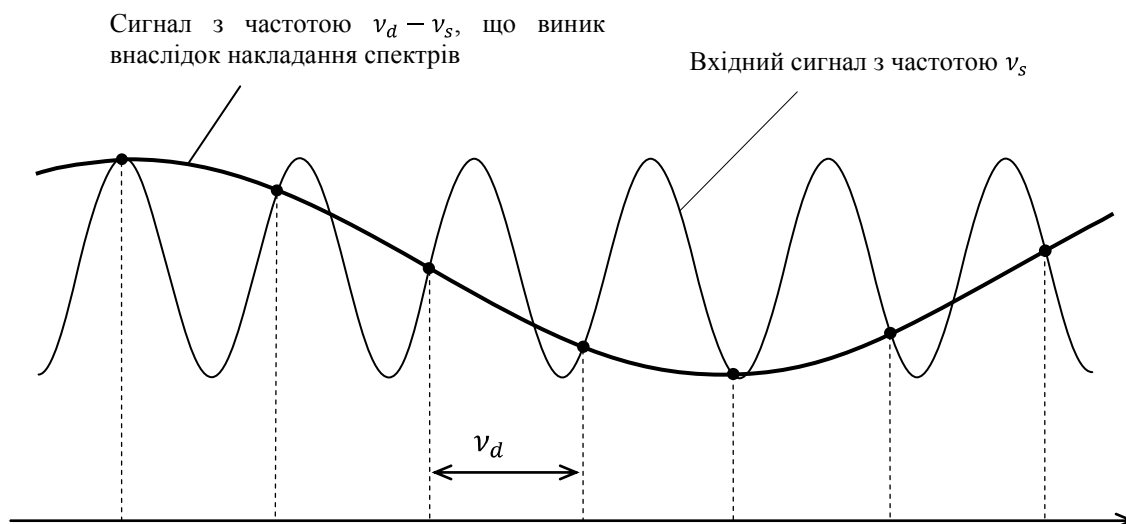


Рис. 1. Ефект накладання спектрів у часовій області.

Якщо ж розглянути випадок, коли $\nu_d > 2\nu_s$, то після дискретизації в частотному спектрі будуть спостерігатися гармоніки (*aliases* або *images*) початкового аналогового сигналу, які повторюються з частотою ν_d , тобто на частотах, що дорівнюють $|\pm \nu_s \pm k\nu_d|$, де $k = 1, 2, 3, \dots$ (рис. 2А).

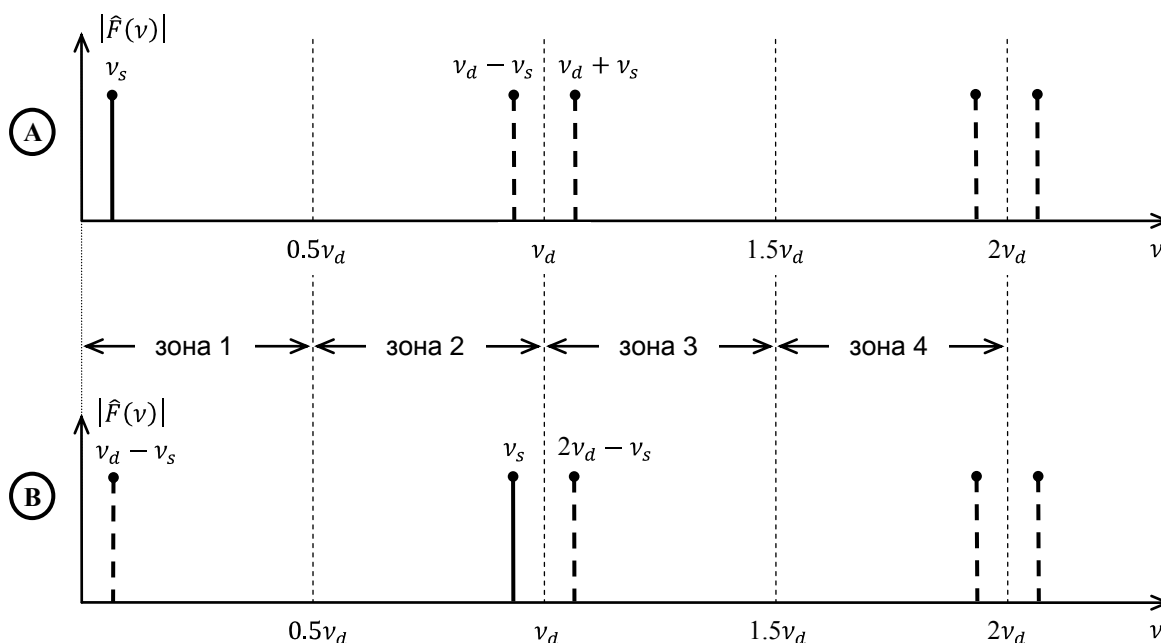


Рис. 2. Спектри сигналу з частотою ν_s після дискретизації з частотою ν_d .

Частотна зона Найквіста визначається як смуга спектру від 0 до $\nu_d/2$. Частотний спектр розділений на нескінчену кількість зон Найквіста, кожна по $0.5\nu_d$. В реальних цифрових пристроях, що дискретизують вхідний аналоговий сигнал і розраховують його спектр, ідеальний дискретизатор замінюється на АЦП, який використовується разом з процесором швидкого перетворення Фур'є (ШПФ). ШПФ-процесор забезпечує присутність на виході тільки компонент сигналів, частоти яких потрапляють в першу зону Найквіста, тобто в смугу від 0 до $\nu_d/2$.

Давайте знову розглянемо рисунок 2В. Зверніть увагу, не дивлячись на те, що сигнал знаходиться за межами першої зони Найквіста, його складова $\nu_d - \nu_s$ потрапляє всередину зони. Звідси, повертаючись до рисунку 2А, легко зробити висновок, що якщо небажаний сигнал з'явиться в області будь-якої з гармонік частоти ν_s , він також з'явиться і в області самої частоти ν_s , призводячи до появи побічної частотної компоненти в першій зоні Найквіста.

Такий процес подібний до роботи змішувача, що використовується для детектування аналогових сигналів. Тому перед дискретизацією сигналу здійснюється його фільтрація, що пригнічує компоненти, частоти яких знаходяться поза смугою Найквіста і після дискретизації можуть потрапити в її межі. Виходячи з цього, на практиці майже з усіма АЦП використовується ФНЧ для пригнічення небажаних сигналів.

На рисунку 3 аналоговий сигнал з максимальною частотою в спектрі, що дорівнює ν_m , попередньо фільтрується так, що нова максимальна частота ν'_m зменшується до $\nu_d/2$ або навіть сильніше. Таким чином, оскільки $\nu_d > 2\nu'_m$, на рис. 3б вже відсутні компоненти, що перекриваються. Потрібно відмітити, що такий метод фільтрації, при якій видаляється частина спектру, де присутнє накладання, призведе до втрати деякої частини інформації. З цієї причини частота дискретизації, ширина смуги зрізу і тип фільтру, що обираються для конкретного сигналу, не є незалежними параметрами.

Фільтри, що реалізуються на практиці, мають ненульову ширину смуги для переходу між смугою пропускання та областю згасання. Ця область зветься *смугою переходу*. Для мінімізації частоти дискретизації системи бажано було б, щоб фільтри захисту від накладання спектрів мали вузьку смугу переходу. В той же час при звуження смуги переходу різко збільшується складність фільтрів та їх вартість. З іншого боку недостатня

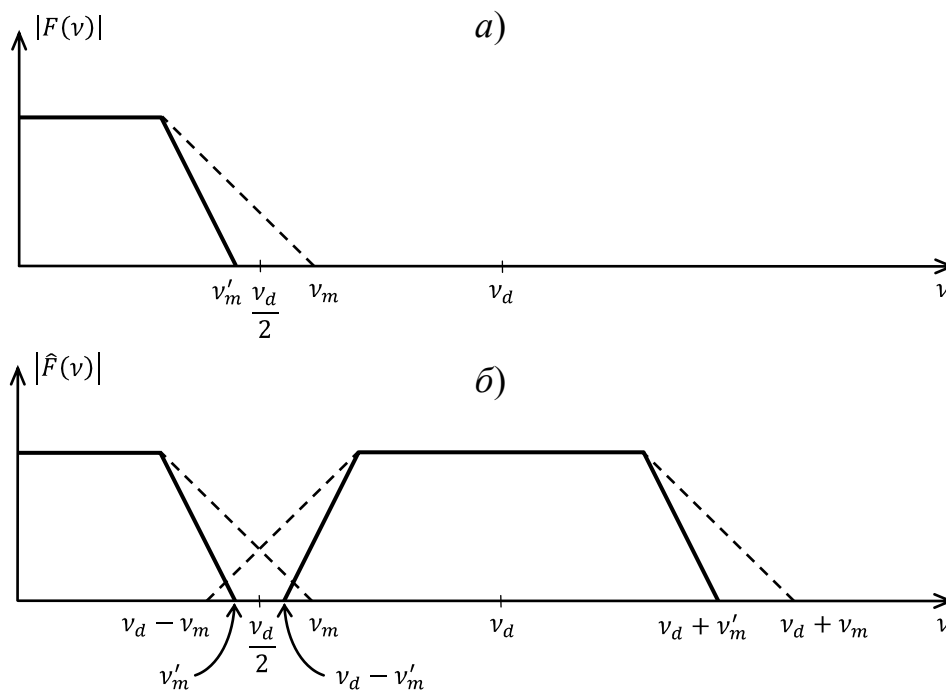


Рис. 3. Фільтрація аналогового сигналу перед дискретизацією запобігає перекриванню спектрів: а) спектр неперервного аналогового сигналу; б) спектр дискретного сигналу.

крутизна спаду фільтра може бути скомпенсована більшою частотою дискретизації АЦП. Обравши вищу частоту дискретизації (надлишкову дискретизацію), ми зменшуємо вимоги до крутизни спаду фільтра і, відповідно, складність фільтру за рахунок використання більш швидкого АЦП з більшою швидкістю обробки даних. Зазвичай процес проектування фільтру починається з вибору початкової частоти дискретизації від $2.5\nu_m$ до $4\nu_m$.

СУБДИСКРЕТИЗАЦІЯ. ДИСКРЕТИЗАЦІЯ МОДУЛЬОВАНИХ СИГНАЛІВ

До цього часу ми розглядали випадок дискретизації низькочастотних сигналів (відеосигналів або огибаючих), коли усі сигнали, що нас цікавлять, лежать у першій зоні Найквіста. На рисунку 4А показаний випадок, коли смуга сигналів, що підлягають дискретизації обмежена першою зоною Найквіста, а в інших зонах Найквіста містяться тільки дзеркальні частотні компоненти.

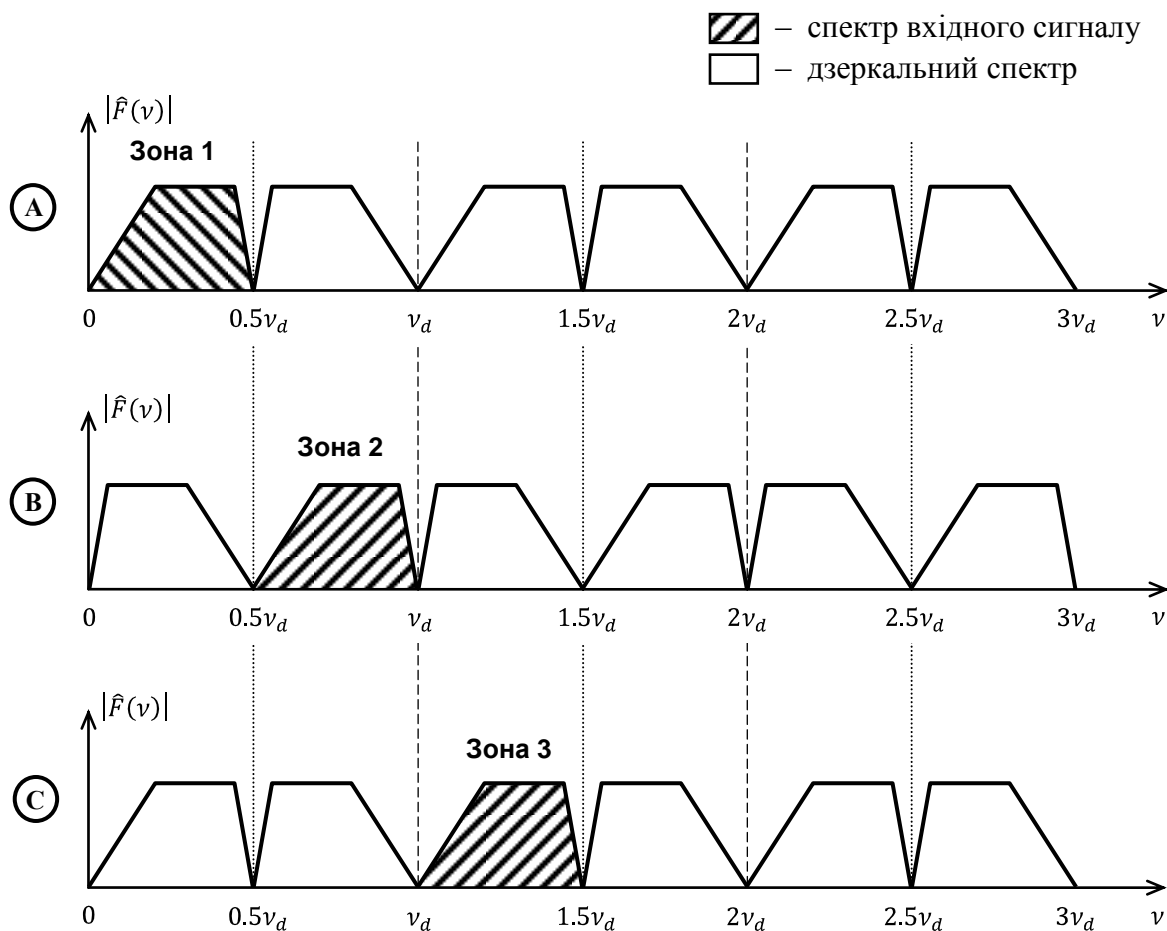


Рис. 4. Дискретизація на гармоніках.

На рисунку 4В представлений випадок, коли смуга сигналу, що підлягає дискретизації, повністю знаходиться у другій зоні Найквіста. Часто процес дискретизації сигналу, що знаходиться поза першою зоною Найквіста, називають *субдискретизацією* (*undersampling*) або *гармонічною дискретизацією*. Зверніть увагу, що бічна смуга в першій зоні Найквіста містить всю інформацію про первісний сигнал, проте порядок частотних компонентів в спектрі зворотній, що легко можна скоректувати шляхом перепорядкування спектральних компонентів на виході ШПФ.

На рисунку 4С показаний варіант сигналу, що підлягає дискретизації, який обмежений третьою зоною Найквіста. Зверніть увагу, що при цьому в першій зоні Найквіста порядок спектральних компонентів такий самий, як і в спектрі вхідного сигналу.

Таким чином, фактично, частоти сигналів, що підлягають дискретизації, можуть знаходитись у будь-якій унікальній зоні Найквіста і смуга в першій зоні Найквіста буде точним представленням сигналу (за

виключенням обернення частоти, яке відбувається, коли сигнали розташовані у парних зонах Найквіста). Тут ми можемо знову ясно сформулювати критерій Найквіста:

Для збереження інформації про сигнал частота дискретизації повинна бути рівною або більшою, ніж подвійна ширина його смуги.

Зауважимо, що у цьому формулюванні немає жодної згадки про абсолютне місцезнаходження у частотному спектрі смуги сигналів, що дискретизуються, відносно частоти дискретизації. Єдине обмеження полягає у тому, що смуга сигналів, які підлягають дискретизації, повинна бути обмежена однією зоною Найквіста.

Дискретизація сигналів, що знаходяться віще першої зони Найквіста, є досить популярною задачею, пов'язаною з телекомунікаціями, оскільки цей процес еквівалентний аналоговій демодуляції. Звичайною практикою є дискретизація сигналів проміжної частоти з подальшим використанням цифрових методів для обробки сигналу з усуненням у такий спосіб потреби в демодуляторі проміжної частоти.

Експериментальна установка

Схема експериментальної установки зображена на рисунку 5. Вона складається з генератора стандартних сигналів (ГСС), генератора модульованих сигналів (ГМС) та цифрового осцилографа (ЦО) з можливістю відображення спектрів східних сигналів. Генератор модульованих сигналів використовує генератор стандартних сигналів як джерело зовнішньої модуляції сигналу несучої. Обидва генератори під'єднані до цифрового осцилографа для спостереження вихідних сигналів.

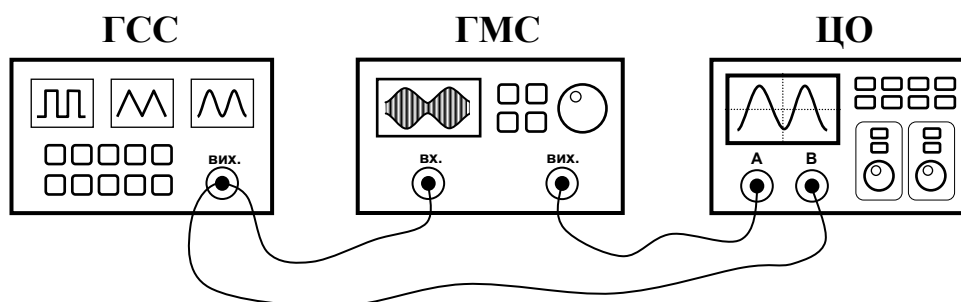


Рис. 5. Схема експериментальної установки.

Завдання

1. Освоїти методику отримання спектрів цифровим методом за допомогою цифрового осцилографа.
2. Зібрати експериментальну установку у відповідності зі схемою, зображеною на рисунку 5.
3. Використовуючи генератор стандартних сигналів та цифровий осцилограф, отримати та зарисувати спектри відео-імпульсів (прямокутної та трикутної форми). Визначити зі спектрів, параметри відео-імпульсів та порівняти ці параметри з відповідними настройками на генераторі імпульсів. Визначити вплив форми, тривалості та частоти повторення відео-імпульсів на їх спектральні характеристики.
4. Використовуючи генератор модульованих сигналів, генератор стандартних сигналів та цифровий осцилограф, отримати та зарисувати спектри радіоімпульсів різної форми. Визначити зі спектрів параметри радіоімпульсів та порівняти ці параметри з відповідними настройками генераторів.
5. Отримати спектр радіоімпульсів прямокутної форми, дискретизованих з частотою нижчою за частоту Найквіста. Зробіть аналіз отриманого спектру з визначенням параметрів модулюючого сигналу та обґрунтуйте вибір частоти дискретизації достатньої для правильного відтворення форми модулюючого сигналу.
6. Зробити висновки по роботі та оформити звіт.

Методичні вказівки

До пункту 3 та 4 завдання: 1) під'єднайте генератор стандартних сигналів до входу В цифрового осцилографа, а також до входу генератора модульованих сигналів, вихід генератора модульованих сигналів під'єднайте до входу А цифрового осцилографа; 2) перемикаючи осцилограф для відображення сигналу в каналі А чи в каналі В, проведіть спочатку дослідження відео-імпульсів, а потім амплітудно-модульованих сигналів; 3) за допомогою маркерів цифрового осцилографа визначте параметри вхідного сигналу (частоту та тривалість імпульсів, а також частоту несучої для амплітудно-модульованого сигналу); 4) переключіть

цифровий осцилограф в режим відображення спектру сигналу, встановіть на цифровому осцилографі необхідну кількість точок дискретизації та необхідну частоту дискретизації вхідного сигналу, що задовольняє вимогам теореми відліків, за допомогою частотних маркерів визначте основні параметри спектру, що відповідають параметрам вхідного сигналу.

До пункту 5 завдання: 1) зверніть увагу на те, що для амплітудно-модульованого сигналу частота дискретизації може бути меншою за частоту несучої і це не буде порушенням теореми відліків, оскільки в даному випадку мова йде про відтворення саме інформаційного сигналу, а не сигналу несучої; 2) знайдіть ширину спектру інформаційного сигналу (відео-імпульсів) та виберіть відповідну частоту дискретизації для демодуляції вхідного сигналу.

Контрольні питання

1. У чому полягає відмінність між відео- та радіосигналами?
2. Який ефект виникає при порушенні критерію Найквіста в процесі дискретизації?
3. Що таке частотна зона Найквіста?
4. Чим відрізняються спектри сигналу у сусідніх зонах Найквіста?
5. Чому на практиці при аналого-цифровому перетворенні попередньо сигнал пропускають через ФНЧ?
6. Що таке субдискретизація? В якому випадку процес дискретизації сигналу називають субдискретизацією?
7. В якому випадку доцільно застосовувати субдискретизацію аналогових сигналів?
8. З якою мінімальною частотою можна дискретизувати амплітудно-модульований сигнал для достовірного та однозначного відтворення інформації, що закладена у модулюючому сигналі?

Лабораторна робота № 4

ЦИФРОВИЙ ФІЛЬТР

Мета роботи: вивчення роботи цифрових фільтрів і процесів фільтрації цифрових сигналів; визначення характеристик цифрових фільтрів першого і другого порядку; порівняння характеристик цифрових фільтрів з відповідними характеристиками еквівалентних аналогових фільтрів (для фільтрів першого порядку).

Література:

1. Цифровые фильтры в электросвязи и радиотехнике. /Под ред. Л. Гольденберга. – М.: «Радио и связь», 1982.
2. Капелини В. и др. Цифровые фильтры и их применение. – М.: Энергоатомиздат, 1983.
3. Белодедов М.В. Методы проектирования цифровых фильтров: Учебное пособие. – Волгоград: Издательство Волгоградского государственного университета, 2004. – 60 с.
4. Хемминг Р. В. Цифровые фильтры. Пер. с англ./ Под ред. А. М. Трахтмана. – М.: Сов. радио, 1980. – 224 с.

Теоретичні відомості

ЛІНІЙНІ ЦИФРОВІ ЛАНЦЮГИ

Цифрова фільтрація є одним з найбільш потужних інструментальних засобів цифрової обробки сигналів. Окрім явних переваг усунення помилок у фільтрі, пов'язаних з флуктуаціями параметрів пасивних компонентів у часі та за температурою, цифрові фільтри здатні задовольняти таким технічним вимогам за своїми параметрами, яких, у кращому випадку, було б надзвичайно важко або навіть неможливо досягти в аналоговому виконанні. Крім того, характеристики цифрового фільтра можуть бути легко змінені програмно. Тому вони широко

використовуються в телекомунікаціях, у застосуваннях адаптивної фільтрації, таких як пригнічення відлуння у модемах, пригнічення шуму та розпізнавання мови.

Процес проектування цифрових фільтрів складається з тих самих етапів, що і процес проектування аналогових фільтрів. Спочатку формуються вимоги до бажаних характеристик фільтру, за якими потім розраховуються параметри фільтра. Амплітудна та фазова характеристики формуються аналогічно аналоговим фільтрам. Ключовою відмінністю між аналоговим та цифровим фільтрами є те, що замість розрахунку величин опорів, ємностей та індуктивностей для аналогового фільтру, розраховуються значення коефіцієнтів для цифрового фільтру. Іншими словами, в цифровому фільтрі числа замінюють фізичні опори та ємності аналогового фільтру. Ці числа є коефіцієнтами фільтра, вони постійно знаходяться у пам'яті та використовуються для обробки (фільтрації) дискретних даних, що надходять з АЦП.

Цифрову фільтрацію часових та частотних послідовностей проводять за допомогою цифрових (дискретних) лінійних систем. Цифрові системи є лінійними лише у тому випадку, коли їх параметри не залежать від величин, що характеризують їх власний стан. Процеси, що відбуваються в таких системах, можна представити у вигляді лінійних диференціальних (різницевих) рівнянь.

Фактично цифрова система це алгоритм перетворення вхідної послідовності даних у вихідну. При цьому умову лінійності такої системи можна визначити наступним чином: при подаванні на вхід системи послідовності $ax_1(n) + bx_2(n)$ на її виході отримуємо послідовність $ay_1(n) + by_2(n)$, де a та b – довільні сталі. Таким чином, в лінійній системі реакція (відхилення) пропорційна дії.

В лінійній системі з постійними параметрами вхідна та вихідна послідовності пов'язані між собою співвідношенням типу згортки:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \cdot g(n-m), \\ y(n) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(m) \cdot x(n-m), \end{aligned} \tag{1}$$

де $g(n)$ – імпульсна характеристика-відгук цифрової системи на одиничний імпульс

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 0; \\ 0, & \text{при } n \neq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Співвідношення (1) справедливі лише в припущенні справедливості принципу суперпозиції: при дії на лінійну систему кількох струмів або напруг поведінка системи визначається за суперпозицією розв'язків, що відповідають кожному окремому струму або напрузі. Природно, що принцип суперпозиції застосовується лише до лінійних кіл.

Передавальна функція лінійної цифрової системи визначається виразом:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}, \quad (3)$$

де $X(z)$ та $Y(z)$ – z -перетворення вхідної та вихідної послідовностей відповідно, які визначаються за допомогою виразів:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^n; \\ Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)z^n. \end{aligned} \quad (4)$$

Якщо помножити обидві частини рівності (1) на z^n та просумувати по n , можна отримати вираз для передавальної функції лінійної цифрової системи у вигляді:

$$G(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n)z^{-n}. \quad (5)$$

СТІЙКІСТЬ ЦИФРОВИХ КІЛ

Цифрову лінійну систему можна реалізувати лише в тому випадку, якщо величина відгуку при $n = n_0$ залежить тільки від відліків вхідної послідовності з номерами $n < n_0$. Це означає, що імпульсна характеристика $g(n) = 0$, якщо $n < 0$, тобто відгук системи не може випереджати дію на неї. Необхідною і достатньою умовою стійкості системи є наступна вимога до імпульсної характеристики:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |g(n)| < \infty. \quad (6)$$

Нерівність задовольняється, якщо $g(n) \neq 0$ у випадку $N_1 < n < N_2$.

ЕЛЕМЕНТИ ЦИФРОВИХ КІЛ

Елементом цифрового кола є пристрій, що має тільки якусь одну функцію: наприклад, накопичення енергії, сумування сигналів або затримка сигналів на деякий час.

Цифрові лінійні кола складаються з трьох можливих елементів: помножувачів, суматорів та елементів затримки. Рівняння для цифрових елементів є наступними:

- $y(n) = \beta_i x(n)$ – для помножувача (рис. 1);
- $y(n) = \sum_{i=1}^k x_i(n)$ – для суматора (рис. 2);
- $y(n) = x(n - 1)$ – для елемента затримки на період (рис. 3).

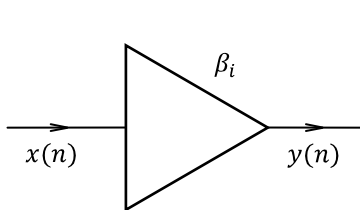


Рис. 1. Помножувач.

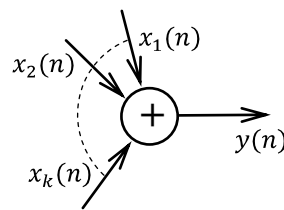


Рис. 2. Суматор.

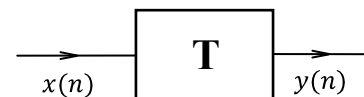


Рис. 3. Елемент затримки.

Помножувач виконує множення числа, що відповідає n -тому відліку цифрового сигналу $x(n)$, на постійну β_i , що називається *ваговим коефіцієнтом*, або просто *вагою*.

Суматор виконує складання k чисел, що відповідають n -тим відлікам k вхідних цифрових сигналів $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$.

Елемент затримки виконує затримку вхідного сигналу $x(n)$ на один період T , тобто вихідний сигнал $y(n)$ в даний n -тий такт дорівнює значенню вхідного сигналу, яке він мав в попередній $(n + 1)$ -ший такт. Такі елементи, об'єднані певним чином, складають цифрове коло.

ЦИФРОВІ КОЛА ПЕРШОГО ТА ДРУГОГО ПОРЯДКІВ

Математично лінійні системи описуються за допомогою лінійних різницьових рівнянь. В загальному випадку різницеве рівняння, за допомогою якого можна описати коло першого порядку, має вигляд:

$$y(n) = \alpha_0 x(n) + \alpha_1 x(n-1) - \beta_1 y(n-1). \quad (7)$$

Відповідна схема, що реалізує дане різницеве рівняння, показана на рисунку 4. Передавальна характеристика для кола першого порядку має вигляд:

$$G(z) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1}}{1 + \beta_1 z^{-1}}. \quad (8)$$

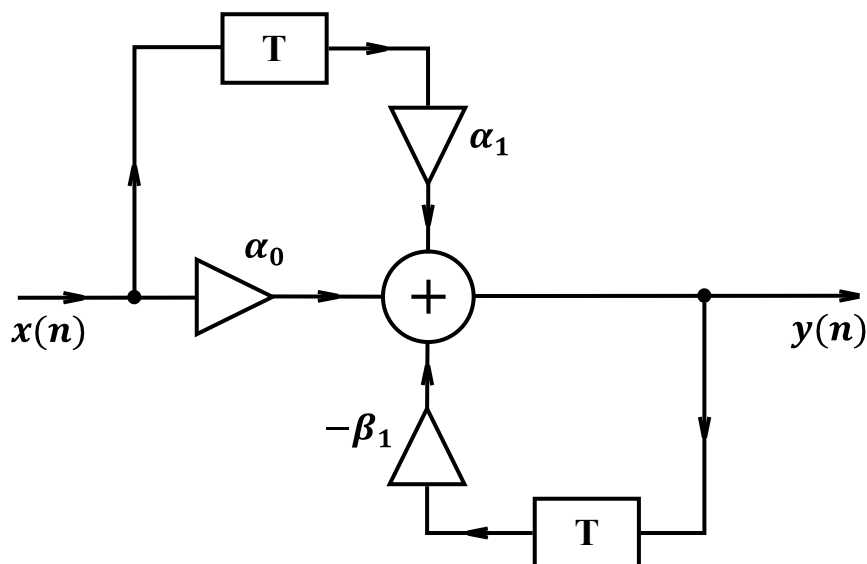


Рис. 4. Схема цифрового фільтру першого порядку.

Зворотнє z -перетворення дає імпульсну характеристику даного кола. Отримуємо:

$$g(n) = [g_1(-\beta)]^n. \quad (9)$$

Користуючись правилом отримання спектру сигналу з його z -перетворення, визначимо амплітудно-частотну характеристику (АЧХ) цифрового кола з його передавальної характеристики шляхом підстановки у (8) $z = \exp(i\omega T)$:

$$|G(\omega)| = \frac{\sqrt{A + 2B\cos(\omega T) + C\cos(2\omega T)}}{1 + \beta_1^2 + 2\beta_1\cos(\omega T)}, \quad (10)$$

де $A = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_0\alpha_1\beta_1 + \alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_0^2\beta_1^2$; $B = \alpha_0\alpha_1 + \alpha_1^2\beta_1 + \alpha_0^2\beta_1 + \alpha_0\alpha_1\beta_1^2$; $C = 2\alpha_0\alpha_1\beta_1$, T – інтервал дискретизації, $\omega = 2\pi f$ – циклічна частота. Записаний вираз дозволяє отримати амплітудно-частотну характеристику цифрового кола першого порядку з будь-якими значеннями $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$.

Відповідно, якщо знайти аргумент функції $G(\omega)$, можна отримати фазо-частотну характеристику цієї цифрової системи.

Оскільки експотенційна функція уявного аргументу $z = \exp(i\omega T)$ є періодичною функцією частоти з періодом $\Omega = 2\pi/T$, то частотна характеристика цифрового фільтру $G(\omega)$ також є періодичною функцією частоти з періодом Ω .

Передавальна функція для цифрового кола другого порядку має вигляд:

$$G(z) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}}{1 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2}}. \quad (11)$$

Властивості кіл другого порядку близькі до багатьох властивостей кіл першого порядку.

Цифрові кола із заданою передавальною функцією можна побудувати різними способами. Спосіб побудови визначає структурні особливості та кількість елементів, що використовуються у колі, а також їх шумові характеристики. Різні форми реалізації заданої передавальної функції ділять на *прямі* та *канонічні*.

Пряма форма реалізації

В цьому випадку схема кола будується безпосередньо за різницеvim рівнянням. Передавальній функції (11) відповідає різницеве рівняння:

$$y(n) = \alpha_0 x(n) + \alpha_1 x(n-1) + \alpha_2 x(n-2) - \beta_1 y(n-1) - \beta_2 y(n-2). \quad (12)$$

Структура реалізації даного різницевого рівняння показана на рисунку 5. В такій формі реалізації передавальної функції для затримки сигналів

використовуються окремі елементи затримки. Кількість елементів затримки в два рази перевищує порядок кола.

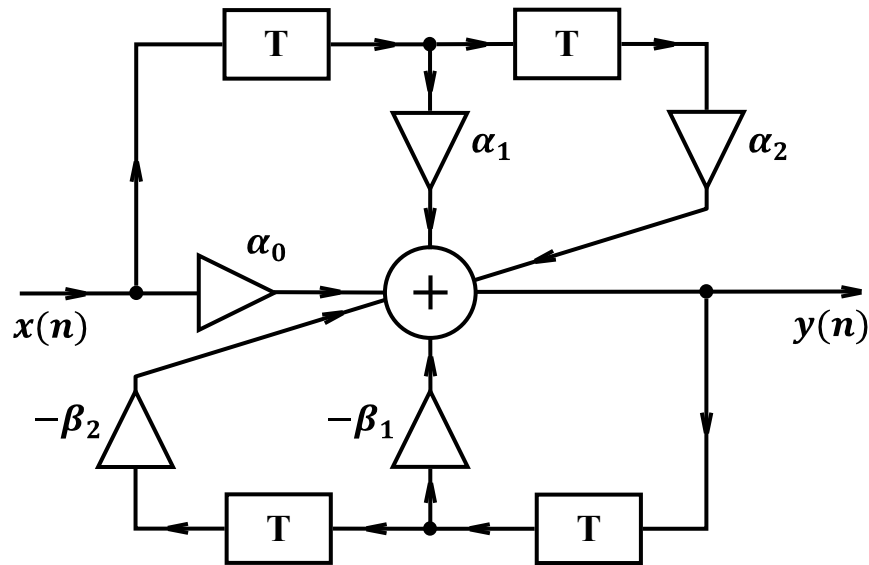


Рис. 5. Схема цифрового фільтру другого порядку (пряма форма).

Канонічна форма реалізації

Передавальну функцію можна реалізувати й іншим способом, а саме, побудувати схему таким чином, щоб кількість елементів затримки дорівнювала порядку кола. Така схема реалізації називається *канонічною*. Для розв'язання цієї задачі, використовуючи вираз (3), запишемо передавальну функцію (11) в іншому вигляді:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} \cdot \frac{V(z)}{X(z)} = (\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}) \cdot \frac{1}{1 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2}}. \quad (13)$$

Цифрове коло, зібране за формулою (13), можна представити у вигляді двох послідовно з'єднаних кіл з передавальними характеристиками:

$$G_1(z) = \frac{V(z)}{X(z)} = [1 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2}]^{-1} \quad (14)$$

та

$$G_2(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}.$$

Ці два кола описуються такими різницевиими рівняннями:

$$\begin{aligned} v(n) &= x(n) - \beta_1 v(n-1) - \beta_2 v(n-2); \\ y(n) &= \alpha_0 v(n) + \alpha_1 v(n-1) + \alpha_2 v(n-2). \end{aligned} \quad (15)$$

Канонічна схема реалізації цих двох різницевих рівнянь, представлена на рисунку 6, є основою для побудови більш складних канонічних форм реалізації цифрових кіл.

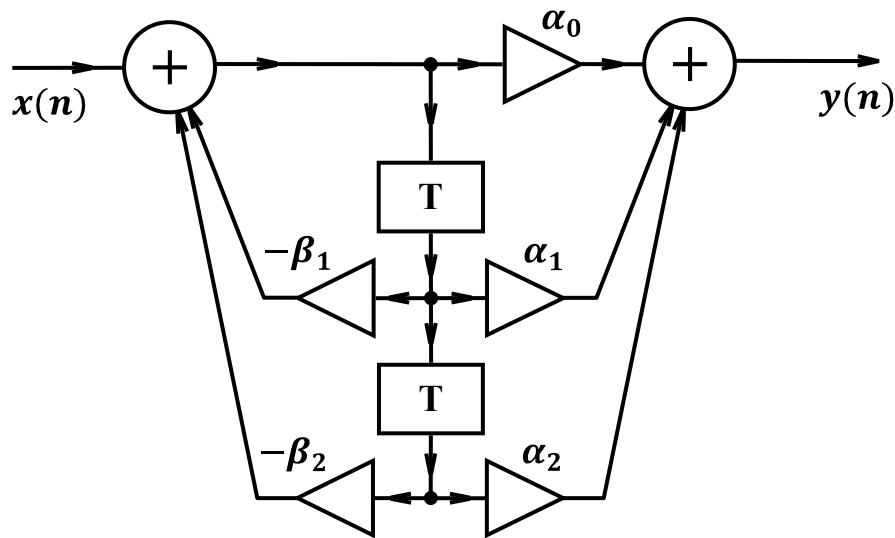


Рис. 6. Схема цифрового фільтру другого порядку (канонічна форма).

ІНТЕГРАЛЬНІ ТА ДИФЕРЕНЦІЙНІ АНАЛОГОВІ ЛАНЦЮГИ І ЕКВІВАЛЕНТНІ ЇМ ЦИФРОВІ СИСТЕМИ

Ємтно-резисторні ланцюги, що відповідають за своїм характером інтегральним та диференціальним аналоговим ланцюгам, зображені відповідно на рисунках 7 та 8. Вихідні сигнали цих аналогових ланцюгів визначаються відповідно за формулами:

$$S_{\text{вих}}^{(i)}(t) = \frac{1}{\tau} \int S_{\text{вх}}(t) dt \quad (16)$$

$$S_{\text{вих}}^{(d)}(t) = \tau \cdot \frac{dS_{\text{вх}}(t)}{dt} \quad (17)$$

де $\tau = RC$.

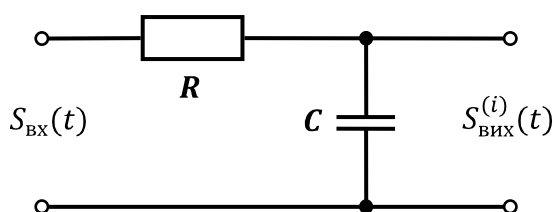


Рис. 7. Інтегральний RC-ланцюг.

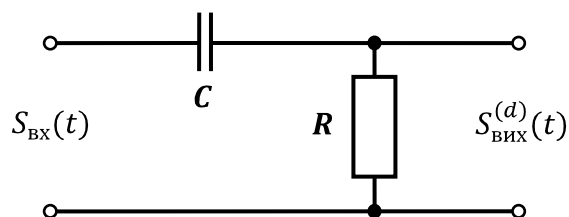


Рис. 8. Диференційний RC-ланцюг.

При використанні реактивного елементу у вигляді індуктивності ми маємо відповідним чином перебудовані схеми, але ті ж самі співвідношення (16)-(17), де $\tau = R/L$.

Величина τ має суттєве значення при здійсненні операцій як інтегрування сигналів, так і їх диференціювання. Роль величини τ можна зрозуміти на основі спектрального розгляду сигналів. Якщо спектральна густина вхідного сигналу дорівнює $S(\omega)$, то

$$S_{\text{ВХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (18)$$

Продиференціювавши (18) по t , одержимо:

$$\frac{dS_{\text{ВХ}}(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) i\omega e^{i\omega t} d\omega. \quad (19)$$

Підстановка (19) у (17) дає:

$$S_{\text{ВІХ}}^{(d)}(t) = \tau \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) i\omega e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\text{ВІХ}}^{(d)}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (20)$$

де

$$S_{\text{ВІХ}}^{(d)}(\omega) = i\omega\tau S(\omega) = S(\omega) \cdot K_d(i\omega), \quad (21)$$

де $K_d(i\omega)$ – частотна характеристика (коефіцієнт передачі) диференціального ланцюга, яка для випадку ідеального диференціювання повинна визначатися виразом

$$K_d(i\omega) = i\omega\tau. \quad (22)$$

Так само, якщо вираз (18) проінтегрувати по t і результат підставити у (16), отримаємо коефіцієнт передачі для випадку ідеального інтегрування:

$$K_i(i\omega) = \frac{1}{i\omega\tau}. \quad (23)$$

Як відомо, в реальності частотні характеристики диференційного та інтегрального RC -ланцюгів мають вигляд:

$$K_d(i\omega) = \frac{i\omega\tau}{1 + i\omega\tau}; \quad (24)$$

$$K_i(i\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau}. \quad (25)$$

Порівнюючи (22) та (24), бачимо, що для ідеального диференціювання необхідно, щоб виконувалась умова

$$\omega\tau \ll 1. \quad (26)$$

Ця умова повинна виконуватись для всіх частот вхідного сигналу, включаючи і найвищу частоту.

Для ідеального інтегрування, порівнюючи (23) та (25), маємо умову

$$\omega\tau \gg 1 \quad (27)$$

для всіх частот сигналу, включаючи найнижчу.

З нерівностей (26) та (27) випливає, що для розглянутих ланцюгів диференціювання здійснюється тим точніше, чим нижча частота, на якій концентрується енергія вхідного сигналу, а інтегрування – чим вище ця частота. З цих нерівностей випливає також таке принципове положення: чим точніше виконується диференціювання чи інтегрування відповідним аналоговим ланцюгом, тим менше (по модулю) його коефіцієнт передачі $K(i\omega)$. При ідеальному перетворенні $K(i\omega) \rightarrow 0$.

Тепер спроектуємо цифрові інтегральні та диференційні ланцюги еквівалентні розглянутим вище аналоговим. Для цього переведемо спочатку функцію $K(i\omega)$ аналогового ланцюга на координатну вісь простору перетворень Лапласа, у якому координата $p = \sigma + i\omega$, використовуючи відоме визначення, що

$$K(i\omega) = K(p)|_{\sigma=0}. \quad (28)$$

Таким чином, враховуючи (24) та (25), передавальні функції диференційного та інтегрального ланцюгів будуть відповідно мати наступний вигляд:

$$K_d(p) = \frac{p}{p + 1/\tau} ; \quad (29)$$

$$K_i(p) = \frac{1/\tau}{p + 1/\tau} . \quad (30)$$

Розглянемо тепер імпульсні характеристики обох ланцюгів. Вони знаходяться як зворотні перетворення Лапласа передавальних функцій (29) та (30). Для інтегрального ланцюга імпульсна характеристика має вигляд:

$$g_i(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} , \quad (31)$$

а для диференційного ланцюга, враховуючи, що $K_d(p) = 1 - K_i(p)$, ми маємо:

$$g_d(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} , \quad (32)$$

де $\delta(t)$ – дельта функція.

Існує кілька методів проектування цифрових систем, еквівалентних аналоговим. Розглянемо два з них. Спочатку спроектуємо цифрові системи на основі еквівалентності імпульсних характеристик. У відповідності з визначенням еквівалентності дискретизуємо імпульсні характеристики (31) та (32), що дасть нам вирази імпульсних характеристик цифрових фільтрів:

$$g_i(nT) = \frac{1}{\tau} e^{-nT/\tau} ; \quad (33)$$

$$g_d(nT) = \frac{1}{T} \delta(nT) - \frac{1}{\tau} e^{-nT/\tau} . \quad (34)$$

Здійснивши z -перетворення (33) і (34), ми знайдемо передавальні функції цифрового інтегрального $G_i(z)$ та диференційного $G_d(z)$ ланцюгів:

$$G_i(z) = T \sum_{n=0}^{+\infty} g_i(nT) z^{-n} = T \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\tau} e^{-nT/\tau} z^{-n} = \frac{T/\tau}{1 - e^{-T/\tau} z^{-1}} ; \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
G_d(z) &= T \sum_{n=0}^{+\infty} g_d(nT) z^{-n} = T \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta(nT) z^{-n} - T \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{nT}{\tau}} z^{-n} = \\
&= 1 - \frac{T/\tau}{1 - e^{-T/\tau} z^{-1}} = \frac{1 - T/\tau - e^{-T/\tau} z^{-1}}{1 - e^{-T/\tau} z^{-1}}.
\end{aligned} \tag{36}$$

Передавальні функції $G_i(z)$ та $G_d(z)$ дають можливість записати різницеві рівняння, які описують відповідні цифрові системи. Для інтегрального ланцюга різницеве рівняння матиме вигляд:

$$y_i(n) = \frac{T}{\tau} x(n) + e^{-T/\tau} y_i(n-1) \tag{37}$$

або

$$y_i(n) = \alpha_{0i} x(n) - \beta_{1i} y_i(n-1), \tag{38}$$

де $\alpha_{0i} = T/\tau$; $\beta_{1i} = -e^{-T/\tau}$.

Для диференційного ланцюга різницеве рівняння матиме вигляд:

$$y_d(n) = \left(1 - \frac{T}{\tau}\right) x(n) - e^{-T/\tau} x(n-1) + e^{-T/\tau} y_d(n-1) \tag{39}$$

або

$$y_d(n) = \alpha_{0d} x(n) + \alpha_{1d} x(n-1) - \beta_{1d} y_d(n-1), \tag{40}$$

де $\alpha_{0d} = 1 - T/\tau$; $\alpha_{1d} = -e^{-T/\tau}$; $\beta_{1d} = -e^{-T/\tau}$.

Таким чином, ми маємо необхідні дані для схемної реалізації (проекування) цифрової інтегральної та диференційної систем.

Передавальні функції цифрових систем і відповідні їм різницеві рівняння можна отримати безпосередньо з передавальних функцій (29) та (30), використовуючи так зване білінійне наближення. Суть цього методу полягає у тому, що

$$G_b(z) = K(p)|_{p=f(z)}. \tag{41}$$

За визначенням $z = e^{pT}$. Отже, $p = \frac{1}{T} \ln z$. Але ми не можемо підставити безпосередньо цей вираз для p у функцію $K(p)$ для отримання передавальної функції $G(z)$, оскільки для запису різницевих рівнянь $G(z)$ повинно бути представлено як співвідношення поліномів, а у даному

випадку ми отримуємо співвідношення логарифмів та їх сум. Для вирішення цієї проблеми представимо логарифм у вигляді ряду. Тоді:

$$\ln z = 2 \left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \dots \right]. \quad (42)$$

В лінійному наближенні в цьому ряду враховується тільки перший член. Отже, можна записати:

$$p = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (43)$$

Підстановка (43) у (29) та (30) дає для інтегрального ланцюга:

$$G_{bi}(z) = \frac{\frac{T}{T+2\tau} + \frac{T}{T+2\tau} z^{-1}}{1 + \frac{T-2\tau}{T+2\tau} z^{-1}}, \quad (44)$$

а для диференційного ланцюга:

$$G_{bd}(z) = \frac{\frac{2\tau}{T+2\tau} - \frac{2\tau}{T+2\tau} z^{-1}}{1 + \frac{T-2\tau}{T+2\tau} z^{-1}}. \quad (45)$$

Відповідні різницеві рівняння мають вигляд:

- інтегральна система:

$$y_{bi}(n) = \frac{T}{T+2\tau} x(n) + \frac{T}{T+2\tau} x(n-1) - \frac{T-2\tau}{T+2\tau} y_{bi}(n-1) \quad (46)$$

або

$$y_{bi}(n) = \alpha_{0bi} x(n) + \alpha_{1bi} x(n-1) - \beta_{1bi} y_{bi}(n-1), \quad (47)$$

де $\alpha_{0bi} = \alpha_{1bi} = \frac{T}{T+2\tau}$, $\beta_{1bi} = \frac{T-2\tau}{T+2\tau}$;

- диференційна система:

$$y_{bd}(n) = \frac{2\tau}{T+2\tau} x(n) - \frac{2\tau}{T+2\tau} x(n-1) - \frac{T-2\tau}{T+2\tau} y_{bd}(n-1) \quad (48)$$

або

$$y_{bd}(n) = \alpha_{0bd} x(n) + \alpha_{1bd} x(n-1) - \beta_{1bd} y_{bd}(n-1), \quad (49)$$

де $\alpha_{0bi} = \frac{2\tau}{T+2\tau}$, $\alpha_{1bi} = -\frac{2\tau}{T+2\tau}$, $\beta_{1bi} = \frac{T-2\tau}{T+2\tau}$;

Одержані передавальні функції і відповідні різницеві рівняння дають можливість проектувати і порівнювати характеристики цифрових систем спроектованих різними методами.

Завдання

1. Ознайомитись з принципом фільтрації сигналів і роботою цифрових фільтрів.
2. За допомогою комп'ютера з відповідним програмним забезпеченням ознайомитись з принципами побудови цифрових фільтрів другого порядку, заснованими на можливості варіації вагових коефіцієнтів різницевого рівняння.
3. Експериментально визначити сімейство амплітудно-частотних характеристик цифрових фільтрів першого та другого порядків з різними значеннями вагових коефіцієнтів.
4. З результатів п. 3 встановити ефективність керування АЧХ за допомогою вагових коефіцієнтів шляхом визначення залежності смуги пропускання фільтрів, як функції величини заданого коефіцієнту.
5. Для цифрових фільтрів першого порядку порівняти їх АЧХ з АЧХ відповідних еквівалентних аналогових фільтрів (інтегральний та диференційний ланцюги).
6. Для інтегрального та диференційного ланцюгів порівняти АЧХ цифрових фільтрів першого порядку, спроектованих різними методами.

Методичні вказівки

До пунктів 3 та 4 завдання: 1) шляхом підстановки різних значень вагових коефіцієнтів експериментально визначити які типи АЧХ можна реалізувати за допомогою фільтрів першого та другого порядків; 2) значення вагових коефіцієнтів рекомендується вибирати в діапазоні від 0 до 1, при цьому для побудови залежності смуги пропускання фільтру від значення обраного коефіцієнту потрібно одночасно змінювати тільки один

коефіцієнт, а всі інші коефіцієнти залишати сталими; 3) усі отримані залежності відобразити графічно в одній координатній площині.

До пункту 5 та 6 завдання: навести графічно та порівняти розраховані АЧХ цифрових фільтрів першого порядку та відповідні АЧХ еквівалентних до них аналогових фільтрів (інтегрального та диференційного ланцюгів), зробити висновки про відмінності АЧХ цифрових фільтрів від АЧХ аналогових фільтрів.

Контрольні питання

1. Що таке імпульсна характеристика цифрового фільтра?
2. Що таке передавальна функція цифрового фільтра?
3. Як знаходиться передавальна функція цифрового фільтра по різницевого рівнянню?
4. Як визначається частотна характеристика цифрового фільтра?
5. У чому відмінність частотної характеристики цифрового фільтра від частотної характеристики аналогового фільтра?
6. Що таке нулі та полюси передавальної характеристики цифрового фільтра? Як за ними визначити стійкість цифрового фільтра?
7. Які основні форми реалізації цифрових фільтрів?
8. У чому суть синтезу цифрового фільтра за аналоговим прототипом?
9. Яким чином перетворюються частоти аналогового та цифрового фільтрів при білінійному перетворенні?
10. Яким чином визначається різницеве рівняння цифрового фільтру при каскадній формі його реалізації?
11. Яким чином визначається різницеве рівняння цифрового фільтру при паралельній формі його реалізації?

ДОДАТОК

Таблиця 1

Номер завдання	Вигляд сигналу	Примітки
1		$T_c = 7$
2		$T_c = 7$
3		$T_c = 6$
4		$T_c = 6$
5		$T_c = 6$
6		$T_c = 8$

Таблиця 1 (продовження)

Номер завдання	Вигляд сигналу	Примітки
7		$T_c = 6$
8		$T_c = 8$
9		$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{T_c}, & 0 \leq x \leq T_c, \\ 0, & x > T_c. \end{cases}$ $T_c = 6$
10		$f(x) = \begin{cases} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{T_c} \right), & 0 \leq x \leq T_c, \\ 0, & x > T_c. \end{cases}$ $T_c = 6$
11		$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi x}{T_c}, & 0 \leq x \leq T_c, \\ 0, & x > T_c. \end{cases}$ $T_c = 6$
12		$T_c = 8$

Таблиця 1 (продовження)

Номер завдання	Вигляд сигналу	Примітки
13		$T_c = 7$
14		$T_c = 7$
15		$T_c = 6$
16		$T_c = 6$
17		$T_c = 8$
18		$T_c = 8$

ЗМІСТ

	Стор.
Вступ	3
Лабораторна робота №1. Перетворення сигналів за схемою «Аналог-Код-Аналог».....	4
Лабораторна робота №2. Аналіз спектрів методом дискретного перетворення Фур'є.....	17
Лабораторна робота №3. Аналіз спектрів відео- та радіоімпульсів.....	29
Лабораторна робота №4. Цифровий фільтр.....	38
Додаток	53

Навчальне видання

КОЛЄНОВ *Сергій Олександрович*

ЦИФРОВА ОБРОБКА ІНФОРМАЦІЇ

Методичний посібник до лабораторного практикуму
для студентів радіофізичного факультету

Підписано до друку 01.12.2008. Формат 60x80¹⁶.
Гарнітура Times. Папір офсетний. Друк офсетний.
Наклад 30 примірників. Ум. друк. арк. 4.

Видавнича лабораторія радіофізичного факультету
Київського національного університету імені Тараса Шевченка