

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

**Г. А. МЕЛКОВ, О. В. ПРОКОПЕНКО**

**Вибрані розділи  
з курсу  
«Мікрохвильова  
електродинаміка  
та електроніка»**

Навчальний посібник

Київ – 2013

### **Рецензенти**

доц. Ю.О. Гайдай  
доц. А.В. Нетребя

*Рекомендовано до видання вченою радою радіофізичного факультету  
Київського національного університету імені Тараса Шевченка  
(протокол № 8 від 15 квітня 2013 року)*

**Мелков Г. А., Прокопенко О. В.** Вибрані розділи з курсу «Мікрохвильова електродинаміка та електроніка»: Навчальний посібник. – К.: Радіофізичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2013. – 226 с.

У навчальному посібнику розглянуто основи теорії електромагнітного поля, загальні властивості електромагнітних хвиль у мікрохвильових лініях передачі, а також властивості електромагнітних хвиль у порожнистих та частково заповнених металевих хвилеводах.

Для студентів радіофізичних та фізичних факультетів університетів, аспірантів та молодих науковців.

## ЗМІСТ

<b>Основні позначення .....</b>	<b>5</b>
<b>Розділ I. ВСТУП.....</b>	<b>10</b>
1.1. Загальні властивості електромагнітного поля.....	10
1.2. Загальні властивості електромагнітних хвиль .....	11
1.3. Мікрохвильовий діапазон частот .....	13
1.4. Особливості мікрохвильового діапазону частот.....	15
1.5. Мікрохвильові коливання та хвилі в науці, техніці та побуті .....	24
1.6. Витоки мікрохвильової електродинаміки та історія освоєння мікрохвильового діапазону .....	27
Контрольні запитання та задачі.....	37
<b>Розділ II. ОСНОВИ МІКРОХВИЛЬОВОЇ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ ...</b>	<b>42</b>
2.1. Рівняння електромагнітного поля .....	42
2.2. Векторні та скалярні поля в електродинаміці .....	47
2.3. Класифікація електромагнітних явищ.....	49
2.4. Джерела електромагнітного поля .....	52
2.5. Матеріальні рівняння .....	55
2.6. Граничні умови.....	62
2.7. Енергетичні характеристики електромагнітного поля .....	68
2.8. Векторні хвильові рівняння .....	71
2.9. Метод комплексних амплітуд .....	75
2.10. Електродинамічні потенціали .....	86
2.11. Поля та потенціали в деяких системах ортогональних координат .....	90
2.12. Електродинамічні задачі та умови їх розв'язку .....	94
Контрольні запитання та задачі.....	95
<b>Розділ III. ПЛОСКІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ .....</b>	<b>97</b>
3.1. Загальні властивості плоских хвиль в лінійному однорідному ізотропному середовищі.....	97
3.2. Поляризація електромагнітних хвиль .....	104
3.3. Стоячі хвилі .....	107
3.4. Нормальне падіння плоскої хвилі на плоску границю розділу двох середовищ.....	110
3.5. Узагальнені плоскі хвилі.....	114
3.6. Похиле падіння плоскої хвилі на плоску границю розділу двох середовищ .....	118

3.7. Неоднорідні плоскі хвилі. ТЕ- та ТМ-хвилі.....	126
3.8. Плоскі хвилі в дисипативних середовищах .....	129
3.9. Плоскі хвилі в різних середовищах. Скін-ефект .....	131
Контрольні запитання та задачі.....	137

#### **Розділ IV. ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ МІКРОХВИЛЬОВИХ**

<b>ЛІНІЙ ПЕРЕДАЧІ.....</b>	<b>140</b>
4.1. Класифікація мікрохвильових ліній передачі .....	140
4.2. Телеграфні рівняння .....	143
4.3. Поширення електромагнітних хвиль між двома паралельними ідеально провідними площинами .....	147
4.4. Скалярні рівняння Гельмгольца для регулярної лінії передачі .....	153
4.5. Електромагнітне поле вільних хвиль в лініях передачі.....	157
4.6. Граничні умови для мембранної функції.....	160
4.7. Дисперсія та явище відсічки в мікрохвильових лініях передачі .....	163
4.8. Електромагнітні хвилі в лініях передачі з втратами.....	168
4.9. Постановка задачі та особливості розгляду властивостей електромагнітних хвиль в мікрохвильових направляючих системах .....	173
Контрольні запитання та задачі.....	174

#### **Розділ V. ОДНОЗВ'ЯЗНІ ЗАКРИТІ МІКРОХВИЛЬОВІ**

<b>ЛІНІЙ ПЕРЕДАЧІ .....</b>	<b>177</b>
5.1. Особливості однозв'язних закритих мікрохвильових ліній передачі .....	177
5.2. Прямокутний хвилевід .....	179
5.3. Круглий хвилевід .....	195
5.4. Металеві хвилеводи з складною формою поперечного перерізу .....	210
Контрольні запитання та задачі.....	218

<b>ДОДАТКИ .....</b>	<b>220</b>
----------------------	------------

## ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

У книзі використовується система одиниць СІ. Залежність комплексних електродинамічних величин, що коливаються з циклічною частотою  $\omega$ , від часу  $t$  прийнята у вигляді  $e^{-i\omega t}$ , де  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця.

Нижче наведено основні позначення, що використовуються у книзі. Позначення фізичних величин наводяться разом з відповідними одиницями виміру.

$\vec{A}$ (Тл·м)	– векторний електричний потенціал
$\bar{A}$ (Тл·м)	– комплексна амплітуда векторного електричного потенціалу
$\vec{A}^M$ (Кл·м <sup>-1</sup> )	– векторний магнітний потенціал
$\bar{A}^M$ (Кл·м <sup>-1</sup> )	– комплексна амплітуда векторного магнітного потенціалу
$A_{EM}$ (Дж)	– робота, що виконується електромагнітним полем
$\vec{B}$ (Тл)	– вектор індукції магнітного поля
$\bar{B}$ (Тл)	– комплексна амплітуда вектора індукції магнітного поля
$c$ (м·с <sup>-1</sup> )	– швидкість світла в вакуумі
$\vec{D}$ (Кл·м <sup>-2</sup> )	– вектор індукції електричного поля
$\bar{D}$ (Кл·м <sup>-2</sup> )	– комплексна амплітуда вектора індукції електричного поля
$e$ (Кл)	– елементарний електричний заряд
$e \approx 2,72$	– основа натурального логарифму
$\vec{e}_\alpha$	– одиничний вектор (орт) осі $\alpha$ в деякій системі координат
$\vec{E}$ (В·м <sup>-1</sup> )	– вектор напруженості електричного поля
$\bar{E}$ (В·м <sup>-1</sup> )	– комплексна амплітуда вектора напруженості електричного поля
$\vec{F}_L$ (Н)	– сила Лоренца
$g_e$	– g-фактор (фактор Ланде) для електрона
$g_\gamma$	– g-фактор ядра атома
$\hbar$ (Дж·с)	– стала Планка ( $\hbar \approx 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с)
$\vec{H}$ (А·м <sup>-1</sup> )	– вектор напруженості магнітного поля
$\bar{H}$ (А·м <sup>-1</sup> )	– комплексна амплітуда вектора напруженості магнітного поля
$i$	– уявна одиниця

$\vec{t}_{EM}$ (кг·м·с <sup>-1</sup> )	– вектор імпульсу електромагнітного поля
$I$ (А)	– електричний струм
$I^M$ (В)	– магнітний струм
$\vec{j}$ (А·м <sup>-2</sup> )	– густина електричного струму
$\vec{j}$ (А·м <sup>-2</sup> )	– комплексна амплітуда густини електричного струму
$\vec{j}_{зм}$ (А·м <sup>-2</sup> )	– густина струму зміщення
$\vec{j}_{зм}$ (А·м <sup>-2</sup> )	– комплексна амплітуда густини струму зміщення
$\vec{j}_{пов}$ (А·м <sup>-1</sup> )	– густина поверхневого електричного струму
$\vec{j}_{пов}^M$ (В·м <sup>-1</sup> )	– густина поверхневого магнітного струму
$\vec{j}_{np}$ (А·м <sup>-2</sup> )	– густина електричного струму провідності
$\vec{j}_{np}$ (А·м <sup>-2</sup> )	– комплексна амплітуда густини електричного струму провідності
$\vec{j}_{cm}$ (А·м <sup>-2</sup> )	– густина стороннього електричного струму
$\vec{j}_{cm}$ (А·м <sup>-2</sup> )	– комплексна амплітуда густини стороннього електричного струму
$\vec{j}^M$ (В·м <sup>-2</sup> )	– густина магнітного струму
$\vec{j}^M$ (В·м <sup>-2</sup> )	– комплексна амплітуда густини магнітного струму
$\vec{j}_{cm}^M$ (В·м <sup>-2</sup> )	– густина стороннього магнітного струму
$\vec{j}_{cm}^M$ (В·м <sup>-2</sup> )	– комплексна амплітуда густини стороннього магнітного струму
$k_0$ (м <sup>-1</sup> )	– хвильове число електромагнітної хвилі у вакуумі
$K = k_0 \sqrt{\epsilon \mu}$ (м <sup>-1</sup> )	– хвильове число електромагнітної хвилі у середовищі з діелектричною проникністю $\epsilon$ та магнітною проникністю $\mu$
$l$ (м)	– характерний геометричний розмір електродинамічної системи
$m_e$ (кг)	– маса електрона
$m_{EM}$ (кг)	– маса електромагнітного поля
$\vec{m}$ (А·м <sup>2</sup> )	– магнітний момент
$\vec{M}$ (А·м <sup>-1</sup> )	– об'ємна густина магнітного моменту (намагніченість)
$\vec{n}$	– вектор нормалі
$n_{сер} = \sqrt{\epsilon \mu}$	– показник заломлення середовища з діелектричною проникністю $\epsilon$ та магнітною проникністю $\mu$
$p_{EM}$ (Вт·м <sup>-3</sup> )	– питома потужність втрат електромагнітного поля

$\vec{p}$ (Кл·м)	– електричний дипольний момент
$P$ (Вт)	– потужність
$P_{EM}$ (Вт)	– потужність втрат електромагнітного поля
$P_{UI} = UI$ (Вт)	– потужність електромагнітного поля в колі з струмом $I$ та напругою $U$
$\vec{p}$ (Кл·м <sup>-2</sup> )	– вектор електричної поляризації
$q$ (Кл)	– електричний заряд
$q$ (Кл)	– комплексна амплітуда електричного заряду
$q^m$ (Вб)	– магнітний заряд
$q^m$ (Кл)	– комплексна амплітуда магнітного заряду
$\vec{r}$ (м)	– радіус-вектор
$S$ (м <sup>2</sup> )	– площа (поверхні, фігури тощо)
$t$ (с)	– час
$T$ (с)	– період коливань
$u$ (м·с <sup>-1</sup> )	– швидкість світла у середовищі
$U$ (В)	– напруга, різниця потенціалів
$\vec{v}$ (м·с <sup>-1</sup> )	– вектор швидкості
$\vec{v}_g$ (м·с <sup>-1</sup> )	– вектор групової швидкості
$\vec{v}_e$ (м·с <sup>-1</sup> )	– вектор швидкості переносу енергії
$\vec{v}_{EM}$ (м·с <sup>-1</sup> )	– вектор швидкості поширення електромагнітного поля
$\vec{v}_\phi$ (м·с <sup>-1</sup> )	– вектор фазової швидкості
$V$ (м <sup>3</sup> )	– об'єм
$w_E$ (Дж·м <sup>-3</sup> )	– об'ємна густина електричної енергії
$w_M$ (Дж·м <sup>-3</sup> )	– об'ємна густина магнітної енергії
$w_{EM}$ (Дж·м <sup>-3</sup> )	– об'ємна густина енергії електромагнітного поля
$W_E$ (Дж)	– енергія електричного поля
$W_M$ (Дж)	– енергія магнітного поля
$W_{EM}$ (Дж)	– енергія електромагнітного поля
$Z_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$ (Ом)	– хвильовий опір (імпеданс) вакууму
$Z = Z_0 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$ (Ом)	– хвильовий опір (імпеданс) середовища з діелектричною проникністю $\epsilon$ та магнітною проникністю $\mu$
$Z_n$ (Ом)	– опір навантаження (загалом кажучи, комплексний)
$\delta_\epsilon$	– кут електричних втрат

$\delta_\mu$	– кут магнітних втрат
$\epsilon'$	– відносна діелектрична проникність середовища, дійсна частина відносної комплексної діелектричної проникності середовища
$\epsilon''$	– уявна частина відносної комплексної діелектричної проникності середовища
$\epsilon_0$ (Ф·м <sup>-1</sup> )	– електрична стала
$\epsilon'_a = \epsilon'\epsilon_0$ (Ф·м <sup>-1</sup> )	– абсолютна діелектрична проникність середовища
$\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$	– відносна комплексна діелектрична проникність середовища
$\lambda_0$ (м)	– довжина електромагнітної хвилі у вакуумі
$\lambda$ (м)	– довжина електромагнітної хвилі
$\mu'$	– відносна магнітна проникність середовища, дійсна частина відносної комплексної магнітної проникності середовища
$\mu''$	– уявна частина відносної комплексної магнітної проникності середовища
$\mu_0$ (Гн·м <sup>-1</sup> )	– магнітна стала
$\mu'_a = \mu'\mu_0$ (Гн·м <sup>-1</sup> )	– абсолютна магнітна проникність середовища
$\mu_B$ (Дж·Тл <sup>-1</sup> )	– магнетон Бора
$\mu_\pi$ (Дж·Тл <sup>-1</sup> )	– ядерний магнетон
$\mu = \mu' + i\mu''$	– відносна комплексна магнітна проникність середовища
$\nu$ (Гц)	– частота
$\xi, \eta, \zeta$ (м)	– криволінійні ортогональні координати
$\rho$ (Кл·м <sup>-3</sup> )	– об'ємна густина електричного заряду
$\rho$ (Кл·м <sup>-3</sup> )	– комплексна амплітуда об'ємної густини електричного заряду
$\rho_{нов}$ (Кл·м <sup>-2</sup> )	– поверхнева густина електричного заряду
$\rho_{нов}^M$ (Тл)	– поверхнева густина магнітного заряду
$\rho_{np}$ (Кл·м <sup>-3</sup> )	– об'ємна густина вільного електричного заряду
$\rho_{np}$ (Кл·м <sup>-3</sup> )	– комплексна амплітуда об'ємної густини вільного електричного заряду
$\rho_{cm}$ (Кл·м <sup>-3</sup> )	– об'ємна густина стороннього електричного заряду
$\rho_{cm}$ (Кл·м <sup>-3</sup> )	– комплексна амплітуда об'ємної густини стороннього електричного заряду
$\rho^M$ (Тл·м <sup>-1</sup> )	– об'ємна густина магнітного заряду



$\rho^M$ (Тл·м <sup>-1</sup> )	– комплексна амплітуда об'ємної густини магнітного заряду
$\rho_{np}^M$ (Тл·м <sup>-1</sup> )	– об'ємна густина вільного магнітного заряду
$\rho_{np}^M$ (Тл·м <sup>-1</sup> )	– комплексна амплітуда об'ємної густини вільного магнітного заряду
$\rho_{cm}^M$ (Тл·м <sup>-1</sup> )	– об'ємна густина стороннього магнітного заряду
$\rho_{cm}^M$ (Тл·м <sup>-1</sup> )	– комплексна амплітуда об'ємної густини стороннього магнітного заряду
$\sigma$ (См·м <sup>-1</sup> )	– питома електрична провідність середовища
$\sigma^M$ (Ом·м <sup>-1</sup> )	– питома магнітна провідність середовища
$\vec{\zeta}_{EM}$ (Вт·м <sup>-2</sup> )	– вектор Умова–Пойнтинга
$\Sigma_{EM}$ (Вт)	– потужність випромінювання електромагнітного поля
$\vec{\tau}$	– одиничний вектор тангенціальний до площини, контуру, поверхні тощо
$\tau_p$ (с)	– час релаксації
$\varphi$ (рад.)	– фаза електромагнітної хвилі, сигналу
$\Phi_B$ (Вб)	– потік магнітної індукції
$\Phi^e$ (В)	– скалярний електричний потенціал (комплексна амплітуда)
$\chi_\epsilon$	– діелектрична сприйнятливість
$\chi_\mu$	– магнітна сприйнятливість
$\omega$ (с <sup>-1</sup> )	– циклічна частота

# Розділ I

## ВСТУП

### 1.1. Загальні властивості електромагнітного поля

*Електромагнітне поле* – це особлива форма існування матерії, рух та властивості якої є предметом дослідження такої області фізики, як *електродинаміка*. В макроскопічній електродинаміці, що вивчає властивості електромагнітного поля в системах, розміри яких набагато перевищують розміри атомів та молекул, поле прийнято характеризувати чотирма векторними величинами: *вектором напруженості електричного поля*  $\vec{E}$  (В/м)<sup>1,2</sup>, *вектором напруженості магнітного поля*  $\vec{H}$  (А/м), *вектором індукції електричного поля*  $\vec{D}$  (Кл/м<sup>2</sup>) та *вектором індукції магнітного поля*  $\vec{B}$  (Тл). Кожна з векторних величин  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$ , в загальному випадку, є функцією координат (радіус-вектора  $\vec{r}$ ) та часу  $t$ .

Існування електромагнітного поля проявляється в тому, що воно діє з певною силою

$$\vec{F}_A = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}] \text{ (Н)}, \quad (1.1.1)$$

відомою як *сила Лоренца*, на точковий електричний заряд  $q$  (Кл), який рухається з швидкістю  $\vec{v}$  (м/с). Під дією сили Лоренца заряджені частинки та макроскопічні тіла змінюють своє положення в просторі, а траєкторії їх руху викривляються.

Впливаючи на рух заряджених тіл, електромагнітне поле виконує над ними роботу і, отже, має власну енергію  $W_{EM}$  (Дж), масу

$$m_{EM} = W_{EM} / c^2 \text{ (кг)} \quad (1.1.2)$$

та імпульс

$$\vec{i}_{EM} = m_{EM} \vec{v}_{EM} \text{ (кг·м/с)}, \quad (1.1.3)$$

що доводить його матеріальність;  $\vec{v}_{EM}$  (м/с) – швидкість поширення поля,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м/с} \quad (1.1.4)$$

---

<sup>1</sup> Тут і далі, відразу після введення фізичної величини, в дужках будемо наводити її одиниці виміру в системі СІ.

<sup>2</sup> В подальшому, після введення векторної фізичної величини, що характеризує електромагнітне поле, при зверненні до цієї величини слово «вектор», як правило, будемо опускати. Наприклад, будемо говорити «напруженість електричного поля» замість «вектор напруженості електричного поля».

– швидкість світла у вакуумі,  $\epsilon_0 = 8,85418782 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – електрична стала,  $\mu_0 = 12,56637061 \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнітна стала.

Вивчаючи особливості руху заряджених частинок в електромагнітному полі, що діє на частинки з силою (1.1.1), вдається визначити напруженість електричного поля  $\vec{E}$  та індукцію магнітного поля  $\vec{B}$ <sup>1</sup>. Потім, використовуючи закони електродинаміки, можна розрахувати інші характеристики поля.

## 1.2. Загальні властивості електромагнітних хвиль

*Біжучими електромагнітними хвилями* називаються змінні у часі електромагнітні поля, що поширюються у просторі. Під поширенням електромагнітних хвиль розуміють процес переносу електромагнітної енергії  $W_{EM}$  в формі енергії електричного  $W_E$  (Дж) та магнітного  $W_M$  (Дж) полів.

Довільна зміна електромагнітного поля, що відбулась в будь-якій точці простору, поширюється в усіх напрямках від цієї точки у вигляді електромагнітних хвиль. Цей процес подібний до того, як збурення поверхні води призводить до поширення цього збурення (хвиль) вздовж поверхні води. Але на відміну від хвиль на поверхні води, поширення електромагнітних хвиль від точки, де виникло збурення електромагнітного поля, може відбуватись у будь-якому напрямку і у будь-яких середовищах, зокрема, у вакуумі.

У вакуумі електромагнітні хвилі поширюються прямолінійно з швидкістю світла  $c$ . Лінія, вздовж якої поширюється електромагнітна хвиля, називається *променем*. Це лінія, дотична до якої в кожній її точці співпадає з напрямком поширення хвилі (одичним вектором)  $\vec{v}_{EM} / v_{EM}$ .

При поширенні електромагнітної хвилі електромагнітне поле хвилі змінюється у просторі і часі. В мікрохвильовій електродинаміці в першу чергу розглядаються електромагнітні поля, що змінюються у часі (коливаються) з певною фіксованою частотою  $\nu$  (Гц). Електромагнітні поля такого типу називаються *монохроматичними*.

---

<sup>1</sup> Згідно з виразом (1.1.1) для сили Лоренца, вектор  $\vec{B}$  є силовою характеристикою поля і його слід було б назвати вектором напруженості магнітного поля, а вектор  $\vec{H}$  – відповідно вектором індукції магнітного поля. Однак, історично склалось все навпаки, і за традицією вектор  $\vec{B}$  в електродинаміці називають вектором індукції магнітного поля, а вектор  $\vec{H}$  – вектором напруженості магнітного поля.

Частота  $\nu$  монохроматичного електромагнітного поля пов'язана з *періодом коливань* поля  $T$  (с) та *циклічною частотою* коливань поля  $\omega$  (с<sup>-1</sup>) співвідношеннями:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.2.1)$$

Відстань, на яку поширюється електромагнітна хвиля за один період коливань поля  $T$ , називається *довжиною хвилі*  $\lambda$  (м). Довжина електромагнітної хвилі пов'язана з частотою та періодом коливань електромагнітного поля співвідношеннями:

$$\lambda = v_{EM} T = \frac{v_{EM}}{\nu}, \quad (1.2.2)$$

де  $v_{EM}$  (м/с) – швидкість поширення електромагнітної хвилі.

Для електромагнітних хвиль у вакуумі  $v_{EM} = c$ , а відповідна довжина хвилі, яку будемо позначати  $\lambda_0$  (м), може бути розрахована за формулою:

$$\lambda_0 = cT = \frac{c}{\nu}. \quad (1.2.3)$$

Окрім такого параметра як довжина хвилі, просторову зміну електромагнітного поля хвилі прийнято характеризувати *хвильовим вектором*  $\vec{K}$  (м<sup>-1</sup>). Напрямок цього вектора співпадає з напрямком вектора швидкості поширення електромагнітного поля  $\vec{v}_{EM}$ :

$$\vec{K} = K \frac{\vec{v}_{EM}}{v_{EM}}. \quad (1.2.4)$$

При прямолінійному поширенні електромагнітної хвилі вектор  $\vec{K}$  лежить на відповідному промені. Модуль хвильового вектора – *хвильове число*  $K$  (м<sup>-1</sup>) – пов'язане з довжиною хвилі  $\lambda$ , частотою  $\nu$  та коловою частотою  $\omega$  хвилі наступним співвідношенням:

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{v_{EM}} = \frac{\omega}{v_{EM}}. \quad (1.2.5)$$

Хвильовий вектор та хвильове число електромагнітної хвилі у вакуумі будемо відповідно позначати  $\vec{k}_0$  та  $k_0$  (м<sup>-1</sup>). Ці величини описуються виразами:

$$\vec{k}_0 = k_0 \frac{\vec{v}_{EM}}{c}, \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c}, \quad (1.2.6)$$

де прийнято до уваги, що у вакуумі  $|\vec{v}_{EM}| = c$ .

Величини  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$ , що характеризують монохроматичне електромагнітне поле, прийнято записувати у формі, згідно якої поле змінюється (коливається) за гармонічним законом:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{або} \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0(\vec{r}) \sin(\omega t + \varphi), \quad (1.2.7)$$

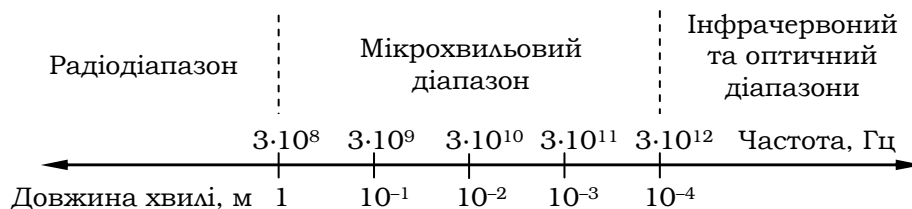
де  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  – одна з векторних величин  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$ , залежність якої від координат описується *амплітудною функцією (амплітудою)*  $\vec{A}_0(\vec{r})$ ,  $\varphi$  – *початкова фаза* коливань поля.

У тому випадку, коли монохроматичне електромагнітне поле поширюється у просторі, тобто у просторі поширюється монохроматична електромагнітна хвиля, залежність величин  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$  цієї хвилі від радіус-вектора  $\vec{r}$  та часу  $t$  можна записати у вигляді:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0(\vec{r}) \cos(\omega t - \vec{K} \vec{r} + \varphi) \quad \text{або} \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0(\vec{r}) \sin(\omega t - \vec{K} \vec{r} + \varphi). \quad (1.2.8)$$

### 1.3. Мікрохвильовий діапазон частот

*Мікрохвильовий діапазон частот* або просто *мікрохвильовий діапазон* (від англ. microwave – мікрохвиля, мікрохвильовий) – це ділянка частотного спектра, що займає, за сучасними уявленнями, область частот приблизно від 300 МГц до 3 ТГц (область довжин хвиль від 1 м до 0,1 мм) (рис. 1.3.1). Ці межі є достатньо умовними. Іноді, наприклад, визначають мікрохвильовий діапазон як область частот від 30 МГц до 300 ГГц [1–2], від 30 МГц до 1500 ГГц [3], від 30 МГц до 3000 ГГц [4], від 300 МГц до 6000 ГГц [5] та ін. До недавнього часу найбільш типове визначення мікрохвильового діапазону було таке – це область частот від 300 МГц до 300 ГГц (див., наприклад, [6–7]). З початком освоєння терагерцового діапазону частот, системи і методи передачі та обробки інформації, які раніше традиційно використовувались на частотах менших за 300 ГГц, почали застосовуватись і при більш високих частотах. Це призвело до зсуву



**Рис. 1.3.1. Положення мікрохвильового діапазону частот в електромагнітному спектрі**

меж мікрохвильового діапазону в область більш коротких довжин хвиль.

Визначення мікрохвильового діапазону як області частот від 0,3 до 3000 ГГц дозволяє більш-менш чітко відокремити область радіоелектроніки (з характерними частотами меншими за 300 МГц) та інфрачервоний та оптичний діапазони (де довжина електромагнітної хвилі менша за 0,1 мм). Саме в такому розумінні це поняття і буде використовуватись далі.

Мікрохвильовий діапазон додатково розділяють на декілька частотних смуг. У 1975 році Міжнародний консультативний комітет по радіо<sup>1</sup> (МККР) запропонував нову систему поділу мікрохвильового діапазону на піддіапазони [5, 8–9]. Відповідно до цієї системи мікрохвильовий діапазон поділяється на наступні піддіапазони (табл. 1.3.1): ультрависокі частоти (Ultra High Frequency, UHF): 300 ÷ 3000 МГц; надвисокі частоти (Super High Frequency, SHF): 3 ÷ 30 ГГц; надто високі частоти (Extremely High Frequency, EHF): 30 ÷ 300 ГГц; гіпервисокі частоти (Hyper High Frequency, HHF): 300 ÷ 3000 ГГц. В тій же таблиці наведено альтернативні назви піддіапазонів мікрохвильового діапазону відповідно до вітчизняної класифікації,

**Таблиця 1.3.1**

**Класифікація піддіапазонів мікрохвильового діапазону**

<b>Назва піддіапазону відповідно до міжнародної класифікації</b>	<b>Альтернативна назва піддіапазону відповідно до вітчизняної класифікації</b>	<b>Частота, Гц</b>	<b>Довжина хвилі, м</b>
Ультрависокі частоти (UHF)	Дециметрові хвилі	$3 \cdot 10^8 \div 3 \cdot 10^9$	$1 \div 10^{-1}$
Надвисокі частоти (SHF)	Сантиметрові хвилі	$3 \cdot 10^9 \div 3 \cdot 10^{10}$	$10^{-1} \div 10^{-2}$
Надто високі частоти (EHF)	Міліметрові хвилі	$3 \cdot 10^{10} \div 3 \cdot 10^{11}$	$10^{-2} \div 10^{-3}$
Гіпервисокі частоти (HHF)	Дециміліметрові або субміліметрові хвилі	$3 \cdot 10^{11} \div 3 \cdot 10^{12}$	$10^{-3} \div 10^{-4}$

<sup>1</sup> З 1992 року МККР було перетворено у Сектор радіозв'язку Міжнародного Союзу Електрозв'язку.

що діяла за часів колишнього Радянського Союзу і використовується зараз на території України [1–6, 9–10].

За кордоном, в США та в Європі, також використовуються інші позначення піддіапазонів мікрохвильового діапазону.

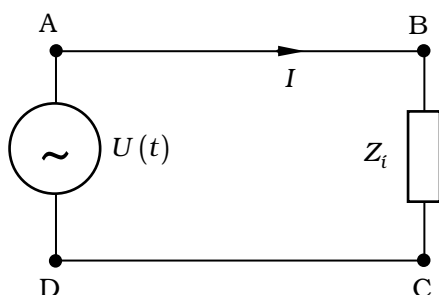
Відмітимо, що у вітчизняній навчальній, науковій та науково-популярній літературі часто за традицією, що склалась історично ще у 50 – 60 роки минулого сторіччя, мікрохвильовий діапазон називають діапазоном надвисоких частот (НВЧ) [1–4, 6, 9, 11–13]. З іншого боку, згідно з класифікацією частотних смуг, затвердженою МККР, діапазон НВЧ є лише одним з піддіапазонів мікрохвильового діапазону (див. табл. 1.3.1). У деяких випадках така термінологічна двозначність може призводити до серйозних помилок, оскільки у вітчизняній літературі терміни «діапазон НВЧ» та «мікрохвильовий діапазон» вважаються синонімами, а в закордонній літературі ці поняття відрізняються за змістом. Щоб уникнути цієї двозначності, в даній роботі будемо намагатись користуватись тільки терміном «мікрохвильовий діапазон». У тому випадку, коли з'явиться необхідність розглянути окремий піддіапазон мікрохвильового діапазону, будемо користуватись вітчизняною класифікацією, а саме поняттями діапазонів дециметрових, сантиметрових, міліметрових або субміліметрових хвиль.

#### **1.4. Особливості мікрохвильового діапазону частот**

##### **1.4.1. Електромагнітні процеси в мікрохвильових колах**

Електромагнітні явища, що відбуваються в мікрохвильовому діапазоні частот, мають ряд принципових відмінностей порівняно з явищами, які відносяться до суміжних ділянок електромагнітного спектра. Перш за все, звернемо увагу на одну важливу обставину, котра, як правило, не враховується в низькочастотній радіoeлектроніці.

Розглянемо просте електричне коло, що складається з генератора змінної напруги  $U(t)$  (В), двох ліній передачі (проводів АВ та CD) та навантаження з опором  $Z_n$  (Ом) (рис. 1.4.1). Нехай в деякій момент часу  $t$  генератор створює потенціал  $U(t)$  на верхньому проводі, наприклад, додатній потенціал в точці А. Електрони будуть рухатись в область цього потенціалу і в точці А виникне їх надлишок. Якщо припустити, що електронна рідина не може бути стиснута, то миттєво



**Рис. 1.4.1. Лінія передачі електромагнітного сигналу від генератора до навантаження з опором  $Z_n$**

в електричному колі повинен виникнути електричний струм  $I$  (А), який, протікаючи по колу, призведе до втрат енергії на навантаженні. Якщо ж вважати, що електронна рідина може бути стиснута, то енергія на навантаженні буде виділятися не відразу, а через деякий час, впродовж якого відбувається стиснення електронної рідини. Виходячи з таких міркувань, середовище, в якому знаходяться лінії передачі, не грає ніякої ролі і може бути довільним. Однак з точки зору загальної фізики це зовсім не

так!

При ввімкненні генератора від нього до навантаження починає поширюватись електромагнітна хвиля, що характеризується електричним та магнітним полями. У першому наближенні швидкість поширення енергії в цій хвилі майже не залежить від властивостей електронної рідини і близька до швидкості світла  $u$  (м/с) в тому середовищі, в якому знаходяться проводи. Підкреслимо, що ця енергія поширюється не по проводам, а біля них! Проводи є лише направляючою системою – вони змінюють геометричний розподіл електричного та магнітного полів.

При поширенні електромагнітного поля у просторі воно переносить потужність, яка лише в дуже рідкісних випадках співпадає з потужністю  $P_{UI}$  (Вт), що виражається через електричні струм  $I$  та напругу  $U$  в лінії передачі:  $P_{UI} = UI$ . Як правило, швидкість руху носіїв заряду в лінії передачі  $v$  є значно меншою за швидкість світла в середовищі  $u$ . Оскільки  $I \sim v$  [14–15], зрозуміло, що носії заряду переносять лише частину електромагнітної енергії, що віддається генератором у коло. Інша частина енергії переноситься самим електромагнітним полем. В загальному випадку енергія може переноситися електромагнітним полем і за відсутності проводів – щоб в цьому переконатись достатньо лише згадати процес нагрівання різноманітних предметів лазерним променем або процес розігріву їжі в побутових мікрохвильових печах.

Особливим випадком є випадок постійного струму, період коливань якого  $T \rightarrow \infty$ . Після ввімкнення генератора постійного струму (або напруги) в початковий момент часу вздовж двопровідної



лінії передачі почне поширюватись з швидкістю  $u$  електромагнітна хвиля, поле якої буде визначатись параметрами лінії передачі та напругою генератора  $U$ . Буде відбуватись *перехідний процес*, що був викликаний зростанням напруги в електричному колі від нуля до  $U$ . Через час  $t > (AB + CD) / u$  (див. рис. 1.4.1) перехідний процес завершиться, і в лінії встановляться стаціонарні, однакові по всій її довжині напруга  $U$ , струм  $I$ , електричне та магнітне поля. Після цього потужність втрат в колі (на навантаженні) буде дорівнювати

$$P_{UI} = UI = I^2 Z_n = U^2 / Z_n. \quad (1.4.1)$$

В стаціонарному режимі роботи електричного кола передача енергії без проводів неможлива, оскільки згідно (1.2.4)–(1.2.5) в цьому випадку хвильове число  $k \rightarrow 0$  і у формулах (1.2.8) зникає гармонічна залежність електромагнітного поля від радіус-вектора  $\vec{r}$ . Тобто електромагнітне поле з періодом  $T \rightarrow \infty$  (або з нульовою частотою  $\nu = 1/T$ ) не може поширюватись у просторі. Отже енергія в електричному колі, по якому протікає постійний струм, буде переноситись тільки за рахунок руху носіїв заряду.

Виходячи з вищесказаного, сформулюємо шість фізичних особливостей мікрохвильового діапазону, які необхідно враховувати при проектуванні, створенні та використанні радіоелектронних мікрохвильових приладів та пристроїв.

#### 1.4.2. Явище запізнення коливань

Припустимо, що в момент часу  $t = 0$  в точці А існує деякий додатній потенціал  $\phi_A$ , а в точці D – нульовий потенціал  $\phi_D = 0$  (див. рис. 1.4.1). В радіоелектроніці вважається, що потенціали в усіх точках А, В, С, D наведеного електричного кола, пов'язані між собою співвідношеннями  $\phi_A = \phi_B > 0$ ,  $\phi_C = \phi_D = 0$ . Тобто  $\phi_B - \phi_C$  є не що інше, як прикладена напруга  $U(t)$ . Насправді, ця умова завжди є наближеною, хоча може й виконуватись з високою точністю. Щоб показати це, припустимо, що електромагнітний сигнал поширюється від точки А до точки D по контуру ABCD зі скінченою швидкістю  $u$ . Тоді носії заряду, що знаходяться в точках В та С електричного кола «відчують» електромагнітний сигнал в моменти часу  $t_B = AB / u$  та  $t_C = (AB + BC) / u$ . Нехай період коливань  $T$  генератора обрано таким чином, що

$$t_C - t_B = \frac{BC}{u} = \frac{T}{2}. \quad (1.4.2)$$

Тоді в будь-який момент часу  $t \geq t_C$  коливання носіїв заряду в точках В та С електричного кола будуть зсунуті по фазі одне відносно іншого на  $\pi$ , а носії заряду будуть завжди рухатись в протилежних напрямках. Тобто в колах, що задовольняють умову (1.4.2) (хоча б наближено) спостерігається явище затримки сигналу в деякій точці кола відносно сигналів в інших його точках. Це явище отримало назву *явища запізнення коливань*. Для кіл, в яких воно спостерігається, не можна застосовувати закони електротехніки та радіоелектроніки, наприклад, закони Ома та Кірхгофа. Для аналізу таких кіл необхідно користуватись законами електродинаміки, оскільки поширення сигналів в таких колах нагадує хвильовий процес.

Враховуючи співвідношення (1.2.2), де можна покласти  $v_{EM} = u$ , формулу (1.4.2) можна записати в більш зручному вигляді:

$$l = \lambda / 2 \text{ або } l \sim \lambda, \quad (1.4.3)$$

де  $l$  – характерний розмір об'єкта (для кола, зображеного на рис. 1.4.1 – це довжина ділянки ВС).

### 1.4.3. Наявність випромінювання в мікрохвильових колах

З класичної електродинаміки відомо, що електричний заряд  $q$ , який рухається з прискоренням  $\vec{a}$  і швидкістю  $v \ll c$ , випромінює електромагнітні хвилі, причому енергія  $W(t)$  заряду внаслідок випромінювання зменшується за законом [15]:

$$\frac{dW(t)}{dt} = -\frac{\mu_0}{6\pi} \frac{q^2}{c} (\vec{a})^2 = -\frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{c^3} (\vec{a})^2, \quad (1.4.4)$$

де  $c$  – швидкість світла в вакуумі,  $\mu_0$  – магнітна стала. Якщо припустити, що в електричному колі на носії заряду діє змінна напруга

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t), \quad (1.4.5)$$

то положення кожного заряду буде змінюватись за законом

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.4.6)$$

де  $\vec{r}$  – радіус-вектор,  $\omega$  – колова частота коливань,  $U_0$  – амплітуда коливань змінної напруги, а фаза  $\varphi$  враховує явище запізнення коливань. Виходячи з (1.4.6) прискорення

$$\bar{a} = \frac{d^2 \bar{r}(t)}{dt^2} = -\bar{r}_0 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi). \quad (1.4.7)$$

Підставляючи цей вираз у (1.4.4) одержуємо, що втрати енергії пропорційні четвертій степені колової частоти  $\omega$ :

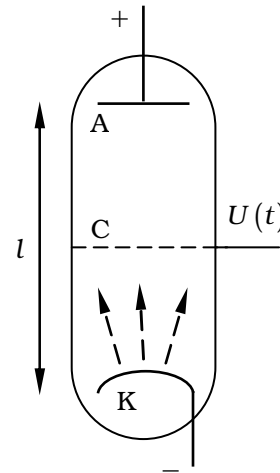
$$\frac{dW(t)}{dt} = -\frac{\mu_0}{6\pi} \frac{q^2}{c} (\bar{r}_0)^2 \omega^4 \cos^2(\omega t + \varphi). \quad (1.4.8)$$

Тобто в колах з високою частотою  $\nu = \omega/2\pi$  значна частина енергії випромінюється в оточуючий простір, а це означає, що відомий закон Джоуля-Ленца, який описує втрати в низькочастотних електричних колах при  $\nu \rightarrow 0$ , лише частково враховує втрати електромагнітної енергії в мікрохвильових колах.

#### 1.4.4. Прояв інерції носіїв заряду, що рухаються

Явище запізнення коливань та наявність випромінювання суттєво впливають на роботу низькочастотних електровакуумних приладів і унеможливають їх використання в мікрохвильовому діапазоні [9, 16]. Щоб проілюструвати це, розглянемо рух електронів в найпростішій вакуумній електронній лампі – тріоді (рис. 1.4.2).

Якщо між катодом К та анодом А тріоду прикласти постійну напругу  $U_-$ , електрони, емітуючись з катоду, будуть прискорено рухатись в вакуумній порожнині лампи і, потрапляючи на анод, утворювати анодний струм. В нашому прикладі сітка С, для спрощення, поки що не використовується, а тому вважаючи, що напруга  $U_-$  дуже велика (значно перевищує  $A_e/e$ , де  $A_e$  (Дж) – робота виходу електрона з матеріалу катода,  $e$  – елементарний електричний заряд), можна припустити, що електрони рухаються від катода до анода прямолінійно з нульовою початковою швидкістю. Постійне прискорення з яким рухається електрон дорівнює



**Рис. 1.4.2.**  
**Трьохелектродна вакуумна електронна лампа – тріод. Між катодом К та анодом А прикладена постійна напруга  $U_-$ , на сітку С подається керуючий**

$$a = \frac{e}{m_e} \frac{U_-}{l},$$

де  $m_e$  – маса електрона,  $l$  – відстань між катодом та анодом. Знаючи це прискорення, з рівняння  $l = a\tau^2 / 2$ , легко знайти час  $\tau$  прольоту електрона крізь тріод:

$$\tau = \sqrt{\frac{2l}{a}} = l \sqrt{\frac{2m_e}{eU_-}}.$$

Що буде відбуватись, якщо на електрон окрім постійної напруги  $U_-$  діє ще змінна напруга  $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ ? Очевидно, що в цьому випадку прямолінійний рух електронів спотвориться. Електрони будуть коливатись під дією змінної напруги і, якщо її колова частота  $\omega = 2\pi / T$  достатньо мала, будуть дрейфувати від катода до анода за рахунок середнього значення постійного електричного поля  $U_- / l$ . Однак за умови  $\tau \gg T$ , тобто при великій коловій частоті  $\omega$ , рух електронів помітно зміниться.

По-перше, електрони будуть втрачати за рахунок випромінювання частину своєї кінетичної енергії, яку вони набули в постійному електричному полі, прикладеному між катодом і анодом. Ці втрати описуються залежністю  $dW(t) / dt \sim \omega^4$  (див. вираз (1.4.8)) і є тим більшими чим більше колова частота  $\omega$  прикладеної змінної напруги. Це явище є суттєвим за умови  $\omega\tau \gg 1$  і обумовлено інерційністю носіїв заряду, оскільки  $\tau \sim \sqrt{m_e}$ .

По-друге, електрони, що емітуються з катода у різні моменти часу, будуть взаємодіяти зі змінним електричним полем, амплітуда та напрямок якого, загалом кажучи, будуть різними у вказані моменти часу. Це призведе до того, що електрони, які покинули катод в різні моменти часу, будуть набувати в змінному електричному полі різних швидкостей, що відрізняються як за величиною так і за напрямком. В результаті буде відбуватись утворення груп електронів з приблизно однаковими векторами швидкостями (модуляція електронів за швидкостями), що призведе до утворення електронних згустків. Наявність таких електронних згустків суттєво змінює режим роботи низькочастотних електронних ламп [16], зокрема, тріода, зображеного на рис. 1.4.2.

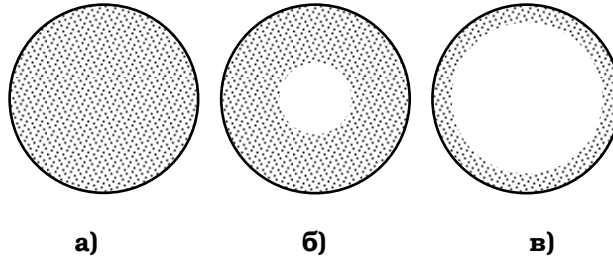
#### 1.4.5. Явище **скін-ефекту**

Розглянемо циліндричний відрізок проводу, по якому тече постійний електричний струм  $I$ , колова частота коливань якого  $\omega = 0$ . Розподіл цього струму у поперечному перерізі проводу, як відомо [14], є рівномірним (рис. 1.4.3а). Але якщо

колова частота  $\omega$  прикладеної до провідника напруги (і відповідно струму  $I$ , що тече в провіднику) не дорівнює нулю, а є скінченною і достатньо великою величиною, рівномірний розподіл струму спотворюється. Струм починає текти не по всьому поперечному перерізу провідника, а лише в його тонкому приповерхневому шарі, який називається *скін-шаром* (див. рис. 1.4.3б,в). Причиною такої поведінки, яка отримала назву *скін-ефекту* (від. англ skin – шкіра), є те, що змінний струм збуджується змінним електромагнітним полем, яке проникає в провідне середовище лише на глибину скін-шару.

Дійсно, при проникненні в провідне середовище, змінне електромагнітне поле починає взаємодіяти з носіями заряду та віддавати їм частину своєї енергії. Ці втрати енергії в першому наближенні можна описати формулою (1.4.8). Отже, із збільшенням колової частоти  $\omega$  коливань поля, втрати різко зростають, внаслідок чого амплітуда поля зменшується, а значить зменшується і глибина проникнення поля у матеріал провідника. Зі зменшенням глибини проникнення поля, зменшується кількість носіїв заряду в глибині провідника, з якими це поле взаємодіє. Відповідно ефективність збудження змінного струму в глибині проводу стає малою. Отже, можна вважати, що змінний струм протікає лише в області скін-шару – приповерхневій області провідника, причому із збільшенням колової частоти змінного електромагнітного поля  $\omega$  товщина скін-шару зменшується (див. рис. 1.4.3).

Явище скін-ефекту є суттєвим для частот  $\nu = \omega/2\pi$  більших за кілька десятків, а іноді і сотень мегагерц. В діапазоні більш низьких частот це явище проявляється дуже слабо і тому в електро- і радіотехніці ним, як правило, нехтують [14].



**Рис. 1.4.3. Розподіл електричного струму в поперечному перерізі циліндричного проводу (область в якій переноситься струм заштрихована) при різних частоті коливань  $\nu$ : а)  $\nu_a = 0$ ; б)  $\nu_b > 0$ ; в)  $\nu_c > \nu_b$**

#### 1.4.6. Наявність вікон прозорості в атмосфері Землі

На відміну від радіохвиль та інфрачервоного випромінювання, хвилі мікрохвильового діапазону, можуть майже без втрат поширюватись в атмосфері Землі, а також виходити за її межі, пронизуючи при цьому іонізовані шари атмосфери [9, 11, 17]. Частотні області, де виконується умова поширення таких електромагнітних хвиль майже без втрат, отримали назву *вікон прозорості*. Ці області спостерігаються переважно в діапазоні частот від 300 МГц до 10 ГГц, а також на частотах 35, 95, 140 та 240 ГГц [5, 9, 11, 17]. Саме наявність таких вікон прозорості дозволяє успішно реалізувати супутниковий зв'язок та вивчати космічний простір за допомогою радіоастрономічних методів досліджень.

#### 1.4.7. Можливість резонансної взаємодії мікрохвильового електромагнітного випромінювання з речовиною

Величина кванта енергії  $\hbar\omega$ , що відповідає мікрохвильовому діапазону, має порядок енергії, необхідної для збудження коливальних та обертальних станів атомів та молекул [18–20]. Тому електромагнітні коливання, особливо ті, що відповідають короткохвильовій частині мікрохвильового діапазону, можуть взаємодіяти з речовиною резонансним чином. Щоб показати це, обчислимо величину кванту  $\hbar\omega$  та характерну температуру  $\hbar\omega/k_B$  ( $k_B$  – стала Больцмана) на абсолютній шкалі температур для частот, що відповідають границям мікрохвильового діапазону:

$$W_{\min} = \hbar\omega_{\min} = 1,054 \cdot 10^{-34} \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \approx 1,988 \cdot 10^{-25} \text{ Дж} \Rightarrow 14,4 \text{ мК},$$

$$W_{\max} = \hbar\omega_{\max} = 1,054 \cdot 10^{-34} \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 10^{12} \approx 1,988 \cdot 10^{-21} \text{ Дж} \Rightarrow 144 \text{ К}, \quad (1.4.9)$$

і приймемо до уваги, що температура необхідна для збудження молекули на перший обертальний рівень  $T_{об} \sim 1 \div 10^2 \text{ К}$ , а температура необхідна для збудження молекули на перший коливальний рівень  $T_{кол} \sim 10^2 \div 10^5 \text{ К}$  [18–19].

Окрім збудження молекулярних спектрів, мікрохвильове випромінювання може ефективно взаємодіяти з магнітними моментами електронів та атомних ядер, впливати на рух заряджених частинок, що входять до складу атомів [18, 21–22]. Ці явища мають резонансний характер. Відповідно розрізняють *електронний*

парамагнітний, ядерний магнітний, феромагнітний та інші резонанси.

Електронний парамагнітний резонанс [18, 23–24] – це резонансне поглинання електромагнітної енергії речовиною, що містить парамагнітні частинки (електрони). Цей резонанс найчастіше експериментально спостерігається в діапазоні довжин хвиль від 30 до 2 мм (діапазон частот від 10 до 150 ГГц).

В найпростішому випадку вільного електрона зі спіном  $s = 1/2$ , який знаходиться в постійному магнітному полі з індукцією  $\mathcal{B}$  частота електронного парамагнітного резонансу  $\nu_{\text{ЕПР}}$  визначається формулою:

$$\nu_{\text{ЕПР}} = \frac{g_e \mu_B \mathcal{B}}{2\pi\hbar}, \quad (1.4.10)$$

де  $g_e = 2,0023$  – g-фактор (фактор Ланде) вільного електрона,  $\mu_B = 9,274078 \cdot 10^{-24}$  Дж/Тл – магнетон Бора. Якщо покласти, що індукція  $\mathcal{B} = 0,3$  Тл (типове значення для сучасних лабораторних електромагнітів), одержимо  $\nu_{\text{ЕПР}} \approx 8,4$  ГГц.

Ядерним магнітним резонансом [18, 24–25] називається вибіркове поглинання електромагнітної енергії ядрами атомів речовини, обумовлене ефектом ядерного парамагнетизму. Частота ядерного магнітного резонансу  $\nu_{\text{ЯМР}}$  може бути записана у вигляді схожому до (1.4.10):

$$\nu_{\text{ЯМР}} = \frac{g_{\text{я}} \mu_{\text{я}} \mathcal{B}}{2\pi\hbar}, \quad (1.4.11)$$

де  $g_{\text{я}}$  – g-фактор ядра атома,  $\mu_{\text{я}} = 5,050824 \cdot 10^{-27}$  Дж/Тл – ядерний магнетон.

Згідно (1.4.10)–(1.4.11) частота ядерного магнітного резонансу є на три порядки меншою за частоту електронного парамагнітного резонансу. Підставивши у (1.4.11) значення індукції магнітного поля  $\mathcal{B} = 0,3$  Тл і, поклавши для спрощення  $g_{\text{я}} \approx g_e$ , одержимо частоту ядерного магнітного резонансу  $\nu_{\text{ЯМР}} \approx 4,6$  МГц. Отже для спостереження ядерного магнітного резонансу в мікрохвильовому діапазоні необхідно збільшити індукцію магнітного поля приблизно в сто разів. Для створення відповідних магнітних полів можуть бути застосовані, наприклад, надпровідні магніти [26].

Феромагнітний резонанс [21–22, 27] – це різновид електронного магнітного резонансу в ферромагнітних речовинах. Він проявляється як вибіркове поглинання електромагнітної енергії феромагнетиком на

частоті  $\nu_{\text{ФМР}}$  у зовнішньому магнітному полі з індукцією  $\mathcal{B}$ . Вираз для частоти феромагнітного резонансу схожий на вираз для частоти електронного парамагнітного резонансу:

$$\nu_{\text{ФМР}} = \frac{g_e \mu_B \mathcal{B}_{\text{ефф}}}{2\pi\hbar}, \quad (1.4.12)$$

але замість індукції магнітного поля  $\mathcal{B}$  у (1.4.12) входить так зване ефективне поле  $\mathcal{B}_{\text{ефф}}$ , яке залежить від індукції зовнішнього поля  $\mathcal{B}$ , полів анізотропії, полів розмагнічування, тощо [21–22, 27].

## **1.5. Мікрохвильові коливання та хвилі в науці, техніці та побуті**

### **1.5.1. Системи зв'язку**

Якщо прийняти до уваги, що для радіотелефонного зв'язку необхідна смуга частот інформаційного каналу складає 10 кГц, а для телевізійного зв'язку – 5 МГц і більше, стане очевидним, що в мікрохвильовому діапазоні можна вільно розмістити до 300 мільйонів радіотелефонних каналів зв'язку або близько півмільйона телевізійних каналів зв'язку. Тому мікрохвильовий діапазон є привабливим для реалізації сучасних систем безпроводного та кабельного зв'язку.

На якість систем зв'язку, як відомо, впливає не тільки їх інформаційна ємність (кількість одночасно працюючих каналів зв'язку), але і їх швидкодія та надійність передачі інформації, які в свою чергу безпосередньо залежать від співвідношення сигнал/шум в тій частотній смузі, що використовується каналом зв'язку. У мікрохвильовому діапазоні частот співвідношення сигнал/шум для шумів атмосферного, космічного та штучного походження досягає свого найбільшого значення [6, 11, 28–29]. Особливо високе значення цього параметру вдається досягти в діапазоні частот від 1 до 10 ГГц, що, власне кажучи, і визначає широке поширення відповідних систем зв'язку в побуті людини (супутниковий, мобільний, кабельний зв'язок тощо).

На сьогоднішній день вже створені системи мобільного зв'язку в діапазоні дециметрових хвиль, активно розробляються системи зв'язку сантиметрового діапазону довжин хвиль [29–30]. Окрім систем мобільного зв'язку в мікрохвильовому діапазоні функціонують системи супутникового зв'язку, системи ближнього безпроводного зв'язку (Blue Tooth, Wi-Fi та ін.), системи космічного та дальнього кабельного зв'язку [28–33].



### **1.5.2. Радіолокація та радіонавігація**

Довжина електромагнітної хвилі  $\lambda$  в мікрохвильовому діапазоні не перевищує 1 м, що дозволяє використовувати такі хвилі для радіолокації та радіонавігації [11, 28–29, 33–36]. Відповідні радіолокаційні станції та навігаційні системи дозволяють визначати положення рухомих та нерухомих об'єктів з похибкою, порядок величини якої не перевищує  $\lambda$ . Більшість таких систем використовуються в діапазоні дециметрових та сантиметрових хвиль.

### **1.5.3. Радіоастрономія**

Космічний простір заповнений фотонами з різними енергіями, серед яких є і фотони з коловою частотою  $\omega$ , енергія яких  $\hbar\omega$  відповідає мікрохвильовому діапазону. Досліджуючи мікрохвильове випромінювання, яке породжується космічними об'єктами, можна визначити деякі їх властивості. Такий радіоастрономічний метод дослідження дозволяє не тільки доповнити інформацію, яку одержують шляхом вивчення спектрів випромінювання космічного тіла в діапазоні видимого світла, але й дозволяє одержати принципово нові результати [28–29, 37–38]. Особливо ефективний він тоді, коли космічний об'єкт не випромінює кванти видимого світла і, отже, досліджувати властивості такого об'єкта за допомогою традиційних телескопів неможливо.

### **1.5.4. Дослідження властивостей речовини**

Характерні частоти багатьох природних об'єктів знаходяться в мікрохвильовому діапазоні. Відповідні резонансні методи досліджень та прилади широко використовуються для вивчення коливальних та обертальних спектрів молекул, коливань кристалічної ґратки твердих тіл, спектрів електронного парамагнітного та спінового резонансів, властивостей домішок у напівпровідниках, особливостей резонансного поглинання електромагнітного випромінювання плазмою та ін. [18–25, 27, 29, 39].

#### **1.5.5. Метрологія**

Завдяки такому надзвичайному явищу як явище резонансу серед усіх фізичних величин людство найбільш точно може вимірювати частоту. Відповідно, ті стандарти фізичних величин, які базуються на принципі вимірювання частоти коливань, виявляються найбільш точними. В мікрохвильовому діапазоні таких стандартів принаймні два – це цезієвий стандарт часу (частоти) та квантовий стандарт напрути, який базується на використанні ланцюжків надпровідних контактів Джозефсона [26, 40–41].

#### **1.5.6. Нові технології та застосування в побуті**

Мікрохвильове випромінювання може ефективно взаємодіяти з речовиною, а тому його зручно використовувати для виконання різноманітних технологічних операцій – сушки дерев'яних та паперових виробів, виробництва мікроелектронних компонентів у спеціальних мікрохвильових печах, виділення з руди благородних металів, точкового розігріву та зварювання металевих деталей та ін. [29, 33, 42]. У побуті мікрохвильове випромінювання найчастіше використовується для приготування їжі у побутових мікрохвильових печах.

#### **1.5.7. Застосування в медицині та біології**

Більшість живих істот чутливі до електромагнітного випромінювання мікрохвильового діапазону. Тому, діючи на них випромінюванням з великою інтенсивністю або застосовуючи резонансне слабо потужне випромінювання, можна впливати на їх стан. Цей підхід може застосовуватись як для лікування, так і для знищення шкідливих організмів або пригнічення їх активності [43–46]. Крім того, досліджуючи електромагнітні спектри живого організму, на основі положень та ширини відповідних спектральних ліній, можна зробити висновок про наявність або відсутність тих чи інших фізіологічних відхилень [46–47].

#### **1.5.8. Військові застосування**

Мікрохвильове випромінювання та відповідні системи широко застосовуються для спостереження за повітряними та наземними рухомими та нерухомими об'єктами (радіолокація), керування польотами ракет різного призначення, для прихованого військового зв'язку, в системах керування літаками та супутниками, в радіолокаційних системах протиповітряної та космічної оборони, системах прихованого спостереження за поверхнею Землі, а також у засобах радіоелектронної боротьби [33]. Крім того мікрохвильові системи, зокрема, мікро- та наноелектронні мікрохвильові інтегральні схеми широко використовуються для створення електронної апаратури сучасної військової техніки.

Окремим важливим напрямком військових застосувань у мікрохвильовому діапазоні є задача створення невідбиваючих мікрохвильових покриттів (технологія «Стелс») [48]. Військову техніку з таким покриттям важко, а іноді і неможливо, зареєструвати за допомогою традиційних радіолокаційних систем, що дозволяє суттєво збільшити бойову ефективність та «середній час життя» такої військової техніки в умовах сучасної війни.

## **1.6. Витоки мікрохвильової електродинаміки та історія освоєння мікрохвильового діапазону**

Мікрохвильова електродинаміка виникла як окрема галузь електродинаміки приблизно в 30-х роках XX сторіччя. До того часу вважалося, що відповідні фізичні явища є предметом дослідження класичної електродинаміки. Беручи до уваги те, що деякі фізичні явища, досліджені на початку XX і навіть у XIX сторіччі, зараз відносяться до мікрохвильової електродинаміки, розглянемо історію еволюції фізики, техніки та електроніки мікрохвильового діапазону, починаючи з часів зародження класичної електродинаміки.

### **1.6.1. Становлення класичної електродинаміки**

Електродинаміка як окрема галузь фізики сформувалась лише в першій половині XIX сторіччя, хоча систематизовані дослідження електромагнітних явищ було розпочато набагато раніше – на межі XV-XVI сторіч.

21 липня 1820 року в Копенгагені латинською мовою була надрукована робота датського вченого Г. К. Ерстеда, в якій він



**Джеймс Клерк Максвелл  
(1831–1879)**

переконаливо доводив, що провід, по якому тече електричний струм, взаємодіє з магнітною стрілкою. 30 жовтня того ж року Ж. Б. Біо та Ф. Савар зробили доповідь про відкритий ними закон дії електричного струму на магнітний полюс, який після математичного уточнення П. С. Лапласом став законом, відомим зараз як закон Біо–Савара–Лапласа.

1826 рік був відзначений виходом у світ фундаментальної роботи А. М. Ампера, де окрім закону, що зараз носить його ім'я, були сформульовані основні принципи та положення електродинаміки – нової області фізики, яку А. М. Ампер уперше відокремив від інших галузей

науки. В подальших роботах Е. Х. Ленца по вивченню властивостей електричних струмів було встановлене правило, що визначає напрямок індукційних струмів (1833 р.).

Суттєвий крок до сучасної класичної електродинаміки було зроблено в роботах М. Фарадея. У 1831 році видано перший з трьох томів його фундаментальної роботи «Експериментальні дослідження з електрики», в якому було сформульовано закон електромагнітної індукції. Ідеї М. Фарадея та інших учених були розвинені та узагальнені Дж. К. Максвеллом у роботах, які він публікував, починаючи з 1855 року. В 1873 році ним було оприлюднено диференціальні рівняння, які після не суттєвих змін, внесених Г. Р. Герцом та О. Хевісайдом, отримали назву рівнянь Максвелла. З цих рівнянь безпосередньо випливала можливість поширення електромагнітного поля в просторі, тобто можливість існування електромагнітних хвиль.

Перевіркою рівнянь Максвелла зайнявся талановитий німецький фізик-експериментатор Г. Р. Герц. У 1886–1888 роках він за допомогою іскрового генератора експериментально довів існування електромагнітних хвиль, що стало тріумфом теорії Максвелла. Роботи Г. Р. Герца з електродинаміки, як теоретичні так і експериментальні, стали широко відомі та набули всесвітнього визнання. Після їх

публікації становлення класичної електродинаміки як окремої галузі фізики було завершено. Електродинаміка стала математично строгою і послідовною наукою, основні положення якої, тим не менш, з високою точністю підтверджувались експериментально.

### **1.6.2. Відгалуження мікрохвильової електродинаміки від класичної електродинаміки**

Після прийняття науковим світом теорії Максвелла почалось інтенсивне дослідження електромагнітних явищ. Складність експериментальної апаратури, а також недостатнє на той час розуміння особливостей взаємодії електромагнітних хвиль з речовиною, призвели до того, що спочатку найбільш швидко просувались теоретичні дослідження електромагнітних явищ.

Так, за останні десять років XIX сторіччя було зроблено суттєві кроки в теорії мікрохвильових ліній передачі. У 1892 році О. Хевісайд розробив теорію поширення електромагнітних хвиль по металевим трубам з внутрішнім провідником (по коаксіальним кабелям). Тим самим він проілюстрував як треба розв'язувати задачі електродинаміки, користуючись рівняннями Максвелла. Але наприкінці своєї роботи він зробив приголомшливий і невірний висновок – поширення електромагнітних хвиль є неможливим у порожнистих металевих трубах без внутрішнього провідника. І це в той час, коли було вже відомо, що світло, яке може поширюватись всередині порожнистої металевої труби, також є електромагнітною хвилею і задовольняє рівнянням Максвелла! Однак мало хто міг виправити цю помилку, оскільки багато вчених поділяли цю точку зору, машинально пристосовуючи поняття електротехніки та теорії низькочастотних кіл до будь-яких електродинамічних явищ.

Цю помилку через 5 років виправив Дж. У. Стретт (лорд Релей), який створив теорію поширення хвиль по порожнистим металевим трубам – хвилеводам. Він довів, що електромагнітна енергія може поширюватись навіть вздовж поодинокого провідника, а тому таке явище зовсім не схоже на поширення енергії в низькочастотному електричному колі, де для цього обов'язково повинні бути присутні дві лінії передачі – два проводи. Стало зрозуміло, що поширення високочастотних хвиль слабко нагадує процеси в низькочастотних електричних колах. Згодом це призвело до відокремлення мікрохвильової електродинаміки від класичної низькочастотної електродинаміки.

Висновки теорій О. Хевісайда та лорда Релея однак не знайшли в той час якого-небудь практичного втілення внаслідок відсутності надійних та зручних у використанні генераторів мікрохвильового випромінювання та пристроїв хвилеводного тракту, а також недостатнього розвитку техніки мікрохвильових досліджень. Експериментальні дослідження того часу велись в основному в радіодіапазоні і достатньо повільно просувались у бік більш високих частот.

Після смерті Г. Герца його експериментальні дослідження продовжив італійський учений та інженер Г. Марконі. В 1895 році він створив радіопередавач власної конструкції, за допомогою якого йому вдалось передати сигнал на відстань близько 3000 метрів. 2 червня 1896 року Г. Марконі подав запит на патентування вдосконаленої конструкції свого радіоприймача, а 2 липня 1897 року одержав патент на свій винахід. Відразу після цього він заснував акціонерне товариство «Марконі і К<sup>о</sup>», яке почало активно займатись впровадженням безпроводного зв'язку.

У грудні 1901 року, використовуючи радіоприймач О. С. Попова, Г. Марконі вдалось вперше реалізувати радіозв'язок між двома радіостанціями, що знаходились по різні боки від Атлантичного океану, а наприкінці 1902 року зв'язок через океан став для талановитого інженера вже «звичайною подією». В 1905 році, вдосконаливши свою апаратуру, Г. Марконі першим у світі запатентував спосіб направленого радіозв'язку.

Незалежно від Г. Марконі, багато сил для розвитку безпроводного зв'язку віддав російський учений О. С. Попов. Зацікавлений роботами Г. Герца, він вирішив присвятити своє життя дослідженню електромагнітних явищ. На початку 1895 року йому вдалося створити перший у Росії (а можливо і в світі) радіоприймач. 7 травня 1895 року О. С. Попов зробив доповідь на засіданні фізичного відділення Російського фізико-хімічного товариства та продемонстрував свій винахід.

Вже літом 1897 року радіоприймач О. С. Попова дозволяв передавати та приймати інформацію за допомогою радіохвиль на відстанях до 5 кілометрів. А у січні 1900 року за допомогою свого радіоприймача О. С. Попову вдалося врятувати життя 27 рибалкам, яких знесло в море на кризі: вчасно отримавши по радіо наказ, криголам «Єрмак» швидко вийшов у море і встиг зняти з криги потерпілих.

Окрім О. С. Попова в Росії електромагнетизм активно досліджував П. М. Лебедев. Йому вдалося покращити іскровий генератор, що використовувався Г. Герцом, та одержати електромагнітні коливання з довжиною хвилі  $\lambda = 6 \text{ мм}$ . Тим самим він довів існування



**Винахідники радіо:  
італієць Гульєльмо Марконі (1874–1937) та  
росіянин Олександр Степанович Попов (1859–1906)**

міліметрових електромагнітних хвиль.

### **1.6.3. Розвиток мікрохвильової електродинаміки, техніки та електроніки в першій половині XX сторіччя**

На початку XX сторіччя властивості електромагнітних хвиль мікрохвильового діапазону активно вивчались у лабораторіях. Здавалось нібито, що експеримент нарешті наздожене теорію і залишить її далеко позаду. Але внаслідок відсутності надійних, потужних та зручних у користуванні джерел випромінювання, дослідження електромагнітних хвиль та їх взаємодії з речовиною просувались досить повільно і були сконцентровані в основному в низькочастотній області мікрохвильового діапазону.

Суттєвий крок за ці межі був зроблений О. А. Глаголевою-Аркадієвою під час її роботи в лабораторії електромагнетизму імені Дж. Максвелла при Московському державному університеті імені

М. В. Ломоносова. О. А. Глаголевій-Аркадієвій вдалося одержати мікрохвильове випромінювання з довжинами хвиль від 0,1 до 50 мм. Її роботи було опубліковано в найбільш відомому науковому журналі «Nature». Вони набули загального визнання, а сама Олександра Андріївна стала першою всесвітньо відомою російською жінкою-фізиком.

Але, на жаль, одержане О. А. Глаголевою-Аркадієвою випромінювання було некогерентним та слабко потужним, і тому його неможна було використати для практичних цілей. У науці і техніці того часу, як і раніше, відчувалась необхідність створення простого, надійного, потужного генератора мікрохвильового випромінювання з прийнятними частотними характеристиками. На щастя, чекати появи цілої низки таких генераторів залишалось недовго.

Ще у 1906 році американській інженер Лі Де Форест створив першу вакуумну лампу – тріод, який згодом став широко використовуватись у низькочастотній радіоапаратурі (див. рис. 1.3.2). Вивчаючи властивості такого низькочастотного тріоду, Г. Г. Баркгаузен та К. Куртц досягли незвичайного результату – вони зафіксували виникнення в тріоді когерентного випромінювання дециметрового діапазону. Це сталося у 1919 році, і саме з цього часу бере свій початок вакуумна мікрохвильова електроніка.

На 1933–1937 роки припадає і початок розвитку мікрохвильової техніки. Він знаменувався роботами Г. Саусворта та У. Берроу, в яких була розроблена техніка збудження різноманітних типів хвиль у порожнистих трубах (хвилеводах) та методика експериментального визначення параметрів цих хвиль. Трохи пізніше, у 1937–1938 роках, М. С. Нейманом була запропонована та розвинена ідея порожнистих металевих резонаторів, які були ним названі «ендовібраторами». На основі теорії таких резонаторів Г. А. Грінбергом у 1935 році, а потім В. Е. Нікольским у 1939 році, була розроблена теорія тріодних мікрохвильових генераторів, що дозволило вже в тому ж році створити перші практичні конструкції таких генераторів.

Одночасно з розробкою тріодних систем мікрохвильова техніка й електроніка розвивалась і в інших напрямках. Так, ще у 1921 році,



**Олександра Андріївна  
Глаголева-Аркадієва  
(1884–1945)**



А. Халл, досліджуючи рух електронів у системах зі схрещеними електричними та магнітними полями, встановив основні особливості генерації мікрохвильових коливань в таких системах. У 1924 році у Харкові під керівництвом професора Д. А. Рожанського був відкритий магнетронний спосіб генерації коливань мікрохвильового діапазону. Протягом 1932–1935 років було побудовано теорію клістронних мікрохвильових генераторів: Д. А. Рожанський (1932 р.), А. М. Арсенєва та О. Хайль (1935 р.). А через три роки брати Рассел та Сігурд Варіан і незалежно від них В. Хан та Г. Меткалф створили першу практичну конструкцію мікрохвильового генератора нового типу – пролітного клістрона. Трохи пізніше, у 1939–1940 роках, В. Ф. Коваленко та незалежно від нього М. Д. Дев'ятков разом зі співробітниками розробили схему мікрохвильового генератора на основі так званого відбивного клістрона.

Таким чином, до початку Другої Світової війни було створено декілька типів мікрохвильових генераторів. На жаль їх технічні показники були все ж таки достатньо низькими для того, щоб широко впроваджувати ці генератори в різноманітні галузі людської діяльності. Тому важливим моментом у розвитку мікрохвильової техніки було створення у 1940 році М. Ф. Алексєєвим, Є. М. Маляровим та В. П. Ільєсовим багаторезонаторного магнетрону. Цей магнетрон швидко набув широкого застосування в радіолокації і на сьогоднішній день, не зважаючи на те, що пройшло близько 70 років з моменту його створення, залишається одним з головних джерел мікрохвильового випромінювання великої потужності.

Вже під час Другої Світової війни архітектор Р. Компфнер створив перший нерезонансний підсилювач на біжучій хвилі – лампу біжучої хвилі (1943–1944 рр.), а трохи пізніше він винайшов і лампу оберненої хвилі (у 1952 р.). Обидві ці лампи дозволяли генерувати неперервне мікрохвильове випромінювання великої потужності, що виявилось особливо важливим при розробці радіолокаційної техніки та систем радіозв'язку, які мали б працювати на великих відстанях.

Розвиток джерел випромінювання викликав великий інтерес до мікрохвильових ліній передач та пристроїв. Хоча основи теорії хвилеводів були закладені ще трудами лорда Релея, в 20-х та 30-х роках ХХ сторіччя існуюча на той момент теорія таких систем починає швидко вдосконалюватись та розвиватись. Так, у 1927 році член-кореспондентом АН СРСР А. А. Пістолькорсом була створена теорія однопровідних та двопровідних ліній; у 1930–1940 роках вона була суттєво розвинена В. В. Татариним. Окрім вдосконалення теорії, В. В. Татарин увів поняття комплексного опору в

мікрохвильових лініях передачі та запропонував метод його вимірювання. Це дало змогу у 1939 році А. А. Пістолькорсу та М. С. Нейману розробити теорію направлених відгалужувачів, на основі яких вже в тому ж році було створено рефлектометри – пристрої для вимірювання коефіцієнту відбиття. Вершиною досягнень того часу стало створення американцем А. Смітом та незалежно від нього росіянином А. Р. Вольпертом у 1939 році кругової номограми опорів, що зараз відома як номограма опорів Вольперта-Сміта.

#### **1.6.4. Фізика, техніка та електроніка мікрохвильового діапазону після Другої Світової війни**

Окрему сторінку історії являє собою розвиток напівпровідникової мікрохвильової електроніки, початок якої пов'язаний із відкриттям А. С. Тагером у 1959 році ефекту динамічного від'ємного опору при лавинному пробіі напівпровідникового діода. На основі цього ефекту вже у 1960-1963 роках було створено генераторні лавинно-прольотні діоди з малою та середньою потужністю в широкому діапазоні частот. Інший клас твердотільних мікрохвильових генераторів – генератори на основі діодів Ганна було створено після відкриття у 1963 році Дж. Ганном від'ємної диференціальної провідності так званих дводолинних напівпровідників. Приблизно в той же час починається впровадження в напівпровідникову технологію нового матеріалу – арсеніду галію (GaAs), що характеризується дуже високою рухливістю носіїв заряду. Використання цього матеріалу дозволило створити польові мікрохвильові транзистори з бар'єром Шотткі.

50–60-і роки XX сторіччя характеризуються початком інтенсивного розвитку теоретичних методів електродинаміки та пошуком нових функціональних матеріалів, що могли б бути застосованими в мікрохвильовому діапазоні.

В той час роботами В. І. Вольмана, Г. В. Кисунько, Л. Левина, Г. Т. Маркова та ін. були закладені основи сучасної електродинаміки мікрохвильових ліній передачі та пасивних пристроїв. Було створено теорію синтезу пасивних мікрохвильових фільтрів (А. А. Фельдштейн, А. М. Модель), розроблено та вдосконалено більшість напіваналітичних методів сучасної електродинаміки (метод частинних областей, метод інтегрального рівняння, варіаційний метод та ін.).

Після 1950 року починається активне вивчення властивостей

магнетиків у мікрохвильовому діапазоні. Важлива роль при цьому відводиться дослідженню в мікрохвильовому діапазоні лінійних та нелінійних властивостей магнітних діелектриків – феритів. У цьому напрямку працює велика кількість талановитих учених, як вітчизняних так і закордонних, – О. І. Ахієзер, В. Г. Бар'яхтар, С. В. Вонсовский, О. Г. Гуревич, М. І. Каганов, К. Кіттель, Л. Д. Ландау, А. Л. Мікаелян, Я. А. Моносов, В. В. Нікольський, Б. А. Олд, К. Паттон, Г. Сул, Я. М. Фельд, Е. Шльоманн, А. Р. Уокер та інші. Внаслідок їх плідної праці вже у 60-70-х роках з'являється велика низка феритових мікрохвильових приладів: циркулятори, вентилі, фазообертачі, лінії затримки, фільтри та ін.

Приблизно з 1950 по 1970 роки було розвинено основи мікрохвильової техніки. У цей час винайдено основні методи вимірювання параметрів мікрохвильових систем та побудовано теорію мікрохвильових кіл, що дало змогу впродовж трьох-чотирьох десятиліть успішно розв'язувати всі основні задачі, які виникали перед ученими та інженерами в мікрохвильовому діапазоні.

#### **1.6.5. Освоєння мікрохвильового діапазону в еру комп'ютерних технологій та мікроелектроніки**

У 1959 році співробітниками компанії Texas Instruments під керівництвом Р. Нойза була створена перша інтегральна мікросхема, що складалась лише з шести транзисторів. Ця схема була низькочастотною і не могла бути безпосередньо застосована для обробки мікрохвильових сигналів, але відразу ж після її появи виникло питання про створення аналогічних конструкцій у мікрохвильовому діапазоні. Традиційні хвилеводні системи не могли бути застосовані для створення мікрохвильових інтегральних схем. Для цього необхідно було використовувати зовсім нові направляючі системи – мікросмужкові лінії, які можна було виготовляти як і транзистори за допомогою планарної технології.

Теорія мікросмужкових ліній в області низьких частот була на той час добре відома, але, на жаль, вона лише наближено описувала властивості мікросмужкових ліній та елементів на її основі, коли частота  $\nu$  мікрохвильового сигналу перевищувала межу у кілька гігагерц. Необхідно було розробити достатньо строгу електродинамічну теорію таких систем. Цією проблемою почали одночасно займатись у двох найбільш могутніх країнах того часу – СРСР та США. Дослідження вимагали широкого застосування

комп'ютерної техніки, оскільки теорія мікросмужкових ліній у загальному випадку не є аналітичною. Поступово сформувались дві різні наукові школи – «радянська» та «американська», що було пов'язано, в першу чергу, з відставанням Радянського Союзу від США в галузі комп'ютерних наук та кібернетики.

В «радянській» науковій школі, представниками якої були Л. А. Вайнштейн, В. Ф. Взятишев, Г. І. Веселов, І. І. Вольман, В. С. Михайлевський, В. В. Нікольський, В. П. Шестопалов та ін., основні зусилля було направлено на створення такої математичної моделі процесів у мікросмужкових лініях, які б потребували для свого аналізу мінімальних комп'ютерних потужностей. Такий підхід дозволяв у деяких випадках одержувати результати для мікросмужкових систем простої конструкції навіть без використання комп'ютерів, а лише після кількох хвилин обчислень на логарифмічній лінійці.

В іншому напрямку пішли американські науковці, для яких проблема потужних та доступних комп'ютерів стояла не так гостро як у колишньому СРСР. Американські вчені розробили оптимальні методи зведення задач електродинаміки до задач обчислювальної фізики та математики. Використовуючи потужні суперкомп'ютери, якими вже в той час володів кожний великий університет чи наукова лабораторія, американські фізики та інженери змогли досить легко одержати всі основні закономірності, за якими відбуваються мікрохвильові процеси в мікросмужкових лініях. Серед багатьох закордонних вчених, що працювали в цій галузі науки і техніки, слід відзначити, в першу чергу, К. Гупту, Т. Іто, С. Лі, Р. Міттру, та А. А. Олінера.

Після освоєння технології виготовлення мікросмужкових інтегральних мікрохвильових схем, наступною проблемою стала розробка пристроїв на їх основі. Тут у нагоді стали розроблені методи комп'ютерного аналізу мікрохвильових систем. Саме з цього часу, приблизно з 80-х років минулого сторіччя, починається активний розвиток систем автоматичного проектування (САПР) мікрохвильових пристроїв та програм для моделювання фізичних явищ у мікрохвильовому діапазоні. Спочатку ці програми створювались як додаткове програмне забезпечення, яке поставлялось разом з мікрохвильовими приладами та пристроями, дозволяло перевіряти їх характеристики, налагоджувати ці прилади та пристрої, розширювало їх функціональні можливості. В подальшому створення мікрохвильових САПРів та програм моделювання стало окремою галуззю мікрохвильової електродинаміки та обчислювальної фізики.

На сьогоднішній день комп'ютерне програмне забезпечення дозволяє з високою точністю розраховувати характеристики не тільки пасивних але й активних мікрохвильових систем, що можуть містити сотні і тисячі мікрохвильових транзисторів та діодів, а також синтезувати пасивні інтегральні мікрохвильові схеми. Це дозволяє легко впроваджувати такі системи у виробництво, розширює область їх застосування, забезпечує можливість легкого вдосконалення таких систем. Саме завдяки цьому сучасна мікрохвильова електродинаміка неможлива без комп'ютерів, а мікрохвильова техніка й електроніка стали комп'ютеризованими галузями.

### **Контрольні запитання та задачі**

**1.1.** Сучасні автомобілі обладнані спеціальними локаторами, які дозволяють з високою точністю відслідковувати положення автомобіля відносно оточуючих його крупних об'єктів. В критичних ситуаціях, коли відстань від автомобіля до цих об'єктів стає надто малою, спеціальна система, що пов'язана з локатором, попереджує водія про небезпеку зіткнення. Визначте на якій довжині хвилі  $\lambda$  повинен працювати автомобільний локатор, щоб надійно убезпечити водія від можливих дорожньо-транспортних пригод. Чи залежить ця довжина хвилі та ефективність роботи локатора від швидкості руху автомобіля, погодних умов?

**1.2.** Проаналізуйте чому електромагнітні коливання саме мікрохвильового діапазону використовуються в побуті для приготування їжі (мікрохвильові печі). Чому для приготування їжі незручно використовувати електромагнітні хвилі радіочастот або оптичного діапазону?

**1.3.** Чому в електронних мікрохвильових приладах використовується рух тільки легких заряджених частинок, наприклад, електронів, а в низькочастотних електронних приладах маса заряджених частинок суттєво не впливає на ефективність їх роботи?

**1.4.** При дальньому радіозв'язку часто реалізується випадок, коли уявна пряма, що з'єднує джерело електромагнітних хвиль та приймач, пронизує наскрізь нашу планету. Цей випадок реалізується, наприклад, коли джерело розташоване на екваторі, а приймач – на північному полюсі. Поясніть яким чином поширюються електромагнітні хвилі по відношенню до поверхні Землі в цьому випадку. Чому ці хвилі майже «не відриваються» від поверхні планети і не випромінюються у космос?

**1.5.** Чим обумовлене існування вікон прозорості для НВЧ випромінювання в атмосфері Землі?

**1.6.** Чи залежать характеристики випромінювання, яке виникає в мікрохвильовому колі, від лінійних розмірів цього кола? Проаналізувати та пояснити цю залежність на прикладі двопровідної лінії (див. рис. 1.4.1). Як в цьому випадку характеристики випромінювання залежать від відстані між проводами?

**1.7.** Визначити час життя атома водню, вважаючи, що електрон при русі по орбіті в атомі випромінює електромагнітну енергію за законом (1.4.4). Дати пояснення одержаним результатам.

### **Список літератури**

1. Лебедев И. В. Техника и приборы сверхвысоких частот. Т. I. Техника сверхвысоких частот / Под ред. Н. Д. Девяткова. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: «Высшая школа», 1970. – 439 с.
2. Нейман М. С. Курс радиопередающих устройств: учебник для вузов. / М. С. Нейман. – 2-е изд., доп. и перераб. – М.: Советское радио, 1965. – 594 с.
3. Лебедев И. В. Техника и приборы сверхвысоких частот. Т. I. Техника сверхвысоких частот. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1961. – 512 с.
4. Крохин В. В. Элементы радиоприемных устройств СВЧ. – М.: Советское радио, 1964. – 694 с.
5. Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. А. М. Прохоров. Ред. кол. Д. М. Алексеев, А. М. Бонч-Бруевич, А. С. Боровик-Романов и др. – М.: Сов. энциклопедия, 1983. – 928 с.
6. Григорьев А. Д. Электродинамика и техника СВЧ. – М.: Высшая школа, 1990. – 335 с.
7. Физическая энциклопедия / Гл. ред. А. М. Прохоров. Ред. кол. Д. М. Алексеев, А. М. Балдин, А. М. Бонч-Бруевич, А. С. Боровик-Романов и др. – М.: Большая Российская энциклопедия, 1994. – Т. 4. Пойнтинга – Робертсона – Стримеры. – 704 с.
8. Международный союз электросвязи, <http://www.itu.int/ru/pages/default.aspx>.
9. Шматько А. А. Электронные приборы сверхвысоких частот. Основы теории и радиофизический лабораторный практикум: Учебное пособие. – Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. – 328 с.
10. ДСТУ 2386-94 / Лінії передачі надвисоких частот. Терміни та визначення.

11. Благовещенский В. П. Основы радиотехники сверхвысоких частот. – Л.: Государственное издательство судостроительной литературы, 1952. – 420 с.
12. Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. – М.: «Советское радио», 1973. – 400 с.
13. Сушкевич В. И. Нерегулярные линейные волноводные системы. Введение в анализ линейных цепей сверхвысоких частот. – М.: Советское радио, 1967. – 296 с.
14. Калашников С. Г. Электричество: Учебное пособие. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – (Общий курс физики). – 576 с.
15. Яворский Б. М., Детлаф А. А. Справочник по физике: 3-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 624 с.
16. Лебедев И. В. Техника и приборы сверхвысоких частот. Т. II. Электрорадиотехнические приборы СВЧ. / Под ред. Н. Д. Девяткова. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: «Высшая школа», 1972. – 376 с.
17. Дэвис К. Радиоволны в ионосфере: Пер. с англ. / Под ред. А. А. Корчака. – М.: Мир, 1973. – 503 с.
18. Сивухин Д. В. Общий курс физики: Учеб. пособие для вузов. В 5 т. Т. V. Атомная и ядерная физика. – 3-е изд., стер. – М.: Физматлит, 2006. – 784 с.
19. Ельяшевич М. А. Атомная и молекулярная спектроскопия. – М.: Физматгиз, 1962. – 892 с.
20. Бенуэлл К. Основы молекулярной спектроскопии: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 384 с.
21. Гуревич А. Г., Мелков Г. А. Магнитные колебания и волны. – М.: Физматлит, 1994. – 464 с.
22. Данилов В.В. Спін-хвильова електродинаміка: підручник / В. В. Данилов, І. В. Зависяк, О. Ю. Нечипорук. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008. – 351 с.
23. Абрагам А., Блани Б. Электронный парамагнитный резонанс переходных ионов: Пер. с англ. – Т. 1-2. – М.: «Мир», 1972–1973. – 651, 349 с.
24. ЯМР- и ЭПР-спектроскопия: Радиоспектроскопия ядерного магнитного и электронного парамагнитного резонанса: Пер. с англ. – М.: «Мир», 1964. – 336 с.
25. Абрагам А. Ядерный магнетизм: Пер. с англ. / Под ред. Г. В. Скроцкого. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. – 552 с.
26. Мелков Г.А. Кріогенна електроніка: Навчальний посібник. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2003. – 87 с.

27. Ферромагнитный резонанс / Под ред. чл.-корр. АН СССР С. В. Вонсовского. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 343 с.
28. Blaunstein N., Plohotniuc E. Ionosphere and Applied Aspects of Radio Communication and Radar. – N.-Y.: CRC Press, 2008. – 600 p.
29. Клингер Г. Сверхвысокие частоты: основы и применения техники СВЧ: Пер. с нем. – М.: Наука, 1969. – 272 с.
30. Ипатов В. П., Орлов В. К., Самойлов И. М., Смирнов В. Н. Системы мобильной связи: Учеб. пособие / Под ред. В. П. Ипатова. – М.: «Горячая линия – Телеком», 2003. – 272 с.
31. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. – 2 изд.. – М.: «Вильямс», 2007. – 1104 с.
32. Xiao S.-Q., Zhou M.-T., Zhang Y. Millimeter Wave Technology in Wireless PAN, LAN, and MAN. – N.-Y.: CRC Press, 2008. – 448 p.
33. The RF and Microwave Handbook (3 vol. set) / Ed. by M. Golio, J. Golio. – Vol. 2. RF and Microwave Applications and Systems. – Toronto: CRC Press, 696 p.
34. Теоретические основы радиолокации / Под ред. В. Е. Дулевича. – М.: Сов. радио, 1978. – 608 с.
35. Бакулев П. А., Сосновский А. А. Радиолокационные и радионавигационные системы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1994. – 296 с.
36. Беляевский Л.С. и др. Основы радионавигации. – М.: Транспорт, 1992. – 320 с.
37. Краус Дж. Д. Радиоастрономия. – М.: Советское радио, 1973. – 456 с.
38. Рудницкий Г. М. Конспект лекций по курсу «Радиоастрономия». – Нижний Архыз: Компьютерный информационно-издательский центр «CYGNUS», 2001. – 208 с.
39. Гинзбург В. А. Распространение электромагнитных волн в плазме. – 2-е изд., М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. – 684 с.
40. Квантовые стандарты частоты: монография / В. В. Григорьянц, М. Е. Жаботинский, В. Ф. Золин. – М.: Наука, 1968. – 288 с.
41. Лихарев К. К., Ульрих Б. Т. Системы с джозефсоновскими контактами. Основы теории. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 447 с.
42. Гареев Ф. Х. Сушка древесины электромагнитными волнами // Леспроектинформ. – № 9. – 2004. – С. 74-78.
43. Биологические эффекты миллиметровых волн и корреляционный метод их обнаружения / В. Д. Искин. – Х.: Изд-во «Основа» при Харьк. ун-те, 1990. – 248 с.
44. Исмаилов Э. Ш. Биофизическое действие СВЧ-излучений. – М.:



- Энергоатомиздат, 1987. – 144 с.
45. Электромагнитные поля в биосфере (в 2 томах). – М.: Наука, 1984.  
– Т. I. Электромагнитные поля в биосфере Земли и их биологическое значение. – 375 с. – Т. II. Биологическое действие электромагнитных полей. – 321 с.
46. Handbook of Biological Effects of Electromagnetic Fields (2 vol. set). – 3-rd ed. / Ed. by F. S. Barnes, B. Greenebaum. – N.-Y.: CRC Press, 2007. – Vol. I. Bioengineering and biophysical aspects of electromagnetic fields. – 440 p. – Vol. II. Biological and medical aspects of electromagnetic fields. – 480 p.
47. Холодов Ю. А., Козлов А. Н., Горбач А. М. Магнитные поля биологических объектов. – М.: Наука, 1987. – 145 с.
48. Kaiser K. L. Electromagnetic Shielding. – Brisbane: CRC Press, 2006. – 336 p.

## Розділ II

# ОСНОВИ МІКРОХВИЛЬНОЇ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

### 2.1. Рівняння електромагнітного поля

#### 2.1.1. Рівняння Максвелла

В макроскопічній електродинаміці електромагнітне поле характеризується чотирма векторними функціями: напруженістю електричного поля  $\vec{E}$  (В/м), напруженістю магнітного поля  $\vec{H}$  (А/м), індукцією електричного поля  $\vec{D}$  (Кл/м<sup>2</sup>) та індукцією магнітного поля  $\vec{B}$  (Тл). Кожна з цих векторних величин, в загальному випадку, є функцією координат (радіус-вектора  $\vec{r}$ ) та часу  $t$ . Вектори  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  пов'язані між собою системою рівнянь Максвелла:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2.1.1)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.1.2)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho, \quad (2.1.3)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad (2.1.4)$$

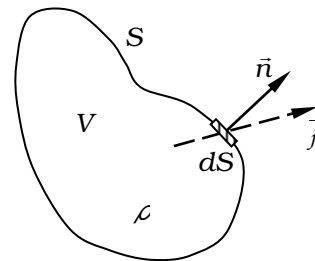
де  $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$  – густина електричного струму (А/м<sup>2</sup>),  $\rho = \rho(\vec{r}, t)$  – густина електричного заряду (Кл/м<sup>3</sup>).

Електричний струм  $I$  (А) та електричний заряд  $q$  (Кл) виражаються через свої густини співвідношеннями:

$$I = \iint_S \vec{j} d\vec{S}, \quad q = \iiint_V \rho dV, \quad (2.1.5)$$

де  $S$  – поверхня крізь яку протікає струм з густиною  $\vec{j}$ ;  $V$  – об'єм в якому зосереджений електричний заряд з густиною  $\rho$ ;  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ ;  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до елемента  $dS$  поверхні  $S$  (рис. 2.1.1).

Система рівнянь (2.1.1)–(2.1.4) представлена в найбільш поширеній, так званій *BEHD* формі запису (кожна літера відповідає одному з векторів  $\vec{B}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$ ). Окрім форми запису *BEHD* систему рівнянь Максвелла іноді записують в формі *BEJ* або *BED*. Детальну інформацію з цього приводу можна знайти в [1]. Надалі будемо користува-



**Рис. 2.1.1**

тись системою рівнянь Максвелла у формі ВЕНД.

Система диференціальних рівнянь електромагнітного поля (2.1.1)–(2.1.4) зручна при розв'язанні більшості електродинамічних задач, які зустрічаються в мікрохвильовій електродинаміці. Іноді, однак, виявляється більш зручно користуватись рівняннями Максвелла в *інтегральній* формі запису. Перейти від диференціальної до інтегральної форми запису рівнянь Максвелла можна за допомогою теореми Остроградського–Гауса (див. (Д1.5)) та теореми Стокса (Д1.6), розглядаючи електромагнітне поле в макроскопічному об'ємі  $V$ , що оточений поверхнею  $S$ ; виділимо на цій поверхні деяку її частину  $S'$ , що оточена замкненим контуром  $L$  (рис. 2.1.2).

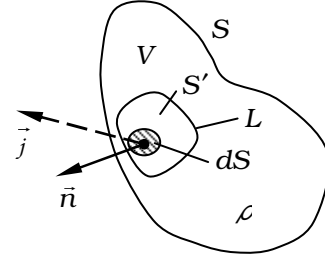


Рис. 2.1.2

З урахуванням зроблених позначень рівняння Максвелла (2.1.1)–(2.1.4) в інтегральній формі запису приймуть вигляд:

$$\oint_L \vec{j} d\vec{L} - \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S'} \vec{\mathcal{D}} d\vec{S} = \iint_{S'} \vec{j} d\vec{S} = I, \quad (2.1.6)$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{L} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S'} \vec{\mathcal{B}} d\vec{S} = - \frac{\partial \Phi_B}{\partial t}, \quad (2.1.7)$$

$$\oiint_S \vec{\mathcal{D}} d\vec{S} = \iiint_V \rho dV = q, \quad (2.1.8)$$

$$\oiint_S \vec{\mathcal{B}} d\vec{S} = 0, \quad (2.1.9)$$

де  $I$  – макроскопічний електричний струм, який протікає крізь поверхню  $S'$ ;  $q$  – макроскопічний електричний заряд, що міститься в об'ємі  $V$ ;  $\Phi_B = \iint_{S'} \vec{\mathcal{B}} d\vec{S}$  (Вб) – потік магнітної індукції  $\vec{\mathcal{B}}$ , що пронизує

поверхню  $S'$ ;  $d\vec{L} = \vec{\tau} dL$ ;  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ ;  $\vec{\tau}$  – одиничний вектор дотичний до елемента  $dL$  контуру  $L$ ;  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до елемента  $dS$  поверхні  $S$  або  $S'$  (див. рис. 2.1.2).

Рівняння Максвелла (2.1.1)–(2.1.4), (2.1.6)–(2.1.9) є узагальненням відомих експериментальних фактів; ці рівняння не можна одержати шляхом теоретичного аналізу.

Перше рівняння Максвелла (2.1.1), (2.1.6) описує просторову зміну магнітного поля при протіканні електричного струму або при зміні електричного поля в часі. Це рівняння є узагальненням законів Ампера, Біо–Савара–Лапласа та правила буравчика.

Друге рівняння (2.1.2) є диференціальною формою закону електро-

магнітної індукції Фарадея (2.1.7) – явища виникнення електричної напруги у провідному замкненому контурі при зміні в часі потоку вектора магнітної індукції  $\vec{B}$  (магнітного потоку)  $\Phi_B$ , що пронизує цей контур.

Рівняння (2.1.3), (2.1.8) є математичним формулюванням теореми Остроградського–Гауса. З нього випливає, що силові лінії електричного поля повинні починатись та закінчуватись на електричних зарядах, які є джерелами цього поля. Кількість силових ліній, що перетинають замкнену поверхню, всередині якої знаходиться електричний заряд, пропорційна до величини цього заряду.

Останнє рівняння (2.1.4), (2.1.9) свідчить про те, що лінії магнітного поля є або замкненими кривими, або повинні починатись та закінчуватись на нескінченності. Тобто на відміну від електричного поля, магнітне поле не має власних джерел<sup>1</sup> – магнітних зарядів.

### 2.1.2. Симетрична форма запису рівнянь Максвелла

Іноді, з міркувань симетрії в рівняння Максвелла формально вводять магнітні заряди з густиною  $\rho^M$  (Тл/м) та магнітні струми з густиною  $\vec{j}^M$  (В/м<sup>2</sup>). Цей метод запису рівнянь Максвелла має цілком *штучний* характер, оскільки існування в природі магнітних зарядів – монополів Дірака – експериментально поки що не доведено. Незважаючи на це, такий метод запису використовується досить часто, тому що дозволяє представити систему рівнянь Максвелла в симетричному вигляді:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2.1.10)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\vec{j}^M - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.1.11)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho, \quad (2.1.12)$$

$$\text{div } \vec{B} = \rho^M. \quad (2.1.13)$$

В інтегральній формі запису рівняння (2.1.10)–(2.1.13) набувають вигляду

---

<sup>1</sup> Джерелом магнітного поля можуть бути постійні магніти. Магнітне поле такого магніту, однак, утворюється не за рахунок нерухомих магнітних зарядів, а за рахунок суперпозиції магнітних полів замкнених елементарних струмів, що виникають при русі електричних зарядів в атомах речовини.

$$\oint_L \vec{H} d\vec{L} - \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S'} \vec{D} d\vec{S} = \iint_{S'} \vec{j} d\vec{S} = I, \quad (2.1.14)$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{L} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S'} \vec{B} d\vec{S} = - \iint_{S'} \vec{j}^M d\vec{S} = -I^M, \quad (2.1.15)$$

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{S} = \iiint_V \rho dV = q, \quad (2.1.16)$$

$$\oiint_S \vec{B} d\vec{S} = \iiint_V \rho^M dV = q^M, \quad (2.1.17)$$

де  $I^M$  (В) – макроскопічний магнітний струм, який протікає крізь поверхню  $S'$ ;  $q^M$  (Вб) – макроскопічний магнітний заряд, що міститься в об'ємі  $V$ .

Симетрична форма запису рівнянь Максвелла може бути зручною при розгляді складних електродинамічних задач. Найбільш часто вона використовується при розв'язанні задач на знаходження електромагнітного поля системи електричних та магнітних диполів [2–3].

З рівнянь (2.1.10)–(2.1.17) випливає важливий висновок про *дуальність електромагнітного поля*. Ця властивість поля полягає в тому, що з введенням магнітних струмів та зарядів, рівняння для електричних та магнітних величин стають симетричними. Тому знаючи, наприклад, розв'язок рівнянь Максвелла для електричного поля  $\vec{E}$ , можна одержати розв'язок для магнітного поля  $\vec{H}$ , скориставшись лише симетрією рівнянь (2.1.10)–(2.1.17). Для цього необхідно переставити місцями електричні та магнітні величини та врахувати те, що деякі з них при перестановці змінюють знак:

$$\vec{E} \rightleftharpoons \vec{H}, \quad \vec{D} \rightleftharpoons -\vec{B}, \quad \vec{j} \rightleftharpoons -\vec{j}^M, \quad \rho \rightleftharpoons -\rho^M. \quad (2.1.18)$$

Співвідношення (2.1.18) широко використовуються при розв'язанні електродинамічних задач. У випадку  $\vec{j}^M = 0$ ,  $\rho^M = 0$ , коли мають місце рівняння (2.1.1)–(2.1.4), (2.1.6)–(2.1.9), формально користуються співвідношеннями (2.1.18), після чого покладають величини  $\rho^M$  та  $\vec{j}^M$  рівними нулю.

В подальшому, якщо не вказано інше, будемо користуватись рівняннями електромагнітного поля за умови, що  $\vec{j}^M = 0$ ,  $\rho^M = 0$ .

### 2.1.3. Струми зміщення. Закони повного струму

З першого рівняння Максвелла (2.1.1) випливає, що величина  $\partial \vec{D} / \partial t$  має розмірність густини струму (А/м²). Саме цей факт дозво-

лив Дж. К. Максвеллу замість похідної  $\partial \vec{D} / \partial t$  ввести до розгляду так званий *струм зміщення* з густиною

$$\vec{j}_{зм} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (2.1.19)$$

Враховуючи це, перше з рівнянь Максвелла можна переписати в спрощеному вигляді, відомому як *закон повного електричного струму* в диференціальній формі:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{повн}, \quad (2.1.20)$$

де

$$\vec{j}_{повн} = \vec{j} + \vec{j}_{зм} \quad (2.1.21)$$

є густиною *повного електричного струму*. Застосувавши до (2.1.20) операцію дивергенції, одержимо, що

$$\text{div } \vec{j}_{повн} = 0. \quad (2.1.22)$$

Згідно цього виразу поле повного струму не має джерел. Його силові лінії є або замкненими кривими, а починаються і закінчуються на нескінченності.

В інтегральній формі запису закон повного струму має вигляд:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{L} = \iint_{S'} \vec{j}_{повн} d\vec{S} = I_{повн}, \quad (2.1.23)$$

де  $L$  – замкнений контур, що оточує поверхню  $S'$  (див. рис. 2.1.2),  $I_{повн}$  (А) – повний електричний струм, що протікає крізь поверхню  $S'$ .

По аналогії з формулами (2.1.20), (2.1.23) рівняння Максвелла (2.1.11), записане в симетричній формі, можна представити у вигляді:

$$\text{rot } \vec{E} = -\vec{j}_{повн}^M, \quad \oint_L \vec{E} d\vec{L} = -\iint_{S'} \vec{j}_{повн}^M d\vec{S} = -I_{повн}^M, \quad (2.1.24)$$

де  $I_{повн}^M$  (В) – повний магнітний струм з густиною  $\vec{j}_{повн}^M = \vec{j}^M + \partial \vec{B} / \partial t$  (В/м<sup>2</sup>). По аналогії з виразами (2.1.20), (2.1.23), співвідношення (2.1.24) можна відповідно назвати диференціальною та інтегральною формами *закону повного магнітного струму*.

#### 2.1.4. Рівняння неперервності. Закони збереження електричного та магнітного зарядів

З виразу  $\text{div } \vec{j}_{повн} = 0$  та формул  $\vec{j}_{повн} = \vec{j} + \vec{j}_{зм}$ ,  $\vec{j}_{зм} = \partial \vec{D} / \partial t$  (див. параграф 2.1.3) випливає, що

$$\text{div} \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0.$$

Підставляючи у це співвідношення вираз для індукції електричного поля  $\vec{D}$  з третього рівняння Максвелла (2.1.3) та змінюючи порядок диференціювання по координатам і часу, одержуємо *рівняння неперервності електричного струму*:

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2.1.25)$$

Інтегруючи це рівняння по об'єму  $V$ , що оточений поверхнею  $S$  (див. рис. 2.1.1), з урахуванням теореми Остроградського–Гауса та формул (2.1.5), одержуємо *закон збереження електричного заряду*:

$$I + \frac{dq}{dt} = 0. \quad (2.1.26)$$

Отже рівняння неперервності (2.1.25) є диференціальним формулюванням закону збереження електричного заряду.

По аналогії з формулами, одержаними для електричних зарядів, користуючись співвідношеннями (2.1.24) може одержати *рівняння неперервності магнітного струму*:

$$\operatorname{div} \vec{j}^{\text{м}} + \frac{\partial \rho^{\text{м}}}{\partial t} = 0. \quad (2.1.27)$$

та *закон збереження магнітного заряду*

$$I^{\text{м}} + \frac{dq^{\text{м}}}{dt} = 0. \quad (2.1.28)$$

Рівняння неперервності магнітного струму є диференціальним формулюванням закону збереження магнітного заряду.

## 2.2. Векторні та скалярні поля в електродинаміці

Мікрохвильова електродинаміка широко оперує фізичними величинами заданими у вигляді скалярних та векторних полів. Наприклад, густина електричного заряду  $\rho(\vec{r}, t)$  утворює *скалярне* поле, а поле, в кожній точці якого задається векторна величина, наприклад,  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , є *векторним*.

Векторні поля, в свою чергу, можуть бути потенціальними або вихоревими.

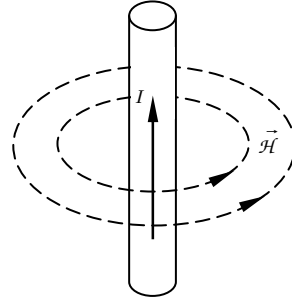
*Вихореве* або *соленоїдальне* поле – це поле, яке може бути представлено у вигляді ротора деякого вектора, наприклад,  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ . Прикладом такого поля може бути магнітне поле навколо провідника по якому тече постійний струм (рис. 2.2.1). *Силові лінії* (лінії, дотичні до яких в кожній точці співпадають з напрямком вектора поля) вихоре-

вого поля є замкненими кривими (див. рис. 2.2.1).

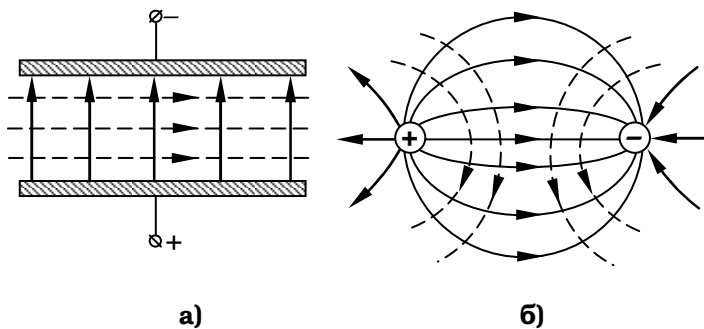
**Потенціальне поле** – це поле, яке може бути представлено у вигляді градієнта деякої скалярної функції, наприклад,  $\vec{E} = -\text{grad } \Phi^e$ . Прикладом такого поля є електричне поле в плоскому конденсаторі або електричне поле системи нерухомих зарядів (рис. 2.2.2). Силкові лінії потенціального поля не є замкненими кривими, вони починаються та закінчуються або на джерелах поля або на нескінченності (див. рис. 2.2.2). Особливістю потенціального поля є те, що робота, яка виконується полем по переміщенню деякого зарядженого тіла не залежить від траєкторії його руху, а залежить лише від його початкового та кінцевого положення в просторі.

Необхідною і достатньою умовою соленоїдальності векторного поля  $\vec{A}$  є виконання умови  $\text{div } \vec{A} = 0$ . Необхідною і достатньою умовою потенціальності поля  $\vec{A}$  є умова  $\text{rot } \vec{A} = 0$ .

Часто в електродинаміці, і у фізиці взагалі, окрім понять вектора та скаляра вводять поняття *псевдовектора* та *псевдоскаляра* [4–5]. Під псевдовектором розуміють векторну величину, яка не змінює свою довжину (модуль), але змінює свій напрямок на протилежний при переході від правосторонньої до лівосторонньої системи координат. Псевдоскаляром, відповідно, називають скалярну величину, яка змінює свій знак при переході від правосторонньої до лівосторонньої системи координат. В мікрохвильовій електродинаміці ці поняття розглядають, в першу чергу, відносно зміни напря-



**Рис. 2.2.1. Приклад вихорового поля: магнітне поле навколо провідника з струмом  $I$**



**Рис. 2.2.2. Приклади потенціальних полів: а) електричне поле в ідеальному плоскому конденсаторі; б) електричне поле системи нерухомих електричних зарядів. Суцільні лінії – силкові лінії електричного поля, пунктирні лінії – лінії магнітного поля**



мку осі часу  $t$  (тобто замість деякого електромагнітного процесу розглядають обернений процес і навпаки, зокрема, замість хвилі, що поширюється у напрямку  $+z$  розглядають хвилю, що поширюється в протилежному напрямку). Таким чином, якщо для деяких величин  $\vec{A}(t)$ ,  $\varphi(t)$  виконуються умови:

$$\vec{A}(-t) = -\vec{A}(t), \quad \varphi(-t) = -\varphi(t), \quad (2.2.1)$$

ці величини називають псевдовектором (або *аксіальним вектором*) та псевдоскаляром відповідно. Якщо ж, мають місце співвідношення

$$\vec{A}(-t) = \vec{A}(t), \quad \varphi(-t) = \varphi(t), \quad (2.2.2)$$

величина  $\vec{A}(t)$  є *справжнім* або *потенціальним вектором*, а  $\varphi(t)$  – *справжнім скаляром*.

Відмітимо, забігаючи наперед, що напруженість електричного поля  $\vec{E}$  та індукція електричного поля  $\vec{D}$  є справжніми векторами, а величини  $\vec{H}$  та  $\vec{B}$  є псевдовекторами. Оскільки  $\vec{E}$  – це справжній вектор, а  $\vec{H}$  – псевдовектор, то згідно рівнянь (2.1.12)–(2.1.13), густина електричного заряду  $\rho$  є скаляром, а густина магнітного заряду  $\rho^M$  – псевдоскаляром.

Введені у цьому параграфі поняття зручні при аналізі властивостей електромагнітного поля, а також при перевірці рівнянь та виразів згідно з правилом: якщо ліва частина виразу є псевдовектором (псевдоскаляром), то і права частина також має бути псевдовектором (псевдоскаляром). Якщо ліва частина є справжнім вектором (скаляром), то і права частина також має бути справжнім вектором (скаляром).

### 2.3. Класифікація електромагнітних явищ

В деяких частинних випадках рівняння Максвелла можуть бути спрощені, що дозволяє полегшити розгляд властивостей електромагнітного поля.

Якщо всі величини  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ ,  $j$ ,  $\rho$ , що входять до системи рівнянь Максвелла (2.1.1)–(2.1.4), не змінюються в часі, відповідне поле називається *стаціонарним*. В цьому випадку, поклавши  $\partial / \partial t = 0$  та вважаючи, що електричні струми відсутні, з (2.1.1)–(2.1.4) одержуємо рівняння

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad (2.3.1)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho, \quad (2.3.2)$$

$$\text{rot } \vec{H} = 0, \quad (2.3.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (2.3.4)$$

Їх можна розділити на дві незалежні групи рівнянь – для електричних та магнітних величин. Рівняння (2.3.1)–(2.3.2) описують *електростатичне поле*, джерелами якого є нерухомі електричні заряди, а рівняння (2.3.3)–(2.3.4) описують *магнітостатичне поле*, джерелами якого є нерухомі постійні магніти. Взаємна незалежність електростатичного та магнітостатичного полів є їх основною особливістю порівняно з іншими типами електромагнітних полів.

В тому випадку, коли розглядаються властивості стаціонарного поля в провідній речовині, де  $\partial / \partial t = 0$ , але  $\vec{j} \neq 0$ , з рівнянь Максвелла можуть бути одержані рівняння *стаціонарного електромагнітного поля*

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (2.3.5)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (2.3.6)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}, \quad (2.3.7)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (2.3.8)$$

Ці рівняння вже не можуть бути представлені у вигляді незалежних систем рівнянь для електричного та магнітного полів. Причиною цього є те, що струм з густиною  $\vec{j}$  збуджується у провідній речовині електричним полем  $\vec{E}$  (носії заряду прискорюються під дією електричного поля), але згідно (2.3.7), цей же струм є джерелом магнітного поля. За рахунок цього між полями  $\vec{H}$  та  $\vec{E}$  встановлюється ефективний зв'язок, який не дозволяє відокремити рівняння для електричних та магнітних величин. Прикладом стаціонарного електромагнітного поля є поле, що утворюється навколо провідника при протіканні у ньому постійного струму. Властивості таких полів часто аналізуються в зв'язку з необхідністю врахування наводок та завад в мікрохвильових колах, а також при розрахунках полів постійних електромагнітів.

Поля в реальних системах лише наближено задовольняють умову стаціонарності  $\partial / \partial t = 0$ . В той же час, інколи можна вважати, що електромагнітне поле змінюється в часі значно повільніше ніж у просторі, тобто виконується умова

$$\frac{1}{c} \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| \ll \left| \frac{\partial}{\partial z} \right|, \quad (2.3.9)$$

де  $c$  – швидкість світла в вакуумі,  $z$  – координата, що відповідає напрямку зміни поля.

Підставимо у (2.3.9) простий вираз для електричного поля електромагнітної хвилі, що поширюється вздовж осі  $z$  (див. (1.2.8) при  $\vec{r} = \vec{e}_z z$ ,  $\vec{K} = \vec{e}_z K$ ):

$$\mathcal{E}(z, t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + Kz + \varphi_0), \quad (2.3.10)$$

де  $\mathcal{E}_0$  – амплітуда хвилі,  $\omega$  – колова частота (1.2.1) хвилі,  $\varphi_0$  – її початкова фаза.

Після підстановки (2.3.10) у (2.3.9) одержимо:

$$\frac{1}{c} |-\mathcal{E}_0 \omega \sin(\omega t + Kz + \varphi_0)| \ll |-\mathcal{E}_0 K \sin(\omega t + Kz + \varphi_0)|.$$

Це рівняння може бути спрощене до

$$K \gg k_0, \quad (2.3.11)$$

де  $k_0$  – хвильове число (1.2.6) електромагнітної хвилі у вакуумі. Враховуючи, що для мікрохвильових систем з характерним розміром  $l$  виконується співвідношення  $l \sim \lambda$  (1.4.3), умову (2.3.11) можна переписати у вигляді:

$$l \ll \lambda_0. \quad (2.3.12)$$

Електромагнітне поле, яке задовольняє умові (2.3.9) або (2.3.11)–(2.3.12) називається *квазістаціонарним*. Таке поле існує в мікрохвильових колах з зосередженими ємностями та індуктивностями.

Властивості квазістаціонарного поля зручно проаналізувати за допомогою перших двох рівнянь Максвелла (2.1.1)–(2.1.4), в яких для спрощення покладемо  $\vec{j} = 0$ . Розглянемо спочатку випадок повільної зміни електричного поля з індукцією  $\vec{\mathcal{D}}$  та напруженістю  $\vec{\mathcal{E}}$ . В цьому випадку, оскільки похідна  $\partial \vec{\mathcal{D}} / \partial t$  є малою величиною, з (2.1.1)–(2.1.4) випливає, що амплітуда магнітного поля також є малою величиною. У випадку повільної зміни магнітного поля, з перших двох рівнянь Максвелла випливає, що електричне поле є слабшим за магнітне. Одержані співвідношення між векторами  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}, \vec{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{B}}$  можуть бути апроксимовані і на випадок електростатичного та магнітостатичного полів. Для них, відповідно, повинні виконуватись умови:

$$\mathcal{H}, \mathcal{B} \rightarrow 0, \quad \mathcal{E}, \mathcal{D} > 0 \quad (2.3.13)$$

для електростатичного поля та

$$\mathcal{E}, \mathcal{D} \rightarrow 0, \quad \mathcal{H}, \mathcal{B} > 0 \quad (2.3.14)$$

для магнітостатичного поля.

Електромагнітне поле, швидкість зміни якого у часі суттєво перевищує швидкість його зміни в просторі, будемо називати *квазіоптичним*. Для таких полів виконується умова протилежна до (2.3.9), (2.3.11)–(2.3.12):

$$\frac{1}{c} \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| \gg \left| \frac{\partial}{\partial z} \right| \quad \text{або} \quad K \gg k_0 \quad \text{або} \quad l \gg \lambda_0. \quad (2.3.15)$$

Зі збільшенням швидкості зміни електромагнітного поля в часі від-

бувається поступовий перехід від хвильового характеру поширення поля до поширення у вигляді сфокусованих променів. Це дає змогу наближено оцінювати властивості мікрохвильових систем з квазіоптичними полями за допомогою методів хвильової та геометричної оптики. Наприклад, за допомогою наближення (2.3.15) зручно розглядати поширення електромагнітного поля лазерного променя або субміліметрових хвиль.

В тому випадку, коли жодне з перерахованих наближень не виконується, потрібно користуватись рівняннями електромагнітного поля в повній формі.

## 2.4. Джерела електромагнітного поля

Раніше, при розгляді рівнянь Максвелла, вже частково піднімалось питання про джерела електромагнітного поля. Викладені вище відомості, однак, потребують певного уточнення та роз'яснення, що й буде зроблено в даному підрозділі.

Рівняння Максвелла в симетричній формі<sup>1</sup> запису дозволяють не тільки охарактеризувати взаємозв'язок між векторами поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ , але й дозволяють розглянути питання про збудження електромагнітного поля своїми джерелами. Для зручності запишемо ці рівняння в диференціальній формі запису ще раз:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2.4.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\vec{j}^m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.4.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (2.4.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \rho^m. \quad (2.4.4)$$

З написаних рівнянь випливає, що виникнення електромагнітного поля відбувається за умови, що праві частини рівнянь відмінні від нуля. Отже, в загальному випадку, джерелами електромагнітного поля можуть бути електричні та магнітні заряди з густинами  $\rho$  та  $\rho^m$ , електричні та магнітні струми з густинами  $\vec{j}$  та  $\vec{j}^m$ , а також інші змінні електричне та магнітне поля.

При розгляді задач на збудження електромагнітного поля своїми

---

<sup>1</sup> При розгляді задач на збудження електромагнітного поля зручно користуватись рівняннями Максвелла в симетричній формі запису – такий підхід дозволяє спростити та узагальнити процес розв'язання подібних задач.

джерелами завжди намагаються виділити окремо струми, заряди та поля, які, власне, є первинними джерелами електромагнітного поля. Ці струми, заряди та поля збуджують електромагнітне поле, що вивчається, але не породжуються ним самим, а тому називаються *сторонніми струмами, зарядами, полями* (по відношенню до поля, яке вони збуджують). При розв'язанні відповідних задач величини, що характеризують джерела поля, – сторонні струми, заряди та поля – повинні вважатись відомими величинами.

Введемо наступні позначення:  $\vec{j}_{cm}$  – густина стороннього електричного струму,  $\vec{j}_{cm}^M$  – густина стороннього магнітного струму,  $\rho_{cm}$  – густину стороннього електричного заряду,  $\rho_{cm}^M$  – густину стороннього магнітного заряду,  $\vec{\mathcal{D}}_{cm}$  – індукція стороннього електричного поля,  $\vec{\mathcal{B}}_{cm}$  – індукція стороннього магнітного поля. З урахуванням зроблених позначень рівняння (2.4.1)–(2.4.4) зручно представити у вигляді:

$$\text{rot } \vec{\mathcal{H}} - \vec{j} - \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \vec{j}_{cm} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}_{cm}}{\partial t}, \quad (2.4.5)$$

$$\text{rot } \vec{\mathcal{E}} + \vec{j}^M + \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = -\vec{j}_{cm}^M - \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}_{cm}}{\partial t}, \quad (2.4.6)$$

$$\text{div } \vec{\mathcal{D}} - \rho = \rho_{cm}, \quad (2.4.7)$$

$$\text{div } \vec{\mathcal{B}} - \rho^M = \rho_{cm}^M. \quad (2.4.8)$$

У такій формі запису в правих частинах рівнянь фігурують тільки функції джерел поля, а в лівих частинах рівнянь – тільки величини, що пов'язані з полем, що збуджується.

Згідно представлення (2.4.5)–(2.4.8) вектори  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}, \vec{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{B}}$  є векторами поля, що породжується відповідними джерелами. Густина струму  $\vec{j}$  та заряду  $\rho$  в лівих частинах рівнянь (2.4.5), (2.4.7) при цьому мають простий фізичний зміст:  $\vec{j}$  – це густина електричного струму провідності, що обумовлений рухом вільних електричних зарядів з густиною  $\rho$ . Аналогічно,  $\rho^M$  є густиною вільного магнітного заряду, а  $\vec{j}^M$  є густиною магнітного струму провідності. Величини  $\vec{j}$  та  $\rho$  пов'язані між собою рівнянням неперервності (2.1.25), а величини  $\vec{j}^M$  та  $\rho^M$  – рівнянням (2.1.27). В подальшому, щоб відрізнити струми провідності від інших типів струмів, а вільні заряди від інших типів зарядів, цим струмам і зарядам припишемо індекс «пр». Таким чином,  $\vec{j}_{np}$  є густиною електричного струму провідності,  $\rho_{np}$  є густиною вільного електричного заряду,  $\vec{j}_{np}^M$  та  $\rho_{cm}^M$  відповідно є густиною магнітного струму

провідності та густиною вільного магнітного заряду.

В загальному випадку в мікрохвильових системах можуть існувати не тільки електричні та магнітні струми провідності, але і інші типи струмів – конвекційні, флуктуаційні, тунельні, надпровідні струми, тощо. Це однак не викликає принципових змін в рівняннях (2.4.5)–(2.4.8). Якщо ці струми задані, їх можна легко врахувати як сторонні струми.

Відмітимо, що поняття стороннього струму, заряду, поля має відносний, умовний характер. Щоб проілюструвати це, розглянемо випадок обміну інформацією за допомогою мікрохвильового випромінювання між наземною станцією керування польотами супутників та одним із супутників. Нехай з наземної станції керування необхідно передати сигнал на супутник. Для цього на антену наземної станції керування подається струм  $I_1(t)$  густиною  $\vec{j}_1(t)$ , який містить в собі всю необхідну інформацію. Випромінювання з антени, яке породжується струмом  $I_1(t)$ , через деякий час досягне супутника і наведе в колі його приймальної антени струм  $I_2(t)$  густиною  $\vec{j}_2(t)$ . Очевидно, що струм  $I_1(t)$  в цьому випадку є стороннім струмом по відношенню до електромагнітного поля, що випромінюється антенною наземної станції керування, а струм  $I_2(t)$  є струмом провідності, що виникає в антені супутника під дією цього поля. Якщо ж розглянути іншу ситуацію – коли супутник передає дані, а наземна станція керування приймає їх, то сутність струмів  $I_1(t)$  та  $I_2(t)$  зміниться. В цьому випадку первинним, стороннім струмом є струм  $I_2(t)$ , а струмом провідності є струм  $I_1(t)$ . Отже, в залежності від того, яким чином сформульована електродинамічна задача, один і той же струм може розглядатись як первинний сторонній струм або як вторинний струм провідності. Цей принцип поширюється і на випадок сторонніх полів та зарядів.

На завершення звернемо увагу на ту обставину, що за традицією при розв'язанні задач мікрохвильової електродинаміки джерела поля прийнято характеризувати сторонніми струмами та полями, в той час як в низькочастотній електродинаміці джерела поля прийнято характеризувати густиною заряду. Причиною такого вибору функцій джерел поля (зрозуміло, що всі три представлення є еквівалентними) є можливість спрощення розгляду задачі за умови низької та високої колової частоти коливальності поля. Поля, що повільно змінюються у часі, близькі до квазістатичних полів, джерелами яких є майже нерухомі електричні заряди та постійні магніти. Ті ж поля, які швидко зміню-

ються в часі, збуджуються електричними та магнітними зарядами, які швидко переміщуються у просторі, що призводить до появи досить великих за амплітудою струмів. Ці струми можна легко пов'язати з сторонніми полями (див. підрозділ 2.5), що й обумовлює вибір відповідних функцій джерел поля при розв'язанні тих або інших електродинамічних задач.

## 2.5. Матеріальні рівняння

### 2.5.1. Електрофізичні параметри середовищ

Система рівнянь Максвелла виконується для електромагнітних полів в будь-яких середовищах. Однак рівнянь (2.1.1)–(2.1.4) або (2.1.10)–(2.1.13) недостатньо для повного та однозначного опису електромагнітних явищ, що відбуваються в різноманітних середовищах, розв'язання конкретних електродинамічних задач. Причиною цього є те, що кількість цих рівнянь є меншою за кількість невідомих, що до них входять. Дійсно, якщо вважати, що величини  $\vec{j}$  та  $\rho$  є заданими, то для визначення чотирьох векторних величин  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  необхідно мати чотири векторні рівняння, в той час як рівняння (2.1.3)–(2.1.4), (2.1.12)–(2.1.13) є скалярними.

Неповнота системи рівнянь Максвелла пояснюється саме її універсальністю – вона може бути застосована для опису будь-яких макроскопічних електромагнітних процесів в будь-яких середовищах, і, в той же час, параметри, що характеризують середовище, в ній відсутні. Тому при розв'язанні конкретних задач рівняння Максвелла повинні бути доповнені рівняннями, що пов'язують величини  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{j}^M$ <sup>1</sup> з параметрами, які характеризують середовище. Такі рівняння називаються *матеріальними*, а параметри середовища, які до них входять – *електрофізичними параметрами* середовища.

Найпростішими матеріальними рівняннями є рівняння для *однорідного лінійного ізотропного середовища*

$$\vec{D} = \epsilon' \epsilon_0 \vec{E}, \quad (2.5.1)$$

$$\vec{B} = \mu' \mu_0 \vec{H}, \quad (2.5.2)$$

---

<sup>1</sup> Можна не розглядати співвідношення, в яке входить густини зарядів  $\rho$ ,  $\rho^M$ , оскільки його можна одержати з співвідношення для густин струму  $\vec{j}$ ,  $\vec{j}^M$ , скориставшись для цього рівняннями неперервності (2.1.25), (2.1.27).

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (2.5.3)$$

в якому всі параметри  $\epsilon', \mu', \sigma$  є дійсними сталими скалярними величинами,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – електрична стала,  $\mu_0 = 12,56 \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнітна стала. Відносна діелектрична проникність  $\epsilon'$  та відносна магнітна проникність  $\mu'$  є безрозмірними величинами; у вакуумі  $\epsilon' = \mu' = 1$ . Питома електрична провідність середовища  $\sigma$  відповідно до (2.5.3) має розмірність См/м, причому у вакуумі  $\sigma = 0$ .

Іноді, при розгляді матеріальних рівнянь вводять абсолютні діелектричну  $\epsilon'_a$  та магнітну  $\mu'_a$  проникності середовища

$$\epsilon'_a = \epsilon' \epsilon_0, \quad \mu'_a = \mu' \mu_0. \quad (2.5.4)$$

Вони вже є розмірними величинами –  $\epsilon'_a$  вимірюється в одиницях Ф/м, а  $\mu'_a$  – в одиницях Гн/м. Величини  $\epsilon'_a, \mu'_a$  є аналогами питомої (погонної) ємності та індуктивності середовища.

Якщо формально ввести магнітні струми з густиною  $\vec{j}^M$ , тобто перейти до рівнянь Максвелла в симетричній формі запису (2.1.10)–(2.1.13), то систему рівнянь (2.5.1)–(2.5.3) можна доповнити ще одним рівнянням:

$$\vec{j}^M = \sigma^M \vec{H}, \quad (2.5.5)$$

де  $\sigma^M$  – питома магнітна провідність середовища (Ом/м). Далі, якщо не вказано інше, будемо вважати, що середовище має лише електричну провідність  $\sigma$ .

Відмітимо, що матеріальні рівняння (2.5.3), (2.5.5) найчастіше записуються для струмів провідності з густинами  $\vec{j}_{np}$  та  $\vec{j}_{np}^M$ , але можуть записуватись і для струмів іншої природи, наприклад, для сторонніх струмів з густинами  $\vec{j}_{cm}$  та  $\vec{j}_{cm}^M$ . В останньому випадку в праві частини співвідношень (2.5.3), (2.5.5) входять напруженості сторонніх полів  $E_{cm}, H_{cm}$ . Подібним чином для сторонніх полів можуть бути записані і матеріальні рівняння (2.5.1)–(2.5.2), які після цього будуть формально пов'язувати між собою індукції  $\mathcal{D}_{cm}, \mathcal{B}_{cm}$  та напруженості  $E_{cm}, H_{cm}$  сторонніх полів.

При нормальних умовах співвідношення (2.5.1)–(2.5.3) виконуються для більшості відомих середовищ (принаймні в певному діапазоні колових частот  $\omega$  та хвильових чисел  $k$ ). В таких середовищах, за рахунок їх лінійності, виконується *принцип суперпозиції*. Тобто електромагнітне поле, що утворюється декількома джерелами є суперпозицією електромагнітних полів, кожне з яких незалежно породжується своїм джерелом. Застосування цього принципу дозволяє спростити



теоретичний аналіз електромагнітного поля, а тому матеріальні рівняння (2.5.1)–(2.5.3) часто використовуються при розв'язанні електродинамічних задач, хоча деякі властивості реальних середовищ в цих рівняннях не враховуються.

*Неоднорідним* середовищем називається середовище, властивості якого змінюються в просторі. Параметри  $\epsilon'$ ,  $\mu'$ ,  $\sigma$  такого середовища є функціями координат (радіус вектора  $\vec{r}$ ):

$$\epsilon' = \epsilon'(\vec{r}), \quad \mu' = \mu'(\vec{r}), \quad \sigma = \sigma(\vec{r}). \quad (2.5.6)$$

*Нелінійним* середовищем називається середовище, властивості якого залежать від параметрів електромагнітного поля. В цьому випадку параметри  $\epsilon'$ ,  $\mu'$ ,  $\sigma$  є функціями напруженостей  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$  електричного та магнітного полів:

$$\epsilon' = \epsilon'(\mathcal{E}, \mathcal{H}), \quad \mu' = \mu'(\mathcal{E}, \mathcal{H}), \quad \sigma = \sigma(\mathcal{E}, \mathcal{H}). \quad (2.5.7)$$

Вирази (2.5.7) мають загальний характер. Найчастіше, однак, зустрічаються середовища, де діелектрична проникність  $\epsilon'$  та питома електропровідність  $\sigma$  залежать тільки від напруженості електричного поля  $\mathcal{E}$ , а магнітна проникність  $\mu'$  – від напруженості магнітного поля  $\mathcal{H}$ .

В досить сильних полях всі середовища, навіть вакуум, є нелінійними. Однак, в деяких середовищах (ферро- та феррімагнетиках, сегнетоелектриках, надпровідниках та ін.) нелінійні властивості спостерігаються і при досить слабких полях [4–6].

Властивості *анізотропного* середовища виявляються суттєво різними в різних напрямках. Типовим прикладом такого середовища є монокристалічне тверде тіло, властивості якого вздовж різних кристалографічних граней можуть помітно відрізнятись. Параметри анізотропного середовища в загальному випадку є тензорами третього рангу:

$$\epsilon' = \vec{\epsilon}' = \begin{pmatrix} \epsilon'_{11} & \epsilon'_{12} & \epsilon'_{13} \\ \epsilon'_{21} & \epsilon'_{22} & \epsilon'_{23} \\ \epsilon'_{31} & \epsilon'_{32} & \epsilon'_{33} \end{pmatrix}, \quad \mu' = \vec{\mu}' = \begin{pmatrix} \mu'_{11} & \mu'_{12} & \mu'_{13} \\ \mu'_{21} & \mu'_{22} & \mu'_{23} \\ \mu'_{31} & \mu'_{32} & \mu'_{33} \end{pmatrix}, \quad \sigma = \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.5.8)$$

де індекси 1, 2, 3 елементів тензора відповідають одному з трьох взаємно перпендикулярних напрямків. В таких середовищах вектори  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{j}$  можуть бути не колінеарними до векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$ .

Ізотропне середовище, в якому параметри  $\epsilon'$ ,  $\mu'$ ,  $\sigma$  є скалярними величинами, формально є частинним випадком анізотропного середовища, при умові, що тензори (2.5.8) є діагональними і всі їх ненульові елементи рівні між собою:

$$\vec{\epsilon}' = \begin{pmatrix} \epsilon' & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon' & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon' \end{pmatrix} = \epsilon' \vec{I}, \quad \vec{\mu}' = \begin{pmatrix} \mu' & 0 & 0 \\ 0 & \mu' & 0 \\ 0 & 0 & \mu' \end{pmatrix} = \mu' \vec{I}, \quad \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} = \sigma \vec{I}, \quad (2.5.9)$$

де  $\vec{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  – одиничний тензор.

Властивості деяких середовищ, наприклад, активного середовища в лазерах, можуть змінюватись з часом. Такі середовища, в яких присутня помітна часова залежність величин  $\epsilon'$ ,  $\mu'$  або  $\sigma$  –

$$\epsilon' = \epsilon'(t), \quad \mu' = \mu'(t), \quad \sigma = \sigma(t) \quad (2.5.10)$$

– називаються *параметричними*. В даній книзі такі середовища детально розглядатись не будуть. Зацікавлений читач може знайти додаткову інформацію по цьому питанню у роботах [1, 7–8].

## 2.5.2. Частотна та просторова дисперсія середовищ

Вищенаведені формули записані в припущенні, що вектори  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{j}$  в певній точці простору, в певний момент часу залежать лише від векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  в тій же точці простору і в той же момент часу. Насправді вектори  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{j}$  можуть залежати від напруженостей електричного і магнітного полів в інших (сусідніх) точках простору і в інші (попередні) моменти часу. Ці явища називаються *частотною та просторовою дисперсіями* [1, 9]. Відповідно середовища, властивості яких суттєво залежать від колової частоти  $\omega$  електромагнітного поля

$$\epsilon' = \epsilon'(\omega), \quad \mu' = \mu'(\omega), \quad \sigma = \sigma(\omega), \quad (2.5.11)$$

називаються *середовищами з частотною дисперсією*, а середовища з суттєвою залежністю електрофізичних параметрів від хвильового вектора  $\vec{K}$

$$\epsilon' = \epsilon'(\vec{K}), \quad \mu' = \mu'(\vec{K}), \quad \sigma = \sigma(\vec{K}), \quad (2.5.12)$$

– *середовищами з просторовою дисперсією*. В загальному випадку в середовищі має місце як частотна так і просторова дисперсія. Для такого середовища

$$\epsilon' = \epsilon'(\omega, \vec{K}), \quad \mu' = \mu'(\omega, \vec{K}), \quad \sigma = \sigma(\omega, \vec{K}). \quad (2.5.13)$$

Щоб зрозуміти причину виникнення частотної та просторової дисперсії, перепишемо, наприклад, матеріальні рівняння (2.5.1)–(2.5.2) таким чином:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}), \quad (2.5.14)$$

де  $\vec{P}$  – вектор електричної поляризації (Кл/м<sup>2</sup>), а  $\vec{M}$  – об'ємна густина магнітного моменту або намагніченість (А/м) речовини. Вектори  $\vec{P}$  та  $\vec{M}$  вводяться для малого макроскопічного об'єму  $\Delta V$  середовища за правилом

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_i}{\Delta V}, \quad \vec{M} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{m}_i}{\Delta V}, \quad (2.5.15)$$

де  $\vec{p}_i$  та  $\vec{m}_i$  – сумарний дипольний та магнітний моменти  $i$ -го атома (молекули) відповідно,  $N$  – кількість атомів (молекул) в об'ємі  $\Delta V$ . Величини  $\vec{P}$  та  $\vec{M}$  пов'язані з векторами поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  співвідношеннями

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}, \quad \vec{M} = \chi_\mu \vec{H}, \quad (2.5.16)$$

де  $\chi_e$  та  $\chi_\mu$  – відповідно безрозмірні діелектрична та магнітна сприйнятливості речовини. З співвідношень (2.5.14), (2.5.16) випливає, що відносні діелектрична та магнітна проникності середовища

$$\epsilon' = 1 + \chi_e, \quad \mu' = 1 + \chi_\mu. \quad (2.5.17)$$

Для електричної поляризації або намагнічування речовини необхідний деякий час (електричні заряди в атомах або молекулах не можуть миттєво змінити своє положення в просторі та напрямок руху). Припустимо, що електромагнітне поле поширюється всередині середовища і в момент часу  $t$  в точці з радіус-вектором  $\vec{r}$  має вектори поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ . Очевидно, що для того, щоб в цій точці виникли максимальні за амплітудою вектори електричної поляризації та намагніченості, повинен пройти певний час  $\Delta t$ , отже

$$\vec{D}(t) = \epsilon_0 \vec{E}(t) + \vec{P}(t - \Delta t_e), \quad \vec{B}(t) = \mu_0 \vec{H}(t) + \mu_0 \vec{M}(t - \Delta t_\mu), \quad (2.5.18)$$

де  $\Delta t_e$  – час необхідний для поляризації середовища, а  $\Delta t_\mu$  – час необхідний для намагнічування середовища. З цих виразів випливає, що починаючи з певної частоти  $\omega > \omega_{e,\mu} = 2\pi / \Delta t_{e,\mu}$  рух векторів поляризації та намагніченості не буде встигати за змінами напруженостей поля, що приведе до залежності величин  $\chi_e$  та  $\chi_\mu$  від частоти. Таким чином, формула (2.5.18) дозволяє пояснити причину появи у речовини частотної дисперсії.

Розглянемо тепер випадок просторової дисперсії. Внаслідок (2.5.15) вектори  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  виявляються, як і вектори  $\vec{P}$ ,  $\vec{M}$ , визначеними (і усередненими) в межах малого об'єму  $\Delta V$ . За рахунок скінченності швидкості поширення збудження (зміни амплітуди та напрямку векторів

$\vec{E}, \vec{H}$ ) в середовищі або за умови, що електрична та магнітна сприйнятливості сильно змінюються в просторі, вектори поля  $\vec{D}, \vec{B}$  в точках з радіус-векторами  $\vec{r}$  та  $\vec{r} + \Delta\vec{r}$  можуть помітно відрізнятися, навіть при малих  $\Delta\vec{r}$  ( $|\Delta\vec{r}| \ll \sqrt[3]{\Delta V}$ ). В цьому випадку в середовищі буде спостерігатися помітна просторова дисперсія.

В загальному випадку електрофізичні параметри середовища  $\epsilon', \mu', \sigma$  є тензорними величинами і залежать від радіус-вектора  $\vec{r}$ , напруженостей полів  $\vec{E}, \vec{H}$ , колової частоти  $\omega$ , хвильового вектора  $\vec{K}$  і, загалом кажучи, часу  $t$ . Неймовірна складність таких матеріальних рівнянь обумовлює необхідність розгляду вище наведених моделей середовищ, користування якими дозволяє відносно легко розв'язувати конкретні фізичні задачі.

### 2.5.3. Рівняння Максвелла в лінійному однорідному ізотропному непараметричному середовищі

Найбільш часто в мікрохвильовій електродинаміці застосовуються найпростіші матеріальні рівняння (2.5.1)–(2.5.3), (2.5.5), тобто властивості електромагнітного поля розглядаються в лінійному однорідному ізотропному непараметричному середовищі. В даній книзі також будемо переважно притримуватись цього правила, від якого відійдемо лише при аналізі поля в анізотропних середовищах (див. розділ 11). З урахуванням вказаних матеріальних рівнянь рівняння Максвелла, наприклад, рівняння (2.4.5)–(2.4.8), можуть бути спрощені:

$$\text{rot } \vec{H} - \sigma \vec{E} - \epsilon' \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}_{cm} + \epsilon' \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_{cm}}{\partial t}, \quad (2.5.19)$$

$$\text{rot } \vec{E} + \sigma^M \vec{H} + \mu' \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\vec{j}_{cm}^M - \mu' \mu_0 \frac{\partial \vec{H}_{cm}}{\partial t}, \quad (2.5.20)$$

$$\epsilon' \epsilon_0 \text{div } \vec{E} - \rho_{np} = \rho_{cm}, \quad (2.5.21)$$

$$\mu' \mu_0 \text{div } \vec{H} - \rho_{np}^M = \rho_{cm}^M. \quad (2.5.22)$$

Спрощення цих рівнянь порівняно з вихідними полягає в тому, що в рівняннях (2.5.19)–(2.5.22) зникають вектори індукції поля та вектори густини струмів провідності. Отже, якщо вважати параметри середовища заданими, а функції джерел поля відомими, кількість невідомих функцій в цих рівняннях зменшується.

#### 2.5.4. Діелектрики, провідники та магнетики

Розглянемо тепер властивості деяких реальних середовищ. Всі речовини, залежно від своєї провідності, можуть бути умовно розділені на два класи – провідники та діелектрики. Для провідників густина струму провідності  $|\vec{j}_{np}|$  значно перевищує густину струму зміщення  $|\vec{j}_{зм}|$ . Для діелектриків спостерігається обернена залежність:  $|\vec{j}_{зм}| \gg |\vec{j}_{np}|$ . Виходячи з цього, визначимо співвідношення між питомою електропровідністю  $\sigma$  та діелектричною проникністю  $\epsilon'$  речовини у випадку, коли речовина є провідником або діелектриком.

Для простоти припустимо, що середовище описується матеріальними рівняннями (2.5.1)–(2.5.3). Будемо розглядати випадок монохроматичного електромагнітного поля, яке характеризується залежністю від часу  $t$  у формі  $\cos(\omega t + \varphi_0)$ , де  $\omega$  – колова частота коливань поля,  $\varphi_0$  – початкова фаза коливань.

Враховуючи вищесказане, амплітуди напруженості та індукції електричного поля представимо у вигляді

$$E = E_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad D = D_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (2.5.23)$$

де початкова фаза коливань  $\varphi$  для індукції поля в загальному випадку може відрізнитись від  $\varphi_0$ . Підставляючи (2.5.23) у (2.5.3), (2.1.19), одержуємо

$$|\vec{j}_{np}| = |\sigma E_0 \cos(\omega t + \varphi_0)|, \quad |\vec{j}_{зм}| = |-D_0 \omega \sin(\omega t + \varphi)|.$$

Усереднюючи ці вирази по періоду коливань  $T = 2\pi / \omega$  та приймаючи, що  $D_0 = \epsilon' \epsilon_0 E_0$ , одержуємо  $j_{np} = \sigma E_0$ ,  $j_{зм} = \omega D_0 = \omega \epsilon' \epsilon_0 E_0$ , звідки, для провідників:

$$\sigma \gg \epsilon' \epsilon_0 \omega, \quad (2.5.24)$$

а для діелектриків:

$$\sigma \ll \epsilon' \epsilon_0 \omega. \quad (2.5.25)$$

Виходячи з (2.5.24)–(2.5.25) можна ввести поняття *ідеального провідника*, для якого  $\sigma = \infty$ , та *ідеального діелектрика*, провідність якого  $\sigma = 0$ .

Провідники та діелектрики можуть мати магнітні властивості, що обумовлюються величиною та функціональною поведінкою їх магнітної проникності  $\mu'$ . Розрізняють три класи магнетиків – речовин, що мають магнітні властивості. Це *діамагнетики*, для яких  $\mu' < 1$ , *парамагнетики* ( $\mu' > 1$ ) та *феро- і феримагнетики (ферити)*, які формально відносяться до класу парамагнетиків, але мають у своїй «резонансній»

смузі частот  $\mu' \gg 1$  [4]. Саме ферити та феромагнетики, магнітна проникність  $\mu'$  яких може досягати десятків і, навіть, сотень тисяч, часто називають терміном магнетики.

Наприкінці згадаємо принцип дуальності електромагнітного поля, що був введений у параграфі 2.1.2. Відповідно до (2.5.1)–(2.5.3), (2.5.5) співвідношення (2.1.18), раніше записані лише для векторів поля та функцій його джерел, можуть бути поширені й на електрофізичні параметри середовища. Вирази (2.1.18) будуть задовольнятися автоматично, якщо покласти, що між величинами  $\epsilon', \mu', \sigma, \sigma^M$  існують перестановочні співвідношення:

$$\epsilon' \rightleftharpoons -\mu', \quad \sigma \rightleftharpoons -\sigma^M. \quad (2.5.26)$$

Це правило виявляється зручним при розв'язанні граничних задач електродинаміки та при знаходженні електромагнітного поля в середовищі, оскільки на відміну від (2.1.18) в явному вигляді містить співвідношення між його «електричними» та «магнітними» параметрами.

## 2.6. Граничні умови

В середовищі, властивості якого повільно змінюються у просторі, вектори електромагнітного поля  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$  є неперервними функціями координат. Але на границі розділу середовищ з різними електрофізичними параметрами поля  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$  можуть змінюватись стрибкоподібно, тобто можуть мати розриви<sup>1</sup>. Рівняння Максвелла не можуть бути застосовані до таких полів, оскільки розривні функції не можна диференціювати. Тому, при розгляді поведінки електромагнітного поля на границі розділу середовищ, рівняння Максвелла необхідно доповнити *граничними умовами*, що пов'язують між собою вектори поля  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$  по обидва боки від границі розділу середовищ. Щоб одержати ці умови, достатньо розглянути поведінку рівнянь Максвелла в інтегральній формі на границі розділу середовищ і потім зробити граничний перехід для отриманих при цьому співвідношень.

---

<sup>1</sup> Насправді вектори електромагнітного поля завжди неперервні, оскільки на реальній границі розділу середовищ ніколи не відбувається стрибкоподібної зміни електрофізичних параметрів середовища. Розгляд границі розділу середовищ, де відбувається стрибкоподібна зміна цих параметрів, є ідеалізацією, що дозволяє спростити розв'язання граничних електродинамічних задач. Відповідно, граничні умови, що враховують стрибкоподібну зміну векторів поля, також є абстрактними, записаними лише для зручності розв'язання граничних задач електродинаміки.

Розглянемо криволінійну границю  $S'$  розділу двох середовищ з параметрами  $\epsilon'_1, \mu'_1$  та  $\epsilon'_2, \mu'_2$  (рис. 2.6.1). Виділимо дуже малу область  $S$  на границі  $S'$ , в межах якої можна вважати границю  $S'$  прямолінійною (рис. 2.6.2). В площині, що перпендикулярна до поверхні  $S$  виділимо прямокутний контур  $L$  з сторонами  $h$  та  $l$ , такими, щоб поле в кожній частині контуру по обидва боки від границі  $S$  можна було вважати постійним. Введемо тангенціальні до границі розділу  $S$  вектори  $\vec{\tau}_1$ ,  $\vec{\tau}_2$  та вектор нормалі  $\vec{n}$  до площини розділу середовищ  $S$  (див. рис. 2.6.2).

### 2.6.1. Граничні умови для тангенціальних складових векторів поля

Одержимо граничні умови для тангенціальних складових векторів поля. Для цього скористаємось рівняннями Максвелла в інтегральній формі (2.1.14)–(2.1.17).

Розпишемо рівняння (2.1.14) з урахуванням раніше зроблених припущень і введених позначень:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{L} = (\vec{H}_1 \vec{\tau}_1 + \vec{H}_2 \vec{\tau}_2)l + A_h = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_L} \vec{D} d\vec{S}_L + \iint_{S_L} \vec{j} d\vec{S}_L = S_L \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right) \vec{n}_L, \quad (2.6.1)$$

де  $\vec{H}_1$ ,  $\vec{H}_2$  – вектори напруженості магнітного поля по обидва боки від границі  $S$  в межах контуру  $L$ ,  $A_h$  – значення інтегралу  $\oint_L \vec{H} d\vec{L}$  при об-

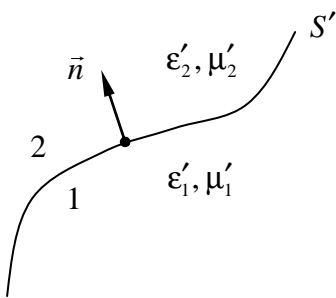


Рис. 2.6.1. Криволінійна границя  $S'$  розділу двох середовищ

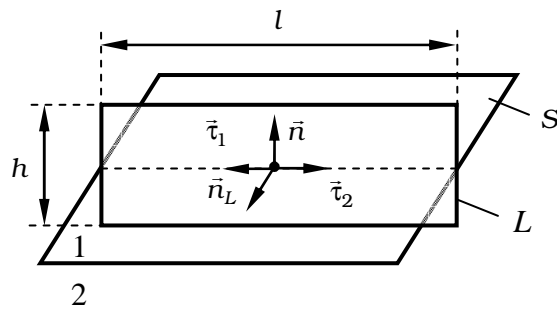


Рис. 2.6.2. Малий контур  $L$  перпендикулярний до площини розділу двох середовищ  $S$

ходженні вертикальних ділянок контуру  $L$  ( $h$  – довжина вертикальної ділянки),  $\vec{j} = \vec{j}_{np} + \vec{j}_{cm}$  – густина струму,  $S_L = hl$  – площа поверхні, обмеженої контуром  $L$ . При  $h \rightarrow 0$   $A_h \rightarrow 0$  і співвідношення (2.6.1) приймає вигляд:

$$\vec{\mathcal{H}}_1 \vec{\tau}_1 + \vec{\mathcal{H}}_2 \vec{\tau}_2 = \lim_{h \rightarrow 0} hl \vec{j}_{повн} \vec{n}_L,$$

де  $\vec{j}_{повн} = \vec{j}_{np} + \partial \vec{\mathcal{D}} / \partial t + \vec{j}_{cm}$  – густина повного струму. З урахуванням напрямків векторів  $\vec{\tau}_1$ ,  $\vec{\tau}_2$  (див. рис. 2.6.2) одержуємо співвідношення між тангенціальними компонентами полів  $\mathcal{H}_{1\tau}$ ,  $\mathcal{H}_{2\tau}$  по обидва боки від границі розділу середовищ:

$$\mathcal{H}_{1\tau} - \mathcal{H}_{2\tau} = \lim_{h \rightarrow 0} hl \vec{j}_{повн} \vec{n}_L = j_{нов}, \quad (2.6.2)$$

де  $j_{нов}$  – густина поверхневого електричного струму (А/м). Співвідношення (2.6.2) можна переписати у векторному вигляді, якщо скористатись поняттям вектора нормалі  $\vec{n}$  до поверхні розділу середовищ  $S$ :

$$[\vec{n} \times (\vec{\mathcal{H}}_1 - \vec{\mathcal{H}}_2)] = \vec{j}_{нов}, \quad (2.6.3)$$

де враховано, що вектор  $\vec{n}$  направлений з середовища 2 у середовище 1, а також те, що вектори  $\vec{\tau}_2$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{n}_L$  утворюють праву трійку векторів.

Якщо формально ввести поверхневі магнітні струми з густиною  $\vec{j}_{нов}^M$  (В/м), то з рівняння (2.1.15) внаслідок принципу дуальності електромагнітного поля можна отримати співвідношення аналогічні до (2.6.2)–(2.6.3):

$$[\vec{n} \times (\vec{\mathcal{E}}_1 - \vec{\mathcal{E}}_2)] = -\vec{j}_{нов}^M \quad \text{або} \quad \mathcal{E}_{1\tau} - \mathcal{E}_{2\tau} = -j_{нов}^M, \quad (2.6.4)$$

де  $\mathcal{E}_{1\tau}$ ,  $\mathcal{E}_{2\tau}$  – тангенціальні компоненти векторів поля  $\vec{\mathcal{E}}_1$ ,  $\vec{\mathcal{E}}_2$  по обидва боки від границі розділу середовищ.

Поверхневі струми, густини яких  $\vec{j}_{нов}$ ,  $\vec{j}_{нов}^M$  входять до граничних умов (2.6.3)–(2.6.4), є абстрактними поняттями і вводяться лише для зручності розв'язання електродинамічних задач. Для всіх середовищ, окрім ідеальних електричних та магнітних провідників (які не існують в природі і також є абстракцією), ці струми дорівнюють нулю, тобто  $\vec{j}_{нов} = 0$ ,  $\vec{j}_{нов}^M = 0$ .

Для ідеального електричного провідника  $\sigma = \infty$  і тому крізь нескінченно малий контур  $L$  ( $h \rightarrow 0$ ) з площею  $S_L = hl \rightarrow 0$  може переноситись скінчений електричний заряд і отже  $\vec{j}_{нов} \neq 0$ . Аналогічним чином, якщо припустити існування магнітних зарядів, можна вважати, що



по поверхні ідеального магнітного провідника ( $\sigma^M = \infty$ ) тече скінчений поверхневий магнітний струм з густиною  $\vec{j}_{нов}^M \neq 0$ .

В тому випадку, коли поверхневі струми відсутні, граничні умови для тангенціальних компонент полів спрощуються і набувають вигляду

$$\mathcal{E}_{1\tau} = \mathcal{E}_{2\tau}, \quad \mathcal{H}_{1\tau} = \mathcal{H}_{2\tau}. \quad (2.6.5)$$

Розглянемо особливості застосування граничних умов (2.6.3)–(2.6.4) для випадку ідеального електричного та магнітного провідників. Оскільки провідність ідеального провідника  $\sigma = \infty$ , густина струму  $\vec{j}$ , що тече в такому середовищі внаслідок співвідношення  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  також прямує до нескінченності при будь-якому скінченному значенні напруженості електричного поля  $\vec{E}$ . При цьому в провіднику, згідно закону Джоуля-Ленца, повинна виділятися нескінченна кількість теплоти, чого, звісно, бути не може. Це означає, що густина струму  $\vec{j}$ , що протікає через поперечний переріз провідника з скінченою площею  $S$  також повинна бути скінченою. Цю умову можна забезпечити лише якщо електричне поле  $\vec{E}$  всередині ідеального провідника є нескінченно малим. Але відсутність електричного поля внаслідок рівнянь Максвелла (2.1.10)–(2.1.13) означає, що всередині ідеального електричного провідника магнітне поле теж відсутнє<sup>1</sup>. Отже на поверхні ідеального електричного провідника можуть існувати лише поверхневі електричні струми; на його поверхні повинні виконуватись граничні умови:

$$\mathcal{E}_\tau = 0 \quad \text{або} \quad [\vec{n} \times \vec{E}] = 0, \quad \mathcal{H}_\tau = j_{нов} \quad \text{або} \quad [\vec{n} \times \vec{H}] = \vec{j}_{нов}. \quad (2.6.6)$$

Умова відсутності тангенціальних компонент електричного поля на поверхні розділу середовищ отримала назву *умови електричної стінки*.

По аналогії з попереднім розглядом, можна отримати граничні умови на поверхні ідеального магнітного провідника, де можливе існування лише поверхневих магнітних струмів:

$$\mathcal{H}_\tau = 0 \quad \text{або} \quad [\vec{n} \times \vec{H}] = 0, \quad \mathcal{E}_\tau = -j_{нов}^M \quad \text{або} \quad [\vec{n} \times \vec{E}] = \vec{j}_{нов}^M. \quad (2.6.7)$$

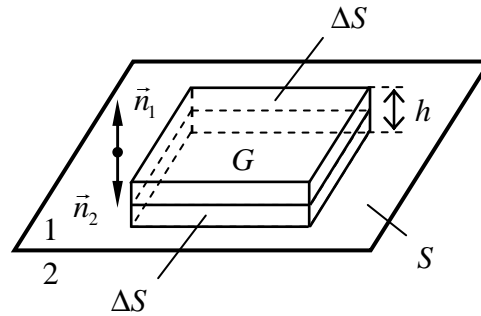
Перша з цих умов є *умовою магнітної стінки*.

---

<sup>1</sup> Мається на увазі змінне магнітне поле.

### 2.6.2. Граничні умови для нормальних складових векторів поля

Одержимо тепер співвідношення, що пов'язують нормальні компоненти електромагнітного поля по обидва боки від границі розділу середовищ. Виділимо малу прямокутну область  $G$  з висотою  $h$  та площею основи  $\Delta S$  поблизу від границі  $S$  так, щоб вона перетинала цю границю (рис. 2.6.3). Введемо перпендикулярні до основ  $\Delta S$  області  $G$  вектори  $\vec{n}_1$  та  $\vec{n}_2$ . Будемо вважати, що в межах прямокутної області  $G$  вектори індукції електричного поля  $\vec{\mathcal{D}}_1, \vec{\mathcal{D}}_2$  по обидва боки від



**Рис. 2.6.3. Мала прямокутна область  $G$ , що перетинає поверхню розділу середовищ  $S$**

границі  $S$  мають постійні значення. Розпишемо тепер рівняння (2.1.16) з урахуванням зроблених припущень і введених позначень:

$$\oiint_G \vec{\mathcal{D}} d\vec{S} = (\vec{\mathcal{D}}_1 \vec{n}_1 + \vec{\mathcal{D}}_2 \vec{n}_2) \Delta S + B_h = \iiint_V \rho dV = q, \quad (2.6.8)$$

де  $B_h$  – частина потоку вектора  $\vec{\mathcal{D}}$ , що проходить крізь бокові поверхні області  $G$ ,  $V = h\Delta S$ . При  $h \rightarrow 0$   $B_h \rightarrow 0$  і, врахувавши напрямки векторів нормалі  $\vec{n}_1$  та  $\vec{n}_2$ , з (2.6.8) одержуємо граничну умову для нормальних складових індукції електричного поля  $\mathcal{D}_{1n}, \mathcal{D}_{2n}$

$$\mathcal{D}_{1n} - \mathcal{D}_{2n} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^h \rho dx = \rho_{\text{нов}}, \quad (2.6.9)$$

або у векторному вигляді

$$(\vec{\mathcal{D}}_1 - \vec{\mathcal{D}}_2) \cdot \vec{n} = \rho_{\text{нов}}, \quad (2.6.10)$$

де  $\rho_{\text{нов}}$  – поверхнева густина електричного заряду (Кл/м<sup>2</sup>),  $\vec{n}$  – вектор нормалі до поверхні розділу середовищ  $S$ , направлений з другого середовища в перше.

Аналогічним чином з рівняння (2.1.17) в припущенні існування магнітних зарядів, можна отримати граничні умови для нормальних компонент вектора індукції магнітного поля  $\mathcal{B}_{1n}, \mathcal{B}_{2n}$ :

$$\mathcal{B}_{1n} - \mathcal{B}_{2n} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^h \rho^{\mathcal{M}} dx = \rho_{\text{нов}}^{\mathcal{M}}, \quad (2.6.11)$$

або у векторному вигляді

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} = \rho_{нов}^M, \quad (2.6.12)$$

де  $\rho_{нов}^M$  – поверхнева густина магнітного заряду (Тл).

Ще раз відмітимо, що величини  $\rho_{нов}$ ,  $\rho_{нов}^M$ , як і поверхневі струми, що були введені раніше, є абстрактними поняттями, які вводяться лише для зручності теоретичного аналізу властивостей електромагнітного поля на границі розділу середовищ.

За відсутності поверхневих електричних та магнітних зарядів граничні умови (2.6.9), (2.6.11) спрощують і набувають вигляду:

$$\mathcal{D}_{1n} = \mathcal{D}_{2n}, \quad \mathcal{B}_{1n} = \mathcal{B}_{2n}. \quad (2.6.13)$$

### 2.6.3. Повна система граничних умов для векторів електромагнітного поля на границі розділу середовищ

Найпростішими граничними умовами на поверхні розділу двох середовищ є умови:

$$\mathcal{E}_{1\tau} = \mathcal{E}_{2\tau}, \quad \mathcal{H}_{1\tau} = \mathcal{H}_{2\tau}, \quad \mathcal{D}_{1n} = \mathcal{D}_{2n}, \quad \mathcal{B}_{1n} = \mathcal{B}_{2n}. \quad (2.6.14)$$

У векторному вигляді вони записуються як

$$\begin{aligned} [\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)] &= 0, \quad [\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)] = 0, \\ (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} &= 0, \quad (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} = 0. \end{aligned} \quad (2.6.15)$$

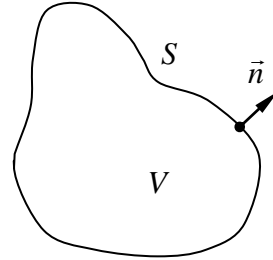
Саме ці граничні умови найчастіше використовуються при розв'язанні електродинамічних задач.

Граничні умови для тангенціальних та нормальних компонент поля, загалом кажучи, не є незалежними. Можна показати, що з граничних умов (2.6.3)–(2.6.4) випливають граничні умови (2.6.10), (2.6.12). Враховуючи це, на практиці, як правило, користуються лише деякими з наведених граничних умов, наприклад, тільки граничними умовами для тангенціальних компонент поля.

На границі розділу реальних середовищ всі вектори електромагнітного поля є неперервними величинами і лише наближено задовольняють написаним вище граничним умовам. Отже, граничні умови для тангенціальних та нормальних складових векторів поля є ідеальними умовами для ідеальної границі розділу середовищ. Вони використовуються в електродинаміці тому, що дозволяють легко розв'язувати граничні електродинамічні задачі, які за своїм характером є абстрактними модельними задачами.

## 2.7. Енергетичні характеристики електромагнітного поля

Електромагнітне поле – це матеріальний об'єкт, який характеризується тими ж параметрами – масою, енергією, імпульсом та моментом імпульсу – що й предмети, які нас оточують в повсякденному житті. Ці параметри поля, однак, явно не фігурують в рівняннях Максвелла, а це означає, що при розв'язанні конкретних фізичних задач необхідно вказати, як експериментально виміряти величини  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ , що характеризують електромагнітне поле. Лише після такого уточнення результати та висновки теорії набувають практичного значення.



**Рис. 2.7.1.** Об'єм  $V$ , що оточений поверхнею  $S$ ;  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до поверхні  $S$

Вимірювання характеристик будь-якого поля зводиться по суті до вичерпування енергії з поля, тому важливо вказати, як величини  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ , якими зручно оперувати в теорії, пов'язані з енергетичними характеристиками поля – роботою  $A_{EM}$ , що виконується полем, енергією поля  $W_{EM}$ , потужністю втрат  $P_{EM}$  та потужністю випромінювання  $\Sigma_{EM}$ .

Розглянемо деякий об'єм  $V$ , оточений поверхнею  $S$ , в якому існує електромагнітне поле (рис. 2.7.1). Енергія електромагнітного поля  $W_{EM}$  в об'ємі  $V$  може змінюватись в часі внаслідок двох процесів:

- вона може перетворюватись в інші (неелектромагнітні) форми енергії, або навпаки виникати з них. Цей процес характеризується потужністю втрат  $P_{EM}$  та роботою поля  $A_{EM}$ ;
- вона може витікати з об'єму  $V$  крізь оточуючу його поверхню  $S$  або, навпаки, потрапляти крізь цю поверхню в об'єм  $V$  (див. рис. 2.7.1). Ця зміна енергії визначається потужністю випромінювання  $\Sigma_{EM}$ .

Визначимо спочатку роботу  $A_{EM}$ , яку виконує електромагнітне поле по переміщенню точкового електричного заряду  $q$ . Нескінченно мала робота  $dA_{EM}$ , яка виконується полем при переміщенні цього заряду на нескінченно малу відстань  $|d\vec{r}| = |\vec{v}|dt$ , де  $\vec{v}$  – швидкість руху заряду, описується загальною формулою

$$dA_{EM} = \vec{F}_A \cdot d\vec{r}, \quad (2.7.1)$$

де сила  $\vec{F}_A$  є силою Лоренца. Підставляючи її вираз (1.1.1) у (2.7.1) та

враховуючи, що згідно з правилом мішаного добутку векторів  $[\vec{v} \times \vec{B}] \cdot \vec{v} = 0$ , одержуємо

$$dA_{EM} = q(\vec{E} \cdot \vec{v})dt. \quad (2.7.2)$$

З цього співвідношення випливає важливий факт, що магнітне поле не виконує роботи по переміщенню в просторі електричних зарядів.

Роботу  $A_{EM}$ , яку виконує електромагнітне поле при переміщенні точкового електричного заряду  $q$  на скінчену відстань  $|\vec{r}|$ , очевидно, можна представити інтегралом від виразу (2.7.2).

З (2.7.2) можна визначити *потужність взаємодії* поля з зарядом  $q$ :

$$P = \frac{dA_{EM}}{dt} = q(\vec{E} \cdot \vec{v}). \quad (2.7.3)$$

Якщо в електромагнітному полі знаходиться заряд  $q$  з об'ємною густиною  $\rho$ , який розподілений в об'ємі  $V$  (див. рис. 2.7.1), то в елементі об'єму  $dV$  буде знаходитись заряд  $dq = \rho dV$ . Потужність взаємодії заряду  $dq$  з полем, відповідно до (2.7.3), запишеться у вигляді  $dP = dq(\vec{E} \cdot \vec{v}) = \rho(\vec{E} \cdot \vec{v})dV$  або  $dP = (\vec{j} \cdot \vec{E})dV$ , де прийнято до уваги, що густина струму  $\vec{j} = \rho \vec{v}$ . Таким чином потужність  $p_{EM} = dP / dV$ , що віддається полем в одиницю об'єму середовища – *питома потужність* (Вт/м³):

$$p_{EM} = \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (2.7.4)$$

З урахуванням матеріального рівняння (2.5.3)

$$p_{EM} = \sigma |\vec{E}|^2. \quad (2.7.5)$$

Для лінійного середовища співвідношення (2.7.4)–(2.7.5) є диференціальною формою закону Джоуля-Ленца. У випадку нелінійного середовища цей термін, як правило, не застосовується.

*Потужність*  $P_{EM}$  (Вт), що віддається полем в об'єм  $V$ , виходячи з (2.7.4)–(2.7.5), може бути знайдена як інтеграл по об'єму  $V$  від питомої потужності  $p_{EM}$ :

$$P_{EM} = \iiint_V p_{EM} dV = \iiint_V (\vec{j} \cdot \vec{E}) dV = \iiint_V \sigma |\vec{E}|^2 dV. \quad (2.7.6)$$

Якщо  $P_{EM} > 0$ , то потужність віддається полем (втрати), якщо ж навпаки  $P_{EM} < 0$  – енергія надається полю (виникає з інших форм енергії).

Одержимо тепер *рівняння енергетичного балансу* для електромагнітного поля. Для цього скалярно помножимо рівняння (2.1.1) на  $\vec{E}$ , а рівняння (2.1.2) скалярно помножимо на  $\vec{H}$ :

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E}, \quad \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

і віднімемо від першого рівняння друге:

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.7.7)$$

Рівняння (2.7.7) є рівнянням енергетичного балансу для електромагнітного поля і виражає закон збереження енергії для будь-яких електромагнітних процесів. Скориставшись співвідношеннями (2.7.4), (Д1.18) це рівняння можна привести до вигляду

$$\frac{\partial w_E}{\partial t} + \frac{\partial w_M}{\partial t} + p_{EM} + \operatorname{div} \vec{\zeta}_{EM} = 0, \quad (2.7.8)$$

де

$$\frac{\partial w_E}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.7.9)$$

– зміна об'ємної густини електричної енергії  $w_E$  (Дж/м³) в часі,

$$\frac{\partial w_M}{\partial t} = \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.7.10)$$

– зміна об'ємної густини магнітної енергії  $w_M$  (Дж/м³) в часі,

$$\vec{\zeta}_{EM} = [\vec{E} \times \vec{H}] \quad (2.7.11)$$

– так званий *вектор Умова–Пойнтинга* (Вт/м²). Цей вектор пов'язаний з потоком енергії  $\Sigma_{EM}$  (Вт), що витікає з об'єму  $V$ , співвідношенням

$$\Sigma_{EM} = \oint_S \vec{\zeta}_{EM} \cdot d\vec{S} = \oint_S [\vec{E} \times \vec{H}] \cdot d\vec{S}, \quad (2.7.12)$$

в якому величину  $\vec{\zeta}_{EM} \cdot d\vec{S} = |\vec{\zeta}_{EM}| \cos(\widehat{\vec{\zeta}_{EM} \vec{n}}) dS$  можна інтерпретувати як електромагнітну енергію, що протікає за одиницю часу крізь елемент площі  $dS$ . Якщо  $\Sigma_{EM} > 0$  – енергія витікає з об'єму  $V$  (втрати), якщо ж навпаки  $\Sigma_{EM} < 0$  – енергія втікає в об'єм  $V$ . Таким чином вектор  $\vec{\zeta}_{EM}$  є вектором густини потоку енергії.

Для лінійного однорідного ізотропного непараметричного середовища, виходячи з (2.7.9)–(2.7.10), об'ємні густини електричного та магнітного полів можуть бути знайдені за правилом

$$w_E = \frac{\epsilon' \epsilon_0 |\vec{E}|^2}{2}, \quad w_M = \frac{\mu' \mu_0 |\vec{H}|^2}{2}. \quad (2.7.13)$$

В загальному ж вигляді

$$w_E = \int_0^t \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dt, \quad w_M = \int_0^t \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dt, \quad (2.7.14)$$

де враховано, що енергія поля і, відповідно, її густина є величинами визначеними з точністю до деякої сталої.

Густина енергії електромагнітного поля  $w_{EM}$  (Дж/м<sup>3</sup>), згідно з рівнянням енергетичного балансу є сумою густин енергії електричного та магнітного полів:

$$w_{EM} = w_E + w_M . \quad (2.7.15)$$

Взявши інтеграл по об'єму  $V$  від (2.7.8) та скориставшись теоремою Остроградського–Гауса можна одержати рівняння енергетичного балансу для інтегральних величин:

$$\frac{dW_{EM}}{dt} + P_{EM} + \Sigma_{EM} = 0 , \quad (2.7.16)$$

де

$$W_{EM} = \iiint_V w_{EM} dV = \iiint_V (w_E + w_M) dV = W_E + W_M \quad (2.7.17)$$

– енергія електромагнітного поля (Дж) об'ємною густиною  $w_{EM}$  в об'ємі  $V$ ,  $W_E = \iiint_V w_E dV$  (Дж) – енергія електричного поля,  $W_M = \iiint_V w_M dV$

(Дж) – енергія магнітного поля, а величини  $P_{EM}$  та  $\Sigma_{EM}$  визначаються виразами (2.7.6) та (2.7.12). Згідно (2.7.13) для лінійного однорідного ізотропного непараметричного середовища

$$W_E = \frac{\epsilon' \epsilon_0}{2} \iiint_V |\vec{E}|^2 dV , \quad W_M = \frac{\mu' \mu_0}{2} \iiint_V |\vec{H}|^2 dV . \quad (2.7.18)$$

Відмітимо, що одержані рівняння енергетичного балансу (2.7.8), (2.7.16) мають загальний характер і можуть бути застосовані до будь-яких електромагнітних процесів в макроскопічних системах.

## 2.8. Векторні хвильові рівняння

В рівняння Максвелла входять дванадцять функцій координат – по три компоненти кожного з векторів  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ , що характеризують електромагнітне поле. Якщо припустити, що функції джерел поля  $\vec{j}_{cm}$ ,  $\vec{j}_{cm}^M$ ,  $\rho_{cm}$ ,  $\rho_{cm}^M$  та  $\vec{E}_{cm}$ ,  $\vec{H}_{cm}$  відомі, а вектори поля пов'язані між собою матеріальними рівняннями (2.5.1)–(2.5.3), (2.5.5), в рівняннях (2.5.19)–(2.5.22) залишається шість невідомих функцій. Це три складові напруженості електричного поля  $\vec{E}$  та три складові напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  (згідно рівнянь неперервності (2.1.25), (2.1.27) та матеріальних рівнянь (2.5.3), (2.5.5) густини вільних зарядів  $\rho_{np}$ ,  $\rho_{np}^M$  мо-

жуть бути виражені через функції  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ). Розв'язання такої системи рівнянь майже завжди потребує її зведення до інших, більш простих, рівнянь, що містять в собі меншу кількість невідомих. Для цього, загалом кажучи, застосовуються електродинамічні потенціали – допоміжні функції, через які виражаються поля  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  (див. підрозділ 2.10). В деяких випадках, однак, можна просто виключити з рівнянь Максвелла один з векторів поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  та одержати диференціальне рівняння другого порядку, яке містить лише  $\vec{E}$  або  $\vec{H}$ .

Покажемо, як це можна зробити для системи рівнянь (2.5.19)–(2.5.22) для випадку лінійного однорідного ізотропного непараметричного середовища, в якому електрофізичні параметри середовища  $\epsilon'$ ,  $\mu'$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma^M$  є сталими скалярними величинами.

Густина вільного електричного заряду  $\rho_{np}$  згідно з рівнянням неперервності (2.1.25) та матеріальним рівнянням (2.5.3) можна описати формулою

$$\rho_{np} = -\int_0^t \operatorname{div} \vec{j}_{np} d\tau = -\sigma \int_0^t \operatorname{div} \vec{E} d\tau = -\sigma \operatorname{div} \int_0^t \vec{E} d\tau. \quad (2.8.1)$$

Аналогічно

$$\rho_{np}^M = -\int_0^t \operatorname{div} \vec{j}_{np}^M d\tau = -\sigma^M \int_0^t \operatorname{div} \vec{H} d\tau = -\sigma^M \operatorname{div} \int_0^t \vec{H} d\tau. \quad (2.8.2)$$

Враховуючи лінійність операцій диференціювання та інтегрування, порядок цих операцій в остаточних виразах (2.8.1)–(2.8.2) було змінено.

Підставляючи одержані вирази для  $\rho_{np}$ ,  $\rho_{np}^M$  в систему рівнянь Максвелла (2.5.19)–(2.5.22) одержуємо систему інтегрально-диференціальних рівнянь, в яку входять лише невідомі змінні  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  та функції джерел поля:

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \sigma \vec{E} - \epsilon' \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}_{cm} + \epsilon' \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_{cm}}{\partial t}, \quad (2.8.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \sigma^M \vec{H} + \mu' \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\vec{j}_{cm}^M - \mu' \mu_0 \frac{\partial \vec{H}_{cm}}{\partial t}, \quad (2.8.4)$$

$$\epsilon' \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} + \sigma \operatorname{div} \int_0^t \vec{E} d\tau = \rho_{cm}, \quad (2.8.5)$$

$$\mu' \mu_0 \operatorname{div} \vec{H} + \sigma^M \operatorname{div} \int_0^t \vec{H} d\tau = \rho_{cm}^M. \quad (2.8.6)$$

Ці рівняння можна додатково спростити – звести їх до двох *векторних хвильових рівнянь*, в кожне з яких буде входити лише одна з фун-



кцій  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ .

Одержимо, наприклад, рівняння для вектора  $\vec{E}$ . Для цього візьмемо ротор від рівняння (2.8.4) і, враховуючи лінійність операції диференціювання, змінимо порядок диференціювання за координатами та часом:

$$\text{rot rot } \vec{E} + \sigma^m \text{rot } \vec{H} + \mu' \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H} = -\text{rot } \vec{j}_{cm}^m - \mu' \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H}_{cm}.$$

Підставляючи в це рівняння вираз для  $\text{rot } \vec{H}$  з (2.8.3), одержуємо векторне хвильове рівняння для вектора  $\vec{E}$ :

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{E} + \sigma^m \left( \sigma \vec{E} + \epsilon' \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}_{cm} + \epsilon' \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_{cm}}{\partial t} \right) + \\ + \mu' \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \sigma \vec{E} + \epsilon' \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}_{cm} + \epsilon' \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_{cm}}{\partial t} \right) = -\text{rot } \vec{j}_{cm}^m - \mu' \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H}_{cm}, \end{aligned}$$

яке можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{E} + \sigma \sigma^m \vec{E} + \epsilon' \epsilon_0 \sigma^m \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu' \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon' \epsilon_0 \mu' \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \\ = -\sigma^m \vec{j}_{cm} - \mu' \mu_0 \frac{\partial \vec{j}_{cm}}{\partial t} - \epsilon' \epsilon_0 \sigma^m \frac{\partial \vec{E}_{cm}}{\partial t} - \epsilon' \epsilon_0 \mu' \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}_{cm}}{\partial t^2} - \text{rot } \vec{j}_{cm}^m - \mu' \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H}_{cm}. \end{aligned} \quad (2.8.7)$$

Хоча рівняння (2.8.7) є векторним хвильовим рівнянням в загальному вигляді, за традицією його записують в дещо іншому вигляді. Перш за все, приймемо до уваги, що швидкість світла в вакуумі  $c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ . По-друге, диференціальний оператор  $\text{rot rot}$  в (2.8.7) розпишемо за допомогою (Д1.23), формально ввівши векторний оператор Лапласа<sup>1</sup>. З урахуванням (2.8.7) та (Д1.23) векторне хвильове рівняння для вектора  $\vec{E}$  приймає остаточний вигляд

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} - \text{grad div } \vec{E} - \sigma \sigma^m \vec{E} - \epsilon' \epsilon_0 \sigma^m \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu' \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon' \epsilon_0 \mu' \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \\ = \sigma^m \vec{j}_{cm} + \mu' \mu_0 \frac{\partial \vec{j}_{cm}}{\partial t} + \epsilon' \epsilon_0 \sigma^m \frac{\partial \vec{E}_{cm}}{\partial t} + \epsilon' \epsilon_0 \mu' \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}_{cm}}{\partial t^2} + \text{rot } \vec{j}_{cm}^m + \mu' \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H}_{cm}. \end{aligned} \quad (2.8.8)$$

Це рівняння містить лише густину стороннього струму  $\vec{j}_{cm}$  і не містить густини стороннього заряду  $\rho_{cm}$ , оскільки в мікрохвильовому ді-

<sup>1</sup> Векторний оператор Лапласа виражається через «звичайний» скалярний оператор Лапласа лише в прямокутній декартовій системі координат. В інших системах координат він є лише скороченим записом для виразу  $\text{grad div} - \text{rot rot}$ .

апазоні така форма запису векторного хвильового рівняння виявляється більш зручною. При необхідності можна ввести в (2.8.8) густину заряду  $\rho_{cm}$ . Для цього достатньо розписати в явному вигляді вираз для  $\text{div } \vec{E}$  в (2.8.8), скориставшись рівнянням (2.8.5).

Одержимо тепер векторне хвильове рівняння для магнітного поля з напруженістю  $\vec{H}$ . По аналогії з тим як це робилось раніше, візьмемо ротор від рівняння (2.8.3):

$$\text{rot rot } \vec{H} - \sigma \text{rot } \vec{E} - \epsilon' \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E} = \text{rot } \vec{j}_{cm} + \epsilon' \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E}_{cm}$$

та підставимо в це рівняння вираз для  $\text{rot } \vec{E}$  з (2.8.4):

$$\begin{aligned} & \text{rot rot } \vec{H} + \sigma \sigma^M \vec{H} + \epsilon' \epsilon_0 \sigma^M \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu' \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \epsilon' \epsilon_0 \mu' \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \\ & = \text{rot } \vec{j}_{cm} + \epsilon' \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E}_{cm} - \sigma \vec{j}_{cm}^M - \epsilon' \epsilon_0 \frac{\partial \vec{j}_{cm}^M}{\partial t} - \mu' \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{H}_{cm}}{\partial t} - \epsilon' \epsilon_0 \mu' \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}_{cm}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.8.9)$$

Після врахування в (2.8.9) співвідношення (Д1.23), одержуємо векторне хвильове рівняння для вектора  $\vec{H}$  в остаточному вигляді:

$$\begin{aligned} & \Delta \vec{H} - \text{grad div } \vec{H} - \sigma \sigma^M \vec{H} - \epsilon' \epsilon_0 \sigma^M \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu' \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon' \epsilon_0 \mu' \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \\ & = -\text{rot } \vec{j}_{cm} - \epsilon' \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E}_{cm} + \sigma \vec{j}_{cm}^M + \epsilon' \epsilon_0 \frac{\partial \vec{j}_{cm}^M}{\partial t} + \mu' \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{H}_{cm}}{\partial t} + \epsilon' \epsilon_0 \mu' \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}_{cm}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.8.10)$$

При необхідності можна ввести у це рівняння густину заряду  $\rho_{cm}^M$ . Для цього достатньо розписати в явному вигляді вираз для  $\text{div } \vec{H}$ , скориставшись рівнянням (2.8.6).

Векторні хвильові рівняння (2.8.8) та (2.8.10) є неоднорідними. Вони описують електромагнітне поле, що збуджується зовнішніми мікрохвильовими струмами з густинами  $\vec{j}_{cm}$ ,  $\vec{j}_{cm}^M$  та сторонніми полями  $\vec{E}_{cm}$ ,  $\vec{H}_{cm}$ . В тому випадку, коли процес збудження електромагнітного поля не розглядається, тобто коли в рамках конкретної задачі інформація про джерела поля відсутня, рівняння (2.8.8), (2.8.10) переходять у однорідні рівняння

$$\Delta \vec{E} - \text{grad div } \vec{E} - \sigma \sigma^M \vec{E} - \epsilon' \epsilon_0 \sigma^M \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu' \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon' \epsilon_0 \mu' \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.8.11)$$

$$\Delta \vec{H} - \text{grad div } \vec{H} - \sigma \sigma^M \vec{H} - \epsilon' \epsilon_0 \sigma^M \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu' \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon' \epsilon_0 \mu' \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.8.12)$$

Ці рівняння визначають власне електромагнітне поле в мікрохвильових системах, яке може достатньо довго існувати в системі за відсутності зовнішніх джерел. Коливання величин, що характеризують поле,

є власними коливаннями цього поля.

Якщо між векторами поля  $\vec{E}$  та  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  та  $\vec{B}$  має місце більш складна залежність ніж лінійна, або електрофізичні параметри середовища є функціями координат чи часу, або є тензорними величинами, вигляд векторних хвильових рівнянь ускладнюється. Наприклад, для неоднорідного середовища, де  $\epsilon' = \epsilon'(\vec{r})$ ,  $\mu' = \mu'(\vec{r})$ ,  $\sigma = \sigma(\vec{r})$ ,  $\sigma^m = \sigma^m(\vec{r})$ , з співвідношень  $\text{div}(\epsilon' \epsilon_0 \vec{E}) = 0$ ,  $\text{div}(\mu' \mu_0 \vec{H}) = 0$ , загалом кажучи, вже не впливає, що  $\text{div} \vec{E} = 0$ ,  $\text{div} \vec{H} = 0$ . Аналогічно для параметричного середовища вираз  $\partial(\epsilon' \vec{E}) / \partial t$  не є еквівалентним виразу  $\epsilon' \partial \vec{E} / \partial t$ . Враховуючи те, що далі переважно будуть розглядатись переважно лінійні однорідні ізотропні непараметричні середовища, під векторними хвильовими рівняннями, якщо не вказано інше, будемо розуміти неоднорідні рівняння (2.8.8), (2.8.10) або однорідні рівняння (2.8.11)–(2.8.12). Від цього правила відступимо лише при розгляді властивостей електромагнітного поля в анізотропних середовищах.

Векторні хвильові рівняння для векторів поля  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  не є еквівалентними системі рівнянь Максвелла, оскільки в них не відображений взаємозв'язок між векторами  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$ . Відповідно розв'язки хвильових рівнянь для векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  не є незалежними. Щоб знайти повну систему функцій  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  на практиці поступають таким чином: розв'язують одне з цих рівнянь (для  $\vec{E}$  або  $\vec{H}$ ), а потім знаходять інший вектор поля шляхом підстановки одержаного розв'язку векторного хвильового рівняння в рівняння Максвелла. Наприклад, розв'язавши рівняння (2.8.8) і знайшовши  $\vec{E}$ , з першого рівняння Максвелла (2.8.3) можна визначити вектор  $\vec{H}$ . Подібним чином, знаючи розв'язок рівняння (2.8.10) – вектор  $\vec{H}$ , з другого рівняння Максвелла (2.8.4) можна знайти вектор  $\vec{E}$ .

## 2.9. Метод комплексних амплітуд

### 2.9.1. Комплексні амплітуди

В макроскопічній електродинаміці важливу роль відіграють фізичні величини, що змінюються в часі за законом синуса або косинуса, тобто коливаються з певною коловою частотою  $\omega$ , що пов'язана зі звичайною частотою  $\nu$  та періодом коливань  $T$  співвідношенням (1.2.1). Такі фізичні величини називаються *монохроматичними* або

гармонічними.

Рівняння Максвелла є лінійними диференціальними рівняннями, тому при дослідженні властивостей монохроматичних електромагнітних полів можна використати математичний прийом відомий як *метод комплексних амплітуд*. Ідея цього методу полягає в штучній заміні всіх дійсних гармонічних величин їх комплексними образами, для яких операції диференціювання та інтегрування по часу виконуються за спрощеними правилами.

Одержимо співвідношення між дійсними величинами та їх комплексними образами на прикладі напруженості магнітного поля  $\vec{H}(\vec{r}, t)$ . Нехай векторна функція  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  змінюється в часі за законом

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2.9.1)$$

де  $\vec{H}_0(\vec{r})$  – амплітуда,  $\omega$  – колова частота, а  $\varphi_0$  – початкова фаза коливань поля. Косинус у виразі для  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  можна представити як дійсну частину від експоненціальної функції з аргументом  $i\omega t + i\varphi_0$ , де  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця. Отже

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0(\vec{r}) \operatorname{Re}\{\exp(i\omega t + i\varphi_0)\} = \operatorname{Re}\{\vec{H}_0(\vec{r}) e^{i\varphi_0} e^{i\omega t}\} = \operatorname{Re}\{\vec{H}(\vec{r}) e^{i\omega t}\}, \quad (2.9.2)$$

де  $\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0(\vec{r}) e^{i\varphi_0}$  – *комплексна амплітуда* вектора напруженості магнітного поля,  $\operatorname{Re}\{\dots\}$  – дійсна частина величини, що стоїть у дужках. Можлива і інша форма запису:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re}\{\vec{H}_0(\vec{r}) e^{-i\varphi_0} e^{-i\omega t}\} = \operatorname{Re}\{\vec{H}^*(\vec{r}) e^{-i\omega t}\}, \quad (2.9.3)$$

де  $\vec{H}^*(\vec{r}) = \vec{H}_0(\vec{r}) e^{-i\varphi_0}$  – амплітуда комплексно спряжена<sup>1</sup> до  $\vec{H}(\vec{r})$ . Вирази (2.9.2) та (2.9.3) є еквівалентними. Можна, наприклад, вважати, що комплексною амплітудою магнітного поля є  $\vec{H}_0(\vec{r}) e^{-i\varphi_0}$ , а комплексно спряжена амплітуда має вигляд  $\vec{H}_0(\vec{r}) e^{i\varphi_0}$ . В подальшому будемо дотримуватись саме цього правила, тим самим вважаючи, що залежність комплексного образу функції  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  від часу  $t$  описується множителем  $e^{-i\omega t}$ .

В деяких роботах, особливо в теорії змінних струмів, використовується альтернативна форма запису  $e^{i\omega t}$ . Обидві форми запису ( $e^{-i\omega t}$  та  $e^{i\omega t}$ ) є еквівалентними, але вводити залежність від часу у вигляді  $e^{-i\omega t}$  для величин, що входять до рівнянь електромагнітного поля, виявляється краще, оскільки комплексні електрофізичні параметри середо-

<sup>1</sup> Тут і далі зірочкою будемо позначати комплексно спряжену величину.

вища записуються при цьому в більш зручній формі. Так, в припущенні, що залежність від часу має вигляд  $e^{-i\omega t}$ , комплексна діелектрична проникність середовища записується як  $\epsilon' + i\epsilon''$  (детально про це див. далі), причому уявна частина цієї величини  $\epsilon''$ , яка описує втрати, є завжди додатною. Якщо ж обрати залежність від часу у формі  $e^{i\omega t}$ , комплексна діелектрична проникність прийме вигляд  $\epsilon' - i\epsilon''$ , причому  $\epsilon'' < 0$ . Перша форма запису є більш зручною та природною, тому саме вона буде використовуватись далі.

Перейти від однієї форми запису залежності комплексних величин від часу до іншої можна шляхом зміни в усіх виразах знака при уявній одиниці:  $i \rightleftharpoons -i$ .

По аналогії з (2.9.3) усім гармонічним величинам  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\rho$ ,  $\vec{j}^M$ ,  $\rho^M$ , що входять до рівнянь Максвелла, можна поставити у відповідність комплексні амплітуди  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\rho$ ,  $\vec{j}^M$ ,  $\rho^M$ . Зв'язок між дійсними величинами та їх комплексними амплітудами описується співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \text{Re}\{\vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}\}, & \vec{H}(\vec{r}, t) &= \text{Re}\{\vec{H}(\vec{r})e^{-i\omega t}\}, \\ \vec{D}(\vec{r}, t) &= \text{Re}\{\vec{D}(\vec{r})e^{-i\omega t}\}, & \vec{B}(\vec{r}, t) &= \text{Re}\{\vec{B}(\vec{r})e^{-i\omega t}\}, \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= \text{Re}\{\vec{j}(\vec{r})e^{-i\omega t}\}, & \rho(\vec{r}, t) &= \text{Re}\{\rho(\vec{r})e^{-i\omega t}\}, \\ \vec{j}^M(\vec{r}, t) &= \text{Re}\{\vec{j}^M(\vec{r})e^{-i\omega t}\}, & \rho^M(\vec{r}, t) &= \text{Re}\{\rho^M(\vec{r})e^{-i\omega t}\}.\end{aligned}\quad (2.9.4)$$

Виходячи з цих виразів, легко записати правила для обчислення похідних та інтегралів для комплексних образів дійсних величин:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega, \quad \int dt \rightarrow -\frac{1}{i\omega} = \frac{i}{\omega}. \quad (2.9.5)$$

### 2.9.2. Рівняння електромагнітного поля в комплексній формі

Можливість ефективного застосування методу комплексних амплітуд сильно залежить від лінійності рівнянь електромагнітного поля. Тому у випадку, коли матеріальні рівняння є нелінійними, використання цього методу значно ускладнюється. Надалі, для спрощення подальших математичних викладок, будемо вважати, що середовище є лінійним, непараметричним, однорідним та ізотропним для якого виконуються лінійні матеріальні рівняння (2.5.1)–(2.5.3), (2.5.5).

З урахуванням зроблених припущень підставимо вирази (2.9.4) в рівняння Максвелла (2.8.3)–(2.8.6). Враховуючи правило (2.9.5), ця лі-

нійна система інтегрально-диференціальних рівнянь прийме вигляд:

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-i\omega t}\left(\operatorname{rot}\vec{H}-\sigma\vec{E}+i\omega\varepsilon'\varepsilon_0\vec{E}\right)\right\}=\operatorname{Re}\left\{e^{-i\omega t}\left(\vec{j}_{cm}-i\omega\varepsilon'\varepsilon_0\vec{E}_{cm}\right)\right\}, \quad (2.9.6)$$

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-i\omega t}\left(\operatorname{rot}\vec{E}+\sigma^M\vec{H}-i\omega\mu'\mu_0\vec{H}\right)\right\}=\operatorname{Re}\left\{e^{-i\omega t}\left(-\vec{j}_{cm}^M+i\omega\mu'\mu_0\vec{H}_{cm}\right)\right\}, \quad (2.9.7)$$

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-i\omega t}\left(\varepsilon'\varepsilon_0+i\frac{\sigma}{\omega}\right)\operatorname{div}\vec{E}\right\}=\operatorname{Re}\left\{e^{-i\omega t}\rho_{cm}\right\}, \quad (2.9.8)$$

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-i\omega t}\left(\mu'\mu_0+i\frac{\sigma^M}{\omega}\right)\operatorname{div}\vec{H}\right\}=\operatorname{Re}\left\{e^{-i\omega t}\rho_{cm}^M\right\}. \quad (2.9.9)$$

Ці рівняння будуть задовольнятися для будь-яких значень часу  $t$ , якщо комплексні амплітуди задовольняють рівняння

$$\operatorname{rot}\vec{H}-\sigma\vec{E}+i\omega\varepsilon'\varepsilon_0\vec{E}=\vec{j}_{cm}-i\omega\varepsilon'\varepsilon_0\vec{E}_{cm}, \quad (2.9.10)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}+\sigma^M\vec{H}-i\omega\mu'\mu_0\vec{H}=-\vec{j}_{cm}^M+i\omega\mu'\mu_0\vec{H}_{cm}, \quad (2.9.11)$$

$$\left(\varepsilon'\varepsilon_0+i\frac{\sigma}{\omega}\right)\operatorname{div}\vec{E}=\rho_{cm}, \quad (2.9.12)$$

$$\left(\mu'\mu_0+i\frac{\sigma^M}{\omega}\right)\operatorname{div}\vec{H}=\rho_{cm}^M. \quad (2.9.13)$$

З першого та третього рівняння цієї системи випливає, що можна ввести комплексну величину

$$\varepsilon=\varepsilon'+i\varepsilon''=\varepsilon'+i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}, \quad (2.9.14)$$

яку природно назвати *комплексною діелектричною проникністю* середовища. Дійсна частина  $\varepsilon'$  цієї величини ідентична відносній діелектричній проникності середовища, що входить у рівняння (2.8.3)–(2.8.6), а уявна частина  $\varepsilon''$  характеризує втрати електромагнітної енергії в середовищі в залежності від його провідності  $\sigma$  та частоти  $\omega$ .

Аналогічно, з другого та четвертого рівнянь випливає вираз для *комплексної магнітної проникності* середовища

$$\mu=\mu'+i\mu''=\mu'+i\frac{\sigma^M}{\mu_0\omega}. \quad (2.9.15)$$

Дійсна частина  $\mu'$  цієї величини ідентична відносній магнітній проникності середовища, що входить у рівняння (2.8.3)–(2.8.6), а уявна частина  $\mu''$  характеризує втрати електромагнітної енергії в середовищі.

З урахуванням записаних виразів для комплексних проникностей  $\varepsilon, \mu$  рівняння Максвелла для комплексних амплітуд приймають остаточний вигляд

$$\operatorname{rot} \vec{H} + i\omega\epsilon\epsilon_0\vec{E} = \vec{j}_{cm} - i\omega\epsilon'\epsilon_0\vec{E}_{cm}, \quad (2.9.16)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} - i\omega\mu\mu_0\vec{H} = -\vec{j}_{cm}^M + i\omega\mu'\mu_0\vec{H}_{cm}, \quad (2.9.17)$$

$$\epsilon\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho_{cm}, \quad (2.9.18)$$

$$\mu\mu_0 \operatorname{div} \vec{H} = \rho_{cm}^M. \quad (2.9.19)$$

Ці рівняння називають рівняннями електромагнітного поля в комплексній формі. Саме ними будемо переважно користуватись далі.

З виразів (2.9.4) та рівнянь (2.9.16)–(2.9.19) випливає, що усі лінійні співвідношення, раніше одержані для дійсних величин, що характеризують електромагнітне поле або його джерела, можуть бути записані і для відповідних комплексних амплітуд. Наприклад, рівняння неперервності (2.1.25), (2.1.27) для комплексних амплітуд (2.9.4) будуть мати вигляд

$$\operatorname{div} \vec{j} - i\omega\rho = 0, \quad \operatorname{div} \vec{j}^M - i\omega\rho^M = 0. \quad (2.9.20)$$

З рівнянь електромагнітного поля в комплексній формі також випливає природний висновок про те, що подібно дійсним величинам, комплексні амплітуди задовольняють принцип дуальності електромагнітного поля. Для них можуть бути записані наступні перестановочні співвідношення, які є узагальненням співвідношень (2.1.18), (2.5.26):

$$\vec{E} \rightleftharpoons \vec{H}, \quad \vec{D} \rightleftharpoons -\vec{B}, \quad \vec{j} \rightleftharpoons -\vec{j}^M, \quad \rho \rightleftharpoons -\rho^M, \quad \epsilon \rightleftharpoons -\mu, \quad \sigma \rightleftharpoons -\sigma^M. \quad (2.9.21)$$

### 2.9.3. Граничні умови для комплексних амплітуд

Комплексні амплітуди задовольняють тим же граничним умовам, що й дійсні величини. Нагадаємо, що в найбільш загальному випадку ці граничні умови мають вигляд

$$\begin{aligned} \left[ \vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \right] &= -\vec{j}_{nos}^M, \quad \left[ \vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \right] = \vec{j}_{nos}, \\ (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} &= \rho_{nos}, \quad (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} = \rho_{nos}^M. \end{aligned} \quad (2.9.22)$$

Якщо ж поверхневі струми та заряди відсутні, ці умови спрощуються і можуть бути представлені таким чином:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad D_{1n} = D_{2n}, \quad B_{1n} = B_{2n}. \quad (2.9.23)$$

У (2.9.22)–(2.9.23) індекси 1, 2 відповідають різним середовищам по обидва боки від границі їх розділу; індекс  $\tau$  відповідає тангенціальним компонентам комплексних амплітуд векторів поля, а індекс  $n$  – їх нормальним компонентам.

#### 2.9.4. Векторні хвильові рівняння

Використовуючи метод комплексних амплітуд, можна спростити векторні хвильові рівняння, одержані в підрозділі 2.8. Щоб проілюструвати це підставимо у рівняння (2.8.8), (2.8.10) дійсні величини виражені через відповідні комплексні амплітуди за правилом (2.9.4) і перейдемо до рівнянь для комплексних амплітуд. Враховуючи правило (2.9.5) і співвідношення  $\text{div } \vec{E} = \rho_{cm} / \epsilon \epsilon_0$ ,  $\text{div } \vec{H} = \rho_{cm}^M / \mu \mu_0$ , які випливають з (2.9.18)–(2.9.19), одержимо рівняння

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} - \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \text{grad } \rho_{cm} - \sigma \sigma^M \vec{E} + i \omega \epsilon' \epsilon_0 \sigma^M \vec{E} + i \omega \mu' \mu_0 \sigma \vec{E} + \omega^2 \epsilon' \epsilon_0 \mu' \mu_0 \vec{E} = \\ = \sigma^M \vec{J}_{cm} - i \omega \mu' \mu_0 \vec{J}_{cm} - i \omega \epsilon' \epsilon_0 \sigma^M \vec{E}_{cm} - \omega^2 \epsilon' \epsilon_0 \mu' \mu_0 \vec{E}_{cm} + \text{rot } \vec{J}_{cm}^M - i \omega \mu' \mu_0 \text{rot } \vec{H}_{cm}, \\ \Delta \vec{H} - \frac{1}{\mu \mu_0} \text{grad } \rho_{cm}^M - \sigma \sigma^M \vec{H} + i \omega \epsilon' \epsilon_0 \sigma^M \vec{H} + i \omega \mu' \mu_0 \sigma \vec{H} + \omega^2 \epsilon' \epsilon_0 \mu' \mu_0 \vec{H} = \\ = -\text{rot } \vec{J}_{cm} + i \omega \epsilon' \epsilon_0 \text{rot } \vec{E}_{cm} + \sigma \vec{J}_{cm}^M - i \omega \epsilon' \epsilon_0 \vec{J}_{cm}^M - i \omega \mu' \mu_0 \sigma \vec{H}_{cm} - \omega^2 \epsilon' \epsilon_0 \mu' \mu_0 \vec{H}_{cm}. \end{aligned}$$

Комбінуючи подібні доданки в лівій та правій частинах першого з цих рівняннь одержуємо:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \left( \epsilon' \mu' - \frac{\sigma \sigma^M}{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0} + i \frac{\epsilon' \sigma^M}{\omega \mu_0} + i \frac{\mu' \sigma}{\omega \epsilon_0} \right) \vec{E} = \\ = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \text{grad } \rho_{cm} - i \omega \mu_0 \left( \mu' + i \frac{\sigma^M}{\omega \mu_0} \right) \vec{J}_{cm} - \omega^2 \epsilon' \epsilon_0 \mu_0 \left( \mu' + i \frac{\sigma^M}{\omega \mu_0} \right) \vec{E}_{cm} + \\ + \text{rot } \vec{J}_{cm}^M - i \omega \mu' \mu_0 \text{rot } \vec{H}_{cm}, \end{aligned}$$

відповідно, друге рівняння приймає вигляд

$$\begin{aligned} \Delta \vec{H} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \left( \epsilon' \mu' - \frac{\sigma \sigma^M}{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0} + i \frac{\epsilon' \sigma^M}{\omega \mu_0} + i \frac{\mu' \sigma}{\omega \epsilon_0} \right) \vec{H} = \\ = -\text{rot } \vec{J}_{cm} + i \omega \epsilon' \epsilon_0 \text{rot } \vec{E}_{cm} + \\ + \frac{1}{\mu \mu_0} \text{grad } \rho_{cm}^M - i \omega \epsilon_0 \left( \epsilon' + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right) \vec{J}_{cm}^M - \omega^2 \epsilon_0 \mu' \mu_0 \left( \epsilon' + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right) \vec{H}_{cm}. \end{aligned}$$

Якщо прийняти до уваги вирази (2.9.14)–(2.9.15) для комплексних проникностей середовища, то можна переконатись, що в правих частинах написаних рівнянь з'являються комплексні проникності  $\epsilon$ ,  $\mu$ , а вираз

$$\epsilon' \mu' - \frac{\sigma \sigma^M}{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0} + i \frac{\epsilon' \sigma^M}{\omega \mu_0} + i \frac{\mu' \sigma}{\omega \epsilon_0},$$

що з'явився в лівій частині обох рівнянь, є не що інше як добуток комплексних проникностей  $\epsilon$  та  $\mu$ . Отже, одержані рівняння можуть



бути переписані таким чином:

$$\begin{aligned}\Delta \vec{E} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} &= \\ &= \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \text{grad } \rho_{cm} - i \omega \mu_0 \vec{j}_{cm} - \omega^2 \epsilon' \epsilon_0 \mu_0 \vec{E}_{cm} + \text{rot } \vec{j}_{cm}^M - i \omega \mu' \mu_0 \text{rot } \vec{H}_{cm}, \\ \Delta \vec{H} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \vec{H} &= \\ &= -\text{rot } \vec{j}_{cm} + i \omega \epsilon' \epsilon_0 \text{rot } \vec{E}_{cm} + \frac{1}{\mu \mu_0} \text{grad } \rho_{cm}^M - i \omega \epsilon \epsilon_0 \vec{j}_{cm}^M - \omega^2 \epsilon \epsilon_0 \mu' \mu_0 \vec{H}_{cm}.\end{aligned}$$

Ці рівняння можуть бути додатково спрощені, якщо скористатись виразом  $c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  для швидкості світла в вакуумі, а також виразом для хвильового числа електромагнітної хвилі в вакуумі  $k_0 = \omega / c$ . З урахуванням цих виразів, векторні хвильові рівняння для комплексних амплітуд приймають остаточний вигляд:

$$\begin{aligned}\Delta \vec{E} + k_0^2 \epsilon \mu \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \text{grad } \rho_{cm} - i \omega \mu_0 \vec{j}_{cm} - k_0^2 \epsilon' \epsilon_0 \mu \vec{E}_{cm} + \text{rot } \vec{j}_{cm}^M - i \omega \mu' \mu_0 \text{rot } \vec{H}_{cm}, \\ \Delta \vec{H} + k_0^2 \epsilon \mu \vec{H} &= -\text{rot } \vec{j}_{cm} + i \omega \epsilon' \epsilon_0 \text{rot } \vec{E}_{cm} + \frac{1}{\mu \mu_0} \text{grad } \rho_{cm}^M - i \omega \epsilon \epsilon_0 \vec{j}_{cm}^M - k_0^2 \epsilon \mu' \mu_0 \vec{H}_{cm}.\end{aligned}\tag{2.9.24}$$

Ці хвильові рівняння для комплексних амплітуд називаються *рівняннями Гельмгольца*. Вони дозволяють визначити комплексні амплітуди полів в усіх точках простору, тобто знайти розв'язок електродинамічної задачі в комплексній формі за наявності конкретних граничних умов. Після цього, для знаходження відповідних дійсних величин необхідно скористатись співвідношеннями (2.9.4).

Розглянемо тепер деякі особливості використання рівнянь (2.9.24). Перш за все відмітимо, що в правій частині цих рівнянь знаходяться декілька функцій джерел поля, наприклад, перше рівняння (2.9.24) містить в собі п'ять функцій джерел поля –  $\rho_{cm}$ ,  $\vec{j}_{cm}$ ,  $\vec{E}_{cm}$ ,  $\vec{j}_{cm}^M$ ,  $\vec{H}_{cm}$ . Така загальна форма запису іноді є не дуже зручною, оскільки при розв'язанні конкретних електродинамічних задач, як правило, відомі лише деякі з функцій джерел поля. Перейти до такої форми запису хвильових рівнянь, в якій фігурує менша кількість функцій джерел поля можна за допомогою співвідношень

$$\rho_{cm} = -i \frac{1}{\omega} \text{div } \vec{j}_{cm}, \quad \rho_{cm}^M = -i \frac{1}{\omega} \text{div } \vec{j}_{cm}^M, \quad \vec{j}_{cm} = \sigma \vec{E}_{cm}, \quad \vec{j}_{cm}^M = \sigma^M \vec{H}_{cm}, \tag{2.9.25}$$

які є узагальненням раніше одержаних співвідношень для дійсних величин. Користуючись виразами (2.9.25) можна записати хвильові рівняння (2.9.24) таким чином, що в їх правих частинах будуть фігурувати лише густини зарядів  $\rho_{cm}$ ,  $\rho_{cm}^M$ , густини струмів  $\vec{j}_{cm}$ ,  $\vec{j}_{cm}^M$ , або по-

для  $\vec{E}_{cm}, \vec{H}_{cm}$ .

По-друге, рівняння (2.9.24) можуть бути суттєво спрощені, якщо припустити, що магнітні струми і заряди відсутні. В цьому випадку рівняння (2.9.4) переходять у рівняння

$$\begin{aligned}\Delta \vec{E} + k_0^2 \epsilon \mu \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \text{grad } \rho_{cm} - i \omega \mu_0 \vec{j}_{cm} - k_0^2 \epsilon' \mu \vec{E}_{cm} - i \omega \mu' \mu_0 \text{rot } \vec{H}_{cm}, \\ \Delta \vec{H} + k_0^2 \epsilon \mu \vec{H} &= -\text{rot } \vec{j}_{cm} + i \omega \epsilon' \epsilon_0 \text{rot } \vec{E}_{cm} - k_0^2 \epsilon \mu' \vec{H}_{cm}.\end{aligned}\quad (2.9.26)$$

Нарешті, у випадку, коли джерела поля в рамках розв'язання конкретної електродинамічної задачі можна не розглядати, неоднорідні рівняння (2.9.24), (2.9.26) зводяться до однорідних рівнянь

$$\Delta \vec{E} + k_0^2 \epsilon \mu \vec{E} = 0, \quad \Delta \vec{H} + k_0^2 \epsilon \mu \vec{H} = 0. \quad (2.9.27)$$

Розв'язки саме цих однорідних рівнянь є предметом розгляду в більшій частині даної книги.

## 2.9.5. Енергетичні характеристики електромагнітного поля

Формули (2.9.4) непридатні для безпосереднього знаходження енергетичних величин. Наприклад, згідно виразу для комплексної амплітуди  $H$  величина  $H^2 = \mathcal{H}_0^2 e^{-2i\varphi_0}$  є комплексною. Отже об'ємна густина магнітної енергії (2.7.13) не може бути пропорційна до  $H^2$ . Цей приклад показує, що до комплексних амплітуд, загалом кажучи, не можна застосовувати нелінійні операції. Це є природним, оскільки комплексні амплітуди вводились в припущенні, що рівняння, в які вони входять, а також всі співвідношення між цими амплітудами є лінійними.

Щоб уникнути цієї проблеми, після знаходження комплексних амплітуд можна переходити до дійсних величин і тільки потім користуватись співвідношеннями одержаними в підрозділі 2.7. Однак це ускладнює розв'язання електродинамічних задач, тому бажано відразу переходити до енергетичних характеристик поля, використовуючи лише комплексні амплітуди. Щоб одержати відповідні співвідношення спочатку доведемо дві прості теореми.

Розглянемо випадок двох скалярних фізичних величин  $a(t)$  та  $b(t)$ , які пов'язані зі своїми комплексними амплітудами  $a$  та  $b$  співвідношеннями аналогічними до (2.9.4):

$$a(t) = \text{Re}\{a e^{-i\omega t}\}, \quad b(t) = \text{Re}\{b e^{-i\omega t}\},$$

причому комплексні амплітуди можуть бути представлені у формі

$$a = A e^{-i\alpha}, \quad b = B e^{-i\beta},$$

де  $A, B$  – абсолютні величини, а  $\alpha, \beta$  – аргументи відповідних комплексних чисел. Утворимо нову фізичну величину  $u(t)$ , яка є добутком величин  $a(t)$  та  $b(t)$ :

$$u(t) = a(t)b(t) = A \cos(\omega t + \alpha) B \cos(\omega t + \beta) = \frac{AB}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(2\omega t + \alpha + \beta)].$$

Величина  $u(t)$  містить дві компоненти – одна є незмінною в часі, а інша коливається з подвійною частотою  $2\omega$ . Знайдемо середнє значення  $\overline{u(t)}$  функції  $u(t)$  за період коливань  $T = 2\pi / \omega$ :

$$\overline{u(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{AB}{2} \cos(\alpha - \beta).$$

Одержати цей вираз для  $\overline{u(t)}$  за допомогою комплексних амплітуд  $a$  та  $b$ , можна за правилом

$$\overline{u(t)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{a \cdot b^*\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{a^* \cdot b\}, \quad (2.9.28)$$

де зірочка є знаком комплексного спряження. В частинному випадку, коли  $a(t) = b(t)$  з (2.9.28) одержуємо вираз для середнього квадрата величини  $a(t)$ :

$$\overline{a^2(t)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{a \cdot a^*\} = \frac{1}{2} |a|^2. \quad (2.9.29)$$

Змінна частина  $\widetilde{u(t)}$  функції  $u(t)$  відповідно знаходиться за правилом:

$$\widetilde{u(t)} = \frac{AB}{2} \cos(2\omega t + \alpha + \beta),$$

або з урахуванням виразів для комплексних амплітуд  $a, b$

$$\widetilde{u(t)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{ab e^{-2i\omega t}\}. \quad (2.9.30)$$

В частинному випадку, коли  $a(t) = b(t)$  з (2.9.30) одержуємо вираз для коливальної частини квадрата величини  $a(t)$

$$\widetilde{a^2(t)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{a^2 e^{-2i\omega t}\}. \quad (2.9.31)$$

Вирази (2.9.28)–(2.9.31) виконуються як для скалярних  $a(t), b(t)$  так і для векторних величин  $\vec{a}(t), \vec{b}(t)$ . За їх допомогою можна одержати вирази для енергетичних характеристик електромагнітного поля через його комплексні амплітуди.

При розв'язанні електродинамічних задач найбільш важливими є середні значення енергетичних величин, розглядом яких і обмежимося в даній книзі<sup>1</sup>.

Застосовуючи правила (2.9.28)–(2.7.29), для середніх значень об'ємної густини енергії електричного  $\overline{w_E}$  та магнітного  $\overline{w_M}$  полів, питомої потужності втрат  $\overline{p_{EM}}$  та вектора Умова–Пойнтинга  $\overline{\zeta_{EM}}$  (див. підрозділ 2.7) будемо мати вирази:

$$\begin{aligned}\overline{w_E} &= \frac{\epsilon' \epsilon_0}{4} (\vec{E} \cdot \vec{E}^*) = \frac{\epsilon' \epsilon_0}{4} |\vec{E}|^2, \quad \overline{w_M} = \frac{\mu' \mu_0}{4} (\vec{H} \cdot \vec{H}^*) = \frac{\mu' \mu_0}{4} |\vec{H}|^2, \\ \overline{p_{EM}} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \vec{j}^* \cdot \vec{E} \} = \frac{\sigma}{2} (\vec{E}^* \cdot \vec{E}) = \frac{\sigma}{2} |\vec{E}|^2, \quad \overline{\zeta_{EM}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\vec{E} \times \vec{H}^*].\end{aligned}\quad (2.9.32)$$

Підкреслимо, що ці формули записані для випадку лінійного однорідного ізотропного непараметричного середовища.

По аналогії з виразом (2.7.15) середнє значення об'ємної густини енергії електромагнітного поля  $\overline{w_{EM}}$  дається співвідношенням

$$\overline{w_{EM}} = \overline{w_E} + \overline{w_M} = \frac{1}{4} (\epsilon' \epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \mu' \mu_0 |\vec{H}|^2). \quad (2.9.33)$$

Відповідні середні значення інтегральних величин  $\overline{W_E}$ ,  $\overline{W_M}$ ,  $\overline{W_{EM}}$ ,  $\overline{P_{EM}}$ ,  $\overline{\Sigma_{EM}}$  знаходяться за формулами:

$$\begin{aligned}\overline{W_E} &= \frac{\epsilon' \epsilon_0}{4} \iiint_V |\vec{E}|^2 dV, \quad \overline{W_M} = \frac{\mu' \mu_0}{4} \iiint_V |\vec{H}|^2 dV, \quad \overline{W_{EM}} = \overline{W_E} + \overline{W_M}, \\ \overline{P_{EM}} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \iiint_V (\vec{j}^* \cdot \vec{E}) dV = \frac{\sigma}{2} \iiint_V |\vec{E}|^2 dV, \quad \overline{\Sigma_{EM}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint_S [\vec{E} \times \vec{H}^*] d\vec{S}.\end{aligned}\quad (2.9.34)$$

Для диференціальних величин  $\overline{w}$ ,  $\overline{p}$ ,  $\overline{\zeta}$  виконується закон збереження енергії в формі (2.5.8), а для інтегральних величин – у формі (2.5.16).

Як видно з вищенаведеного матеріалу для полів в лінійному середовищі використання замість векторів поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  їх комплексних амплітуд  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  приводить до того ж самого результату, що й безпосереднє використання векторів  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ . Це дає змогу розглядати властивості електромагнітного поля в лінійних системах користуючись лише поняттям комплексних амплітуд. В більшій частині цієї книги, там де це буде доцільно, ми будемо дотримуватись саме цього правила, а тому для зручності термін «комплексна амплітуда» при роботі з рівняннями

<sup>1</sup> При необхідності, розглянути коливальні енергетичні характеристики можна за допомогою (2.9.30)–(2.9.31).

в комплексній формі часто будемо опускати.

### 2.9.6. Комплексні діелектрична та магнітна проникності

Питання про взаємозв'язок між величинами  $\epsilon'$ ,  $\sigma$ ,  $\omega$  вже частково піднімалось в підрозділі 2.3, де були одержані співвідношення між провідністю  $\sigma$ , відносною діелектричною проникністю  $\epsilon'$  та коловою частотою для випадку доброго діелектрика ( $\sigma \ll \epsilon' \epsilon_0 \omega$ ) та доброго провідника ( $\sigma \gg \epsilon' \epsilon_0 \omega$ ). Порівнюючи ці співвідношення з (2.7.14) приходимо до висновку, що комплексна діелектрична проникність діелектриків має дуже малу, а провідників навпаки – дуже велику уявну частину; для добрих діелектриків  $|\epsilon'| \gg |\epsilon''|$ , для добрих провідників  $|\epsilon'| \ll |\epsilon''|$ .

Внаслідок принципу дуальності електромагнітного поля магнітна проникність середовища також може бути комплексною. Якщо припустити існування магнітних зарядів і відповідно питомої магнітної провідності  $\sigma^m$ , для комплексної магнітної проникності  $\mu = \mu' + i\mu''$  можна одержати вираз аналогічний (2.7.14). Але, як було відмічено в підрозділі 2.3, наявність в природі таких середовищ поки що викликає певні сумніви. В реальних середовищах уявна частина  $\mu''$  комплексної проникності  $\mu$  обумовлена, в першу чергу, явищем відставання вектора індукції  $\vec{B}$  від вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  в речовині.

Комплексні величини  $\epsilon$ ,  $\mu$  за традицією представляють у вигляді:

$$\epsilon = \epsilon' + i\epsilon'' = |\epsilon| \exp(i\delta_\epsilon), \quad \mu = \mu' + i\mu'' = |\mu| \exp(i\delta_\mu), \quad (2.7.15)$$

де кути електричних  $\delta_\epsilon = \arctg(\epsilon''/\epsilon')$  та магнітних  $\delta_\mu = \arctg(\mu''/\mu')$  втрат визначають відставання по фазі векторів  $\vec{D}(t)$ ,  $\vec{B}(t)$  від векторів  $\vec{E}(t)$ ,  $\vec{H}(t)$  та/або наявність в середовищі омичних втрат (для  $\delta_\epsilon$ ).

### 2.9.7. Використання методу комплексних амплітуд для немонохроматичних електромагнітних полів

Наприкінці зауважимо, що оскільки метод комплексних амплітуд вводить для монохроматичних електромагнітних полів, його застосування для немонохроматичних полів, які зустрічаються в природі,

викликає ряд ускладнень. Тільки якщо виконуються лінійні матеріальні рівняння (2.3.1)–(2.3.3), для знаходження полів з довільною залежністю від часу можна скористатись методом комплексних амплітуд. Для цього, замість співвідношень (2.7.4), необхідно представити шукане поле у вигляді деякого спектрального розкладу. Наприклад, вектори поля  $\vec{E}(r, t)$  та  $\vec{H}(r, t)$  можна представити за допомогою інтегралу Фур'є:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \vec{H}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2.7.31)$$

Фізичний зміст виразів (2.7.31) полягає в тому, що електромагнітне поле, яке змінюється в часі за довільним законом, можна представити у вигляді суперпозиції монохроматичних електромагнітних полів з частотою  $\omega$ , кожне з яких характеризується комплексними амплітудами полів  $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$  та  $\vec{H}(\vec{r}, \omega)$ .

## 2.10. Електродинамічні потенціали

В деяких випадках розв'язання рівнянь електромагнітного поля може бути полегшене шляхом введення замість векторів поля нових змінних – *електродинамічних потенціалів*. Електродинамічні потенціали застосовуються для розв'язання задач двох типів: по-перше, за допомогою потенціалів знаходяться поля, які збуджуються заданими джерелами; по-друге, потенціали дозволяють розв'язувати граничні задачі електродинаміки.

Електродинамічні потенціали можна ввести як для дійсних величин, що входять у рівняння Максвелла, так і для рівнянь Максвелла в комплексній формі. Далі будуть розглядатись лише монохроматичні електромагнітні поля, які зручно характеризувати не дійсними величинами, а їх комплексними амплітудами, тому всі електродинамічні потенціали та поля будемо розглядати як комплексні амплітуди, які вводяться за правилом (2.7.4). З урахуванням цього термін «комплексна амплітуда» завжди буде пропускатись, окрім тих випадків, коли це може призвести до невірної тлумачення.

Найбільш відомими серед електродинамічних потенціалів є *векторний електричний* потенціал з комплексною амплітудою  $\vec{A}$  та *скалярний електричний* потенціал з комплексною амплітудою  $\Phi$ . За їх допомогою помітно спрощується розв'язок задачі про поля, які збуджуються сторонніми струмами та зарядами. Розглянемо яким чином вводяться ці потенціали для лінійного однорідного ізотропного непа-

раметричного середовища.

З четвертого рівняння Максвелла  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  випливає, що магнітне поле є вихоревим, тобто може бути представлено через векторний електричний потенціал  $\vec{A}$  у вигляді

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \text{або} \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0} \operatorname{rot} \vec{A}, \quad (2.8.1)$$

завдяки тому, що  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$  (див. підрозділ 2.2). Така форма визначення векторного потенціалу  $\vec{A}$  не є однозначною. Наприклад, якщо замінити потенціал  $\vec{A}$  в (2.8.1) на потенціал  $\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \phi$ , де  $\phi$  – довільна функція координат, вирази (2.8.1) не зміняться, оскільки  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = 0$ .

Підставимо другий вираз (2.8.1) у рівняння Максвелла (2.7.17):

$$\operatorname{rot} \vec{E} - i\omega\mu_0 \frac{1}{\mu\mu_0} \operatorname{rot} \vec{A} = 0 \quad \text{або} \quad \operatorname{rot} (\vec{E} - i\omega\vec{A}) = 0.$$

Враховуючи, що ротор градієнта дорівнює нулю, електричне поле можна представити у вигляді

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi + i\omega\vec{A}, \quad (2.8.2)$$

де  $\Phi$  – скалярний електричний потенціал.

Щоб знайти рівняння, розв'язками яких є функції  $\vec{A}$ ,  $\Phi$ , підставимо вирази (2.8.1)–(2.8.2) у перше рівняння Максвелла (2.7.16):

$$\frac{1}{\mu\mu_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} + i\omega\epsilon\epsilon_0 (-\operatorname{grad} \Phi + i\omega\vec{A}) = \vec{j}_{cm}.$$

Враховуючи співвідношення (Д1.23) це рівняння можна переписати у вигляді

$$\operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{A} - i\omega\epsilon\epsilon_0\mu_0\Phi) - \Delta\vec{A} - \omega^2\epsilon\mu\epsilon_0\mu_0\vec{A} = \mu\mu_0\vec{j}_{cm}.$$

Щоб його спростити, доцільно скористатись тим, що векторний потенціал  $\vec{A}$  визначається виразами (2.8.1) неоднозначно і тому на нього необхідно накласти додаткову умову, відому як *умову калібрування*. В мікрохвильовій електродинаміці, як правило, користуються умовою

$$\operatorname{div} \vec{A} - i\omega\epsilon\mu\epsilon_0\mu_0\Phi = 0, \quad (2.8.3)$$

яка називається *калібруванням Лоренца*. В низькочастотній електродинаміці (коли  $\omega \rightarrow 0$ ) частіше застосовується *калібрування Кулона*  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ .

З урахуванням (2.8.3) рівняння для векторного електричного потенціалу  $\vec{A}$  приймає вигляд

$$\Delta\vec{A} + K^2\vec{A} = -\mu\mu_0\vec{j}_{cm}, \quad (2.8.4)$$

де  $K = k_0\sqrt{\epsilon\mu}$ .

Щоб одержати рівняння для скалярного електричного потенціалу  $\Phi$  візьмемо дивергенцію від рівняння (2.8.4):

$$\operatorname{div}(\Delta \vec{A}) + K^2 (\operatorname{div} \vec{A}) = -\mu\mu_0 \operatorname{div} \vec{j}_{cm}.$$

Підставляючи в це рівняння вираз для  $\operatorname{div} \vec{A}$  з умови калібрування Лоренца (2.8.3), а вираз для  $\operatorname{div} \vec{j}_{cm}$  з рівняння неперервності (2.7.23), одержуємо неоднорідне рівняння Гельмгольца для скалярного потенціалу  $\Phi$ :

$$\Delta \Phi + K^2 \Phi = -\frac{\rho_{cm}}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (2.8.5)$$

Рівняння (2.8.4)–(2.8.5) є значно простішими від рівнянь Гельмгольца (2.7.24) для полів; відомий їх частинний розв'язок у вигляді потенціалів, що запізнюються

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_{cm}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/u)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \\ \Phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int \frac{\rho_{cm}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/u)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \end{aligned} \quad (2.8.6)$$

де  $u$  – швидкість поширення поля. Загальний розв'язок (2.8.4)–(2.8.5) є сумою частинного розв'язку (2.8.6) та розв'язку однорідних рівнянь

$$\Delta \vec{A} + K^2 \vec{A} = 0, \quad \Delta \Phi + K^2 \Phi = 0. \quad (2.8.7)$$

Якщо припустити існування магнітних зарядів, то внаслідок принципу дуальності електромагнітного поля можна по аналогії з потенціалами  $\vec{A}$ ,  $\Phi$  ввести *векторний магнітний потенціал*  $\vec{A}^M$  та *скалярний магнітний потенціал*  $\Phi^M$ . При розгляді цих потенціалів в рівняння Максвелла слід ввести магнітні струми та заряди, а відповідні електричні величини покласти рівними нулю. Тоді з рівняння  $\operatorname{div} \vec{D} = 0$  випливає, що

$$\vec{D} = -\operatorname{rot} \vec{A}^M \quad \text{або} \quad \vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \operatorname{rot} \vec{A}^M, \quad (2.8.8)$$

а наслідком рівняння Максвелла  $\operatorname{rot} \vec{H} + i\omega\varepsilon_0 \vec{E} = 0$  є залежність

$$\vec{H} = -\operatorname{grad} \Phi^M + i\omega \vec{A}^M. \quad (2.8.9)$$

Введені таким чином магнітні потенціали задовольняють перестановочні співвідношення

$$\vec{A} \rightleftharpoons \vec{A}^M, \quad \Phi \rightleftharpoons \Phi^M, \quad (2.8.10)$$

які безпосередньо випливають з (2.7.20).

За наявності джерел поля, потенціали  $\vec{A}^M$ ,  $\Phi^M$  задовольняють неоднорідні рівняння Гельмгольца



$$\Delta \vec{A}^{\mathcal{M}} + K^2 \vec{A}^{\mathcal{M}} = -\varepsilon \varepsilon_0 \vec{j}_{cm}^{\mathcal{M}}, \quad \Delta \Phi^{\mathcal{M}} + K^2 \Phi^{\mathcal{M}} = -\frac{\rho_{cm}^{\mathcal{M}}}{\mu \mu_0}. \quad (2.8.11)$$

Якщо джерела поля відсутні, рівняння (2.8.11) стають подібними однорідним рівнянням (2.8.7).

Для розв'язання граничних задач електродинаміки часто замість потенціалів  $\vec{A}$  та  $\Phi$  вводиться *електричний вектор Герца* з комплексною амплітудою  $\vec{P}$ :

$$\vec{A} = -i \omega \varepsilon \mu \varepsilon_0 \mu_0 \vec{P}, \quad \Phi = -\operatorname{div} \vec{P}. \quad (2.8.12)$$

При такій формі запису умова калібрування Лоренца виконується автоматично, що дозволяє замість двох потенціалів  $\vec{A}$ ,  $\Phi$  розглядати лише один вектор Герца  $\vec{P}$ .

Підставляючи вираз для потенціалу  $\vec{A}$  з (2.8.12) в рівняння (2.8.4), одержуємо неоднорідне рівняння Гельмгольца для електричного вектора Герца

$$\Delta \vec{P} + K^2 \vec{P} = \frac{-i}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \vec{j}_{cm}. \quad (2.8.13)$$

За відсутності джерел поля рівняння, якому задовольняє комплексний вектор  $\vec{P}$ , стає однорідним:

$$\Delta \vec{P} + K^2 \vec{P} = 0. \quad (2.8.14)$$

Враховуючи співвідношення (2.8.1)–(2.8.2) та (2.8.12) комплексні амплітуди полів  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  можна виразити через електричний вектор Герца  $\vec{P}$  таким чином:

$$\vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{P} + K^2 \vec{P}, \quad \vec{H} = -i \omega \varepsilon \varepsilon_0 \operatorname{rot} \vec{P}. \quad (2.8.15)$$

Внаслідок симетрії рівнянь електромагнітного поля, окрім електричного вектора Герца можна ввести *магнітний вектор Герца*  $\vec{\Psi}$  або *вектор Фіцджеральда* за правилом:

$$\vec{A}^{\mathcal{M}} = -i \omega \varepsilon \mu \varepsilon_0 \mu_0 \vec{\Psi}, \quad \Phi^{\mathcal{M}} = -\operatorname{div} \vec{\Psi}, \quad (2.8.16)$$

внаслідок якого вектори Герца подібно векторним та скалярним потенціалам не змінюють свій знак при перестановці місцями електричних та магнітних величин:

$$\vec{P} \rightleftharpoons \vec{\Psi}. \quad (2.8.17)$$

Введений таким чином вектор  $\vec{\Psi}$  задовольняє неоднорідне рівняння

$$\Delta \vec{\Psi} + K^2 \vec{\Psi} = \frac{-i}{\omega \mu \mu_0} \vec{j}_{cm}^{\mathcal{M}}, \quad (2.8.18)$$

яке при умові  $\vec{j}_{cm}^{\mathcal{M}} = 0$  стає ідентичним рівнянню (2.8.14).

Вектори поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  виражаються через вектор  $\vec{\Psi}$  наступним чином

$$\vec{E} = i\omega\mu_0 \text{rot } \vec{\Psi}, \quad \vec{H} = \text{grad div } \vec{\Psi} + K^2 \vec{\Psi}. \quad (2.8.19)$$

В загальному випадку, коли обидва вектори Герца відмінні від нуля, електричне та магнітне поля можуть бути представлені суперпозицією співвідношень (2.8.15), (2.8.19):

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \text{grad div } \vec{\Pi} + K^2 \vec{\Pi} + i\omega\mu_0 \text{rot } \vec{\Psi}, \\ \vec{H} &= -i\omega\epsilon_0 \text{rot } \vec{\Pi} + \text{grad div } \vec{\Psi} + K^2 \vec{\Psi}. \end{aligned} \quad (2.8.20)$$

## 2.9. Поля та потенціали в деяких системах ортогональних координат

В попередньому параграфі було показано, що розв'язання задач електродинаміки може бути спрощено, якщо замість рівнянь для полів розглядати рівняння для електродинамічних потенціалів. Це спрощення полягає перш за все в тому, що неоднорідні рівняння Гельмгольца для потенціалів виявляються простішими за своєю структурою, ніж відповідні рівняння для полів. Слід, однак, зауважити, що одержані в підрозділі 2.8 рівняння є векторними, а тому їх розв'язання, як правило, завжди потребує їх попереднього зведення до більш простих скалярних диференціальних рівнянь. Покажемо як це зробити користуючись апаратом векторів Герца, які мають певні переваги порівняно з іншими типами потенціалів, і тому будуть використовуватись далі в цій книзі.

Електричний  $\vec{\Pi}$  та магнітний  $\vec{\Psi}$  вектори Герца в будь-якій ортогональній системі координат  $\xi, \eta, \zeta$  можна представити у вигляді

$$\vec{\Pi} = \vec{e}_\xi \Pi_\xi + \vec{e}_\eta \Pi_\eta + \vec{e}_\zeta \Pi_\zeta, \quad \vec{\Psi} = \vec{e}_\xi \Psi_\xi + \vec{e}_\eta \Psi_\eta + \vec{e}_\zeta \Psi_\zeta, \quad (2.9.1)$$

де  $\Pi_\alpha, \Psi_\alpha$  – проекції векторів  $\vec{\Pi}, \vec{\Psi}$  на ось  $\alpha$  системи координат;  $\vec{e}_\alpha$  – одиничний вектор (орт) осі  $\alpha$ ;  $\alpha = \{\xi, \eta, \zeta\}$ . Наприклад, в прямокутній декартовій системі координат  $x, y, z$  розклад (2.9.1) приймає вигляд

$$\vec{\Pi} = \vec{e}_x \Pi_x + \vec{e}_y \Pi_y + \vec{e}_z \Pi_z, \quad \vec{\Psi} = \vec{e}_x \Psi_x + \vec{e}_y \Psi_y + \vec{e}_z \Psi_z, \quad (2.9.2)$$

Розглянемо рівняння для одного з векторів Герца, наприклад, неоднорідне рівняння (2.8.13). Представимо всі функції координат, що входять у це рівняння, у формі (2.9.1). Після підстановки цих виразів у (2.8.13), одержуємо

$$(\Delta + K^2)(\vec{e}_\xi \Pi_\xi + \vec{e}_\eta \Pi_\eta + \vec{e}_\zeta \Pi_\zeta) = -\frac{i}{\omega\epsilon_0}(\vec{e}_\xi j_{cm,\xi} + \vec{e}_\eta j_{cm,\eta} + \vec{e}_\zeta j_{cm,\zeta}).$$

Очевидно, що проекції на осі  $\xi, \eta, \zeta$  лівої та правої частини рівняння

повинні бути ідентичними, тобто завжди неоднорідне векторне рівняння Гельмгольца можна записати у вигляді трьох скалярних рівнянь. Наприклад, у декартовій системі координат, де векторний оператор Лапласа є вектором  $\Delta = \vec{e}_x \Delta_x + \vec{e}_y \Delta_y + \vec{e}_z \Delta_z$ , неоднорідне векторне рівняння Гельмгольца еквівалентне трьом скалярним рівнянням

$$\begin{aligned}\Delta_x \Pi_x + K^2 \Pi_x &= -\frac{i}{\omega \epsilon \epsilon_0} j_{cm,x}, \\ \Delta_y \Pi_y + K^2 \Pi_y &= -\frac{i}{\omega \epsilon \epsilon_0} j_{cm,y}, \\ \Delta_z \Pi_z + K^2 \Pi_z &= -\frac{i}{\omega \epsilon \epsilon_0} j_{cm,z},\end{aligned}\quad (2.9.3)$$

де  $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$  – скалярні оператори Лапласа, які діють лише на відповідні  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -складові вектора  $\vec{\Pi}$ .

З наведеного приклада зрозуміло, що векторне рівняння Гельмгольца завжди може бути представлене у вигляді трьох скалярних диференціальних рівнянь. Значно складнішим питанням є питання про те, чи можна обмежитись розглядом лише *одного* з цих скалярних диференціальних рівнянь. В протилежному випадку перехід від векторного диференціального рівняння до трьох скалярних диференціальних рівнянь не дає ніяких переваг, оскільки задачі про знаходження однієї векторної функції або трьох скалярних функцій є еквівалентними по своїй складності.

В класичній електродинаміці доводиться, що в деяких системах ортогональних координат  $\xi, \eta, \zeta$  рівняння Максвелла можуть бути зведені до двох диференціальних рівнянь другого порядку відносно скалярних функцій (потенціалів)  $U^e$  та  $V^m$ ; потенціал  $U^e$  називається *узагальненим потенціалом електричного типу*, потенціал  $V^m$  – *узагальненим потенціалом магнітного типу*. Зведення рівнянь Максвелла до двох диференціальних рівнянь другого порядку можливо тільки в тому випадку, коли обрана система координат допускає існування розв'язків *електричного* ( $E_\zeta \neq 0$ ,  $H_\zeta = 0$ ) та *магнітного* ( $H_\zeta \neq 0$ ,  $E_\zeta = 0$ ) типів, де  $\zeta$  – довільна координата. Ці умови є наслідком наступних співвідношень між коефіцієнтами Ламе  $h_\xi, h_\eta, h_\zeta$  (див. додаток 2) системи координат  $\xi, \eta, \zeta$ :

$$h_\zeta = 1, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_\xi}{h_\eta} \right) = 0. \quad (2.9.4)$$

По суті, умови (2.9.4) означають, що вісь  $\zeta$  системи координат  $\xi, \eta, \zeta$

повинна бути прямолінійною, а коефіцієнти Ламе, що відповідають іншим осям  $\xi, \eta$ , не повинні залежати від координати  $\zeta$ .

До таких систем координат відноситься узагальнена циліндрична система координат з довільним (наприклад, прямокутним або круглим) поперечним перерізом та віссю  $\zeta$ , що співпадає з віссю циліндра, а також сферична система координат, в якій вісь  $\zeta$  відповідає радіальній координаті  $r$ .

Розглянемо рівняння для потенціалів  $U, V$  в найбільш поширених системах координат, причому для спрощення обмежимося розглядом лише однорідних рівнянь з нульовою правою частиною. Також для кожної системи координат наведемо формули за якими можна обчислити всі складові полів  $\vec{E}, \vec{H}$ , якщо відомі потенціали  $U$  та  $V$ .

**Прямокутна декартова система координат**  $x, y, z$ . Умови (2.9.4) в цій системі координат задовольняються для будь-якої осі  $x, y$  або  $z$ . Потенціали  $U$  та  $V$  в цьому випадку є проекціями векторів Герца  $\vec{P}, \vec{\Psi}$  на відповідну вісь.

Нехай, для визначеності,  $\xi = x, \eta = y, \zeta = z$ , тоді рівняння (2.8.14) для електричного вектора Герца і аналогічне рівняння для магнітного вектора Герца набувають вигляду

$$\Delta U + K^2 U = 0, \quad \Delta V + K^2 V = 0, \quad (2.9.5)$$

де

$$P_x = P_y = 0, \quad \Psi_x = \Psi_y = 0, \quad P_z = U, \quad \Psi_z = V. \quad (2.9.6)$$

Оскільки рівняння (2.9.5) еквівалентні векторним рівнянням Гельмгольца (їх розв'язки описують одне і теж поле), інші (не  $\zeta$ -) складові векторів  $\vec{P}, \vec{\Psi}$  можна покласти рівними нулю, що спрощує розв'язок задачі. Це правило буде використане в подальшому й для інших систем координат.

Поля  $\vec{E}, \vec{H}$  виражаються через вектори Герца по формулам (2.8.20). При умові, що вектори Герца мають складові (2.9.6), ці формули можуть бути записані у вигляді

$$E_x = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + i k_0 \mu \frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_y = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - i k_0 \mu \frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_z = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + K^2 U, \\ H_x = -i k_0 \varepsilon \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}, \quad H_y = i k_0 \varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}, \quad H_z = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + K^2 V. \quad (2.9.7)$$

**Циліндрична система координат**  $r, \varphi, z$ . Коефіцієнти Ламе в цій системі координат дорівнюють  $h_r = 1, h_\varphi = r, h_z = 1$ . Відповідно, умови (2.9.4) виконуються лише для осі  $z$ . Отже, функції  $U$  і  $V$  в цьому ви-

падку є  $z$ -складовими векторів Герца, які є розв'язками рівнянь (2.9.5), причому

$$\Pi_r = \Pi_\phi = 0, \quad \Psi_r = \Psi_\phi = 0, \quad \Pi_z = U, \quad \Psi_z = V. \quad (2.9.8)$$

Складові електричного та магнітного полів в циліндричній системі координат згідно з (2.8.20), (2.9.8) запишуться у вигляді

$$E_r = \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} + i k_0 \mu \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad E_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi \partial z} - i k_0 \mu \frac{\partial V}{\partial r}, \quad E_z = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + K^2 U,$$

$$H_r = -i k_0 \epsilon \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial z}, \quad H_\phi = i k_0 \epsilon \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial z}, \quad H_z = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + K^2 V. \quad (2.9.9)$$

**Сферична система координат**  $r, \theta, \phi$ . В сферичній системі координат перехід від рівнянь Максвелла до двох скалярних диференціальних рівнянь другого порядку (2.9.5) також можливий, оскільки можливе існування повздовжніх, відносно радіус-вектора  $\vec{r}$ , електричних ( $E_r \neq 0, H_r = 0$ ) та магнітних ( $H_r \neq 0, E_r = 0$ ) розв'язків. Однак, записати скалярні рівняння (2.9.5) для будь-якої складової полів  $\vec{E}, \vec{H}$  або векторів Герца  $\vec{\Pi}, \vec{\Psi}$  вже можна. Необхідно вводити нові потенціали, які називаються *потенціалами Дебая*. Ці потенціали задовольняють рівняння (2.9.5), в якому оператор Лапласа визначається формулою

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

Зв'язок векторів Герца з потенціалами Дебая  $U, V$  виражається співвідношеннями

$$\Pi_\theta = \Pi_\phi = 0, \quad \Psi_\theta = \Psi_\phi = 0, \quad \Pi_r = rU, \quad \Psi_r = rV. \quad (2.9.10)$$

Складові полів  $\vec{E}, \vec{H}$ , з урахуванням (2.8.20), (2.9.10) можуть бути визначені через потенціали Дебая  $U$  та  $V$  наступним чином:

для поля електричного типу

$$E_r = \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2} + K^2 rU, \quad E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r \partial \theta}, \quad E_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r \partial \phi},$$

$$H_r = 0, \quad H_\theta = -i \frac{\omega \epsilon \epsilon_0}{r \sin \theta} \frac{\partial (rU)}{\partial \phi}, \quad H_\phi = i \frac{\omega \epsilon \epsilon_0}{r} \frac{\partial (rU)}{\partial \theta}; \quad (2.9.11)$$

для поля магнітного типу:

$$E_r = 0, \quad E_\theta = i \frac{\omega \mu \mu_0}{r \sin \theta} \frac{\partial (rV)}{\partial \phi}, \quad E_\phi = -\frac{i \omega \mu \mu_0}{r} \frac{\partial (rV)}{\partial \theta},$$

$$H_r = \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} + K^2 rV, \quad H_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r \partial \theta}, \quad H_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r \partial \phi}. \quad (2.9.12)$$

В загальному випадку поле  $\vec{E}, \vec{H}$  описується суперпозицією виразів (2.9.11)–(2.9.12).

## 2.10. Електродинамічні задачі та умови їх розв'язку

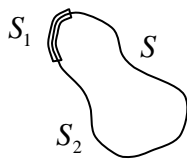
Усі граничні задачі електродинаміки можна розбити на дві категорії: внутрішні та зовнішні задачі.

У *внутрішніх задачах* електродинаміки розглядається поле в обмеженій частині простору, яка оточена поверхнею  $S$  (рис. 2.10.1). Всередині поверхні  $S$  задаються сторонні струми (або заряди), а на поверхні  $S$  – тангенціальна складова електричного  $E_\tau$  або магнітного  $H_\tau$  поля.

У *зовнішніх задачах* розглядається електромагнітне поле в просторі, що оточує поверхню  $S$ . На поверхні  $S$  задаються тангенціальні складові електричного  $E_\tau$  або магнітного  $H_\tau$  полів, а зовні – сторонні струми або заряди.

Граничні умови для складових полів  $E_\tau$  та  $H_\tau$  є еквівалентними<sup>1</sup>, тому при розв'язанні конкретних задач ці умови можуть доповнювати одна одну. Наприклад, тангенціальна складова  $E_\tau$  електричного поля може бути задана на поверхні  $S_1$ , а тангенціальна складова  $H_\tau$  магнітного поля може бути задана на поверхні  $S_2$  – тій частині поверхні  $S$ , на якій не задана гранична умова для  $E_\tau$  (див. рис. 2.10.1).

В теорії електромагнітного поля доводиться *теорема єдиності* розв'язку задач електродинаміки (див., наприклад, [2]), основні положення якої можуть бути сформульовані наступним чином: внутрішні



**Рис. 2.10.1. Замкнена поверхня  $S$ , що є об'єднанням двох поверхонь –  $S_1$  та  $S_2$**

та зовнішні задачі електродинаміки мають єдиний розв'язок, якщо середовище в якому існує електромагнітне поле, має втрати. Крім того, для зовнішніх задач повинні виконуватись дві додаткові умови: сторонні струми, що збуджують поле, повинні знаходитись на скінченній відстані від поверхні  $S$ , а на нескінченності поля повинні зменшуватись швидше, ніж за законом  $r^{-1}$ , де  $r$  – відстань від поверхні  $S$  до точки, де спостерігається поле. Обидві з цих умов випливають з умови скінченності

<sup>1</sup> Для нормальних складових полів виконується аналогічне співвідношення.

енергії поля при  $r \rightarrow \infty$  і завжди виконуються для всіх фізично коректних задач.

### Контрольні запитання та задачі

**2.1.** Дайте визначення системі рівнянь Максвелла з точки зору теорії диференціальних рівнянь. Чи описує ця система рівнянь нелінійні процеси? Чому?

**2.2.** Що може бути джерелом електромагнітного поля?

**2.3.** Чи можна при розгляді електродинамічних задач чітко розрізнити струм провідності від стороннього струму та струму зміщення? Наведіть приклади.

**2.4.** В яких випадках електромагнітне поле можна вважати статичним, стаціонарним, квазістаціонарним, квазіоптичним? Наведіть приклади.

**2.5.** Відносно яких просторових координат (поперечних або вздовжніх по відношенню до напрямку поширення поля) застосовується наближення квазістаціонарного та квазіоптичного електромагнітного поля?

**2.6.** Вважаючи середовище слабо нелінійним, запишіть в явному вигляді залежність діелектричної проникності середовища  $\epsilon' = \epsilon'(\mathcal{E})$  від напруженості електричного поля  $\mathcal{E}$ . Визначте для цієї залежності доданок, що описує ефект подвоєння частоти в нелінійному діелектрику.

**2.7.** Якими фізичними процесами обумовлена поява у середовища вектора поляризації  $\vec{P}$ ? Чому при цьому діелектрична проникність середовища  $\epsilon' \neq 1$ ? Виходячи з цього, оцініть до яких значень прямує діелектрична проникність середовищ в  $\gamma$ -діапазоні.

**2.8.** Чи може існувати електричне поле в ідеальному металі?

**2.9.** Чи є незалежними граничні умови для тангенціальних та нормальних компонент електричного та магнітного полів?

**2.10.** Сформулюйте умову існування магнітного поля в ідеальному металі та запишіть граничні умови для тангенціальних та нормальних компонент магнітного поля на його поверхні?

**2.11.** Якими енергетичними характеристиками характеризується електромагнітне поле? Як ці характеристики пов'язані між собою?

**2.12.** Доведіть, що співвідношення (2.5.5)  $p = \sigma |\vec{E}|^2$  є диференціальною формою закону Джоуля–Ленца  $P = I^2 R = U^2 / R$ , де  $P$  – потужність,

яка виділяється на опорі  $R$  при протіканні по ньому струму  $I = U / R$ .

**2.13.** Чи еквівалентне векторне хвильове рівняння системі рівнянь Максвелла?

**2.14.** Чому метод комплексних амплітуд не дуже зручний для опису електромагнітних полів в нелінійних середовищах?

**2.15.** Чи можна застосовувати метод комплексних амплітуд для середовищ з суттєвою частотною або просторовою дисперсіями?

**2.16.** Чому для опису електромагнітного поля недостатньо одного вектора Герца або векторного потенціалу?

**2.17.** В яких випадках рівняння Максвелла можна звести до двох скалярних диференціальних рівнянь відносно функцій  $U$  та  $V$ ? Чи завжди можна використовувати замість  $U$  або  $V$  одну з компонент вектора Герца або вектора поля?

### Список літератури

1. Туров Е. А. Материальные уравнения электродинамики. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. – 159 с.
2. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.
3. Федоров Н. Н. Основы электродинамики: Учеб. пособие для вузов. – М.: «Высшая школа», 1980. – 399 с.

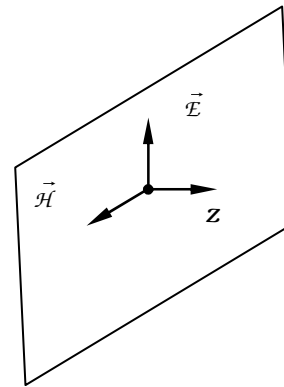


## Розділ III

### ПЛОСКІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

#### 3.1. Загальні властивості плоских хвиль в лінійному однорідному ізотропному середовищі

Однорідною плоскою електромагнітною хвилею (*T*- або *ТЕМ*-хвилею) називається хвиля, вектори електромагнітного поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  якої в кожний момент часу приймають однакові значення на довільній системі площин, перпендикулярних до напрямку поширення хвилі. Наприклад, якщо ввести прямокутну декартову систему координат  $x, y, z$  таким чином, щоб вісь  $z$  співпадала з напрямком поширення хвилі, то вектори поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  такої хвилі можуть залежати лише від координати  $z$  (рис. 3.1.1).



**Рис. 3.1.1. Орієнтація векторів поля однорідної плоскої електромагнітної хвилі, що поширюється вздовж осі  $z$**

Плоскі хвилі, строго кажучи, є математичною абстракцією і в природі насправді не існують. В реальних системах можуть існувати лише хвилі, властивості яких близькі до властивостей плоских хвиль. Доведемо це методом від супротивного.

Припустимо, що плоскі електромагнітні хвилі можуть існувати в реальних системах. Оскільки для плоских хвиль відсутня залежність поля від координат  $x, y$ , поле такої хвилі повинно бути однаковим за амплітудою в усіх точках площини  $xy$  (див. рис. 3.1.1). В той же час, всі реальні системи мають скінчені розміри і знаходяться на скінченій відстані від джерел електромагнітного поля. Це означає, що під час поширення плоскої електромагнітної хвилі, її електромагнітне поле буде перетинати границі різноманітних об'єктів, які знаходяться в просторі. Це призведе до викривлення силових ліній електромагнітного поля, оскільки на границях цих об'єктів поля повинні задовольняти певним граничним умовам (див. підрозділ 2.4). За рахунок цього поле хвилі, в загальному випадку, буде залежати від усіх трьох просторових координат  $x, y, z$ , тобто хвиля не буде плоскою. Отже, ми довели, що плоскі хвилі можуть існувати лише в безмежному однорідному середовищі, яке по суті також є абстракцією.

Розглянемо властивості однорідної плоскої електромагнітної хвилі з коловою частотою  $\omega$ , що поширюється в лінійному однорідному ізо-  
тропному середовищі. Припустимо, для спрощення, що в середовищі  
немає сторонніх струмів та зарядів ( $\vec{j}_{cm} = 0$ ,  $\rho_{cm} = 0$ ). Оскільки хвиля є  
монохроматичною, аналіз її властивостей зручно провести користую-  
чись методом комплексних амплітуд (див. підрозділ 2.7). Для цього,  
зазвичай, необхідно розв'язати скалярні рівняння Гельмгольца для  
потенціалів  $U$  та  $V$ , а потім за допомогою формул підрозділу 2.9 ви-  
разити складові полів хвилі через вже відомі функції  $U$ ,  $V$ . Такий ме-  
тод є традиційним при розгляді більшості задач електродинаміки. Але  
з іншого боку, плоскі хвилі мають найбільш просту структуру поля  
порівняно з іншими класами електромагнітних хвиль, тому розгляд їх  
властивостей зручно провести і безпосередньо виходячи з рівнянь  
Максвелла в комплексній формі. Проілюструємо застосування саме  
цього останнього способу знаходження електромагнітного поля одно-  
рідної плоскої хвилі.

Розпишемо покоординатно комплексні рівняння електромагнітного  
поля (2.7.16)–(2.7.19) в прямокутній системі координат  $x, y, z$  за умо-  
ви, що  $\vec{j}_{cm} = 0$ ,  $\rho_{cm} = 0$ :

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = -i\omega\epsilon\epsilon_0 E_x, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu\mu_0 H_x, \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -i\omega\epsilon\epsilon_0 E_y, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega\mu\mu_0 H_y, \quad (3.1.2)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -i\omega\epsilon\epsilon_0 E_z, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega\mu\mu_0 H_z. \quad (3.1.3)$$

Для плоскої хвилі  $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$ , тому рівняння (3.1.1)–(3.1.3) суттє-  
во спрощуються і приймають вигляд

$$\frac{dH_y}{dz} = i\omega\epsilon\epsilon_0 E_x, \quad -\frac{dE_y}{dz} = i\omega\mu\mu_0 H_x, \quad (3.1.4)$$

$$\frac{dH_x}{dz} = -i\omega\epsilon\epsilon_0 E_y, \quad \frac{dE_x}{dz} = i\omega\mu\mu_0 H_y, \quad (3.1.5)$$

$$0 = -i\omega\epsilon\epsilon_0 E_z, \quad 0 = i\omega\mu\mu_0 H_z. \quad (3.1.6)$$

В цих рівняннях частинна похідна  $\partial/\partial z$  була змінена на звичайну  
 $d/dz$ , оскільки всі величини, що входять у рівняння (3.1.4)–(3.1.6) за  
визначенням плоскої хвилі залежать лише від координати  $z$ .

З рівнянь (3.1.6) випливає, що однорідні плоскі електромагнітні  
хвилі є *поперечними* хвилями, оскільки повздовжні складові їх полів  
 $E_z, H_z$ , що відповідають напрямку поширення хвилі  $z$ , дорівнюють

нулю. Звідси походить альтернативна назва цих хвиль – Т- або ТЕМ-хвилі. Ці назви є скороченням від англ. transversal electromagnetic wave – поперечна електромагнітна хвиля.

З чотирьох рівнянь (3.1.4), (3.1.5) можна одержати чотири однотипних рівняння Гельмгольца для функцій  $E_x, E_y, H_x, H_y$ . Наприклад, підставляючи з другого рівняння (3.1.5) вираз для  $y$ -складової магнітного поля

$$H_y = \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{dE_x}{dz} \quad (3.1.7)$$

у перше рівняння (3.1.4), одержимо рівняння другого порядку для  $x$ -складової електричного поля

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + K^2 E_x = 0, \quad (3.1.8)$$

яке аналогічне рівнянню (2.9.5) для потенціалу  $U$ . В подібному вигляді можна одержати рівняння і для будь-якої іншої складової поля  $E_y, H_x, H_y$ .

Рівняння (3.1.8) з точки зору математики ідентичне рівнянню лінійного гармонічного осцилятора, розв'язком якого є функція

$$E_x(z) = A e^{iKz} + B e^{-iKz}, \quad (3.1.9)$$

де  $A, B$  – довільні сталі. Підставляючи (3.1.9) у (3.1.7) одержуємо вираз для  $y$ -складової магнітного поля плоскої хвилі

$$H_y(z) = \frac{1}{Z} (A e^{iKz} - B e^{-iKz}), \quad (3.1.10)$$

де для зручності введена величина

$$Z = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}}, \quad (3.1.11)$$

яка називається *характеристичним* або *хвильовим комплексним опором* середовища з комплексними електрофізичними параметрами  $\epsilon, \mu$ . Іноді цю величину також називають *хвильовим імпедансом* або просто *імпедансом* середовища. Для вакууму в системі СІ

$$Z = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120\pi \text{ Ом} \approx 377 \text{ Ом}, \quad (3.1.12)$$

а в системі СГС  $Z_0 = 1$ . Фізичний зміст хвильового опору (імпедансу)  $Z$  полягає в тому, що він визначає співвідношення між амплітудами електричного та магнітного полів в електромагнітному полі. Очевидно, що в вакуумі для плоскої хвилі амплітуди (довжини векторів) електричного та магнітного полів однакові, і поява «дивного» значення

(3.1.12) є тільки наслідком специфічного вибору одиниць виміру для електричних та магнітних величин в системі СІ.

Величина  $K$ , що входить у (3.1.8)–(3.1.10) і визначена формулою

$$K = k_0 \sqrt{\epsilon \mu}, \quad (3.1.13)$$

називається *хвильовим числом плоскої хвилі* у середовищі з параметрами  $\epsilon, \mu$ . З (3.1.9)–(3.1.10) випливає, що хвильове число  $K$  визначає просторову зміну електромагнітного поля в напрямку поширення хвилі, тому величину  $K$  часто також називають *сталю поширення плоскої хвилі в середовищі*. Відповідно  $k_0 = \omega / c$  є *хвильовим числом* або *сталю поширення плоскої хвилі у вакуумі*, де  $\epsilon = \mu = 1$ . Коефіцієнтом зв'язку між  $K$  та  $k_0$  є *показник заломлення* або *оптична густина середовища*

$$n_{сер} = \frac{K}{k_0} = \sqrt{\epsilon \mu} = |\epsilon| |\mu| \exp \left( i \frac{\delta_\epsilon + \delta_\mu}{2} \right). \quad (3.1.14)$$

Окрім хвильових чисел  $K$  та  $k_0$  для плоских однорідних електромагнітних хвиль можна ввести такі поняття як *швидкість світла в середовищі*

$$u = \frac{\omega}{K} = \frac{c}{n_{сер}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (3.1.15)$$

та *довжина електромагнітної хвилі в середовищі*

$$\lambda = \frac{2\pi u}{\omega} = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{k_0 \sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{\lambda_0}{n_{сер}}, \quad (3.1.16)$$

де величина

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (3.1.17)$$

є *довжиною електромагнітної хвилі в вакуумі*.

Нехай середовище, в якому поширюється плоска хвиля, є консервативним. Також покладемо для спрощення, що в (3.1.9)–(3.1.10)  $B = 0$ . Використовуючи правила (2.7.4) перейдемо до миттєвих значень напруженості електричного та магнітного полів:

$$E_x = A_m \cos(\omega t - Kz + \phi_A), \quad H_y = \frac{A_m}{Z'} \cos(\omega t - Kz + \phi_A), \quad (3.1.18)$$

де  $Z' = Z_0 \sqrt{\mu' / \epsilon'}$ . Ці вирази описують електромагнітне поле однорідної плоскої хвилі, що переміщується вздовж осі  $z$  зліва – направо – в напрямку зростання значень  $z$  ( $t_2 > t_1$  на рис. 3.1.2). Такі хвилі називаються *біжучими*. Величина  $A_m$  в (3.1.18) є амплітудою хвилі (амплітудою напруженості електричного поля), а аргумент косинуса

$\varphi = \omega t - Kz + \varphi_A$  – її фазою, величина  $\varphi_A$  називається початковою фазою хвилі.

Геометричне місце точок, в яких електромагнітне поле має однакову фазу  $\varphi$  називається *фронтом хвилі*. Очевидно, що фронт плоскої хвилі являє собою площину  $z = \text{const}$ , оскільки фаза хвилі  $\varphi$  є функцією лише однієї просторової координати  $z$ .

Знайдемо *фазову швидкість* плоскої хвилі – швидкість переміщення у просторі її хвильового фронту. Для цього зафіксуємо фазу хвилі  $\varphi$ :

$$\varphi = \omega t - Kz + \varphi_A = \text{const}.$$

Взявши похідну по часу від цього виразу та врахувавши, що  $d\varphi/dt = 0$ , одержимо вираз для фазової швидкості  $v_\varphi$  однорідної плоскої хвилі

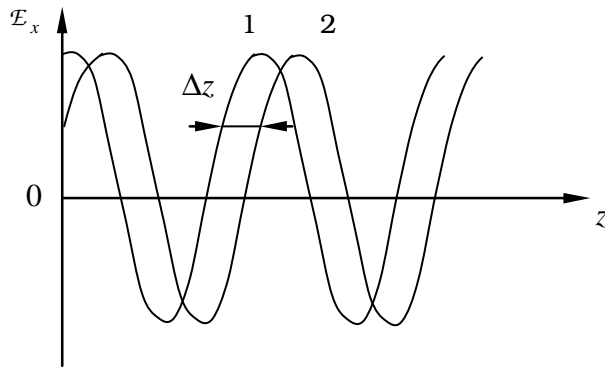
$$v_\varphi = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{K} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n_{\text{сеп}}} = u. \quad (3.1.19)$$

Отже фазова швидкість плоскої хвилі, що поширюється в лінійному однорідному ізотропному середовищі без втрат, співпадає з швидкістю світла  $u$  в середовищі.

Раніше вважалось, що  $B = 0$ . Очевидно, однак, що можна розглянути інший випадок, коли  $B \neq 0$ ,  $A = 0$ . Це випадок плоскої хвилі з миттєвими значеннями напруженості електричного та магнітного полів

$$E_x = B_m \cos(\omega t + Kz + \varphi_B), \quad H_y = -\frac{B_m}{Z} \cos(\omega t + Kz + \varphi_B). \quad (3.1.20)$$

Хвиля (3.1.20) відрізняється від хвилі (3.1.18) по суті лише знаком при сталій поширення  $K$  у виразі для фази; інші відмінності (знак мінус у виразі для  $H_y$  та зміна початкової фази хвилі:  $\varphi_A \rightarrow \varphi_B$ ) не є принциповими. Хвиля (3.1.20) також є біжучою хвилею, але електромагнітне поле цієї хвилі переміщується в протилежний бік, ніж поле хвилі



**Рис. 3.1.2. Залежність  $x$ -компоненти напруженості електричного поля плоскої хвилі від координати  $z$  у фіксовані моменти часу  $t_1$  (крива 1) та  $t_2$  (крива 2)**

(3.1.18) – вздовж осі  $z$  справа – наліво – в напрямку зменшення значень  $z$  ( $t_1 > t_2$  на рис. 3.1.2).

Хвиля (3.1.18), яка поширюється в напрямку  $+z$  за традицією називається *прямою* або *падаючою*, а хвиля (3.1.20), що поширюється в напрямку  $-z$ , називається *зворотною* або *відбитою* хвилею. Для падаючих хвиль виконується співвідношення

$$\bar{v}_\phi = \frac{d\bar{z}}{dt} = \bar{e}_z u, \quad v_\phi > 0, \quad (3.1.21)$$

а для відбитих

$$\bar{v}_\phi = -\frac{d\bar{z}}{dt} = -\bar{e}_z u, \quad v_\phi < 0, \quad (3.1.22)$$

де  $\bar{e}_z$  – одиничний вектор (орт) осі  $z$ .

Проаналізуємо процес переносу енергії однорідною плоскою хвилею. Вектор Умова-Пойнтинга  $\bar{\zeta} = [\bar{\mathcal{E}} \times \bar{\mathcal{H}}]$  в полі плоскої хвилі (3.1.18) або хвилі (3.1.20) має єдину ненульову  $z$ -складову

$$\bar{\zeta} = \bar{e}_z \zeta_z = \bar{e}_z \mathcal{E}_x \mathcal{H}_y, \quad (3.1.23)$$

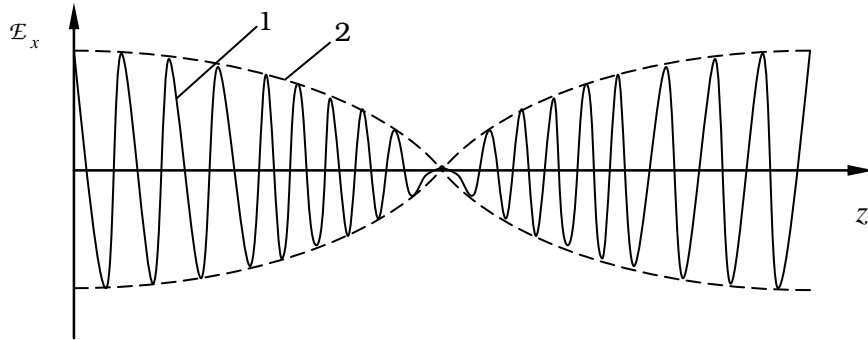
а об'ємна густина енергії  $w = w_e + w_m$  для такого поля при умові, що  $w_e = w_m$ , визначається формулами (2.5.14). З урахуванням цього, *швидкість переносу енергії*  $\bar{v}_e$  хвилею може бути визначена як

$$\bar{v}_e = \frac{\bar{\zeta}}{w} = \pm \bar{e}_z \frac{\mathcal{E}_x \mathcal{H}_y}{\epsilon' \epsilon_0 \mathcal{E}_x^2} = \pm \bar{e}_z \frac{1}{\epsilon' \epsilon_0 Z} = \pm \bar{e}_z \frac{c}{n_{сеп}} = \pm \bar{e}_z u, \quad (3.1.24)$$

де знак плюс відповідає прямій хвилі (3.1.18), а знак мінус – зворотній хвилі (3.1.20).

Процес поширення плоскої електромагнітної хвилі повністю визначається двома швидкостями – фазовою швидкістю  $\bar{v}_\phi$  та швидкістю переносу енергії  $\bar{v}_e$ , модулі яких у випадку плоскої хвилі дорівнюють швидкості світла  $u$  в середовищі. Крім того, з (3.1.24) випливає, що плоска хвиля переносить енергію в тому ж напрямку, в якому поширюється її хвильовий фронт, тобто для такої хвилі знаки фазової швидкості та швидкості переносу енергії співпадають.

Вирази для величин  $\bar{v}_\phi$  та  $\bar{v}_e$  були одержані для монохроматичної плоскої хвилі. Однак, зрозуміло, що спектри усіх реальних сигналів мають декілька складових з різними частотами. Найпростішим сигналом такого типу є двохчастотний сигнал, спектр якого містить дві частотні компоненти з однаковими амплітудами (форма такого сигналу при його поширенні вздовж осі  $z$  наведена на рис. 3.1.3). Для таких або більш складних сигналів можна ввести поняття *групової швидкості*, яку можна трактувати як швидкість переміщення деякої



**Рис. 3.1.3. Форма двохчастотного сигналу, що поширюється вздовж координати  $z$ : 1 – височастотне заповнення, 2 – огибаюча сигналу**

точки на огибаючій сигналу

$$v_{ep} = \frac{d\omega}{dK}, \quad (3.1.25)$$

при умові, що залежність фазової швидкості від частоти є достатньо слабкою. В протилежному випадку, частотні складові сигналу будуть мати різні фазові швидкості, що призведе до «розпливання» сигналу і до спотворення форми його огибаючої. При цьому, вже не можливо прослідкувати за рухом точки на огибаючій сигналу, а тому поняття групової швидкості втрачає свій зміст.

В консервативному або слабо дисипативному середовищі групова швидкість майже співпадає з швидкістю переносу енергії. Для однорідної плоскої хвилі, виходячи з (3.1.25), вона визначається співвідношенням

$$v_{ep} = \left( \frac{dK}{d\omega} \right)^{-1} = \left[ \frac{d}{d\omega} \left( \frac{\omega}{c} n_{cep} \right) \right]^{-1} = \frac{1}{\frac{n_{cep}}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn_{cep}}{d\omega}}, \quad (3.1.26)$$

де враховано, що похідну  $d\omega/dK$  можна розглядати як відношення відповідних диференціалів.

У випадку, коли показник заломлення середовища  $n$  не залежить від частоти (тобто середовище не має частотної дисперсії), групова швидкість плоскої хвилі співпадає з фазовою. Якщо ж це не так, тобто  $n_{cep} = n_{cep}(\omega)$ , співвідношення між груповою та фазовою швидкістю ускладнюється. В загальному випадку, вони виявляються пов'язаними між собою співвідношенням

$$v_{zp} = v_{\phi} - \lambda \frac{dv_{\phi}}{d\lambda}, \quad (3.1.27)$$

яке відоме як *формула Релея*.

З (3.1.27) випливає, що фазова та групова швидкості можуть бути різними не тільки по величині, але й за напрямком (знаком), що обумовлюється дисперсією середовища, в якому поширюється хвиля. Так, якщо напрямки цих швидкостей однакові, то дисперсію середовища називають *додатною* ( $\vec{v}_{zp} \cdot \vec{v}_{\phi} > 0$ ), а якщо протилежні – *від’ємною* ( $\vec{v}_{zp} \cdot \vec{v}_{\phi} < 0$ ). Крім того, залежно від знаку похідної фазової швидкості, розрізняють середовища з *нормальною* ( $dv_{\phi}/d\lambda > 0$ ) та *аномальною* ( $dv_{\phi}/d\lambda < 0$ ) дисперсіями.

### 3.2. Поляризація електромагнітних хвиль

В попередньому параграфі були проаналізовані загальні властивості однорідної плоскої електромагнітної хвилі з компонентами поля  $E_x$  та  $H_y$ . Всі інші складові поля у такої плоскої хвилі, що описується виразами (3.1.9)–(3.1.10), дорівнюють нулю. В той же час рівняння (3.1.4)–(3.1.5) містять окрім  $E_x$ ,  $H_y$  ще дві комплексні амплітуди –  $E_y$  та  $H_x$ . Очевидно, що для них можна одержати скалярні диференціальні рівняння аналогічні (3.1.8). Наприклад, рівняння для комплексної амплітуди поля  $E_y$  можна представити таким чином:

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + K^2 E_y = 0. \quad (3.2.1)$$

Загальний розв’язок цього рівняння запишемо у вигляді, подібному до (3.1.9)

$$E_y(z) = C e^{iKz} + D e^{-iKz}, \quad (3.2.2)$$

де  $C$  та  $D$  – довільні сталі. Компоненту поля  $H_x$  внаслідок другого рівняння (3.1.4) можна виразити через  $E_y$  як

$$H_x = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{dE_y}{dz}. \quad (3.2.3)$$

Підставляючи в цю формулу вираз (3.2.2) для  $E_y(z)$ , одержуємо

$$H_x(z) = \frac{1}{Z} (-C e^{iKz} + D e^{-iKz}). \quad (3.2.4)$$

Вирази (3.2.2), (3.2.4) відрізняються від виразів (3.1.9)–(3.1.10) тільки



ки позначенням довільних сталих. Тому, очевидно, що плоска хвиля (3.2.2), (3.2.4) має ті ж самі властивості що й хвиля (3.1.9)–(3.1.10).

Розв'язки рівнянь (3.1.8) та (3.2.1) є незалежними, тому в загальному випадку може існувати плоска хвиля, яка має чотири ненульові компоненти поля  $E_x, E_y, H_x, H_y$ . Поле такої хвилі можна представити у вигляді

$$\vec{E}_\perp = \vec{e}_x E_x + \vec{e}_y E_y, \quad \vec{H}_\perp = \vec{e}_x H_x + \vec{e}_y H_y, \quad (3.2.5)$$

де індекс  $\perp$  відповідає векторам поля, що лежать в площині хвильового фронту хвилі (див. рис. 3.1.1).

Розглянемо для спрощення випадок, коли в середовищі поширюються тільки прямі хвилі. В рамках цього наближення (3.2.5) прийме вигляд

$$\vec{E}_\perp = (\vec{e}_x A + \vec{e}_y C) e^{iKz}, \quad \vec{H}_\perp = (-\vec{e}_x C + \vec{e}_y A) e^{iKz}. \quad (3.2.6)$$

Для поперечних компонент поля  $\vec{E}_\perp, \vec{H}_\perp$  згідно з (3.2.6) виконуються співвідношення

$$\vec{E}_\perp \cdot \vec{H}_\perp = -AC + CA = 0, \quad [\vec{E}_\perp \times \vec{H}_\perp] = \vec{e}_z (A^2 + C^2), \quad (3.2.7)$$

з яких випливає, що при довільних сталих  $A, C$ , вектори напруженості електричного  $\vec{E}_\perp$  та магнітного  $\vec{H}_\perp$  полів є взаємно перпендикулярними і утворюють з напрямком поширення хвилі  $\vec{e}_z$  праву трійку векторів. З (3.2.7) також випливає, що напрямок вектора  $\vec{H}_\perp$  завжди змінюється у просторі та в часі за тим же законом, що і напрямок вектора  $\vec{E}_\perp$ . Отже, можна записати загальне співвідношення між векторами  $\vec{E}_\perp$  та  $\vec{H}_\perp$ :

$$\vec{H}_\perp = \frac{1}{Z'} [\vec{e}_z \times \vec{E}_\perp], \quad (3.2.8)$$

яке дає змогу при розв'язанні електродинамічних задач шукати вираз лише для одного з векторів  $\vec{E}_\perp, \vec{H}_\perp$ , а інший знаходити за допомогою співвідношення (3.2.8).

Напрямок кожного з векторів  $\vec{E}_\perp, \vec{H}_\perp$  може змінюватись у просторі та в часі залежно від співвідношення між сталими  $A$  та  $C$ . Дійсно, якщо перейти від комплексних величин (3.2.6) до миттєвих значень напруженостей полів за допомогою формул (2.7.4), одержимо

$$\vec{E}_\perp = \vec{e}_x A_m \cos(\omega t - Kz + \phi_A) + \vec{e}_y C_m \cos(\omega t - Kz + \phi_C), \quad (3.2.9)$$

де  $A_m, C_m$  – дійсні невід'ємні амплітуди полів.

Знаючи складові вектора  $\vec{E}_\perp$  легко визначити його довжину

$$|\vec{E}_\perp(z, t)| = E_\perp(z, t) = \sqrt{A_m^2 \cos^2(\omega t - Kz + \varphi_A) + C_m^2 \cos^2(\omega t - Kz + \varphi_C)} \quad (3.2.10)$$

та кут, який він утворює з віссю  $x$

$$\alpha(z, t) = \arctg \left[ \frac{C_m \cos(\omega t - Kz + \varphi_C)}{A_m \cos(\omega t - Kz + \varphi_A)} \right]. \quad (3.2.11)$$

Обидві ці величини –  $E_\perp(z, t)$  та  $\alpha(z, t)$  – в загальному випадку є функціями часу  $t$  та координати  $z$ . Їх залежність від змінних  $z, t$  визначається *поляризацією* електромагнітної хвилі.

Нехай початкові фази хвиль (3.1.9)–(3.1.10) та (3.2.2), (3.2.4) рівні між собою:  $\varphi_A = \varphi_C$ . Тоді з (3.2.10)–(3.2.11) випливає, що

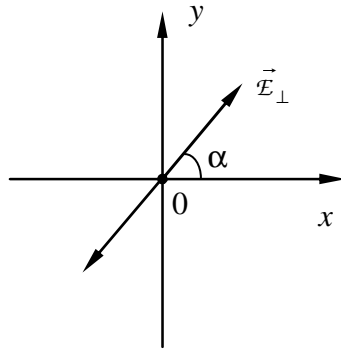
$$E_\perp(z, t) = \sqrt{A_m^2 + C_m^2} \cos(\omega t - Kz + \varphi_A), \quad \alpha = \arctan\left(\frac{C_m}{A_m}\right). \quad (3.2.12)$$

Тобто напрямок вектора  $\vec{E}_\perp$  залишається незмінним у просторі ( $\alpha = \text{const}$ ), а його довжина змінюється по закону косинуса (рис. 3.2.1). Така однорідна плоска хвиля, поле якої зберігає свою орієнтацію в просторі, називається хвилею з *лінійною поляризацією* або *лінійно поляризованою хвилею*.

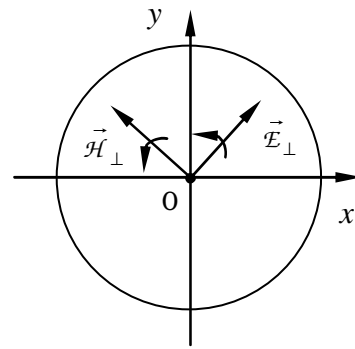
Якщо ж, наприклад, покласти  $A_m = C_m$ ,  $\varphi_A - \varphi_C = \pi/2$ , то з (3.2.10)–(3.2.11) одержимо

$$E_\perp = A_m \sqrt{2}, \quad \alpha(z, t) = \omega t - Kz + \varphi_A. \quad (3.2.13)$$

В цьому випадку довжина вектора  $\vec{E}_\perp$  залишається незмінною, а кут між ним та віссю  $x$  буде постійно змінюватись за лінійним законом. Вектор  $\vec{E}_\perp$  буде описувати коло в площині  $z = \text{const}$ , обертаючись з кутовою швидкістю  $\omega$  проти годинникової стрілки, якщо дивитись назустріч напрямку поширення хвилі



**Рис. 3.2.1.** Орієнтація вектора напруженості електричного поля для хвилі з лінійною поляризацією



**Рис. 3.2.2.** Орієнтація векторів напруженості електричного та магнітного полів для хвилі з лівою круговою поляризацією (хвиля поширюється до нас)

(рис. 3.2.2). В тривимірному просторі кінець вектора  $\vec{E}_\perp$  описує гвинтову лінію з кроком вздовж напрямку поширення хвилі  $\lambda_\parallel = 2\pi / K$ . Оскільки при збільшенні координати  $z$  вектор  $\vec{E}_\perp$  повертається проти годинникової стрілки (ліворуч на рис. 3.2.2), кажуть, що така хвиля має *ліву кругову поляризацію*.

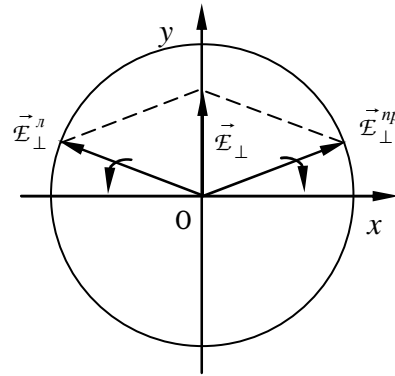
Якщо, навпаки,  $\phi_C - \phi_A = \pi / 2$ , напрямок обертання вектора  $\vec{E}_\perp$  змінюється на протилежний. Відповідно хвилю, вектор  $\vec{E}_\perp$  якої обертається за годинниковою стрілкою, називають хвилею з *правою круговою поляризацією*.

Відмітимо, що плоску хвилю з лінійною поляризацією можна представити у вигляді суперпозиції двох плоских хвиль, кожна з яких має однакові амплітуди та протилежні напрямки обертання вектора  $\vec{E}_\perp$  (рис. 3.2.3). Тобто, лінійно поляризована хвиля є еквівалентом суперпозиції двох хвиль однакової амплітуди, одна з яких має ліву кругову поляризацію, а інша – праву кругову поляризацію.

В загальному випадку і амплітуда, і напрямок вектора  $\vec{E}_\perp$  не залишаються сталими, а змінюються у просторі та в часі. Хвилю такого типу називають *еліптично поляризованою*. Її можна представити як суперпозицію двох хвиль з різними амплітудами, одна з яких має ліву кругову поляризацію, а інша – праву кругову поляризацію, або як суперпозицію хвиль з лінійною та круговою поляризаціями. В останньому випадку, очевидно, еліптично поляризована хвиля може бути еквівалентом суперпозиції трьох хвиль з круговою поляризацією, дві з яких мають однаковий напрямок обертання векторів поля, а інша – протилежний.

### 3.3. Стоячі хвилі

До цього часу властивості падаючих та відбитих плоских хвиль



**Рис. 3.2.3.** Представлення лінійно поляризованої хвилі ( $\vec{E}_\perp$ ) у вигляді суперпозиції хвилі з лівою круговою поляризацією ( $\vec{E}_\perp^l$ ) та хвилі з правою круговою поляризацією ( $\vec{E}_\perp^{np}$ )

розглядалися окремо. Однак, не важко впевнитись, що при зміні напрямку, в якому поширюється хвиля, на протилежний, пряма хвиля перетворюється у зворотну, а зворотна – в пряму (див., наприклад, (3.1.18) та (3.1.20)). Отже, ці хвилі мають однакові фізичні властивості.

Раніше повний розв'язок рівнянь (3.1.4)–(3.1.5) був представлений у вигляді суперпозиції падаючих та відбитих хвиль з різними амплітудами (див. (3.2.6)). Зараз, припустимо, що амплітуди цих хвиль є однаковими, тобто, наприклад, для хвилі (3.1.9)–(3.1.10) виконується рівність  $A = B$ . З урахуванням цього вирази (3.1.9)–(3.1.10) приймають вигляд

$$\begin{aligned} E_x &= A(e^{iKz} + e^{-iKz}) = 2A \cos(Kz), \\ H_y &= \frac{A}{Z}(e^{iKz} - e^{-iKz}) = i \frac{2A}{Z} \sin(Kz). \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Застосовуючи до (3.3.1) формули переходу (2.7.4), одержимо миттєві значення векторів напруженості поля

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x(z, t) &= 2A_m \cos(Kz) \cos(\omega t + \varphi_A), \\ \mathcal{H}_y(z, t) &= \frac{2A_m}{Z} \sin(Kz) \sin(\omega t + \varphi_A). \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Амплітудні множники  $\cos(Kz)$  та  $\sin(Kz)$  у (3.3.2) можуть приймати як додатні так і від'ємні значення, тоді як амплітуда хвилі за своїм змістом повинна бути величиною невід'ємною. Виходячи з цих міркувань, вирази (3.3.2) можна перетворити таким чином, щоб вони в явному вигляді враховували знак  $\cos(Kz)$  та  $\sin(Kz)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x(z, t) &= 2A_m |\cos(Kz)| \cos(\omega t + \varphi_A + \pi\delta), \\ \mathcal{H}_y(z, t) &= \frac{2A_m}{Z} |\sin(Kz)| \sin(\omega t + \varphi_A + \pi\delta). \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

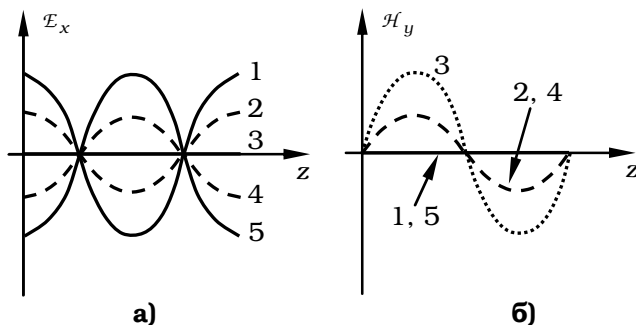
Безрозмірна величина  $\delta$  в (3.3.3), визначена як

$$\delta = \begin{cases} 0, & \cos(Kz) \geq 0, \\ 1, & \cos(Kz) < 0. \end{cases}$$

Вона враховує зміну знаку проекцій напруженостей поля при різних значеннях  $z$ .

Виходячи з (3.3.3) електромагнітне поле хвилі не переміщується в просторі, а «стоїть» на місці (звідки і походить назва «стояча хвиля»). Дійсно, координата  $z$  в (3.3.3) впливає лише на амплітуду поля, але не впливає на його фазу, і, отже, фазова швидкість хвилі  $v_\phi = 0$ . Така хвиля поширюватись в просторі не може.

Що ж тоді відбувається в точці з фіксованою координатою  $z$ ? Від-



**Рис 3.3.1. Залежність електричного поля (а) та магнітного поля (б) від координати  $z$  в різні моменти часу: 1 –  $\omega t = 0$ ; 2 –  $\omega t = \pi / 4$ ; 3 –  $\omega t = \pi / 2$ ; 4 –  $\omega t = 3\pi / 4$ ; 5 –  $\omega t = \pi$**

бувають періодичні зміни електромагнітного поля в часі – його коливання. Електромагнітне поле пульсує з частотою  $\nu = \omega / 2\pi$  та амплітудою  $2A_m |\cos(Kz)|$  (електричне поле) або  $\frac{2A_m}{Z} |\sin(Kz)|$  (магнітне поле) (рис. 3.3.1). В точках, де амплітуда коливань електричного поля обертається на

нуль, фаза коливань стрибкоподібно змінюється на  $\pi$  (рис. 3.3.2).

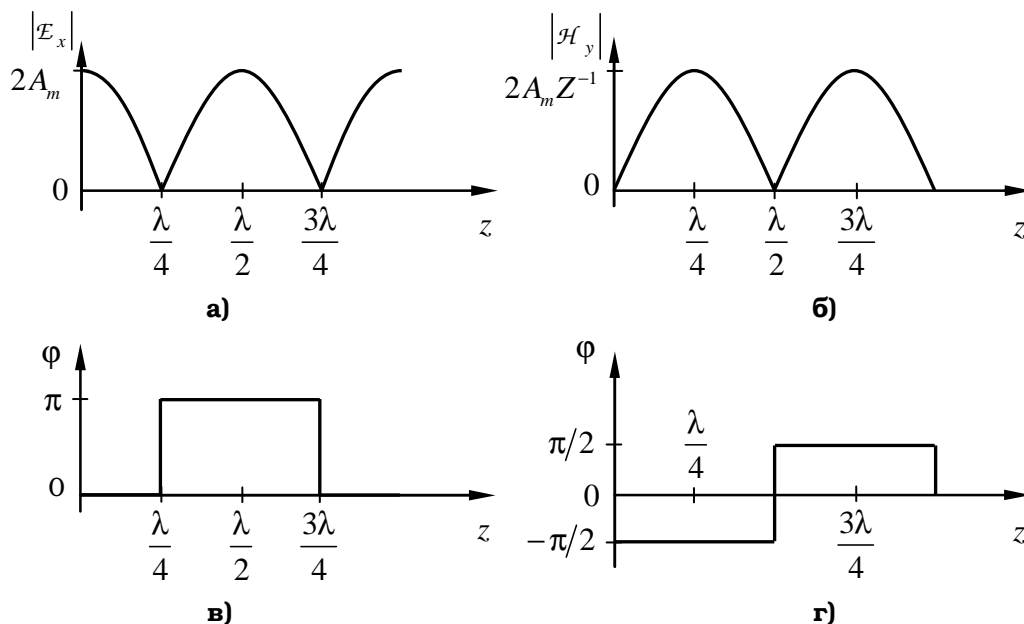
Розподіл амплітуди хвилі в просторі має періодичний характер і являє собою послідовність максимумів і мінімумів, що чергуються між собою при зміні координати  $z$ . Мінімуми на кривих  $E_x(z, t)$ ,  $H_y(z, t)$  називаються *вузлами*, а максимумами – *пучностями поля*. Координати вузлів та пучностей можна легко знайти з (3.3.3), якщо взяти до уваги співвідношення (3.1.16) між хвильовим числом  $K$  та довжиною хвилі  $\lambda$ . З рис. 3.3.2 видно, що вузли електричного поля розташовані в точках  $z = (2N + 1)\frac{\lambda}{4}$ , а пучності – в точках  $z = N\frac{\lambda}{2}$ , де  $N$  – довільне ціле число. Для магнітного поля положення вузлів та пучностей відповідно визначаються як  $z = N\frac{\lambda}{2}$  та  $z = (2N + 1)\frac{\lambda}{4}$ .

З формул (3.3.3) випливає, що положення вузлів та пучностей електричного та магнітного полів визначається лише добутком  $Kz$  і не є функцією часу  $t$ . Така хвиля, вузли та пучності якої не змінюють свого положення в просторі з часом («стоять на місці»), називається *стоячою хвилею*.

Розглянемо тепер енергетичні характеристики стоячої хвилі (3.3.3). Миттєве значення вектора Умова-Пойнтинга такої хвилі визначається як

$$\vec{\zeta} = \vec{e}_z E_x H_y = \vec{e}_z \frac{4A_m^2}{Z} |\cos(Kz)| |\sin(Kz)| \cos(\omega t + \varphi_A + \pi\delta) \sin(\omega t + \varphi_A + \pi\delta). \quad (3.3.4)$$

Середнє значення цього вектора за період коливань  $T = 2\pi / \omega$  дорів-



**Рис. 3.3.2. Залежність амплітуди і фази напруженостей електричного (а, в) та магнітного (б, г) полів від координати  $z$  для стоячої хвилі**

нює нулю, оскільки

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_A + \pi\delta\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_A + \pi\delta\right) dt = 0. \quad (3.3.5)$$

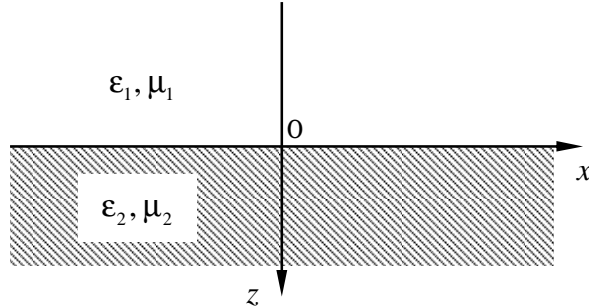
Отже стояча хвиля не переносить енергію. Фізично це зрозуміло, оскільки стояча хвиля є суперпозицією двох однорідних плоских хвиль з однаковими амплітудами, які поширюються в протилежних напрямках. Енергія, що переноситься однією з цих хвиль за період коливань в напрямку  $+z$  повністю компенсується енергією, яку переносить інша хвиля за той же період часу в напрямку  $-z$ . Таким чином, в середньому потік енергії виявляється рівним нулю.

### 3.4. Нормальне падіння плоскої хвилі на плоску границю розділу двох середовищ

Найбільш простою граничною електродинамічною задачею є задача про нормальне падіння плоскої електромагнітної хвилі на плоску границю розділу двох середовищ з відносними проникностями  $\epsilon_1, \mu_1$  та  $\epsilon_2, \mu_2$  (рис. 3.4.1). Її розгляд почнемо з того, що введемо прямокут-

ну декартову систему координат  $x, y, z$  таким чином, щоб напрямок осі  $z$  співпадав з напрямком поширення падаючої хвилі ( $+z$ ).

Площина розділу середовищ ( $z = 0$ ) поділяє увесь простір на дві області – область 1, яка заповнена середовищем з проникностями  $\epsilon_1, \mu_1$  та область 2, в якій діелектрична та магнітна проникності, відповідно, дорівнюють  $\epsilon_2, \mu_2$ . Для спрощення



**Рис. 3.4.1. Нормальне падіння однорідної плоскої електромагнітної хвилі на плоску границю розділу двох середовищ (при  $z = 0$ ) з параметрами  $\epsilon_1, \mu_1$  та  $\epsilon_2, \mu_2$**

будемо вважати обидва середовища лінійними, однорідними та ізоτροпними. Також припустимо, що джерела електромагнітного поля знаходяться настільки далеко від площини розділу середовищ  $z = 0$ , що їх наявністю можна знехтувати і, відповідно, густини стороннього струму та заряду покласти рівними нулю.

Раніше було показано, що електричне поле однорідної плоскої хвилі є розв'язком рівняння Гельмгольца (3.1.8) або (3.2.1). Властивості однорідних плоских хвиль з компонентами поля  $E_x, H_y$  та  $E_y, H_x$  однакові, тому для визначення обмежимося, наприклад, розглядом тільки першої з цих хвиль. Для кожної з областей запишемо скалярне рівняння Гельмгольца для  $x$ -складової електричного поля

$$\Delta E_{1x} + K_1^2 E_{1x} = 0, \quad \Delta E_{2x} + K_2^2 E_{2x} = 0, \quad (3.4.1)$$

де індекс 1 відповідає першій області, а індекс 2 – другій області;  $K_1 = k_0 \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$ ,  $K_2 = k_0 \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$ .

Розв'язки рівнянь (3.4.1) представимо у вигляді

$$E_{x1}(z) = A e^{iK_1 z} + B e^{-iK_1 z}, \quad E_{2x}(z) = C e^{iK_2 z} + D e^{-iK_2 z}, \quad (3.4.2)$$

де  $A, B, C, D$  – довільні сталі. Ненульові складові  $H_y$  магнітного поля цих хвиль можуть бути знайдені за допомогою формули (3.1.7). Відповідно повне поле, яке включає в себе  $x$ -складову електричного та  $y$ -складову магнітного полів, в першій області буде мати вигляд

$$E_{1x}(z) = A e^{iK_1 z} + B e^{-iK_1 z}, \quad H_{1y} = \frac{1}{Z_1} (A e^{iK_1 z} - B e^{-iK_1 z}), \quad (3.4.3)$$

а в другій області

$$E_{2x}(z) = C e^{iK_2 z} + D e^{-iK_2 z}, \quad H_{2y} = \frac{1}{Z_2} (C e^{iK_2 z} - D e^{-iK_2 z}), \quad (3.4.4)$$

де  $Z_1 = Z_0 \sqrt{\mu_1 / \epsilon_1}$  – хвильовий опір першого середовища,  $Z_2 = Z_0 \sqrt{\mu_2 / \epsilon_2}$  – хвильовий опір другого середовища.

При записі виразів (3.4.3)–(3.4.4) не робилось ніяких припущень стосовно структури поля в першій та другій областях. Зрозуміло, однак, що при падінні хвилі на границю розділу середовищ повинні утворитись дві нові хвилі – відбита хвиля, що буде поширюватись в напрямку  $-z$ , та хвиля, що пройшла, яка буде поширюватись в тому ж напрямку, що і падаюча хвиля. В другій області відбита хвиля, що мала б поширюватись в напрямку  $-z$ , буде відсутня, тому що в області  $z > 0$  немає границі розділу середовищ або іншої перешкоди, на якій могла б виникнути ця хвиля. Область  $z > 0$  є однорідною і, отже, в ній може поширюватись тільки хвиля, поля якої залежать від координати  $z$  по закону  $e^{iK_2 z}$ . Таким чином, вирази (3.4.4) спрощуються і набувають вигляду

$$E_{2x} = C e^{iK_2 z}, \quad H_{2y} = \frac{C}{Z_2} e^{iK_2 z}. \quad (3.4.5)$$

На границі розділу середовищ при  $z = 0$  повинні виконуватись умови неперервності тангенціальних до площини  $z = 0$  складових електричного та магнітного полів

$$E_{1x}|_{z=0} = E_{2x}|_{z=0}, \quad H_{1y}|_{z=0} = H_{2y}|_{z=0}, \quad (3.4.6)$$

які після підстановки в них виразів (3.4.3), (3.4.5) зводяться до рівнянь

$$A + B = C, \quad A - B = \frac{Z_1}{Z_2} C. \quad (3.4.7)$$

З цих рівнянь випливає, що амплітуди хвиль  $A, B, C$  в кожній з областей є не абсолютними величинами, а відносними. Дійсно, рівняння (3.4.7) будуть виконуватись, навіть якщо одну з амплітуд  $A, B$  або  $C$  помножити на постійний множник, тим самим нормуючі всі стали  $A, B, C$ .

Скористаємось цією особливістю: поділимо обидва рівняння (3.4.7) на комплексну амплітуду  $A$  – тим самим ми припустимо, що падаюча хвиля має одиничну амплітуду. Тоді величину  $R = B / A$ , яка визначає амплітуду відбитої хвилі по відношенню до амплітуди падаючої хвилі природно назвати *коефіцієнтом відбиття по електричному полю*. Відповідно *коефіцієнт відбиття по магнітному полю* буде дорівню-



вати  $R_m = -R$ . Знак мінус у виразі для  $R_m$  означає, що при зміні напрямку поширення хвилі, електричне поле не змінює своєї орієнтації в просторі, а напрямок магнітного поля змінюється на протилежний. Величина  $T = C / A$  є коефіцієнтом проходження по електричному полю, а коефіцієнт проходження по магнітному полю  $T_m$  відрізняється від  $T$  додатковим множником  $Z_1 / Z_2$ :  $T_m = T(Z_1 / Z_2)$ .

З урахуванням введених позначень система рівнянь (3.4.7) набуде вигляду

$$1 + R = T, \quad 1 - R = \frac{Z_1}{Z_2} T, \quad (3.4.8)$$

звідки

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \quad T = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}, \quad R_m = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_2 + Z_1}, \quad T_m = \frac{2Z_1}{Z_2 + Z_1}. \quad (3.4.9)$$

Важливо підкреслити, що не зважаючи на зроблені раніше припущення, формули (3.4.9) мають загальний характер. Вони є аналогами формул для коефіцієнтів проходження та відбиття для хвиль, що проходять крізь з'єднання двох ліній передачі з різними хвильовими опорами  $Z_1$  та  $Z_2$ . Слід, однак, зауважити, що при розгляді загальної задачі, коли плоска хвиля падає під довільним кутом на границю розділу середовищ, використання поняття хвильового опору (імпедансу) викликає ряд ускладнень (це буде показано в § 3.6).

Амплітудні коефіцієнти відбиття  $R$  та проходження  $T$  пов'язані між собою співвідношеннями (3.4.8), які нагадують закон збереження енергії, хоча, строго кажучи, не відповідають йому. По-перше, в цей закон повинні входити не амплітудні, а енергетичні (квадратичні) величини. По-друге, коефіцієнти  $R$  та  $T$  повинні бути не комплексними, а дійсними невід'ємними величинами (якщо електрофізичні параметри середовищ будуть комплексні, то і коефіцієнти відбиття та проходження також, в загальному випадку, будуть комплексними величинами).

З аналізу першої формули (3.4.9) випливає, що відбиття відсутнє ( $R = 0$ ), а коефіцієнт проходження відповідно максимальний ( $T = 1$ ), коли  $Z_1 = Z_2$ , тобто за умови, що параметри обох середовищ пов'язані між собою співвідношенням

$$\frac{\mu_1}{\epsilon_1} = \frac{\mu_2}{\epsilon_2}. \quad (3.4.10)$$

Якщо припустити, що першим середовищем є вакуум, або сухе повітря, де  $\epsilon_1 = \mu_1$ , то при умові  $\epsilon_2 = \mu_2$  від границі розділу середовищ (середовище з параметрами  $\epsilon_2, \mu_2$  – вакуум) однорідні плоскі електрома-

гнітні хвилі відбиватись не будуть.

Уявимо собі об'єкт з такої речовини, який розміщений у просторі таким чином, що електромагнітні хвилі завжди падають на нього нормально до його поверхні. Якби положення такого об'єкта відслідковувалось за допомогою радіолокаційних методів, тобто шляхом опромінення об'єкта електромагнітними хвилями і потім аналізу відбитого від об'єкта сигналу, то при виконанні умов  $\epsilon_2 = \mu_2$  об'єкт був би «невидимим» для радіохвиль. Його неможливо було б побачити на екрані радіолокатора.

Умови (3.4.10) широко використовуються для пошуку та створення слабковідбивних матеріалів в мікрохвильовому діапазоні. За допомогою цих покриттів вдається частково (в деяких випадках майже зовсім) зменшити «видимість» об'єктів для радіохвиль. Це широко застосовується в збройних силах розвинених країн світу для збільшення бойової ефективності військових літаків, кораблів, сухопутної техніки.

Ще один метод зменшення відбиття від другого середовища полягає у розміщенні між ним та першим середовищем тонкого шару діелектрика з діелектричною проникністю  $\epsilon = \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}$  та товщиною  $d = \lambda / 4$ ;  $\lambda$  – довжина електромагнітної хвилі в проміжному діелектричному шарі. Цей метод широко застосовується в оптиці і зветься «просвітлення оптики». Ми не доводимо його ефективність для зменшення відбиття електромагнітних хвиль, а також не виводимо формул для величин  $\epsilon$  та  $d$ , тому що ця задача детально розглядається в курсі оптики. При необхідності зацікавлений читач може звернутись до відповідної літератури, наприклад, [1] або вивести ці формули сам, користуючись вище викладеним матеріалом.

На відміну від першого методу, метод «просвітлення оптики» є резонансним. При фіксованій товщині проміжного шару  $d$  він діє лише в певному вузькому діапазоні довжин хвиль в околі довжини хвилі  $\lambda = 4d$ .

### 3.5. Узагальнені плоскі хвилі

До цього часу вважалось, що вісь  $z$  декартової системи координат  $x, y, z$  співпадає з напрямком поширення хвилі (див. рис. 3.1.1), тобто хвильовий вектор хвилі

$$\vec{K} = \vec{e}_z K. \quad (3.5.1)$$

Однак, якщо розглянути декілька хвиль з різними напрямками поширення, умову (3.5.1) вдасться задовольнити тільки для однієї з них.

Інші хвилі будуть поширюватись, в загальному випадку, під довільним напрямком по відношенню до осей системи координат  $x, y, z$ . Такі плоскі хвилі з довільним напрямком поширення називають *узагальненими плоскими хвилями*.

Очевидно, що шляхом повороту системи координат можна добитись того, що для будь-якої однорідної плоскої хвилі незалежно від напрямку її поширення буде виконуватись співвідношення (3.5.1). Це означає, що фізичні властивості узагальнених плоских хвиль аналогічні властивостям однорідних плоских хвиль, що поширюються вздовж осі  $z$ .

Розглянемо процес поширення узагальненої однорідної плоскої хвилі в припущенні, що джерела поля відсутні ( $\vec{j}_{cm} = 0$ ,  $\rho_{cm} = 0$ ). Нехай хвиля поширюється під довільним напрямком до осей системи координат  $x, y, z$ . Введемо нову систему координат  $\xi, \eta, \zeta$ , вісь  $\zeta$  якої співпадає з напрямком поширення хвилі (рис. 3.5.1). Хвильовий вектор узагальненої плоскої хвилі в системі координат  $\xi, \eta, \zeta$  буде мати вигляд

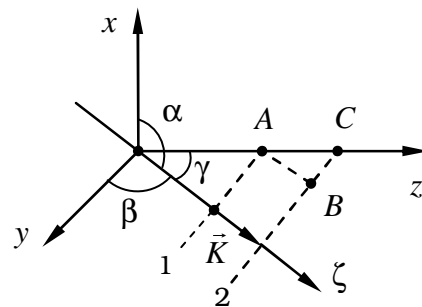
$$\vec{K} = \vec{e}_\zeta K, \quad (3.5.2)$$

де  $\vec{e}_\zeta$  – одиничний вектор (орт) осі  $\zeta$ .

Введемо також радіус-вектор  $\vec{\zeta}$ , який визначає положення будь-якої точки з координатою  $\zeta$  на осі  $\zeta$ :

$$\vec{\zeta} = \vec{e}_\zeta \zeta. \quad (3.5.3)$$

В системі координат  $\xi, \eta, \zeta$  електромагнітне поле узагальненої однорідної плоскої хвилі є функцією тільки координати  $\zeta$ , причому по аналогії з виразами (3.1.9)–(3.1.10) ця залежність у випадку прямої хвилі описується експоненціальною функцією  $e^{iK\zeta}$ . З урахуванням (3.5.2)–(3.5.3) показник цієї експоненти можна представити за допомогою скалярного добутку векторів  $\vec{K}$  та  $\vec{\zeta}$  як  $iK\zeta = i(\vec{K} \cdot \vec{\zeta})$ . Отже, будь-яка поперечна (до напрямку поширення  $\zeta$ ) компонента поля  $F$  узагальненої плоскої хвилі може бути представлена у вигляді



**Рис. 3.5.1 Напрямок поширення  $\zeta$  узагальненої однорідної плоскої хвилі по відношенню до системи координат  $x, y, z$ : 1, 2 – положення фронту хвилі в моменти часу  $t$  та  $t + \Delta t$**

$$F(\zeta) = C e^{i(\vec{K} \cdot \vec{\zeta})}, \quad (3.5.4)$$

де  $F = E_\zeta, E_\eta, H_\zeta, H_\eta$ ,  $C$  – довільна стала.

В системі координат  $x, y, z$  вектори  $\vec{K}$  та  $\vec{\zeta}$  визначаються виразами

$$\vec{K} = \vec{e}_x K_x + \vec{e}_y K_y + \vec{e}_z K_z, \quad \vec{\zeta} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z, \quad (3.5.5)$$

де

$$K_x = K \cos \alpha, \quad K_y = K \cos \beta, \quad K_z = K \cos \gamma \quad (3.5.6)$$

– проєкції хвильового вектора на осі координат  $x, y, z$ , а кути  $\alpha, \beta, \gamma$  визначають напрямки осі  $\zeta$  (див. рис. 3.5.1). Завдяки співвідношенню  $K^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2$  направляючі косинуси  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  виявляються пов'язаними співвідношенням

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Підставляючи формули (3.5.5)–(3.5.6) у (3.5.4), одержимо загальний вираз для комплексних амплітуд складових електромагнітного поля узагальненої плоскої хвилі в системі координат  $x, y, z$ :

$$F(x, y, z) = C e^{iK(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)}. \quad (3.5.7)$$

Перейдемо від комплексних амплітуд (3.5.7) до дійсних величин за допомогою правила (2.7.4). Наприклад, якщо під функцією  $F(x, y, z)$  розуміти складову  $E_x$  електричного поля, з (3.5.7) та (2.7.4) одержимо

$$E_x = C_m \cos[\omega t - K(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) + \phi_0],$$

де  $C_m$  – довільна дійсна амплітуда,  $\phi_0$  – початкова фаза хвилі. Згідно з цим виразом положення хвильового фронту узагальненої плоскої хвилі в системі координат  $x, y, z$  визначається рівнянням

$$\omega t - K(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) + \phi_0 = \text{const}. \quad (3.5.9)$$

Продиференціюємо його по часу  $t$ :

$$\omega - K \left( \frac{dx}{dt} \cos \alpha + \frac{dy}{dt} \cos \beta + \frac{dz}{dt} \cos \gamma \right) = 0. \quad (3.5.10)$$

Похідні  $dx/dt, dy/dt, dz/dt$ , які входять в одержаний вираз, є  $x$ -,  $y$ - та  $z$ -складовими фазової швидкості  $\vec{v}_\phi$  узагальненої плоскої хвилі. Виходячи з (3.5.10) вектор фазової швидкості записується у вигляді

$$\vec{v}_\phi = \vec{e}_x v_{\phi,x} + \vec{e}_y v_{\phi,y} + \vec{e}_z v_{\phi,z}, \quad (3.5.11)$$

де  $v_{\phi,x} = u / \cos \alpha, v_{\phi,y} = u / \cos \beta, v_{\phi,z} = u / \cos \gamma$  – проєкції вектора фазової швидкості на осі системи координат,  $u = \omega / K$  – швидкість світла в середовищі. Оскільки значення направляючих косинусів завжди не

перевищують одиниці, очевидно, що швидкість переміщення хвильового фронту вздовж осей системи координат завжди більша або дорівнює фазовій швидкості хвилі  $u$  в напрямку її поширення. За певних умов складові фазової швидкості  $v_{\phi,x}, v_{\phi,y}, v_{\phi,z}$  можуть стати навіть більшими за швидкість світла в вакуумі  $c$ . Це, однак, не протирічить теорії відносності, оскільки при переміщенні хвильового фронту не переноситься енергія і не передається інформація.

Формулу (3.5.11) можна одержати й іншим чином. Нехай, наприклад, хвильовий фронт узагальненої плоскої хвилі переміщується з площини 1 у площину 2 за час  $\Delta t = AB / u$  (див. рис. 3.1.5), де  $u$  – швидкість світла в середовищі. Тоді швидкість переміщення хвильового фронту вздовж осі  $z$  дорівнює  $AC / \Delta t = u / \cos \gamma$ . Узагальнюючи цей результат на випадок тривимірного руху, приходимо до виразу (3.5.11).

Формула (3.5.11) для фазової швидкості узагальненої плоскої хвилі складніша за формулу (3.1.19) для однорідної плоскої хвилі, що поширюється в напрямку  $+z$ . Може здатись, що хвильовий фронт узагальненої хвилі має більш складну структуру ніж хвильовий фронт «звичайної» однорідної плоскої хвилі. Певна річ, це не так! Бо якщо ми перейдемо з системи координат  $x, y, z$  в систему координат  $\xi, \eta, \zeta$  узагальнена плоска хвиля стане «звичайною» однорідною плоскою хвилею, хвильовий фронт якої є площиною. Отже, хвильовий фронт узагальненої однорідної плоскої хвилі також є площиною незалежно від напрямку її поширення. «Складність» формули (3.5.11) пояснюється лише тим, що ця площина, переміщуючись у просторі, перетинає осі декартової системи координат  $x, y, z$  в різних точках завдяки чому і з'являється «складна» залежність від усіх трьох декартових координат.

Швидкість переносу енергії  $\vec{v}_e$  узагальненою плоскою хвилею знайдемо за допомогою (3.1.24) як

$$\vec{v}_e = \frac{\vec{\zeta}}{w}, \quad (3.5.12)$$

де  $\vec{\zeta}$  – вектор Умова-Пойнтинга

$$\vec{\zeta} = \vec{e}_x \zeta_x + \vec{e}_y \zeta_y + \vec{e}_z \zeta_z \quad (3.5.13)$$

з проекціями

$$\zeta_x = \zeta \cos \alpha, \quad \zeta_y = \zeta \cos \beta, \quad \zeta_z = \zeta \cos \gamma. \quad (3.5.14)$$

Підставляючи (3.5.13)–(3.5.14) у (3.5.12) та враховуючи, що  $\zeta / w = u$ , одержуємо

$$\vec{v}_e = \vec{e}_x v_{e,x} + \vec{e}_y v_{e,y} + \vec{e}_z v_{e,z}, \quad (3.5.15)$$

де  $v_{e,x} = u \cos \alpha$ ,  $v_{e,y} = u \cos \beta$ ,  $v_{e,z} = u \cos \gamma$  – проекції швидкості переносу енергії  $\vec{v}_e$  на осі координат. Як бачимо, жодна з цих проекцій не перевищує швидкості світла  $u$  в середовищі і, отже, ніякі постулати теорії відносності при поширенні узагальненої плоскої хвилі не порушуються.

З (3.5.11) та (3.5.15) випливає, що фазова швидкість узагальненої плоскої хвилі та її швидкість переносу енергії пов'язані між собою співвідношенням

$$\vec{v}_\phi \cdot \vec{v}_e = u^2, \quad (3.5.16)$$

яке виконується для консервативних середовищ, в яких відсутня дисперсія. Співвідношення (3.5.16) не залежить від напрямку поширення хвилі, а тому за його допомогою можна легко знайти одну з швидкостей, якщо відома інша.

### 3.6. Похиле падіння плоскої хвилі на плоску границю розділу двох середовищ

Задача про падіння плоскої електромагнітної хвилі на плоску границю розділу двох середовищ вже була розв'язана раніше для частинного випадку, коли хвиля поширювалась по нормалі до границі розділу середовищ. Однак, в реальних системах найчастіше реалізується випадок, коли електромагнітні хвилі падають на поверхню розділу середовищ під довільним кутом. При цьому ті співвідношення, які були одержані для випадку нормального падіння хвилі, загалом кажучи, змінюються і повинні бути уточнені. В цьому параграфі узагальнимо отримані в § 3.4 результати, а також одержимо декілька нових важливих співвідношень, які будуть використовуватись в подальшому.

Введемо прямокутну декартову систему координат  $x, y, z$  таким чином, щоб площина  $z = 0$  співпадала з границею розділу середовищ, а вісь  $z$  цієї системи координат була направлена всередину другого середовища (рис. 3.6.1). Площина  $z = 0$  поділяє весь простір на дві частини – область 1, яка заповнена середовищем з діелектричною та магнітною проникностями  $\epsilon_1, \mu_1$  та область 2, в якій ці проникності дорівнюють  $\epsilon_2, \mu_2$ . Обидва ці середовища будемо вважати лінійними однорідними та ізотропними.

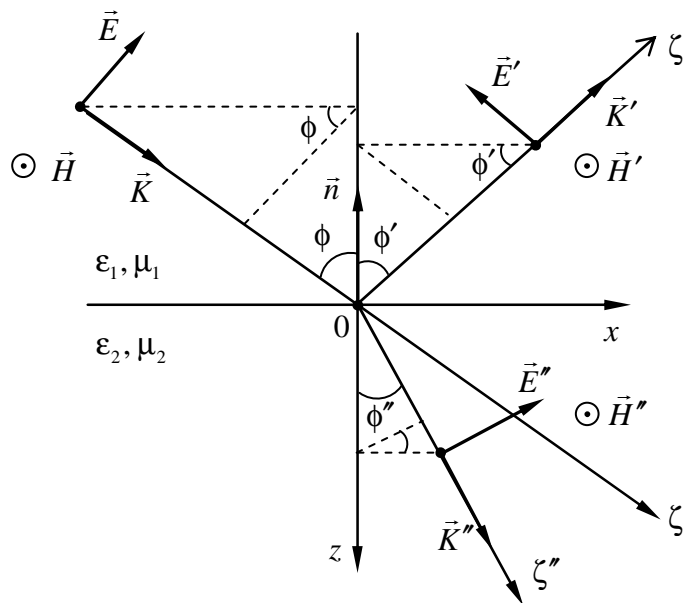
Позначимо напрямок поширення падаючої плоскої хвилі як  $\vec{e}_\zeta$  і

проведемо відповідну вісь  $\zeta$  через початок системи координат (див. рис. 3.6.1). В § 3.4 було показано, що при нормальному падінні плоскої хвилі на поверхню розділу середовищ виникають дві хвилі – відбита хвиля та хвиля, що пройшла. Очевидно, що при похилому падінні плоскої хвилі також виникнуть ці хвилі. Відмітимо, що хвилю, яка пройшла в друге середовище, за традицією називають *заломленою* хвилею, хоча при своєму поширенні вона не обов'язково повинна заломлюватись (детально це буде з'ясовано далі). Напрямки поширення відбитої та заломленої хвиль позначимо як  $\vec{e}_\zeta$  та  $\vec{e}_{\zeta'}$  (див. рис. 3.6.1). Введемо вектор нормалі до поверхні  $\vec{n} = -\vec{e}_z$ , який направлений всередину першого середовища.

Площину, в якій лежить падаючий промінь (вектор Умова-Пойнтинга падаючої хвилі) та нормаль до поверхні розділу середовищ назовемо *площиною падіння*. Для обраної нами системи координат це площина  $xz$ . *Кутом падіння*  $\phi$  будемо називати кут між напрямком падаючого променя  $\vec{e}_\zeta$  та вектором нормалі до поверхні  $\vec{n}$ , а кути  $\phi'$  та  $\phi''$ , які визначають напрямки промінів  $\vec{e}_{\zeta'}$ ,  $\vec{e}_{\zeta''}$  відносно вектора нормалі, назовемо *кутом відбиття* та *кутом заломлення* хвилі відповідно.

Значення кожного з цих кутів в більшості випадків не перевищує  $\pi/2$ . Виключенням з цього правила є середовища з від'ємною дисперсією, де дійсні частини діелектричної та магнітної проникності можуть приймати від'ємні значення ( $\epsilon', \mu' < 0$ ).

При розгляді задачі про похиле падіння плоскої хвилі на границю розділу середовищ важливу



**Рис. 3.6.1. Похиле падіння плоскої електромагнітної хвилі на плоску границю розділу двох середовищ**

роль відіграє її поляризація. В загальному випадку поставлена задача розгалужується на дві. В кожній з цих часткових задач поляризація падаючої плоскої хвилі по відношенню до площини падіння різна, а саме:

1. Електричне поле падаючої хвилі лежить в площині падіння, а магнітне поле перпендикулярне до цієї площини і, відповідно, паралельне до границі розділу середовищ (див. рис. 3.6.1). Електричне поле має ненульові складові  $E_x, E_z$ , а магнітне поле – єдину складову  $H_y$ . Така хвиля називається хвилею з *електричною поляризацією* ( $E$ -поляризованою хвилею), або хвилею з *паралельною поляризацією* (класифікація визначається напрямком вектора  $\vec{E}$  по відношенню до площини падіння). В оптиці така хвиля називається хвилею з  $p$ -поляризацією.

2. Електричне поле падаючої хвилі перпендикулярне до площини падіння, а магнітне поле лежить в цій площині. Електричне поле має єдину ненульову складову  $E_y$ , а магнітне поле – ненульові складові  $H_x$  та  $H_z$ . Таку хвилю назвемо хвилею з *магнітною поляризацією* ( $H$ -поляризованою хвилею або *перпендикулярно поляризованою* хвилею); аналогічне поняття в оптиці – хвиля з  $s$ -поляризацією.

Розгляд задач про похиле падіння плоскої хвилі з електричною та магнітною поляризацією на плоску границю розділу середовищ дуже подібний. Для будь-якої з цих задач можна одержати всі основні фізичні результати, що звільняє від необхідності розглядати іншу задачу. Тому надалі обмежимося розглядом задачі про похиле падіння плоскої хвилі з електричною поляризацією на плоску границю розділу двох середовищ (див. рис. 3.6.1).

Вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  плоскої хвилі завжди утворюють з напрямком її поширення  $\vec{e}_z$  праву трійку векторів (див. (3.2.8)). Тому, очевидно, що напрямком вектора  $\vec{H}$  для усіх трьох променів<sup>1</sup>  $\zeta, \zeta'$  та  $\zeta''$ , які лежать в площині падіння, буде однаковим, а при відбитті чи заломленні хвилі буде змінюватись лише напрямком вектора електричного поля.

Дійсно, якщо припустити, що при відбитті або заломленні хвилі виникають складові  $H_x, H_z$  магнітного поля, які були відсутні в падаючій хвилі, то на границі розділу середовищ при  $z = 0$  необхідно буде записати для них граничні умови (2.4.5). Оскільки для падаючої хвилі

---

<sup>1</sup> Променем будемо називати лінію, дотична до якої в кожній точці співпадає з напрямком вектора Умова-Пойнтинга. Для плоскої хвилі в лінійному однорідному ізоотропному середовищі ця лінія є прямою.



$H_x = H_z = 0$ , ці граничні умови задовольнятися не будуть. Тобто вектор магнітного поля в усіх областях буде мати лише єдину ненульову складову  $H_y$ . Внаслідок ортогональності векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$ , електричне поле відбитої та заломленої хвилі буде мати лише ненульові компоненти  $E_x, E_z$ .

Отже, при поширенні плоскої хвилі в лінійному однорідному ізо- тропному середовищі може змінюватись лише її амплітуда (якщо се- редовище дисипативне – див. § 3.8) та фаза. Нові складові електрома- гнітного поля, які раніше були відсутні, виникати при цьому не мо- жуть. Таким чином, вектор  $\vec{E}$  при відбитті та заломленні хвилі буде завжди лежати в площині падіння. Отже, при похилому падінні плос- кої хвилі на плоску границю розділу середовищ поляризація відбитої та заломленої хвилі виявляється однаковою з поляризацією падаючої хвилі.

При розв'язанні задачі зручно виразити всі компоненти поля па- даючої хвилі через вектор поля, який має мінімальну кількість нену- льових складових. Для хвилі з електричною поляризацією це буде век- тор магнітного поля з єдиною ненульовою складовою  $H_y$ .

Магнітне поле падаючої хвилі представимо у вигляді

$$H_y = \exp(iK\zeta). \quad (3.6.1)$$

Магнітне поле відбитої та заломленої хвилі відповідно представимо як

$$H'_y = R_m \exp(iK'\zeta'), \quad H''_y = T_m \exp(iK''\zeta''), \quad (3.6.2)$$

де  $R_m$  та  $T_m$  – коефіцієнти відбиття та проходження хвилі по магніт- ному полю. Хвильові числа  $K, K', K''$ , що входять до (3.6.1)–(3.6.2), і описують просторову структуру поля трьох узагальнених плоских хвиль – падаючої, відбитої та заломленої – залежать лише від елект- рофізичних параметрів середовища. Введемо нові хвильові числа  $K_1$  та  $K_2$ , що описують просторову структуру поля плоских хвиль в пер- шому та в другому середовищі

$$K_1 = k_0 \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}, \quad K_2 = k_0 \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}, \quad (3.6.3)$$

тоді  $K = K' = K_1$ ,  $K'' = K_2$ . Одиничні вектори  $\vec{e}_\zeta, \vec{e}_{\zeta'}, \vec{e}_{\zeta''}$  в системі коор- динат  $x, y, z$  представимо так:

$$\vec{e}_\zeta = \vec{e}_x \sin \phi + \vec{e}_z \cos \phi, \quad \vec{e}_{\zeta'} = \vec{e}_x \sin \phi' - \vec{e}_z \cos \phi', \quad \vec{e}_{\zeta''} = \vec{e}_x \sin \phi'' + \vec{e}_z \cos \phi''. \quad (3.6.4)$$

На границі  $z = 0$  електромагнітне поле в обох областях повинно за- довольняти граничні умови (2.4.5), які для ненульових складових по- лів мають вигляд

$$H_y + H'_y = H''_y, \quad E_x + E'_x = E''_x, \quad (3.6.5)$$

де величини без штриха належать падаючій хвилі, з одним штрихом – відбитій хвилі, з двома штрихами – заломленій хвилі.

Розглянемо спочатку першу з цих умов. Підставляючи в неї вирази (3.6.1)–(3.6.2), з урахуванням (3.6.3)–(3.6.4), одержимо

$$\exp(i K_1 x \sin \phi) + R_m \exp(i K_1 x \sin \phi') = T_m \exp(i K_2 x \sin \phi''). \quad (3.6.6)$$

Рівняння (3.6.6) має виконуватись на всій площині  $z = 0$ , при довільному значенні координати  $x$ . Очевидно, що це можливо лише якщо показники експонент в (3.6.6) однакові, тобто

$$i K_1 x \sin \phi = i K_1 x \sin \phi', \quad i K_1 x \sin \phi = i K_2 x \sin \phi''. \quad (3.6.7)$$

З (3.6.7) випливає, що кути  $\phi$ ,  $\phi'$  та  $\phi''$  пов'язані між собою співвідношеннями

$$\phi = \phi', \quad \frac{\sin \phi}{\sin \phi''} = \frac{K_2}{K_1} = \frac{n_{\text{сер}2}}{n_{\text{сер}1}} = n_{\text{сер}21} = \frac{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}, \quad (3.6.8)$$

де  $n_{\text{сер}1}$ ,  $n_{\text{сер}2}$  – показники заломлення першого та другого середовища,  $n_{\text{сер}21} = n_{\text{сер}2} / n_{\text{сер}1}$  – відносний показник заломлення другого середовища по відношенню до першого. Ці співвідношення відомі як *закони Снелліуса*. З них випливає важливий факт – хвиля, що потрапила в друге середовище, не буде заломлюватись – тобто змінювати напрямок свого поширення – якщо  $\phi = 0$  (випадок нормального падіння). Для такої хвилі  $\phi'' = \phi' = \phi = 0$ .

Розглянемо тепер граничні умови для складових електричного поля. Вирази для  $x$ -складових електричного поля визначимо за допомогою першого рівняння (3.1.4) як

$$E_x = \frac{1}{i \omega \epsilon_1 \epsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad E'_x = \frac{1}{i \omega \epsilon_1 \epsilon_0} \frac{\partial H'_y}{\partial z}, \quad E''_x = \frac{1}{i \omega \epsilon_2 \epsilon_0} \frac{\partial H''_y}{\partial z}. \quad (3.6.9)$$

Підставляючи (3.6.9) у (3.6.5), одержуємо

$$\frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial H_y}{\partial z} + \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial H'_y}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial H''_y}{\partial z}. \quad (3.6.10)$$

Враховуючи явний вигляд функцій  $H_y$ ,  $H'_y$ ,  $H''_y$  та те, що (3.6.10) повинно виконуватись при довільному значенні  $x$ , перепишемо це співвідношення та співвідношення (3.6.6) в остаточному вигляді

$$1 + R_m = T_m, \quad \frac{K_1}{\epsilon_1} (1 - R_m) \cos \phi = \frac{K_2}{\epsilon_2} T_m \cos \phi'', \quad (3.6.11)$$

де внаслідок (3.6.8) кут  $\phi'$  був замінений на кут  $\phi$ . Розв'язком рівнянь (3.6.11) є

$$R_m = \frac{\hat{Z}_1 - \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_1}, \quad T_m = \frac{2\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_1}, \quad (3.6.12)$$

де

$$\hat{Z}_1 = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos \phi, \quad \hat{Z}_2 = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \phi''. \quad (3.6.13)$$

Формули (3.6.13) для величин  $\hat{Z}_1$ ,  $\hat{Z}_2$  схожі на вирази для хвильових імпедансів середовищ  $Z_1 = Z_0 \sqrt{\mu_1 / \varepsilon_1}$ ,  $Z_2 = Z_0 \sqrt{\mu_2 / \varepsilon_2}$ , але залежать від кутів падіння та заломлення хвилі. Зрозуміло, що внаслідок цього величини  $\hat{Z}_1$ ,  $\hat{Z}_2$  не є однозначно визначеними, тому термін «хвильовий імпеданс» для них не застосовується.

Розв'язки рівнянь (3.6.11) ідентичні до розв'язків (3.4.9), що були одержані для випадку, коли хвиля поширювалась по нормалі до поверхні розділу середовищ. Дійсно, якщо покласти  $\phi = 0$ , формули (3.6.12) переходять у вирази (3.4.9) для коефіцієнтів відбиття та проходження по магнітному полю. Отже, (3.6.12) коректно описує частинний випадок нормального падіння хвилі на плоску границю двох середовищ.

В § 3.4 було показано, що коефіцієнт відбиття по електричному полю  $R = -R_m$ , а коефіцієнт проходження  $T = (Z_2 / Z_1) T_m$ . Замінюючи в цих виразах  $Z_1$  на  $\hat{Z}_1$  та  $Z_2$  на  $\hat{Z}_2$  одержуємо

$$R = \frac{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1}{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_1}, \quad T = \frac{2\hat{Z}_2}{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_1}. \quad (3.6.14)$$

Співвідношення (3.6.12), (3.6.14) часто представляють у вигляді, в якому фігурують не величини  $\hat{Z}_1$ ,  $\hat{Z}_2$ , а імпеданси  $Z_1$ ,  $Z_2$ . Записані таким чином вони відомі як *формули Френеля*. Для хвилі з електричною (паралельною) поляризацією вони мають вигляд

$$R = \frac{Z_2 \cos \phi'' - Z_1 \cos \phi}{Z_2 \cos \phi'' + Z_1 \cos \phi}, \quad T = \frac{2Z_2 \cos \phi''}{Z_2 \cos \phi'' + Z_1 \cos \phi},$$

$$R_m = \frac{Z_1 \cos \phi - Z_2 \cos \phi''}{Z_2 \cos \phi'' + Z_1 \cos \phi}, \quad T_m = \frac{2Z_1 \cos \phi''}{Z_2 \cos \phi'' + Z_1 \cos \phi}. \quad (3.6.15)$$

Використовуючи принцип дуальності електромагнітного поля, можна, по аналогії з (3.6.15), записати формули Френеля для хвилі з магнітною (перпендикулярною) поляризацією:

$$R = \frac{Z_2 \cos \phi - Z_1 \cos \phi''}{Z_2 \cos \phi + Z_1 \cos \phi''}, \quad T = \frac{2Z_2 \cos \phi}{Z_2 \cos \phi + Z_1 \cos \phi''},$$

$$R_m = \frac{Z_1 \cos \phi'' - Z_2 \cos \phi}{Z_2 \cos \phi + Z_1 \cos \phi''}, \quad T_m = \frac{2Z_1 \cos \phi}{Z_2 \cos \phi + Z_1 \cos \phi''}. \quad (3.6.16)$$

Формули (3.6.16) відрізняються від (3.6.15) перестановкою кутів  $\phi$

та  $\phi'' : \phi \rightleftharpoons \phi''$ . При  $\phi = 0$ , обидва вирази (3.6.15)–(3.6.16) переходять у (3.4.9). Це означає, що при нормальному падінні плоскої хвилі на границю розділу середовищ принципова різниця між хвилями з різною поляризацією зникає. Це є наслідком того, що при нормальному падінні хвилі, площина її падіння стає невизначеною (існує нескінченна кількість таких площин), оскільки вектор Умова-Пойнтинга хвилі лежить на одній прямій з вектором нормалі до границі розділу середовищ. Положення цієї прямої в просторі задається двома точками, в той час як для визначення площини падіння необхідно мати три точки, що не лежать на одній прямій.

При похилому падінні плоскої хвилі на плоску поверхню розділу двох середовищ відбиття від цієї поверхні може бути відсутнім. Але якщо раніше (див. § 3.4) умови рівності нулю коефіцієнта відбиття  $R$  (або  $R_m$ ) зводились до виконання співвідношень між імпедансами середовищ  $Z_1$  та  $Z_2$ , то в задачі про похиле падіння хвилі, вони, крім того, будуть залежати від кута падіння  $\phi$ .

Кут падіння  $\phi_B$ , при якому коефіцієнти відбиття дорівнюють нулю, і відбиття від границі розділу середовищ зникає, називається *кутом Брюстера*. З (3.6.15)–(3.6.16) легко визначити цей кут: для хвилі з електричною поляризацією він дорівнює

$$\phi_B = \arcsin \left( \sqrt{\frac{\mu_2 - \varepsilon_2}{\mu_1 - \varepsilon_1}} \bigg/ \sqrt{\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}} \right), \quad (3.6.17)$$

а для хвилі з магнітною поляризацією

$$\phi_B^m = \arcsin \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_2 - \mu_2}{\varepsilon_1 - \mu_1}} \bigg/ \sqrt{\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 - \mu_1}} \right). \quad (3.6.18)$$

З (3.6.17)–(3.6.18) випливає, що для немагнітних діелектриків ( $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ) при паралельній поляризації падаючої хвилі повне проходження можливе при куті падіння

$$\phi_B = \arctg \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}, \quad (3.6.19)$$

а для хвилі з перпендикулярною поляризацією неможливе зовсім.

Наведемо приклад того як можна використати на практиці умову (3.6.19). Якщо на плоску поверхню немагнітного діелектрика під кутом (3.6.19) падає хвиля, яка є суперпозицією плоских хвиль з електричною та магнітною поляризаціями, то відбивається лише хвиля з магнітною поляризацією, а хвиля з електричною поляризацією повністю проходить крізь границю розділу всередину діелектрика. Цей метод іноді застосовують для розділення хвиль з різними поляризаціями.

З формул (3.6.8) також випливає, що при певному куті падіння плоскої хвилі на границю розділу двох середовищ, після заломлення вона поширюється вздовж поверхні розділу ( $\phi'' = \pi/2$ ). Кут падіння при якому відбувається це явище, називається *кутом повного внутрішнього відбиття*, а саме явище відповідно *повним внутрішнім відбиттям*. Виходячи з (3.6.8) цей кут визначається співвідношенням

$$\phi_{ПВВ} = \arcsin\left(\frac{n_{сеп2}}{n_{сеп1}}\right) = \arcsin n_{сеп21}. \quad (3.6.20)$$

Очевидно, що явище повного внутрішнього відбиття можна спостерігати тільки при падінні хвилі на границю розділу середовищ з боку того середовища, яке має більший показник заломлення. В цьому випадку, якщо кут падіння перевищує кут повного внутрішнього відбиття – заломлений промінь зникає, оскільки умову  $n_{сеп21} > 1$  вже неможливо задовольнити.

Явище повного внутрішнього відбиття широко використовується при побудові пристроїв та ліній передачі НВЧ. В таких системах при виконанні умови

$$\phi > \phi_{ПВВ} \quad (3.6.21)$$

можливе поширення так званих поверхневих хвиль. Дійсно, за умови (3.6.21) другий закон Снелліуса (3.6.8) приймає вигляд

$$\cos \phi'' = \pm i\alpha, \quad (3.6.22)$$

де  $\alpha = \sqrt{\frac{n_{сеп1}^2}{n_{сеп2}^2} \sin^2 \phi - 1}$ . Підставляючи значення  $\cos \phi''$  з (3.6.22) у вираз

для магнітного поля хвилі, що пройшла, одержуємо

$$H_y'' \sim \exp(-K_2 \alpha |z|). \quad (3.6.23)$$

Внаслідок (3.6.7) заломлена хвиля вільно поширюється вздовж осі  $x$ , але амплітуда цієї хвилі спадає за експоненціальним законом при віддаленні від поверхні  $z = 0$ . Така хвиля називається *поверхневою хвилею*, оскільки поле такої хвилі нібито прилипає до поверхні вздовж якої вона поширюється.

Вектор Умова-Пойнтинга поверхневої хвилі згідно (3.6.9), (3.6.23)

$$|\vec{\zeta}| = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\vec{E} \times \vec{H}^*] \sim \exp(-2K_2 \alpha |z|). \quad (3.6.24)$$

З цього виразу випливає, що основна частина енергії поверхневої хвилі локалізована в тонкій області простору, поблизу від поверхні  $z = 0$ .

### 3.7. Неоднорідні плоскі хвилі. ТМ- та ТЕ-хвилі

Проаналізуємо структуру електромагнітного поля, яке виникає при відбитті однорідної плоскої електромагнітної хвилі від плоскої границі розділу двох середовищ при її похилому падінні на цю границю. Розглянемо спочатку випадок хвилі з електричною поляризацією, яка має єдину ненульову складову магнітного поля  $H_y$  (див. рис. 3.6.1).

Згідно з (3.5.4), (3.6.1)–(3.6.2) повне магнітне поле  $\vec{H}$ , яке є сумою магнітних полів падаючої та відбитої хвиль, в області  $z < 0$  (див. рис. 3.6.1) має складові

$$H_x = H_z = 0, \quad H_y(\vec{r}) = \exp(i\vec{K} \cdot \vec{r}) - R \exp(i\vec{K}' \cdot \vec{r}), \quad (3.7.1)$$

де

$$\vec{K} = \vec{e}_z K, \quad \vec{K}' = \vec{e}_z' K, \quad (3.7.2)$$

$K = k_0 \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$ ,  $\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z$  – радіус-вектор. При записі (3.7.1) коефіцієнт відбиття по магнітному полю  $R_m$  був змінений на коефіцієнт відбиття по електричному полю з відповідним знаком ( $-R$ ), оскільки така форма запису поля є традиційною. Підставляючи у (3.7.1)–(3.7.2) вирази (3.6.4) для одиничних векторів  $\vec{e}_z$  та  $\vec{e}_z'$ , та приймаючи до уваги, що  $\phi = \phi'$ , одержуємо для єдиної ненульової складової магнітного поля

$$\begin{aligned} H_y(x, z) &= e^{iK(\vec{e}_x \sin \phi + \vec{e}_z \cos \phi)(\vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z)} - R e^{iK(\vec{e}_x \sin \phi' - \vec{e}_z \cos \phi')(\vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z)} = \\ &= e^{iK(x \sin \phi + z \cos \phi)} - R e^{iK(x \sin \phi - z \cos \phi)}. \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

Функцію  $H_y(x, z)$  можна переписати у вигляді

$$H_y(x, z) = A(z) e^{iKx \sin \phi}, \quad (3.7.4)$$

де

$$A(z) = e^{iKz \cos \phi} - R e^{-iKz \cos \phi} \quad (3.7.5)$$

– змінна амплітуда хвилі. Хвильовий фронт такої хвилі є площиною перпендикулярною до напрямку поширення хвилі  $+x$ . Але ця хвиля вже не є однорідною плоскою хвилею, оскільки її амплітуда приймає різні значення в різних точках хвильового фронту (при різних значеннях  $z$ ). Така хвиля інколи називається *неоднорідною плоскою хвилею*. Очевидно, що неоднорідна плоска хвиля є утворенням двох однорідних плоских хвиль з різними напрямками поширення.

Повздовжню складову електричного поля неоднорідної плоскої хвилі з електричною поляризацією знайдемо підставивши (3.7.3) у (3.6.9):

$$E_x(x, z) = \frac{1}{i\omega\epsilon_1\epsilon_0} \frac{dA(z)}{dz} e^{iKx \sin \phi} = B(z) e^{iKx \sin \phi}, \quad (3.7.6)$$

де

$$B(z) = \frac{K}{\omega\epsilon_1\epsilon_0} (e^{iKz \cos \phi} + R e^{-iKz \cos \phi}) \cos \phi = Z_1 (e^{iKz \cos \phi} + R e^{-iKz \cos \phi}) \cos \phi, \quad (3.7.7)$$

$Z_1 = Z_0 \sqrt{\mu_1 / \epsilon_1}$  – хвильовий опір середовища.

З формул (3.7.4), (3.7.6) випливає, що неоднорідна плоска хвиля з електричною (паралельною) поляризацією має ненульову повздовжню складову ( $E_x$ ) електричного поля, а повздовжня складова її магнітного поля дорівнює нулю. Відповідно, до класифікації хвиль, введеної у § 2.9, така хвиля є *електричною (E-)* хвилею. Її також називають *поперечною магнітною* або *ТМ-хвилею* (від англ. transversal magnetic – поперечна магнітна).

При похилому падінні плоскої хвилі з магнітною поляризацією на плоску границю розділу двох середовищ можна одержати аналогічні результати. Для цього представимо електричне поле такої хвилі у вигляді подібному до (3.7.4):

$$E_x = E_z = 0, \quad E_y(x, z) = C(z) e^{iKx \sin \phi}, \quad (3.7.8)$$

де  $C(z) = e^{iKz \cos \phi} + R e^{-iKz \cos \phi}$  – змінна амплітуда хвилі. Підставляючи (3.7.8) у друге рівняння (3.1.4) знаходимо повздовжню компоненту магнітного поля

$$H_x(x, z) = -\frac{1}{i\omega\mu_1\mu_0} \frac{dC(z)}{dz} e^{iKx \sin \phi} = D(z) e^{iKx \sin \phi}, \quad (3.7.9)$$

де  $D(z) = -\frac{1}{Z_1} (e^{iKz \cos \phi} - R e^{-iKz \cos \phi}) \cos \phi$ . Неоднорідну плоску хвилю з повздовжньою складовою магнітного поля називають *магнітною (H-)* хвилею. Оскільки її електричне поле є поперечним (лежить в площині хвильового фронту) її також називають *поперечною електричною* або *ТЕ-хвилею* (від англ. transversal electric – поперечна електрична).

За традицією напрямок поширення ТМ- та ТЕ-хвиль прийнято обирати таким чином, щоб він співпадав з напрямком осі  $z$  прямокутної декартової або узагальненої циліндричної системи координат. Оскільки така форма представлення поля буде широко використовуватись в подальшому, наведемо явні формули для складових поля ТМ- та ТЕ-хвиль, що поширюються в напрямку  $+z$ .

Введемо прямокутну декартову систему координат  $x, y, z$ , вісь  $z$  якої лежить в площині поверхні розділу середовищ (рис. 3.7.1). В цій системі координат електричне поле ТМ-хвилі має єдину ненульову  $y$ -

складову

$$H_y(x, z) = (e^{iKx \cos \phi} - R e^{-iKx \cos \phi}) e^{iKz \sin \phi}, \quad (3.7.10)$$

вираз для якої легко одержати з (3.7.3) шляхом зміни місцями координат  $x$  та  $z$ . В даному випадку за умови  $\partial / \partial y = 0$  з рівнянь (3.1.1)–(3.1.3) одержуємо вирази для складових електричного поля ТМ-хвилі

$$\begin{aligned} E_x(x, z) &= \frac{1}{i\omega \epsilon_1 \epsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial z} = Z_1 \sin \phi (e^{iKx \cos \phi} - R e^{-iKx \cos \phi}) e^{iKz \sin \phi}, \\ E_z(x, z) &= -\frac{1}{i\omega \epsilon_1 \epsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial x} = -Z_1 \cos \phi (e^{iKx \cos \phi} + R e^{-iKx \cos \phi}) e^{iKz \sin \phi}. \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

У ТЕ-хвилі навпаки електричне поле має єдину ненульову  $y$ -складову

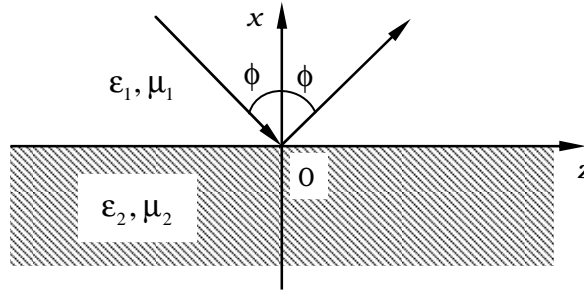
$$E_y(x, z) = (e^{iKx \cos \phi} + R e^{-iKx \cos \phi}) e^{iKz \sin \phi}, \quad (3.7.12)$$

а магнітне поле повністю лежить в площині падіння і має ненульові  $x$ - та  $z$ -складові магнітного поля

$$\begin{aligned} H_x(x, z) &= -\frac{1}{i\omega \mu_1 \mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{Z_1} \sin \phi (e^{iKx \cos \phi} + R e^{-iKx \cos \phi}) e^{iKz \sin \phi}, \\ H_z(x, z) &= \frac{1}{i\omega \mu_1 \mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{1}{Z_1} \cos \phi (e^{iKx \cos \phi} - R e^{-iKx \cos \phi}) e^{iKz \sin \phi}. \end{aligned} \quad (3.7.13)$$

Вирази для цих складових випливають з рівнянь (3.1.1)–(3.1.3) при умові  $\partial / \partial y = 0$ .

Формули (3.7.10)–(3.7.13) для неоднорідних плоских хвиль значно спрощуються у випадку, коли ці хвилі поширюються над поверхнею ідеального провідника. Як відмічалось в § 2.4, на поверхні ідеального провідника відсутні тангенціальні складові електричного поля, а, отже, електричне поле відсутнє і всередині провідника. Внаслідок цього коефіцієнт проходження електромагнітної хвилі  $T$  всередину ідеального провідника дорівнює нулю, а коефіцієнт відбиття  $R$  дорівнює мінус одиниці. Це означає, що при відбитті хвилі від поверхні ідеального провідника її фаза змінюється на  $\pi$ . Підставляючи значення



**Рис. 3.7.1. Утворення неоднорідної плоскої хвилі при похилому падінні однорідної плоскої електромагнітної хвилі на плоску границю розділу середовищ**



$R = -1$  у (3.7.10)–(3.7.13) з урахуванням формул Ейлера

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x, \quad e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x,$$

одержуємо спрощені вирази для складових поля ТМ-хвиль

$$\begin{aligned} H_y(x, z) &= 2 \cos(Kx \cos \phi) e^{iKz \sin \phi}, \\ E_x(x, z) &= 2Z_1 \sin \phi \cos(Kx \cos \phi) e^{iKz \sin \phi}, \\ E_z(x, z) &= -2iZ_1 \cos \phi \sin(Kx \cos \phi) e^{iKz \sin \phi} \end{aligned} \quad (3.7.14)$$

та ТЕ-хвиль

$$\begin{aligned} E_y(x, z) &= 2i \sin(Kx \cos \phi) e^{iKz \sin \phi}, \\ H_x(x, z) &= -\frac{2i}{Z_1} \sin \phi \sin(Kx \cos \phi) e^{iKz \sin \phi}, \\ H_z(x, z) &= \frac{2}{Z_1} \cos \phi \cos(Kx \cos \phi) e^{iKz \sin \phi} \end{aligned} \quad (3.7.15)$$

над поверхнею ідеального провідника.

### 3.8. Плоскі хвилі в дисипативних середовищах

До цього часу розглядалися властивості плоских хвиль в середовищі без втрат, де уявні частини діелектричної та магнітної проникності

$$\varepsilon'' = 0, \quad \mu'' = 0. \quad (3.8.1)$$

Для дисипативних середовищ  $\varepsilon'' > 0$ ,  $\mu'' > 0$  і, отже, показник заломлення середовища  $n_{cep}$  та хвильове число плоскої хвилі  $K$  в середовищі мають як дійсну так і уявну частину

$$n_{cep} = n'_{cep} + i n''_{cep}, \quad K = K' + i K'', \quad (3.8.2)$$

$$\text{де } n'_{cep} = \sqrt{|\varepsilon| \cdot |\mu|} \cos\left(\frac{\delta_\varepsilon + \delta_\mu}{2}\right), \quad n''_{cep} = \sqrt{|\varepsilon| \cdot |\mu|} \sin\left(\frac{\delta_\varepsilon + \delta_\mu}{2}\right), \quad K' = k_0 n'_{cep},$$

$K'' = k_0 n''_{cep}$ ; ці формули безпосередньо випливають з (2.7.15), (3.1.14).

Хвильовий опір середовища також є комплексним:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0 |\mu|}{\varepsilon_0 |\varepsilon|}} \exp\left(i \frac{\delta_\mu - \delta_\varepsilon}{2}\right). \quad (3.8.3)$$

Електромагнітне поле плоскої хвилі в дисипативному середовищі визначається формулою (3.5.7), в якій хвильове число  $K$  є комплексним. Запишемо (3.5.7) з урахуванням (3.8.2):

$$F(x, y, z) = C e^{-K'(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)} e^{i K''(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)}. \quad (3.8.4)$$

Ця формула описує поле прямої хвилі. Поле зворотної хвилі можна

одержати з (3.8.4) шляхом зміни знаку при дійсній та уявній частині хвильового числа  $K$ . Залежність поля зворотної хвилі від координат буде мати вигляд  $e^{K''(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)} e^{-iK'(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)}$ . Користуючись еквівалентністю прямої та зворотної хвилі, далі розглянемо лише властивості прямої хвилі.

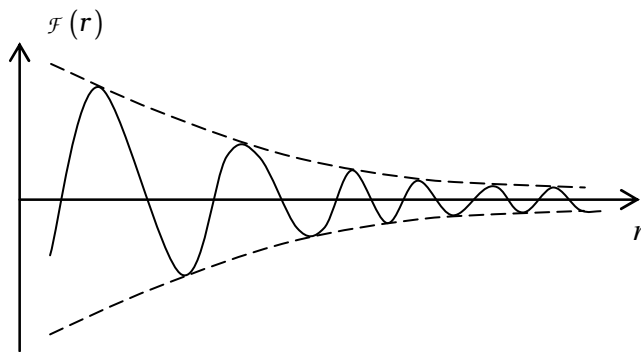
З (3.8.4) випливає, що для плоскої хвилі в середовищі з втратами поверхні рівної фази (хвильового фронту) будуть площинами

$$K'(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) = \text{const}, \quad (3.8.5)$$

а поверхні рівної амплітуди – площинами

$$K''(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) = \text{const}. \quad (3.8.6)$$

Положення поверхонь рівної амплітуди змінюється при поширенні хвилі (див. (3.8.6)), відповідно, змінюється і амплітуда хвилі (3.8.4).



**Рис. 3.8.1. Згасання електромагнітної хвилі при її поширенні в напрямку  $\vec{r}$  у середовищі з втратами;  $f(r)$  – будь-яка з компонент поля**

поля в середовищі. Очевидно, що ця величина є обернено пропорційною до уявної частини хвильового числа хвилі  $K''$ . Наприклад, покладаючи для спрощення в (3.8.4)  $\alpha = \beta = \pi/2$ ,  $\gamma = 0$  (випадок коли хвиля поширюється в напрямку  $+z$ ), маємо

$$d = \frac{1}{K''}. \quad (3.8.7)$$

Для узагальненої плоскої хвилі, що поширюється під довільним напрямком по відношенню до осей прямокутної системи координат, амплітуда хвилі спадає в  $e \approx 2,72$  раз при виконанні умови

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \frac{1}{K''}. \quad (3.8.8)$$

Поширюючись у середовищі, вона втрачає енергію, і її амплітуда згасає (рис. 3.8.1). За рахунок цього ефекту електромагнітне поле проникає всередину дисипативного середовища тільки на певну скінчену глибину.

Відстань  $d$ , яку проходить хвиля в дисипативному середовищі, щоб її амплітуда зменшилась у  $e \approx 2,72$  раз, називається *глибиною проникнення*

Вектор Умова-Пойнтинга згасаючої плоскої хвилі з урахуванням (3.8.4) виявляється пропорційним до

$$|F(x, y, z)|^2 \sim e^{-2K''(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)}, \quad (3.8.9)$$

тобто енергія хвилі згасає з показником експоненти вдвічі більшим за показник для амплітуди  $F(x, y, z)$ .

Таким чином, дійсні частини  $K', n'_{\text{сеп}}$  комплексних величин  $K, n_{\text{сеп}}$  мають прозорий фізичний зміст – вони визначають *фазову швидкість* плоскої монохроматичної хвилі в середовищі

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{K'} = \frac{c}{n'_{\text{сеп}}} = u, \quad (3.8.10)$$

в той час як величини  $K'', n''_{\text{сеп}}$  характеризують зменшення амплітуди хвилі при її поширенні.

Довжина електромагнітної хвилі  $\lambda$ , яка поширюється в середовищі з втратами, також стає комплексною величиною. Лише за умови просторової квазіперіодичності електромагнітного поля, тобто за умови малого згасання ( $K' \gg K''$ ) можна ввести довжину хвилі  $\lambda'$  за допомогою традиційного співвідношення

$$\lambda' = \frac{2\pi}{K'}. \quad (3.8.11)$$

В протилежному випадку, коли умова  $K' \gg K''$  не виконується, поширення хвилі має не осцилюючий, а згасаючий характер. Можливість введення в цьому випадку поняття довжини хвилі, принаймні в тій формі як воно вводиться в теорії коливань та хвиль, викликає певні сумніви, а тому для хвиль в сильно дисипативних середовищах цей термін, як правило, не застосовується.

Другою особливістю хвиль в дисипативних середовищах є те, що внаслідок комплексності хвильового опору (3.8.3), компоненти поля плоскої хвилі можуть вже не бути синфазними. Наприклад, з (3.1.9)–(3.1.10) та (3.8.3) випливає, що магнітне поле затухаючої плоскої хвилі зсунуте по фазі відносно електричного поля на величину  $(\delta_{\mu} - \delta_{\epsilon})/2$ . Але для більшості середовищ цей зсув малий (середовище слабо дисипативне, причому  $\delta_{\epsilon} \approx \delta_{\mu}$ ), тому ним часто нехтують.

### 3.9. Плоскі хвилі в різних середовищах. Скін-ефект

Найбільш прості властивості має вакуум, в якому для слабого еле-

ктромагнітного поля  $\epsilon = \mu = 1$ . В рамках цього припущення, вакуум є єдиним середовищем, в якому відсутні втрати та дисперсія. Оскільки для вакууму  $n_{\text{сеп}} = 1$ ,  $Z = Z_0 \approx 377$  Ом, плоска хвиля, що поширюється у вакуумі, наприклад, хвиля (3.1.18), має вигляд

$$E_x = A_m \cos(\omega t - k_0 z + \varphi_A), \quad \mathcal{H}_y = \frac{A_m}{Z_0} \cos(\omega t - k_0 z + \varphi_A). \quad (3.9.1)$$

В інших середовищах закони поширення плоских хвиль змінюються.

Діелектрики та напівпровідники на низьких частотах та в слабких полях, як правило, мають малу електричну провідність; їх діелектрична проникність  $|\epsilon_{\text{НЧ}}| > 1$ , а магнітна проникність  $|\mu| \approx 1$ . Якщо для таких середовищ дисперсія є достатньо слабкою, можна вважати, що їх діелектрична та магнітна проникності в НВЧ діапазоні визначаються як  $\epsilon \approx |\epsilon_{\text{НЧ}}| \exp(i\delta_\epsilon)$ ,  $\mu \approx 1$  і, отже, показник заломлення середовища

$$n \approx \sqrt{\epsilon} = \sqrt{|\epsilon_{\text{НЧ}}|} e^{i\delta_\epsilon/2}. \quad (3.9.2)$$

Для більшості діелектриків, однак, спостерігається зворотна залежність – їх властивості суттєво змінюються при зміні частоти. Типовим прикладом такої речовини є дистильована вода, яка на низьких частотах має діелектричну проникність  $|\epsilon_{\text{НЧ}}| = 81$ , а в інфрачервоному діапазоні  $|\epsilon| = 1,74$  ( $\lambda' \sim 1$  мкм).

Помітна дисперсія, як правило, спостерігається в полярних діелектриках, поляризація яких відбувається за рахунок обертання молекул речовини. Внаслідок великого моменту інерції молекул, дисперсійні властивості таких діелектриків починають проявлятися вже в довгохвильовій частині діапазону НВЧ. Так вже згадана дистильована вода є полярним діелектриком, дисперсія якого спостерігається починаючи з частот  $\nu \sim 10$  ГГц. Для високомолекулярних хімічних з'єднань, наприклад, молекул спиртів, дисперсія проявляється при ще менших частотах  $\nu \sim 1$  ГГц. Як правило, прояв у речовини дисперсійних властивостей свідчить також про наявність у неї великих втрат в тому ж частотному діапазоні.

Окрім полярних діелектриків існують також діелектрики, поляризація яких обумовлена зміщенням електронів всередині атомів та молекул. Момент інерції електрона менший за момент інерції молекули в тисячі і десятки тисяч разів, тому дисперсія в таких діелектриках стає помітною тільки при дуже високих частотах. До цього класу діелектриків можна віднести сухе повітря, інертні гази, бензол, сірку, алмаз.

**Таблиця 3.9.1**  
Залежність глибини проникнення електромагнітного поля  $d$  від довжини хвилі  $\lambda_0$  для міді

$\lambda_0$ , м	$d$ , м
$10^4$	$4 \cdot 10^{-4}$
$10^2$	$4 \cdot 10^{-5}$
$10^0$	$4 \cdot 10^{-6}$
$10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-7}$
$10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-8}$

Серед речовин з високою електричною провідністю  $\sigma$  найбільше практичне значення мають метали. Розглянемо властивості плоских хвиль у немагнітному металі ( $\mu \sim 1$ ), електрофізичні властивості якого визначаються, в основному, його провідністю. Для більшості таких металів зміна провідності при зміні частоти стає суттєвою лише для дов-

жин хвиль  $\lambda < 1$  см, а до цієї межі їх провідність залишається такою ж як на постійному струмі.

Внаслідок (2.3.24) комплексна діелектрична проникність металів має дуже велику уявну частину

$$\varepsilon'' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}, \quad (3.9.3)$$

в той час як її дійсна частина  $\varepsilon'$  рідко коли перевищує кілька одиниць. Наприклад, для такого типового металу як мідь, який має питому провідність  $\sigma_{Cu} = 5,9 \cdot 10^5$  См/см, уявна частина комплексної діелектричної проникності на частоті  $\nu = 10$  ГГц  $\varepsilon''_{Cu} \approx 10^6$  – в мільйони раз перевищує значення  $\varepsilon'_{Cu}$ . Тому для всіх металів в НВЧ діапазоні, а для деяких навіть у оптичному діапазоні, дійсною частиною  $\varepsilon'$  комплексної діелектричної проникності можна знехтувати порівняно з  $\varepsilon''$ . Тому для металів, як правило, покладають

$$\varepsilon = i\varepsilon'' = i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}. \quad (3.9.4)$$

З урахуванням цього комплексне хвильове число

$$K = k_0 \sqrt{\varepsilon \mu} = k_0 \sqrt{i \frac{\sigma \mu}{\varepsilon_0 \omega}} = k_0 \sqrt{\frac{\sigma \mu}{2 \varepsilon_0 \omega}} (1 + i) \quad (3.9.5)$$

і для глибини проникнення поля в метал  $d$  з (3.8.7) маємо вираз

$$d = \frac{1}{K''} = \frac{1}{k_0} \sqrt{\frac{2 \varepsilon_0 \omega}{\sigma \mu}} = c \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\pi \sigma \mu \nu}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \lambda_0 c}{\pi \sigma \mu}}. \quad (3.9.6)$$

Для міді формула (3.9.6) дає значення близькі до експериментальних (див. табл. 3.9.1).

Глибина проникнення електромагнітного поля  $d$  у метал, а також в будь-які інші середовища з високою питомою провідністю  $\sigma$ , є дуже малою, оскільки  $d \sim 1/\sqrt{\sigma}$ . В таких речовинах спостерігається *скін-ефект* (від англ. skin – шкіра) – явище згасання електромагнітних хвиль при їх проникненні у провідне середовище. Глибина проникнення поля в середовище  $d$  в цьому випадку називається *товщиною скін-шару*. Фізичний зміст поняття *скін-шару* полягає в тому, що це тонкий шар на поверхні провідного тіла, глибше якого електромагнітне поле майже не проникає.

Всередині скін-шару існує певне співвідношення між тангенціальними компонентами комплексних амплітуд полів  $E_\tau$  та  $H_\tau$

$$E_\tau = Z_S H_\tau, \quad (3.9.7)$$

яке аналогічне до співвідношення між тангенціальними компонентами комплексних амплітуд полів в однорідному ізотропному середовищі з комплексним хвильовим опором  $Z$ . Однак величина  $Z_S$  в теорії скін-ефекту має дещо інший зміст – це комплексний опір скін-шару.

Величину  $Z_S = R_S - iX_S$  називають *поверхневим імпедансом* провідника; дійсну його частину  $R_S$  називають *активним поверхневим опором* або просто *поверхневим опором*, а уявну частину  $X_S$  – *реактивним поверхневим опором* або *реактансом*.

Поверхневий імпеданс залежить від товщини скін-шару  $d$ . Дійсно, підставляючи вираз для (3.9.3) у (3.8.3) та беручи до уваги (3.9.6), одержуємо

$$Z_S = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{i\epsilon^*\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{i\sigma}} = \frac{1-i}{2} \mu Z_0 k_0 d. \quad (3.9.8)$$

Отже поверхневий імпеданс провідника збільшується при зростанні товщини скін-шару  $d$ . На практиці, однак, виявляється більш зручнішим досліджувати зміни поверхневого імпедансу при зміні кругової частоти  $\omega$  електромагнітного поля. З (3.9.8) випливає, що в звичайних провідниках за відсутності дисперсії,  $Z_S \sim \sqrt{\omega}$ , тобто із збільшенням частоти суттєво зростають втрати. Це є однією з причин, чому область застосувань таких гарних на низьких частотах провідників як мідь, золото або срібло, різко звужується в діапазоні НВЧ починаючи з частот  $\nu \sim 100$  ГГц.

Співвідношення (3.9.7) повинно виконуватись в будь-якій точці всередині провідника в межах скін-шару. Оскільки тангенціальні компоненти полів є неперервними на границі розділу середовищ, співвідношення (3.9.7) буде виконуватись і на границі розділу сере-

довищ. Таким чином, замість граничної умови  $E_\tau = 0$ , яка характерна для тіл з нескінченною провідністю, для звичайних провідників слід застосовувати більш точну граничну умову (3.9.7).

Якщо ввести одиничний вектор нормалі  $\vec{n}$  до границі розділу між провідником та іншим середовищем, який направлений всередину провідника, то граничну умову (3.9.7) можна представити в більш загальному векторному вигляді

$$[\vec{n} \times \vec{E}] = -Z_S [\vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{H}]]. \quad (3.9.9)$$

Записана таким чином умова називається *граничною умовою Щукина-Леонтовича*. Для плоскої границі розділу, вектор нормалі до якої співпадає з напрямком осі  $z$  ( $\vec{n} = \vec{e}_z$ ), з (3.9.9) випливає, що комплексні амплітуди тангенціальних компонент полів  $E_x, E_y, H_x, H_z$  на границі розділу середовищ пов'язані між собою співвідношеннями

$$E_x = Z_S H_y, \quad E_y = -Z_S H_x. \quad (3.9.10)$$

Гранична умова (3.9.9) є наближеною. Вона одержана в припущенні, що товщина скін-шару є меншою за будь-який інший лінійний геометричний розмір, який фігурує в електродинамічній задачі (радіус кривизни поверхні матеріалу, радіус кривизни хвильового фронту падаючої хвилі, відстань, на якій спостерігається помітна зміна властивостей матеріалу та ін.). З іншого боку, якщо всі ці умови виконані, то граничну умову Щукина-Леонтовича можна застосовувати для електромагнітних хвиль з будь-якою конфігурацією поля, не обов'язково лише для плоских хвиль.

Проаналізуємо особливості заломлення електромагнітних хвиль в металах. Припустимо, для спрощення, що над поверхнею немагнітного металу, який займає півпростір  $z > 0$ , знаходиться вакуум (див. рис. 3.6.1). Тоді з другого закону Снелліуса (3.6.8), випливає, що

$$\sin \phi'' = \frac{n_{cep1}}{n_{cep2}} \sin \phi = \frac{1}{\sqrt{\frac{i \sigma \mu}{\epsilon_0 \omega}}} \sin \phi. \quad (3.9.11)$$

Тобто, для не дуже високих частот, коли  $\sigma \gg \epsilon_0 \omega$ , кут заломлення  $\phi''$  плоскої хвилі в провідному середовищі є дуже малим і, фактично, не залежить від кута падіння хвилі  $\phi$ . Отже, заломлена хвиля в металі поширюється майже по нормалі до його поверхні.

Внаслідок скінченності тангенціальних складових комплексних амплітуд полів  $E_\tau$  та  $H_\tau$  на поверхні провідника виникає компонента вектора Умова-Пойнтинга

$$\vec{\zeta} = \vec{n} \cdot [\vec{E}_\tau \times \vec{H}_\tau], \quad (3.9.12)$$

що направлена всередину провідника вздовж вектора нормалі  $\vec{n}$  до його поверхні. Згідно (3.9.7)

$$|\vec{\xi}| = \mathcal{E}_\tau \mathcal{H}_\tau = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ Z_S |H_\tau|^2 \right\}. \quad (3.9.13)$$

Відповідно потужність, що розсіюється в провіднику, проникаючи у нього крізь поверхню  $S$ , можна визначити як

$$\Sigma = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_S Z_S |H_\tau|^2 dS \right\} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu \mu_0 \omega}{2\sigma}} \int_S |H_\tau|^2 dS. \quad (3.9.14)$$

Провідність електролітів, на відміну від металів, обумовлена рухом іонів, а не електронів. Оскільки перші є значно масивнішими, велика провідність, яка притаманна електролітам на низьких частотах, швидко зменшується із збільшенням частоти внаслідок великої інерційності носіїв заряду. Більшість електролітів, які є гарними провідниками в діапазоні низьких частот, в оптичному діапазоні є речовинами прозорими – тобто мають дуже малу провідність.

Властивості надпровідників суттєво залежать від частоти електромагнітної хвилі  $\omega$  та температури  $T$ <sup>1</sup>. При  $T > T_C$ , де  $T_C$  – критична температура, що відповідає переходу в надпровідний стан, вони поведуть себе як звичайні провідники чи діелектрики при відповідних температурах. В надпровідному стані ( $T < T_C$ ) їх характеристики суттєво змінюються. При  $T < T_C$  глибина проникнення поля  $d$  в надпровідник наближено описується формулою

$$d \equiv d(T) = \frac{d_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^4}}, \quad (3.9.15)$$

де  $d_0 = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 q^2 n_S}}$  – так звана лондонівська глибина проникнення,  $m$  та

$q$  – маса та електричний заряд носія заряду в надпровіднику (куперівської пари),  $n_S$  – концентрація «надпровідних» електронів, що об'єднані в куперівські пари при  $T = 0 \text{ K}$ . Очевидно, що  $n_S$  суттєво залежить від частоти. Наприклад, якщо енергія кванта випромінювання  $\hbar\omega$  буде дорівнювати енергії зв'язку електронів в куперівській парі, пари будуть руйнуватись, і надпровідність буде локально зникати.

В надпровідниках залежність поверхневого імпедансу  $Z_S$  від час-

---

<sup>1</sup> Детальний опис властивостей надпровідників можна знайти в роботах [2–3].



тоти  $\omega$  відрізняється від функціональної залежності  $Z_S \sim \sqrt{\omega}$ ; для них  $R_S \sim \omega^2$ ,  $X_S \sim \omega$ . Внаслідок цього характеристики надпровідних зразків, а також побудованих на їх основі пристроїв та приладів виявляються суттєво різними в різних частотних діапазонах.

За винятком феромагнітних речовин дисперсія магнітних властивостей у всіх інших середовищах є достатньо слабкою. Для феромагнітних матеріалів, що застосовуються в низькочастотній електроніці, в першу чергу, для створення осердь трансформаторів, суттєві зміни величини  $\mu$ , порівняно із значенням  $\mu_{HЧ}$  при  $\nu < 1 \text{ кГц}$ , починаються з частот близько мегагерца. Для високочастотних магнітних матеріалів, наприклад, магнітних діелектриків – феритів, дисперсія спостерігається починаючи з частот в одиниці і десятки тисяч мегагерц, причому із збільшенням частоти суттєво збільшуються втрати в таких матеріалах (зростає  $\mu''$ ).

### Контрольні запитання та задачі

**3.1.** Доведіть, що вектори  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{K}$  однорідної плоскої електромагнітної хвилі утворюють праву трійку векторів;  $\vec{K}$  – хвильовий вектор хвилі. Як будуть виглядати рівняння Максвелла для лівої трійки векторів  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{K}$ ?

**3.2.** Чи можливе поширення Т-хвиль в середовищі з  $\epsilon' < 0$ ,  $\mu' > 0$ ?  $\epsilon' > 0$ ,  $\mu' < 0$ ?  $\epsilon' < 0$ ,  $\mu' < 0$ ?

**3.3.** Використовуючи формулу Релея доведіть, що середовища з від'ємною аномальною дисперсією ( $\vec{v}_\phi \cdot \vec{v}_p < 0$ ,  $dv_\phi / d\lambda < 0$ ) не існують.

**3.4.** Як за допомогою лінійно поляризованої Т-хвилі можна утворити Т-хвилю з круговою поляризацією. (Вказівка: розглянути поширення Т-хвилі в діелектричній  $\lambda / 4$  пластині).

**3.5.** Електромагнітне поле з круговою поляризацією поширюється крізь середовище, що пропускає поле лише однієї поляризації. Яка буде поляризація у поля, що пройде крізь середовище?

**3.6.** Чи відрізняються фазові та групові швидкості плоских хвиль з лівою та правою круговою поляризацією в лінійному однорідному ізоτροпному середовищі? Чому?

**3.7.** Як виглядає картина стоячих хвиль, якщо амплітуди прямої та відбитої хвилі різні?

**3.8.** Як виглядає картина стоячих хвиль в дисипативному середо-

вищі?

**3.9.** Яким умовам повинно задовольняти покриття об'єкта, щоб відбиття від нього було відсутнє?

**3.10.** Доведіть ефективність методу просвітлення оптики для випадку однорідних плоских електромагнітних хвиль.

**3.11.** Чому метод просвітлення оптики не використовується в довгохвильовій частині діапазону НВЧ?

**3.12.** Як будуть виглядати поверхні рівної амплітуди для затухаючих плоских хвиль?

**3.13.** Чи можливе існування в реальних системах однорідних плоских хвиль? До чого призведе умова  $\text{div } \vec{E} = 0$  для хвиль, що існують в обмеженій частині простору?

**3.14.** Запропонуйте фізичне пояснення відсутності відбитого променя при куті падіння, який дорівнює куту Брюстера.

**3.15.** Поясніть фізичну причину того, що при повному внутрішньому відбитті фазова швидкість хвилі перевищує фазову швидкість світла в першому середовищі, але менша за фазову швидкість світла у другому середовищі.

**3.16.** Чи можливо забезпечити умови, при яких кут заломлення хвилі  $\phi$  був би більший за  $\pi/2$ ? При яких умовах це буде відбуватись?

**3.17.** Чи є згасаюча плоска хвиля неоднорідною? Чому?

**3.18.** Чи можливе утворення ТМ- чи ТЕ-хвиль при похилому падінні плоскої хвилі на поверхню діелектрика?

**3.19.** Чи можливо розрізнити пряму та зворотну плоскі хвилі в консервативному середовищі? В дисипативному? Яким чином?

**3.20.** Як змінюється розподіл поля ТМ- та ТЕ-хвиль при їх поширенні в дисипативному середовищі?

**3.21.** Чому більшість полярних діелектриків, наприклад вода, характеризуються великими втратами в діапазоні НВЧ?

**3.22.** Чому термін скін-ефект не застосовується для хвиль в діелектриках та напівпровідниках?

**3.23.** Як змінюється напрямок поширення заломленої хвилі в залежності від провідності середовища?

## Література

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. Изд. 2-е. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1973. – 720 с.

2. Шмидт В. В. Введение в физику сверхпроводников. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2000. – 402 с.
3. Ван Дузер Т., Тернер Ч. У. Физические основы сверхпроводящих устройств и цепей. – М.: Радио и связь, 1984. – 344 с.

## Розділ IV

# ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ МІКРОХВИЛЬОВИХ ЛІНІЙ ПЕРЕДАЧІ

### 4.1. Класифікація мікрохвильових ліній передачі

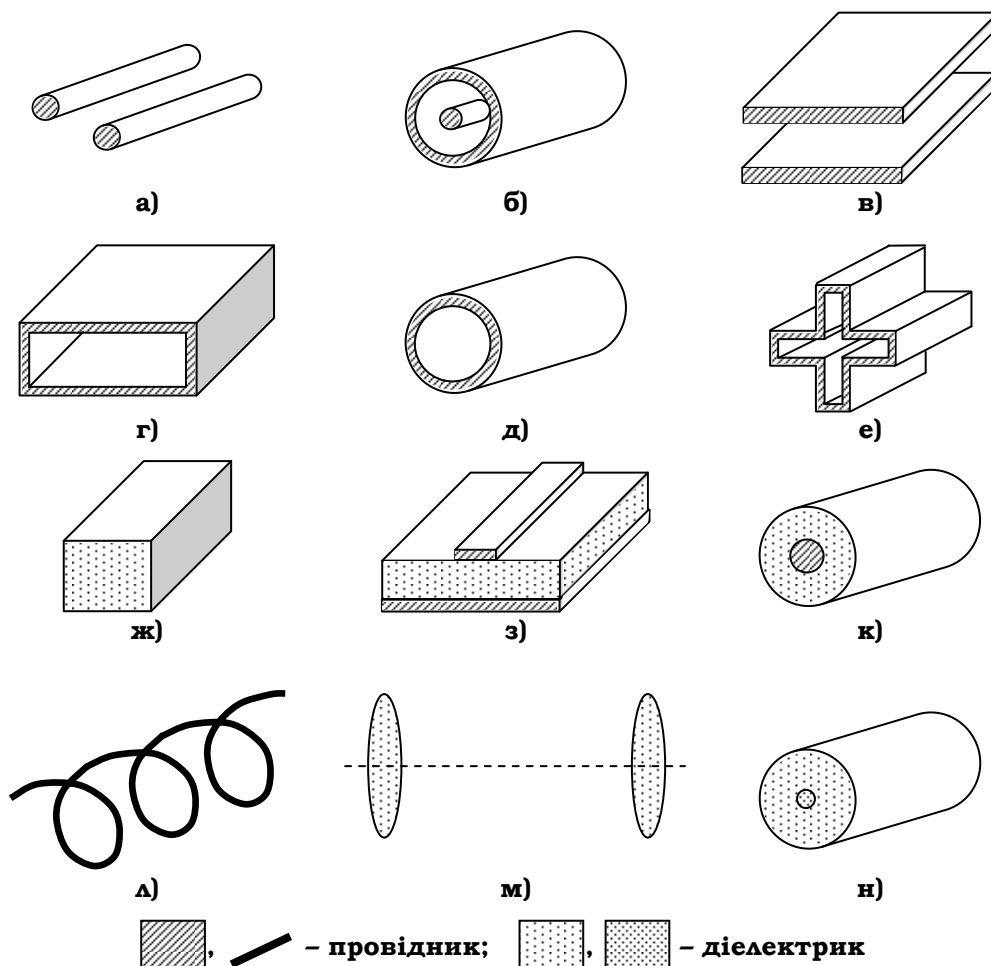
*Лінія передачі НВЧ або направляюча система НВЧ* – це пристрій, що дозволяє передавати електромагнітну енергію в певному визначеному напрямку. Такі системи називають *каналізуючими*, а процес передачі електромагнітної енергії – процесом *каналізації енергії*. В сучасній техніці й електроніці НВЧ застосовуються лінії передачі різних типів (рис. 4.1.1).

*Регулярними* називають лінії передачі, властивості яких вздовж напрямку переносу енергії є незмінними або змінюються по періодичному закону. В першому випадку регулярну лінію передачі називають *поздовжньо-однорідною* (див. рис. 4.1.1а–к,м,н), а в другому випадку – *періодичною* (див. рис. 4.1.1л). Якщо властивості лінії передачі вздовж напрямку каналізації енергії змінюються по іншому довільному закону, таку лінію передачі називають *нерегулярною* (*поздовжньо-неоднорідною*).

Всі лінії передачі НВЧ можна умовно поділити на *відкриті* та *закриті*. Електромагнітне поле в закритих лініях передачі існує лише всередині замкненої металевої оболонки (екрану), а у відкритих лініях передачі воно необмежене в поперечному перерізі лінії. Таким чином, у закритих лініях передачі (див. рис. 4.1.1б,г,д,е) електромагнітна енергія не випромінюється назовні від металевого екрану, а у відкритих лініях передачі відбувається випромінювання електромагнітної енергії з лінії передачі в оточуючий простір. Це, однак, не означає, що внаслідок відсутності випромінювання, закриті лінії передачі завжди кращі ніж відкриті. В закритих лініях передачі відбуваються втрати електромагнітної енергії за рахунок її розсіяння в металевому екрані, що оточує канал передачі енергії. При певних умовах ці втрати можуть суттєво перевищувати втрати на випромінювання у відкритих лініях передачі.

В залежності від того з якого матеріалу виготовлені лінії передачі НВЧ їх називають *металевими* (див. рис. 4.1.1а–е, л), *діелектричними* (див. рис. 4.1.1ж, м, н) або *металодіелектричними* (див. рис. 4.1.1з, к).

Властивості електромагнітних хвиль в лінії передачі суттєво залежать від її *зв'язності*. Якщо в поперечному перерізі лінії передачі мо-



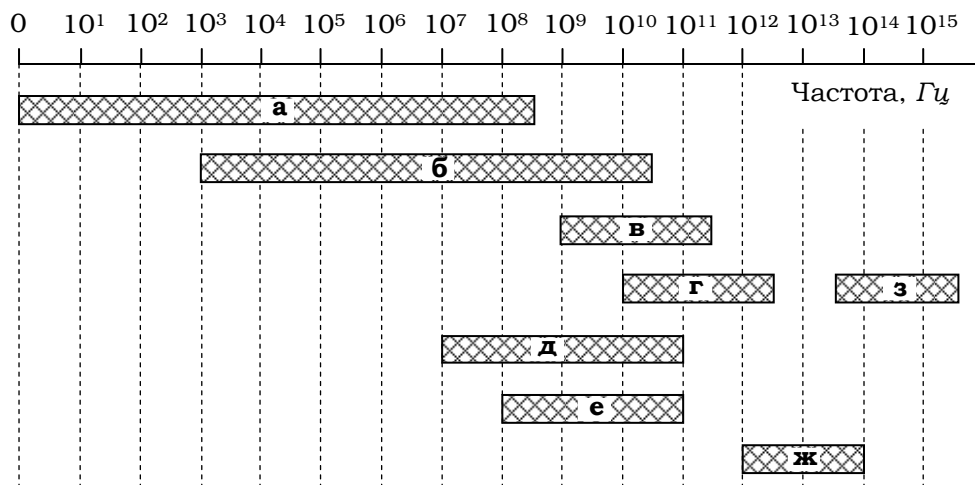
**Рис. 4.1.1. Різні типи ліній передачі НВЧ: а) двопровідна лінія; б) коаксіальний кабель; в) плоскопаралельний металевий хвилевід; г) прямокутний металевий хвилевід; д) круглий металевий хвилевід; е) металевий хвилевід складної форми (Х-подібний); ж) діелектричний хвилевід; з) мікросмужкова лінія; к) лінія передачі на поверхневих хвилях; л) спіральний хвилевід; м) лінзовий хвилевід; н) світловод (оптоволоконна лінія)**

жна виділити  $N$  ізольованих один від одного провідників будемо називати таку лінію передачі  $N$ -зв'язною. Наприклад, лінії передачі г, д, е, ж, к-н на рис. 4.1.1 є однозв'язними, а лінії передачі а, б, в, з є двозв'язними.

Для спрощення теоретичного аналізу електромагнітних процесів в

лініях передачі НВЧ останні зручно розділити на дві групи, в кожній з яких будуть знаходитись лінії передачі зі схожими електродинамічними властивостями. До *першої групи* відносяться лінії, в яких можуть поширюватись Т-хвилі або хвилі, властивості яких близькі до властивостей Т-хвиль (див. рис. 4.1.1а, б, в). До *другої групи* відносяться лінії передачі НВЧ, в яких Т-хвилі поширюватись не можуть, а поширюються дисперсні хвилі (див. рис. 4.1.1г–н). Ця класифікація є умовною. Наприклад, мікросмужкова лінія (4.1.1з) в області низьких частот вважається лінією передачі першої групи, а в області високих частот – лінією передачі другої групи. Те ж саме можна сказати і про лінії а, б, в на рис. 4.1.1.

Окрім попередньої («електродинамічної») класифікації ліній передачі НВЧ, останні можна класифікувати виходячи з їх робочого діапазону частот. Будь-яка лінія передачі повинна задовольняти двом основним критеріям: вона повинна вносити якомога менші спотворення в той сигнал, який передається за її допомогою, а також повинна забезпечити такий режим каналізації енергії, при якому втрати енергії будуть мінімальні. В практичних конструкціях ліній передачі НВЧ обидві ці вимоги вдається задовольнити лише в певному діапазоні частот, який називається *робочим діапазоном частот* лінії передачі. На рис. 4.1.2 показана діаграма робочих діапазонів частот для деяких



**Рис. 4.1.2.** Робочі діапазони частот для різних типів ліній передачі НВЧ: а – двопровідна лінія; б – коаксіальний кабель; в – металеві хвилеводи; г – діелектричні хвилеводи; д – мікросмужкові лінії; е – лінії на поверхневих та повільних хвилях; ж – лінзові хвилеводи; з – світловоди (оптоволоконні лінії)

найбільш розповсюджених ліній передачі НВЧ.

**Таблиця 4.1.1**

**Класифікація ліній передачі НВЧ та методів їх теоретичного аналізу при різних співвідношеннях між характерним лінійним геометричним розміром лінії передачі  $D$  та її робочою довжиною хвилі  $\lambda$**

Наближення	Квазістаціонарне	–	Квазіоптичне
Співвідношення між $D$ та $\lambda$	$D \ll \lambda$	$D \sim \lambda$	$D \gg \lambda$
Частоти, Гц	$0 \div 10^8$	$10^9 \div 10^{11}$	$10^{12} \div 10^{15}$
Характер електромагнітних явищ	коливальний	хвильовий	променевий
Теорія	теорія радіотехнічних та імпульсних кіл	електродинаміка	оптика
Рівняння	закони Ома та Кірхгофа	рівняння Максвелла	теорія Гюйгенса, Френеля
Математичний апарат	$\text{rot } \vec{H} = \sigma \vec{E}$ , $\text{rot } \vec{E} = i \omega \mu \vec{H}$	$\text{rot } \vec{H} = \sigma \vec{E} - i \omega \epsilon \vec{E}$ , $\text{rot } \vec{E} = i \omega \mu \vec{H}$	$\text{rot } \vec{H} = -i \omega \epsilon \vec{E}$ , $\text{rot } \vec{E} = i \omega \mu \vec{H}$
Лінії передачі НВЧ	Двопровідна, коаксіальна, смужкові та мікросмужкові	Мікросмужкові, металеві та діелектричні хвилеводи, лінії на повільних та поверхневих хвилях	Лінзові хвилеводи та світловоди (оптоволоконні лінії)

Кожна лінія передачі НВЧ, як правило, використовується лише в межах свого робочого діапазону частот, що дозволяє спростити теоретичний аналіз властивостей електромагнітних хвиль в таких системах (табл. 4.1.1). Це спрощення ґрунтується на врахуванні особливостей електромагнітних явищ, які відбуваються в лініях передачі при різних співвідношеннях між характерним лінійним геометричним розміром системи  $D$  та робочою довжиною хвилі  $\lambda$  (див. § 2.2).

## 4.2. Телеграфні рівняння

Телеграфні рівняння є перехідною ланкою між теорією високочастотних електричних кіл та електродинамікою НВЧ. В цих рівняннях

замість векторів електромагнітного поля фігурують струм  $I(z,t)$  та напруга  $U(z,t)$ , визначені в довільний момент часу  $t$  в довільному поперечному перерізі  $z$  лінії передачі.

Телеграфні рівняння можна одержати виходячи з рівнянь Максвелла, але обидві ці системи рівнянь не завжди є еквівалентними. В той час як рівняння Максвелла описують електромагнітні поля в будь-яких лініях передачі, телеграфні рівняння придатні тільки для опису властивостей Т-хвиль.

Представимо відрізок лінії передачі з нескінченно малою довжиною  $dz$  у вигляді чотириполюсника, до якого прикладена напруга

$U(z+dz,t) - U(z,t)$ , і по

якому протікає струм  $I(z,t)$  (рис. 4.2.1). Нехай чотириполюсник характеризується погонними параметрами (параметрами в розрахунку на одиницю довжини лінії передачі): опором  $R$ , індуктивністю  $L$ , ємністю  $C$  та провідністю  $G$  (див. рис. 4.2.1).

Використовуючи закони Ома та Кірхгофа для нескінченно малого відрізка лінії передачі НВЧ (при  $dz \rightarrow 0$  можна вважати, що ці закони виконуються в НВЧ діапазоні), одержуємо рівняння

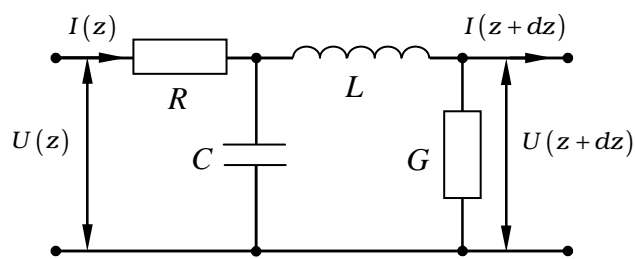
$$-\frac{\partial U}{\partial z} = RI + L \frac{\partial I}{\partial t}, \quad -\frac{\partial I}{\partial z} = GU + C \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (4.2.1)$$

які є *телеграфними рівняннями першого порядку*.

Якщо виключити одну з функцій  $I(z,t)$ ,  $U(z,t)$  в (4.2.1), то можна одержати *телеграфне рівняння другого порядку*. Наприклад, продиференціюємо перше рівняння (4.2.1) по  $z$ , а друге – по часу  $t$ . Шляхом суперпозиції цих рівнянь одержуємо телеграфне рівняння другого порядку для функції  $U(z,t)$ :

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + LC \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial U}{\partial t} + RGU = 0. \quad (4.2.2)$$

Рівняння (4.2.1) або (4.2.2) описують властивості електромагнітних хвиль в лініях передачі НВЧ першої групи (тобто властивості Т-хвиль). Але слід пам'ятати, що на відміну від низькочастотних кіл, навіть при



**Рис. 4.2.1. Відрізок лінії передачі НВЧ нескінченно малої довжини  $dz$  (двополюсник) з погонними параметрами  $R, L, C, G$**



$dz \rightarrow 0$ , параметри такого кола  $R, L, C, G$  не є сталими величинами, а, в загальному випадку, є функціями частоти. Як правило, дисперсія для параметрів  $L, C, G$  проявляється слабо, тому можна вважати, що в певному вузькому діапазоні частот величини  $L, C, G$  є сталими. Найбільш помітно проявляється дисперсія погонного опору  $R$ , що пов'язано з існуванням в лінії передачі НВЧ явища скін-ефекту.

Скористаємось методом комплексних амплітуд, який був введений в § 2.7. Тоді від рівнянь (4.2.1) можна перейти до рівнянь

$$-\frac{dU}{dz} = (R - i\omega L)I, \quad -\frac{dI}{dz} = (G - i\omega C)U, \quad (4.2.3)$$

де функції  $U = U(z)$ ,  $I = I(z)$  вже є комплексними амплітудами функцій  $I(z, t)$ ,  $U(z, t)$ . Візьмемо похідну по  $z$  від першого рівняння та підставимо в нього замість  $dI/dz$  друге рівняння (4.2.3). Одержимо

$$\frac{d^2U}{dz^2} + \gamma^2 U = 0, \quad (4.2.4)$$

де

$$\gamma = \sqrt{(\omega L + iR)(\omega C + iG)} \quad (4.2.5)$$

є комплексним хвильовим числом Т-хвилі в лінії передачі НВЧ. За відсутності втрат ( $R = 0, G = 0$ ) вираз для  $\gamma$  спрощується і набуває вигляду  $\gamma = \omega\sqrt{LC}$ .

Колова частота Т-хвилі  $\omega = uK$  повинна співпадати з частотою поширення сигналу в лінії передачі, звідси випливає,  $u = 1/\sqrt{LC}$ . Для лінії одиничної довжини з вакуумним заповненням  $u = c$ ,  $L = \mu_0$ ,  $C = \epsilon_0$ , тобто, знову приходимо до формули (2.6.7). Якщо лінія передачі заповнена середовищем з проникностями  $\epsilon, \mu$ , її погонна індуктивність  $L_\mu = \mu\mu_0$ , а погонна ємність  $C_\epsilon = \epsilon\epsilon_0$ . Швидкість поширення сигналу  $u$  в лінії передачі в цьому випадку дорівнює  $u = 1/\sqrt{L_\mu C_\epsilon} = c/\sqrt{\epsilon\mu}$  і співпадає з швидкістю Т-хвилі (3.1.15). Це підтверджує правильність припущень про те, що рівняння (4.2.4) описує процес поширення Т-хвиль в лінії передачі.

Загальний розв'язок рівняння (4.2.4) має вигляд

$$U(z) = Ae^{i\gamma z} + Be^{-i\gamma z}, \quad (4.2.6)$$

де  $A$  та  $B$  – довільні сталі. Підставимо (4.2.6) в перше рівняння (4.2.3) і одержимо, що

$$I(z) = \frac{1}{Z_{UI}}(Ae^{i\gamma z} - Be^{-i\gamma z}), \quad (4.2.7)$$

де величина

$$Z_{UI} = \frac{\omega L + iR}{\gamma} = \frac{\gamma}{\omega C + iG} = \sqrt{\frac{\omega L + iR}{\omega C + iG}} \quad (4.2.8)$$

є комплексним хвильовим опором лінії передачі. Для лінії без втрат  $Z_{UI} = \sqrt{L_\mu / C_\epsilon} = 1 / (u C_\epsilon) = Z_0 \sqrt{\mu / \epsilon}$ , тобто, дорівнює хвильовому опору середовища, в якому поширюється Т-хвиля.

Таким чином, формули (4.2.6)–(4.2.7) аналогічні формулам (3.1.9)–(3.1.10) для плоских хвиль. З одержаних виразів знову ж таки можна впевнитись, що в лінії передачі НВЧ, в загальному випадку, існують дві хвилі з довільними амплітудами – одна з них поширюється в напрямку  $+z$ , а інша – в протилежний бік.

Аналогія між струмом  $I(z)$  і напругою  $U(z)$  в лінії передачі та електромагнітним полем плоскої хвилі наводить на думку, що комплексні амплітуди полів є величинами пропорційними до функцій  $I(z)$ ,  $U(z)$ . Дійсно, якщо покласти  $U(z) = \alpha E_x(z)$ , де  $\alpha = \text{const}$ , то відразу ж з співвідношень  $U(z) / I(z) = Z_{UI}$  для падаючої хвилі та (3.1.9)–(3.1.10) одержимо, що  $I(z) = \alpha H_y(z)$ . Тобто телеграфні рівняння другого порядку є аналогами рівнянь Гельмгольца для комплексних амплітуд полів. Це дозволяє для ліній передачі НВЧ першої групи проводити теоретичний аналіз за допомогою телеграфних рівнянь, причому для визначення сталої поширення хвилі в лінії передачі та комплексного хвильового опору хвилі достатньо лише визначити явний вигляд параметрів  $R, L, C, G$ .

Для нескінченно коротких відрізків ліній передачі НВЧ можна застосовувати співвідношення, що одержані для низькочастотних кіл (треба лише пам'ятати, що параметри  $R, L, C, G$  відповідного двополюсника є функціями частоти). Наприклад, можна ввести в лінії передачі НВЧ поняття погонного електричного заряду  $q$  та магнітного потоку  $\phi$  за формулами

$$q = CU, \quad \phi = LI. \quad (4.2.9)$$

Застосовуючи ці вирази, вдається визначити погонні параметри довгих ліній передачі НВЧ, де існують лише падаючі хвилі і немає відбитих хвиль.

Телеграфні рівняння успішно застосовуються в діапазоні низьких частот, а тому, очевидно, що вони не повністю враховують специфіку електромагнітних явищ, які можуть відбуватись в діапазоні НВЧ. Щоб показати це, припустимо, наприклад, що погонний опір  $R$  кола, зображеного на рис. 4.2.1, дорівнює нескінченності (коло є розімкну-

тим). В цьому випадку струм протікати по колу не може, енергія не переноситься і втрат в колі не має. В той же час розрив в лініях передачі НВЧ зовсім не означає теж саме, що й в низькочастотній електроніці. Розрив в лінії передачі НВЧ є неоднорідністю, на якій можливе утворення електромагнітних хвиль – тобто в області розриву відбувається випромінювання електромагнітної енергії. Ця властивість НВЧ систем не враховується телеграфними рівняннями, а тому останні можна застосовувати лише за умови, що енергія, яка випромінюється, є малою. Математично це зводиться до умови квазістатичності поля в довільному поперечному перерізі лінії передачі. Таким чином, телеграфні рівняння дозволяють добре описати тільки властивості Т-хвиль.

#### **4.3. Поширення електромагнітних хвиль між двома паралельними ідеально провідними площинами**

Найбільш простою системою, в якій можливе направлене поширення електромагнітних хвиль, є плоскопаралельний хвилевід, який являє собою дві нескінченні паралельні провідні площини, розташовані на деякій відстані одна від одної (див. рис. 4.1.1в). Поширення електромагнітних хвиль відбувається в просторі між площинами.

Така лінія передачі, строго кажучи, не може бути реалізована на практиці. Причиною цього є те, що кожна реальна система має скінченні розміри, в той час як поперечний переріз плоскопаралельного хвилеводу є нескінченим. Але важливість плоскопаралельного хвилеводу як лінії передачі обумовлюється тим, що він є зручною моделлю, в рамках якої можна з'ясувати основні фізичні принципи роботи багатьох інших ліній передачі НВЧ, а також одержати декілька важливих співвідношень загального характеру. Крім того, іноді в мікрохвильовій техніці застосовують хвилеводи у вигляді двох широких паралельно розташованих провідних пластин, поле між якими наближено відповідає структурі поля в плоскопаралельному хвилеводі.

Розглянемо однорідну плоску електромагнітну хвилю, що поширюється між ідеально провідними площинами 1 та 2, багатократно відбиваючись від них під кутом  $\phi$  (рис. 4.3.1). Для спрощення будемо вважати, що простір між провідними площинами заповнений лінійним однорідним ізотропним середовищем з проникностями  $\epsilon$ ,  $\mu$  і, відповідно, показником заломлення  $n_{\text{сеп}} = \sqrt{\epsilon\mu}$ . Ця задача близька до задачі про похиле падіння однорідної плоскої електромагнітної хвилі

на плоску границю розділу двох середовищ (див. § 3.6), тому її розгляд будемо проводити схожим чином.

Припустимо спочатку, що однорідна плоска електромагнітна хвиля має магнітну поляризацію, тобто вектор її електричного поля має лише  $y$ -складову ( $\vec{E} = \vec{e}_y E$ ).

Оскільки обидві площини є ідеально провідними, електричне поле на їх поверхні, яке є суперпозицією полів падаючої та відбитої хвилі, повинно задовольняти граничні умови

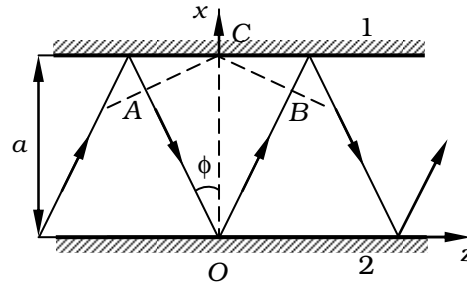
$$E_y(x=0) = E_y(x=a) = 0. \quad (4.3.1)$$

Розглянемо хвилю, що падає під кутом  $\phi$  на нижню ідеально провідну площину 2 і, відбиваючись в точці  $O$  від цієї площини, утворює відбиту хвилю (див. рис. 4.3.1). Виберемо деяку точку  $A$  на промені, що відповідає падаючій хвилі, і симетрично розташовану до точки  $A$  точку  $B$  на промені, що відповідає відбитій хвилі. При такому виборі точок  $A$  та  $B$  виконується рівність  $AO = OB$ . Хвильові фронти падаючої та відбитої однорідних плоских хвиль є площинами перпендикулярними до напрямку поширення цих хвиль. Нехай точки  $A$  та  $B$  обрані таким чином, що хвильові фронти падаючої та відбитої хвиль, позначені пунктиром на рис. 4.3.1, перетинаються в точці  $C$ , яка лежить на поверхні верхньої ідеально провідної площини 1. Відповідно, площина  $AC$  є фронтом падаючої хвилі, а площина  $BC$  є фронтом відбитої хвилі. В точці  $C$ , де перетинаються хвильові фронти, відбувається інтерференція падаючої та відбитої плоских хвиль.

Щоб забезпечити граничні умови (4.3.1), зсув фази  $\Delta\varphi_{AOB}$  електромагнітної хвилі при її поширенні вздовж шляху  $AOB$  повинен дорівнювати  $(2m-1)\pi$ , де  $m$  – довільне натуральне число. Тільки в цьому випадку електричні поля падаючої та відбитої хвилі в точці  $C$  будуть знаходитись в протифазі, і умову  $E_y(x=a) = 0$  можна буде задовольнити. Зсув фази  $\Delta\varphi_{AOB}$  електромагнітної хвилі запишемо у вигляді

$$\Delta\varphi_{AOB} = 2Kl - \Delta\varphi_O = (2m-1)\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.3.2)$$

де  $l$  – довжина відрізка  $AO$ ,  $\Delta\varphi_O$  – зсув фази хвилі при її відбитті від ідеально провідної площини 2 в точці  $O$ , рівний  $\pi$  (коефіцієнт відбит-



**Рис. 4.3.1. Поширення однорідної плоскої електромагнітної хвилі між ідеально провідними площинами 1 та 2**

тя  $R$  дорівнює мінус одиниці),  $K$  – хвильове число однорідної плоскої хвилі. Виходячи з (4.3.2), одержуємо

$$l = m \frac{\pi}{K} = m \frac{\lambda}{2}, \quad (4.3.3)$$

де  $\lambda = c / \nu n_{\text{сеп}} = \lambda_0 / n_{\text{сеп}}$  – довжина хвилі в середовищі, що заповнює простір між площинами 1 та 2;  $\nu$  та  $\lambda_0$  – частота та довжина електромагнітної хвилі в вакуумі;  $c$  – швидкість світла в вакуумі. З іншого боку з трикутника АОС випливає, що  $l = a \cos \phi$  (див. рис.

4.3.1). Комбінуючи цю формулу та вираз (4.3.3), одержуємо

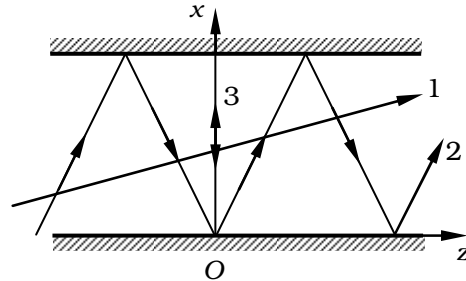
$$\cos \phi = m \frac{\lambda}{2a}. \quad (4.3.4)$$

Завдяки (4.3.4), кут відбиття однорідної плоскої електромагнітної хвилі, що поширюється в плоскопаралельному хвилеводі, виявляється функцією довжини хвилі  $\lambda$  або її частоти  $\nu$ . На високих частотах, коли  $m\lambda \ll 2a$ , кут відбиття  $\phi$  близький до  $\pi/2$ , тобто хвиля між площинами поширюється майже паралельно до їх поверхні (рис. 4.3.2, випадок 1). При збільшенні довжини хвилі  $\lambda$  відношення  $m\lambda/2a$  зростає, а кут  $\phi$  зменшується (див. рис. 4.3.2, випадок 2). При  $\lambda = 2a/m$  кут  $\phi$  стає рівним нулю (див. рис. 4.3.2, випадок 3). При ще менших частотах відношення  $m\lambda/2a$  стає більше одиниці і, очевидно, що рівність (4.3.4) при цьому не можна задовольнити ні при якому значенні кута  $\phi$ . Це означає, що умови (4.3.1) при цьому перестають виконуватись.

Електромагнітне поле неоднорідної плоскої хвилі з магнітною поляризацією в плоскопаралельному хвилеводі описується формулами (3.7.15), які запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, z) &= \vec{e}_y 2i \sin(Kx \cos \phi) e^{iKz \sin \phi}, \\ \vec{H}(x, z) &= \frac{2}{Z} [-\vec{e}_x i \sin \phi \sin(Kx \cos \phi) + \vec{e}_z \cos \phi \cos(Kx \cos \phi)] e^{iKz \sin \phi}. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Величина  $Kx \cos \phi$ , що входить в ці формули, враховуючи (4.3.4), дорівнює



**Рис. 4.3.2. Поширення плоскої однорідної електромагнітної хвилі в плоскопаралельному хвилеводі: 1 –  $m\lambda \ll 2a$ ; 2 –  $m\lambda < 2a$ ; 3 –  $m\lambda = 2a$**

$$Kxm \frac{\lambda}{2a} = \frac{2\pi}{\lambda} xm \frac{\lambda}{2a} = \frac{m\pi}{a} x.$$

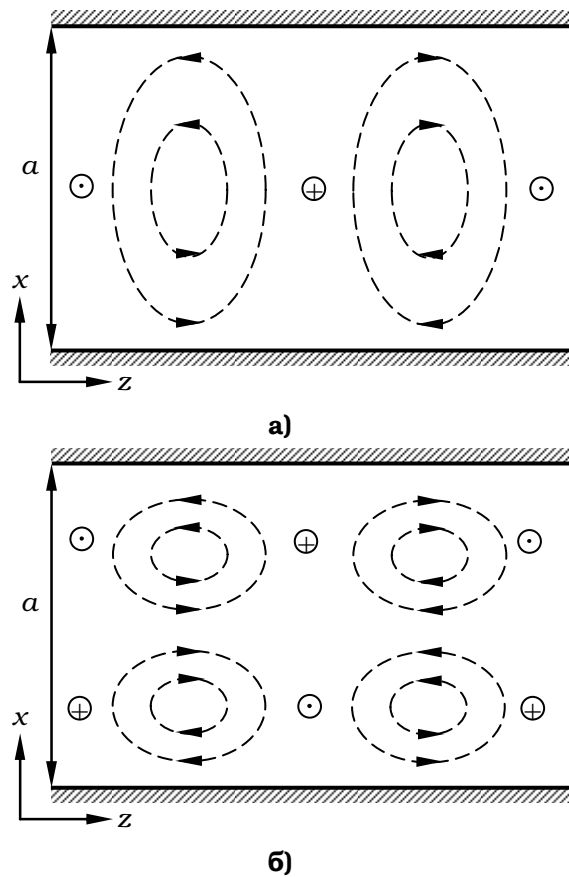
З урахуванням цього вирази (4.3.5) приймають вигляд

$$\vec{E}(x, z) = \vec{e}_y 2i \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) e^{iKz \sin \phi},$$

$$\vec{H}(x, z) = \frac{2}{Z} \left[ -\vec{e}_x i \sin \phi \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) + \vec{e}_z \cos \phi \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \right] e^{iKz \sin \phi}. \quad (4.3.6)$$

З цих формул випливає, що в напрямку осі  $x$  між площинами 1 та 2 вкладається ціле число  $m$  варіацій (півхвиль) електричного та магнітного полів. Оскільки вектори поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  неоднорідної плоскої хвилі не залежать від координати  $y$ , кількість таких варіацій вздовж осі  $y$  дорівнює нулю. Таку хвилю називають хвилею  $TE_{m0}$  або  $H_{m0}$ . Символ  $TE$  або  $H$  визначає поляризацію (клас) хвилі, а індекси  $m$  та  $0$  – кількість варіацій поля вздовж осей  $x$  та  $y$  відповідно.

Розподіл електромагнітного поля хвилі  $TE_{m0}$  вздовж осі  $x$  має вигляд стоячої хвилі. Ідеально провідні площини 1 та 2 знаходяться у вузлах електричного поля. Поперечні складові  $E_y$ ,  $H_x$  електромагнітного поля хвилі  $TE_{m0}$  мають однакову фазу, а поздовжня складова магнітного поля  $H_z$  зсунута по фазі відносно поперечних складових на  $\pi/2$  (враховуючи, що  $i = e^{i\pi/2}$ ). На рис. 4.3.3 показана картина силових ліній векторів магнітного поля  $\vec{H}$  для двох  $TE_{m0}$  хвиль з  $m = 1$



**Рис. 4.3.3. Розподіл електромагнітного поля хвиль  $TE_{10}$  (а) та  $TE_{20}$  (б) в плоскопаралельному хвилеводі; пунктирні лінії – силові лінії магнітного поля**

та  $m = 2$ ; вектори електричного поля  $\vec{E}$  цих хвиль перпендикулярні до площини рисунка.

Фазова швидкість хвилі  $TE_{m0}$  в напрямку її поширення  $z$  дорівнює

$$\vec{v}_{\phi, m0} = \frac{\omega}{K_z} = \frac{\omega}{K \sin \phi} = \frac{u}{\sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{2a}\right)^2}}. \quad (4.3.7)$$

Вона є більшою за швидкість світла в середовищі  $u = c/n_{\text{сеп}}$ , тому таку хвилю називають *швидкою* хвилею. Швидкість переносу енергії хвилею  $TE_{m0}$ , навпаки є меншою за швидкість світла  $u$  і дорівнює

$$\vec{v}_{e, m0} = u \sin \phi = u \sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{2a}\right)^2}. \quad (4.3.8)$$

З виразів (4.3.7)–(4.3.8) випливає, що  $\vec{v}_{\phi, m0} \cdot \vec{v}_{e, m0} = u^2$ .

Відношення модулів поперечних складових поля неоднорідної плоскої хвилі називають *характеристичним хвильовим опором*  $Z_{\Delta\Pi}$  лінії передачі. Для хвилі  $TE_{m0}$  з компонентами поля (4.3.6) цей опір дорівнює

$$Z_{\Delta\Pi}^{TE} = \frac{|E_y|}{|H_x|} = \frac{\left| 2i \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{iKz \sin \phi} \right|}{\left| -\frac{2}{Z} i \sin \phi \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \right|} = \frac{Z}{\sin \phi} = \frac{Z}{\sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{2a}\right)^2}}. \quad (4.3.9)$$

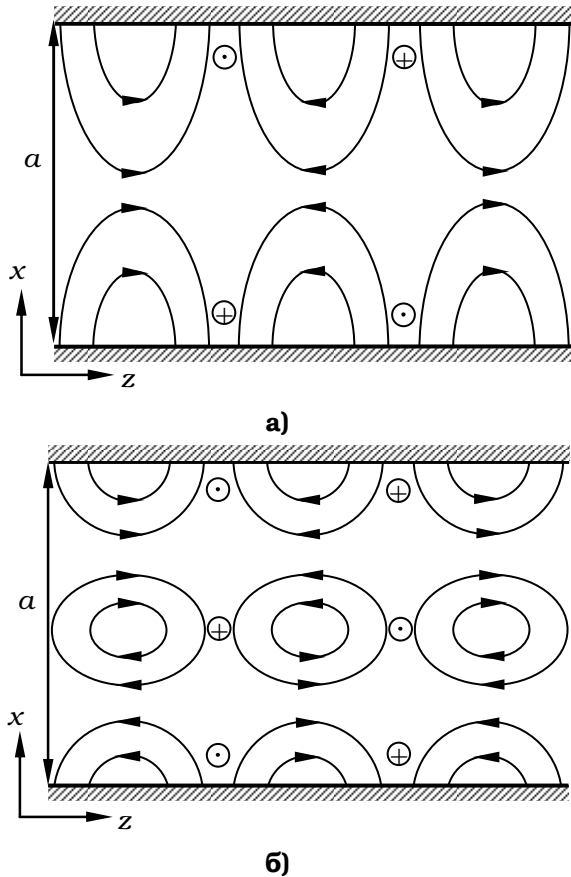
З формул (4.3.7)–(4.3.9) випливає, що при  $\lambda = 2a/m$  фазова швидкість та характеристичний хвильовий опір лінії передачі прямують до нескінченності, а швидкість поширення енергії навпаки прямує до нуля. При умові  $\lambda = 2a/m$  поширення хвилі в лінії передачі припиняється – вона поширюється строго вздовж осі  $x$  (див. рис. 4.3.2, випадок 3) і тому не переносить енергію вздовж осі  $z$ . Відбувається *явище відсічки* хвиль з довжинами  $\lambda \geq 2a/m$  – такі хвилі поширюватись в лінії передачі не можуть.

По аналогії з хвилею, яка має магнітну поляризацію, можна розглянути поширення між ідеально провідними площинами однорідної плоскої хвилі з електричною поляризацією. Згідно (3.7.14) електромагнітне поле цієї хвилі

$$\vec{H}(x, z) = \vec{e}_y 2 \cos(Kx \cos \phi) e^{iKz \sin \phi},$$

$$\vec{E}(x, z) = 2Z \left[ \vec{e}_x \sin \phi \cos(Kx \cos \phi) - \vec{e}_z i \cos \phi \sin(Kx \cos \phi) \right] e^{iKz \sin \phi}. \quad (4.3.10)$$

З граничних умов



**Рис. 4.3.4. Розподіл електромагнітного поля хвиль  $TM_{10}$  (а) та  $TM_{20}$  (б) в плоскопаралельному хвилеводі; суцільні лінії – силові лінії електричного поля**

$$E_z(x=0) = E_z(x=a) = 0 \quad (4.3.11)$$

на поверхні провідних пластин впливає вираз (4.3.4) для косинуса кута падіння хвилі  $\phi$ , в якому, однак, число  $m$  може бути не тільки натуральним числом, але й може мати значення нуля. В останньому випадку  $\cos \phi = 0$ ,  $\phi = \pi/2$  і електромагнітне поле хвилі приймає вигляд

$$\vec{H}(x, z) = \vec{e}_y 2e^{iKz},$$

$$\vec{E}(x, z) = \vec{e}_x 2Z e^{iKz}. \quad (4.3.12)$$

Отже, при  $m=0$  між площинами поширюється звичайна однорідна плоска хвиля, поле якої не залежить від відстані  $a$  між площинами.

Якщо  $m$  є натуральним числом, формули (4.3.10) набувають вигляду

$$\vec{H}(x, z) = \vec{e}_y 2 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{iKz \sin \phi},$$

$$\vec{E}(x, z) = 2Z \left[ \vec{e}_x \sin \phi \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) - \right.$$

$$\left. - \vec{e}_z i \cos \phi \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \right] e^{iKz \sin \phi}. \quad (4.3.13)$$

Поле цієї хвилі має  $m$  варіацій вздовж осі  $x$  (між провідними площинами вкладається  $m$  півхвиль) і не має варіацій вздовж осі  $y$ . Таку хвилю прийнято називати хвилею  $TM_{m0}$  або  $E_{m0}$ . При  $m=0$  ця хвиля вироджується в однорідну плоску електромагнітну хвилю. На рис. 4.3.4 показана картина поля для двох ТМ-хвиль з індексами  $m=1$  та  $m=2$ ; силові лінії електричного поля показані суцільними лініями, а вектори магнітного поля  $\vec{H}$  перпендикулярні до площини рисунка.

Фазова швидкість та швидкість переносу енергії хвилею  $TM_{m0}$  іде-



нтині відповідним формулам для  $TE_{m0}$  хвиль. Характеристичний опір лінії передачі у випадку  $TM_{m0}$  хвиль

$$Z_{\Lambda\Pi}^{TM} = \frac{|E_x|}{|H_y|} = \frac{\left| 2Z \sin \phi \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) e^{iKz \sin \phi} \right|}{\left| 2 \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) e^{iKz \sin \phi} \right|} = Z \sin \phi = Z \sqrt{1 - \left( \frac{m\lambda}{2a} \right)^2} \quad (4.3.15)$$

зовсім по іншому залежить від довжини хвилі  $\lambda$  ніж характеристичний опір лінії передачі для  $TE$ -хвиль. При  $\lambda \rightarrow \infty$  опори  $Z_{\Lambda\Pi}^{TE}$  та  $Z_{\Lambda\Pi}^{TM}$  асимптотично прямують до хвильового опору середовища  $Z$ , але при  $\lambda \rightarrow 2a/m$   $Z_{\Lambda\Pi}^{TE} \rightarrow \infty$ ,  $Z_{\Lambda\Pi}^{TM} \rightarrow 0$ .

Виходячи з вищевикладеного виявляється, що основні особливості фізичних явищ, які відбуваються в плоскопаралельному хвилеводі можна одержати, розглядаючи поширення між ідеально провідними площинами лише однієї однорідної плоскої хвилі. Це не випадковий результат! Можливість такого розгляду лежить в основі *метода* або *концепції парціальних хвиль*. Згідно з цією концепцією електромагнітне поле будь-якої хвилі в будь-якій лінії передачі НВЧ може бути представлено як суперпозиція полів нескінченної кількості елементарних (*парціальних*) плоских однорідних хвиль, кожна з яких поширюється під певним кутом до осі лінії передачі. Використовуючи цей метод, вдається виразити електромагнітне поле як завгодно складної конфігурації в лінії передачі НВЧ, через суперпозицію полів самих простих однорідних плоских хвиль. Завдяки цьому даний метод дуже зручний та наочний при виявленні основних фізичних особливостей поширення хвиль в лініях передачі НВЧ. В той же час йому притаманні і недоліки. За його допомогою складно або незручно розглядати поширення електромагнітних хвиль в направляючих системах з складною формою поперечного перерізу, заповнених анізотропним або неоднорідним середовищем.

#### 4.4. Скалярні рівняння Гельмгольца для регулярної лінії передачі

При розгляді електромагнітних хвиль, що можуть поширюватись в лініях передачі НВЧ, особливий інтерес викликають так звані *власні* або *вільні* хвилі, які існують в лініях передачі за відсутності сторонніх струмів та зарядів. Інтерес до таких хвиль пов'язаний з тим, що будь-яке електромагнітне поле в лінії передачі може бути представлено у

вигляді суперпозиції полів власних хвиль<sup>1</sup>. Теоретичний аналіз властивостей таких хвиль є значно простішим, ніж задача про поширення в лінії передачі хвилі з довільним розподілом поля. З математичної точки зору ця простота виражається в тому, що електричне і магнітне поля власних хвиль є розв'язками однорідних рівнянь Гельмгольца

$$\Delta \vec{E} + K^2 \vec{E} = 0, \quad \Delta \vec{H} + K^2 \vec{H} = 0,$$

де  $K = k_0 \sqrt{\epsilon \mu}$  – хвильове число плоскої хвилі в середовищі.

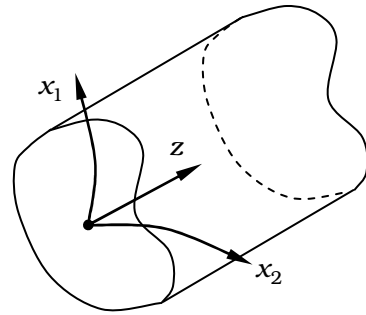
В будь-якій лінії передачі, заповненій лінійним однорідним ізотропним середовищем, завжди є виділений напрямок, що відповідає напрямку поширення хвилі. Припустимо, що лінія передачі заповнена саме таким середовищем і введемо узагальнену циліндричну систему координат  $x_1, x_2, z$  таким чином, щоб напрямок поширення власних хвиль співпадав з напрямком осі  $z$  (рис. 4.4.1).

Аналіз електромагнітного поля власних хвиль в лініях передачі НВЧ доцільно провести таким чином, щоб кількість невідомих функцій, які необхідні для визначення електромагнітного поля, була якомога меншою. Певні переваги при цьому мають вектори Герца, введені в § 2.8, тому при розгляді властивостей власних електромагнітних хвиль в лінії передачі НВЧ будемо виходити з однорідних рівнянь Гельмгольца для векторів Герца  $\vec{P}$  та  $\vec{\Psi}$ . Ці рівняння ідентичні, тому далі для зменшення кількості математичних викладок введемо новий вектор  $\vec{\Phi}$ , який в залежності від обставин будемо ототожнювати або з електричним вектором Герца  $\vec{P}$  або магнітним вектором Герца  $\vec{\Psi}$ .

Вектор  $\vec{\Phi}$  задовольняє векторне однорідне рівняння Гельмгольца

$$\Delta \vec{\Phi} + K^2 \vec{\Phi} = 0. \quad (4.4.1)$$

В § 2.9 було показано, що при виконанні умов (2.9.4) це векторне рівняння може бути зведене до скалярного рівняння Гельмгольца для однієї з проєкцій вектора  $\vec{\Phi}$  на осі системи координат  $x_1, x_2, z$ . В уза-



**Рис. 4.4.1. Узагальнена циліндрична система координат  $x_1, x_2, z$**

<sup>1</sup> В математичній фізиці доводиться, що розв'язок будь-якого лінійного неоднорідного диференціального рівняння може бути однозначно представлений у вигляді розкладу по повній ортогональній системі базисних функцій. Власні функції фізичної задачі (відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння) завжди утворюють таку систему функцій.

загальненій циліндричній системі координат умова (2.9.4) задовольняється в загальному випадку лише для повздовжньої координати  $z$ . Тому рівняння (4.4.1) можна завжди звести до скалярного рівняння для повздовжньої  $z$ -складової вектора  $\vec{\Phi}$

$$\Delta \Phi_z + K^2 \Phi_z = 0. \quad (4.4.2)$$

В такій формі запису це рівняння ідентичне рівнянням (2.9.5) для потенціалів  $U$  та  $V$ .

Розв'язок рівняння (4.4.2) легко одержати використовуючи метод розділення змінних Фур'є. Для цього представимо  $\Phi_z(x_1, x_2, z)$  у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить тільки від повздовжньої координати  $z$ , а інша – від поперечних координат  $x_1, x_2$ :

$$\Phi_z(x_1, x_2, z) = \varphi(x_1, x_2) \zeta(z). \quad (4.4.3)$$

Підставимо вираз для  $\Phi_z(x_1, x_2, z)$  у (4.4.2) і врахуємо, що скалярний оператор Лапласа в узагальненій циліндричній системі координат має вигляд

$$\Delta = \Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

де  $\Delta_{\perp}$  – поперечений оператор Лапласа, який діє лише на функції поперечних координат  $x_1, x_2$ . Одержимо рівняння

$$\zeta(z) \Delta_{\perp} \varphi(x_1, x_2) + \varphi(x_1, x_2) \frac{d^2 \zeta(z)}{dz^2} + K^2 \varphi(x_1, x_2) \zeta(z) = 0.$$

Поділимо його на добуток (4.4.3), певна річ вважаючи, що цей добуток тотожно не дорівнює нулю (це є тривіальним розв'язком рівняння (4.4.2), який нас не цікавить). Після ділення одержане рівняння можна записати як два рівняння

$$\frac{1}{\varphi(x_1, x_2)} \Delta_{\perp} \varphi(x_1, x_2) + K_{\perp}^2 = 0, \quad \frac{1}{\zeta(z)} \frac{d^2 \zeta(z)}{dz^2} + \beta^2 = 0, \quad (4.4.4)$$

в яких константи розділення змінних  $K_{\perp}$  та  $\beta$  пов'язані між собою співвідношенням

$$K^2 = K_{\perp}^2 + \beta^2, \quad (4.4.5)$$

яке називається *характеристичним рівнянням лінії передачі*.

Друге рівняння (4.4.4) ідентичне рівнянню для лінійного гармонічного осцилятора і, отже, розв'язок цього рівняння – функція  $\zeta(z)$  – має вигляд

$$\zeta(z) = A e^{i\beta z} + B e^{-i\beta z}. \quad (4.4.6)$$

З виразу для  $\zeta(z)$  очевидно, що хвильове число  $\beta$  визначає зміну поля

в напрямку поширення хвилі, тому величину  $\beta$  називають *повздовжнім хвильовим числом* або *сталю поширення хвилі в лінії передачі*. Відповідно хвильове число

$$K_{\perp} = \sqrt{K^2 - \beta^2} \quad (4.4.7)$$

природно назвати *критичним* або *поперечним хвильовим числом* хвилі в лінії передачі. Зміст цього поняття буде з'ясований далі.

Враховуючи (4.4.6), функція  $\Phi_z(x_1, x_2, z)$  приймає вигляд

$$\Phi_z(x_1, x_2, z) = A\phi(x_1, x_2)e^{i\beta z} + B\phi(x_1, x_2)e^{-i\beta z}. \quad (4.4.8)$$

З цього виразу випливає, що електромагнітне поле в лінії передачі НВЧ, в загальному випадку, є суперпозицією полів прямих та зворотних вільних хвиль. Щоб показати це, достатньо підставити узагальнений вектор Герца  $\vec{\Phi} = \{0, 0, \Phi_z\}$ , де  $\Phi_z$  визначається формулою (4.4.8), у (2.8.20), ототожнюючи по черзі вектор  $\vec{\Phi}$  то з електричним, то з магнітним векторами Герца.

Функція  $\phi(x_1, x_2)$  називається мембранною функцією і задовольняє рівнянню мембрани – двовимірному рівнянню Гельмгольца

$$\Delta_{\perp}\phi(x_1, x_2) + K_{\perp}^2\phi(x_1, x_2) = 0. \quad (4.4.9)$$

Згідно (4.4.8) ця функція визначає розподіл поля в поперечному перерізі лінії передачі при  $z = \text{const}$ .

Відповідно до концепції парціальних хвиль, електромагнітне поле власних хвиль в лінії передачі НВЧ утворюється суперпозицією полів однорідних плоских хвиль, які поширюються під кутом  $\pi/2 - \phi$  до повздовжньої осі  $z$  лінії передачі (див. рис. 4.3.1). Парціальні хвилі можуть мати як електричну так і магнітну поляризацію і при  $0 < \phi < \pi/2$  їх поля відповідно утворюють поле власних ТМ- та ТЕ-хвиль. При  $\phi = 0$  поширення цих хвиль в лінії передачі припиняється (див. § 4.3). Якщо ж парціальні хвилі поширюються під кутом  $\phi = \pi/2$ , відповідне електромагнітне поле є полем однорідної плоскої хвилі. Таким чином, в загальному випадку електромагнітне поле в лінії передачі НВЧ є суперпозицією полів власних Т-, ТМ- та ТЕ-хвиль (в курсі загальної електродинаміки це доводиться математично строго).

Для Т-хвиль  $\beta = K$  і, отже, мембранна функція для такої хвилі є розв'язком рівняння Лапласа

$$\Delta_{\perp}\phi(x_1, x_2) = 0. \quad (4.4.10)$$

Для ТЕ- та ТМ-хвиль  $\beta \neq K$  і мембранна функція  $\phi(x_1, x_2)$  є розв'язком більш складного рівняння Гельмгольца (4.4.9).

#### 4.5. Електромагнітне поле вільних хвиль в лініях передачі

Раніше на прикладі однорідних плоских хвиль була показана еквівалентність прямих та зворотних хвиль. Те ж правило виконується і для хвиль в лініях передачі, які заповнені лінійним однорідним ізо- тропним середовищем. Щоб пересвідчитись в цьому достатньо скористатись вищевказаним твердженням для плоских хвиль та концепцією парціальних хвиль. Дійсно, поле будь-якої хвилі в лінії передачі може бути представлено суперпозицією полів парціальних плоских хвиль. Властивості прямих та зворотних парціальних хвиль еквівалентні, відповідно, властивості прямих та зворотних вільних хвиль в лініях передачі НВЧ також виявляються еквівалентними.

Розглянемо повздовжньо-однорідну лінію передачі НВЧ, заповнену лінійним однорідним ізо- тропним середовищем. Далі, враховуючи вищесказане, обмежимося аналізом електромагнітного поля тільки прямих хвиль. Узагальнений вектор Герца  $\vec{\Phi} = \{0, 0, \Phi_z\}$  цих хвиль залежить від координати  $z$  як  $e^{i\beta z}$ .

Найбільш часто в електродинаміці НВЧ використовуються лінії передачі з двосторонньою або радіальною симетрією. Система з двосторонньою симетрією інваріантна відносно перетворення  $x_{1,2} \rightarrow -x_{1,2}$  (див. рис. 4.4.1); прикладом такої системи є прямокутний хвилевід (див. рис. 4.1.1г) або мікросмужкова лінія (див. рис. 4.1.1з). Властивості системи з радіальною симетрією не залежать від кута, який утворює радіус-вектор  $\vec{r}$  з однією з осей  $x_1, x_2$ , а залежать лише від відстані  $r$ . Типовими системами з радіальною симетрією є коаксіальний кабель (див. рис. 4.1.1б) та круглий хвилевід (див. рис. 4.1.1д). Виходячи з цього, проілюструємо в явному вигляді як визначити складові електромагнітного поля вільних хвиль у випадку прямокутної та циліндричної системи координат.

Підставимо вираз для повздовжньої складової узагальненого вектора Герца  $\Phi_z(x_1, x_2, z) = A\phi(x_1, x_2)e^{i\beta z}$  в формули (2.9.7) для прямокутної декартової системи координат та (2.9.9) для циліндричної системи координат, замінюючи при необхідності узагальнену мембранну функцію  $\phi(x_1, x_2)$  на електричну мембранну функцію  $\chi(x_1, x_2)$  або магнітну мембранну функцію  $\psi(x_1, x_2)$ . Функції  $\chi(x_1, x_2)$  та  $\psi(x_1, x_2)$  названі так, тому що пов'язані відповідно з електричним  $\vec{E}$  та магнітним  $\vec{H}$  векторами Герца.

В прямокутній декартовій системі координат, враховуючи, що  $U = \Phi_z$ ,  $V = \Psi_z$ , формули (2.9.7) набувають вигляду

$$\begin{aligned}
E_x(x, y, z) &= \left( i\beta \frac{\partial \chi(x, y)}{\partial x} + i k_0 \mu \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \right) e^{i\beta z}, \\
E_y(x, y, z) &= \left( i\beta \frac{\partial \chi(x, y)}{\partial y} - i k_0 \mu \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \right) e^{i\beta z}, \\
E_z(x, y, z) &= (K^2 - \beta^2) \chi(x, y) e^{i\beta z}, \\
H_x(x, y, z) &= \left( -i k_0 \varepsilon \frac{\partial \chi(x, y)}{\partial y} + i\beta \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \right) e^{i\beta z}, \\
H_y(x, y, z) &= \left( i k_0 \varepsilon \frac{\partial \chi(x, y)}{\partial x} + i\beta \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \right) e^{i\beta z}, \\
H_z(x, y, z) &= (K^2 - \beta^2) \psi(x, y) e^{i\beta z}.
\end{aligned} \tag{4.5.1}$$

Відповідно в циліндричній системі координат при  $U = \Pi_z$ ,  $V = \Psi_z$  формули (2.9.9) можуть бути записані як

$$\begin{aligned}
E_r(r, \varphi, z) &= \left( i\beta \frac{\partial \chi(r, \varphi)}{\partial r} + i k_0 \mu \frac{1}{r} \frac{\partial \psi(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right) e^{i\beta z}, \\
E_\varphi(r, \varphi, z) &= \left( i\beta \frac{1}{r} \frac{\partial \chi(r, \varphi)}{\partial \varphi} - i k_0 \mu \frac{\partial \psi(r, \varphi)}{\partial r} \right) e^{i\beta z}, \\
E_z(r, \varphi, z) &= (K^2 - \beta^2) \chi(r, \varphi) e^{i\beta z}, \\
H_r(r, \varphi, z) &= \left( -i k_0 \varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial \chi(r, \varphi)}{\partial \varphi} + i\beta \frac{\partial \psi(r, \varphi)}{\partial r} \right) e^{i\beta z}, \\
H_\varphi(r, \varphi, z) &= \left( i k_0 \varepsilon \frac{\partial \chi(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} i\beta \frac{\partial \psi(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right) e^{i\beta z}, \\
H_z(r, \varphi, z) &= (K^2 - \beta^2) \psi(r, \varphi) e^{i\beta z}.
\end{aligned} \tag{4.5.2}$$

Зупинимось тепер на питанні про побудову зображень електромагнітного поля. Вирази (4.5.1)–(4.5.2) дозволяють визначити напрямки векторів  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  в будь-якій точці простору, оскільки в декартовій системі координат

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_x + \vec{e}_y E_y + \vec{e}_z E_z, \quad \vec{H} = \vec{e}_x H_x + \vec{e}_y H_y + \vec{e}_z H_z,$$

а в циліндричній –

$$\vec{E} = \vec{e}_r E_r + \vec{e}_\varphi E_\varphi + \vec{e}_z E_z, \quad \vec{H} = \vec{e}_r H_r + \vec{e}_\varphi H_\varphi + \vec{e}_z H_z.$$

Але в більшості випадків виявляється зручніше оперувати таким поняттям як *силова лінія* поля. Силова лінія – це лінія, дотична до якої в кожній точці співпадає з напрямком вектора поля; кількість таких ліній, що перетинає будь-яку поверхню або контур, пропорційна до-

вжині вектора (амплітуді) поля. Для побудови силових ліній поля в загальному випадку необхідно розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\frac{h_1 dx_1}{A_1} = \frac{h_2 dx_2}{A_2} = \frac{h_3 dx_3}{A_3}, \quad (4.5.3)$$

де  $h_1, h_2, h_3$  – коефіцієнти Ламе системи ортогональних координат  $x_1, x_2, x_3$ ,  $A_1, A_2, A_3$  – проекція вектора поля на осі системи координат. В прямокутній декартовій системі координат рівняння (4.5.3) має вигляд

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}, \quad (4.5.4)$$

а в циліндричній системі координат воно може бути записане як

$$\frac{dr}{A_r} = \frac{rd\phi}{A_\phi} = \frac{dz}{A_z}. \quad (4.5.5)$$

Ці рівняння, в загальному випадку, описують просторові криві. Однак, якщо електричне або магнітне поле хвилі лежить в площині перпендикулярній до напрямку поширення хвилі (тут – осі  $z$ ), то рівняння силової лінії спрощується. Розглянемо, наприклад, випадок ТЕ-хвилі, електричне поле якої повністю лежить в площині  $xy$  (прямокутна система координат обрана тому, що рівняння (4.5.3) в ній має найбільш простий вигляд). Підставляючи вирази для  $E_x, E_y$  з (4.5.1) у (4.5.4), одержуємо

$$\frac{dx}{ik_0\mu \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} e^{i\beta z}} = \frac{dy}{-ik_0\mu \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} e^{i\beta z}}.$$

Це рівняння можна представити як

$$ik_0\mu \left( \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} dy \right) e^{i\beta z} = 0,$$

причому вираз в дужках є повним диференціалом функції  $\psi(x,y)$ . Узагальнюючи цей результат на випадок як електричної так і магнітної мембранної функції в узагальненій циліндричній системі координат, одержуємо просте рівняння для силових ліній

$$\chi = \text{const} \text{ або } \psi = \text{const}. \quad (4.5.6)$$

Тобто, силові лінії електричного поля ТЕ-хвиль ( $H_z \neq 0$ ,  $\vec{E}$  лежить в площині поперечного перерізу лінії передачі) є лініями рівня функції  $\psi$ , а силові лінії магнітного поля ТМ-хвиль ( $E_z \neq 0$ ,  $\vec{H}$  лежить в площині поперечного перерізу лінії передачі) є лініями рівня функції  $\chi$ .

#### 4.6. Граничні умови для мембранної функції

Для однозначного визначення електромагнітного поля вільних хвиль в лінії передачі НВЧ необхідно знайти розв'язок рівняння (4.4.2). Загальний розв'язок цього рівняння відомий – він описується формулою (4.4.8), в якій  $A$  та  $B$  – довільні сталі. Значення цих сталих можна визначити, тільки при умові, що потужність джерел, які утворюють електромагнітне поле в лінії передачі, відома. Але ця задача не розглядається при аналізі поля вільних електромагнітних хвиль, тому для визначення поля необхідно знайти лише явний вираз для мембранної функції  $\phi(x_1, x_2)$  та значення сталої поширення хвилі  $\beta$ . Якщо припустити, що функція  $\phi(x_1, x_2)$  відома, то відоме і поперечне хвильове число хвилі  $K_\perp$ , яке можна визначити з рівняння (4.4.9). Відповідно, знаючи  $K_\perp$ , з (4.4.5) можна визначити  $\beta$ . Таким чином, основною задачею, яку необхідно розв'язати, щоб визначити поле електромагнітних хвиль в лінії передачі НВЧ, є задача визначення мембранної функції хвилі  $\phi(x_1, x_2)$ .

Мембранна функція задовольняє двовимірне лінійне диференціальне рівняння (4.4.9). Оскільки це рівняння є диференціальним рівнянням другого порядку для знаходження його однозначного розв'язку – функції  $\phi(x_1, x_2)$  – необхідно мати дві граничні умови. Певна річ, ці граничні умови повинні бути наслідком граничних умов для складових електромагнітних полів на контурі поперечного перерізу лінії передачі, а також на границі розділу середовищ, які заповнюють лінію передачі (для ліній передачі з неоднорідним заповненням). При розгляді конкретних задач можна записувати умови для полів, а потім вже переходити до умов для мембранної функції. Але це не зручно. Набагато простіше, знайти загальні граничні умови для мембранної функції виходячи з загальних граничних умов для полів, і потім вже користуватись тільки умовами для мембранної функції. Отримання цих умов і є предметом розгляду даного параграфа.

Розглянемо регулярну лінію передачі НВЧ з неоднорідним заповненням і довільним поперечним перерізом (рис. 4.6.1). Нехай на криволінійній поверхні розділу  $S$  двох середовищ задана звичайна умова неперервності тангенційних складових полів (див. § 2.4)



$$\left[ \vec{e}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \right] = 0, \quad \left[ \vec{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \right] = 0, \quad (4.6.1)$$

де  $\vec{e}_n$  – одиничний вектор нормалі, направлений з першого середовища в друге. Також введемо одиничні вектори  $\vec{e}_l$ ,  $\vec{e}_z$ , дотичні до контуру  $L$  поверхні розділу середовищ  $S$  (див. рис. 4.6.1). Спроектуємо векторні граничні умови (4.6.1) на контур  $L$ :

$$\begin{aligned} (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \vec{e}_z &= 0, \quad (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \vec{e}_l = 0, \\ (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot \vec{e}_z &= 0, \quad (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot \vec{e}_l = 0, \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

де індекси 1 та 2 відповідають середовищам, що знаходяться по обидва боки від границі розділу.

В § 4.4 показано, що електромагнітне поле в лінії передачі може бути представлене суперпозицією полів Т-, ТЕ- та ТМ-хвиль. Враховуючи це та вирази (2.8.20), (4.4.8), у випадку прямих хвиль це поле можна представити у вигляді

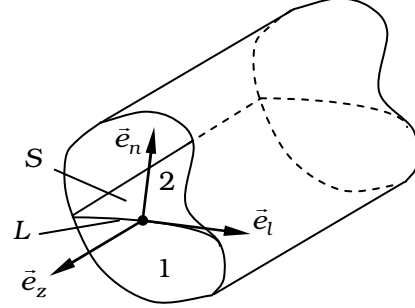
$$\begin{aligned} \vec{E} &= (i\beta \text{grad}_\perp \chi + \vec{e}_z K_\perp^2 \chi + \vec{e}_z i\omega\mu\mu_0 \text{rot}_\perp \psi) e^{i\beta z}, \\ \vec{H} &= (i\beta \text{grad}_\perp \psi + \vec{e}_z K_\perp^2 \psi - \vec{e}_z i\omega\epsilon\epsilon_0 \text{rot}_\perp \chi) e^{i\beta z}, \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

де  $\text{grad}_\perp a = \text{grad} a - \partial^2 a / \partial z^2$ ,  $\text{rot}_\perp \vec{a} = \text{rot} \vec{a} - (\text{rot} \vec{a})_z$  для довільної скалярної величини  $a$  або векторної величини  $\vec{a}$ . З цих формул можна знайти проекції векторів  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  на напрямки, що визначаються ортами  $\vec{e}_l$  та  $\vec{e}_z$ :

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{e}_z &= K_\perp^2 \chi e^{i\beta z}, \quad \vec{H} \cdot \vec{e}_z = K_\perp^2 \psi e^{i\beta z}, \\ \vec{E} \cdot \vec{e}_l &= (i\beta \text{grad}_\perp \chi \cdot \vec{e}_l + \vec{e}_z \cdot \vec{e}_l K_\perp^2 \chi + \vec{e}_z \cdot \vec{e}_l i\omega\mu\mu_0 \text{rot}_\perp \psi) e^{i\beta z} = \\ &= \left( i\beta \frac{\partial \chi}{\partial l} + i\omega\mu\mu_0 \text{grad}_\perp \psi \cdot [\vec{e}_z \times \vec{e}_l] \right) e^{i\beta z} = \left( i\beta \frac{\partial \chi}{\partial l} + i\omega\mu\mu_0 \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) e^{i\beta z}, \\ \vec{H} \cdot \vec{e}_l &= \left( i\beta \frac{\partial \psi}{\partial l} - i\omega\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \chi}{\partial n} \right) e^{i\beta z}, \end{aligned}$$

де  $\partial / \partial n$  – похідна по нормалі, а  $\partial / \partial l$  – похідна по дотичній до контуру поперечного перерізу  $L$ . Підставляючи одержані вирази в умови (4.6.2), одержуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} K_{11}^2 \chi_1 &= K_{12}^2 \chi_2, \quad K_{11}^2 \psi_1 = K_{12}^2 \psi_2, \\ \beta \frac{\partial \chi_1}{\partial l} + \omega\mu_1\mu_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} &= \beta \frac{\partial \chi_2}{\partial l} + \omega\mu_2\mu_0 \frac{\partial \psi_2}{\partial n}, \end{aligned}$$



**Рис. 4.6.1. Лінія передачі НВЧ з неоднорідним заповненням**

$$\beta \frac{\partial \psi_1}{\partial l} - \omega \epsilon_1 \epsilon_0 \frac{\partial \chi_1}{\partial n} = \beta \frac{\partial \psi_2}{\partial l} - \omega \epsilon_2 \epsilon_0 \frac{\partial \chi_2}{\partial n}. \quad (4.6.4)$$

В загальному випадку систему рівнянь (4.6.4) не можна представити як дві окремі системи рівнянь – одна для ТЕ-хвиль, а інша – для Т- та ТМ-хвиль. Це означає, що в загальному випадку ТЕ-, Т- та ТМ-хвилі в лінії передачі не розділяються (не можуть існувати незалежно одна від одної). Тільки при умові

$$\frac{\partial \chi}{\partial l} = \frac{\partial \psi}{\partial l} = 0 \quad (4.6.5)$$

граничні умови для ТЕ-, Т- та ТМ-хвиль можуть розглядатись незалежно. Очевидно, що це можливо, коли функції  $\chi$  та  $\psi$  приймають сталі значення на контурі  $L$  поверхні розділу середовищ  $S$ .

Припустимо, що друге середовище є ідеальним провідником (див. рис. 4.6.1). Тоді на контурі  $L$  границі розділу середовищ тангенціальні складові електричного поля повинні обертатись в нуль, тобто повинні виконуватись умови

$$K_{\perp}^2 \chi = 0, \quad \beta \frac{\partial \chi}{\partial l} + \omega \mu_0 \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad (4.6.6)$$

де для спрощення ми опустили індекс 1 при величинах, які відповідають першому середовищу. З першої умови (4.6.6) при  $K_{\perp} \neq 0$  випливає, що функція  $\chi$  повинна обертатись в нуль на контурі  $L$ . Очевидно, що  $\partial \chi / \partial l$  також дорівнює нулю на цьому контурі. З урахуванням цього з другої умови (4.6.6) одержуємо граничну умову для ТЕ-хвиль:  $\partial \psi / \partial n = 0$  на контурі  $L$ .

Таким чином, граничні умови на поверхні ідеального провідника для ТЕ- та ТМ-хвиль мають вигляд:

$$\chi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0. \quad (4.6.7)$$

У випадку Т-хвиль  $K_{\perp} = 0$ , і ці граничні умови набувають вигляду

$$\frac{\partial \chi}{\partial l} = 0 \quad \text{або} \quad \chi = \text{const}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0. \quad (4.6.8)$$

Тобто мембранна функція Т-хвилі повинна приймати постійні значення на поверхні ідеального провідника (ця поверхня є екіпотенціальною).

З граничних умов (4.6.7)–(4.6.8) випливає, що в металевих лініях передачі з ідеальною провідністю, Т-, ТЕ- та ТМ-хвилі можуть існувати незалежно одна від одної.

#### 4.7. Дисперсія та явище відсічки в мікрохвильових лініях передачі

Існування в лініях передачі дисперсії та явища відсічки було показано в § 4.3 на прикладі хвиль, що поширюються між ідеально провідними паралельними площинами. В цьому параграфі розглянемо ці явища, виходячи із більш загальних міркувань, але припускаючи, для спрощення, що в лінії передачі НВЧ немає втрат (про дисипацію енергії в лініях передачі НВЧ див. § 4.8).

Для визначення фазової та групової швидкості хвиль в лініях передачі НВЧ скористаємось формулами § 3.1, в яких слід лише замінити сталу поширення Т-хвилі  $K$  на сталу поширення хвилі в лінії передачі  $\beta$ :

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta}, \quad v_{gp} = \frac{d\omega}{d\beta}. \quad (4.7.1)$$

Виразимо сталу поширення  $\beta$  з (4.4.5) та підставимо одержаний вираз у (4.7.1):

$$v_\phi = \frac{\omega}{\sqrt{K^2 - K_\perp^2}} = \frac{u}{\sqrt{1 - \left(\frac{K_\perp}{K}\right)^2}}, \quad v_{gp} = \left[ \frac{d}{d\omega} \sqrt{K^2 - K_\perp^2} \right]^{-1} =$$

$$= \left[ \frac{K \frac{dK}{d\omega} - K_\perp \frac{dK_\perp}{d\omega}}{\sqrt{K^2 - K_\perp^2}} \right]^{-1} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{K_\perp}{K}\right)^2}}{\frac{dK}{d\omega} - \frac{K_\perp}{K} \frac{dK_\perp}{d\omega}} = \frac{u^2}{v_\phi \left( 1 + u k_0 \frac{dn_{сеп}}{d\omega} - u \frac{K_\perp}{K} \frac{dK_\perp}{d\omega} \right)}, \quad (4.7.2)$$

де  $u = \omega / K = c / n_{сеп}$  – фазова швидкість Т-хвилі в середовищі з показником заломлення  $n_{сеп} = K / k_0$ .

Таким чином, відоме співвідношення  $v_\phi v_{gp} = u^2$  буде виконуватись для хвиль в лінії передачі НВЧ тільки при умові, що величини  $n_{сеп}$  та  $K_\perp$  є сталими (не залежать від колової частоти  $\omega$ ). В протилежному випадку, тобто при умові, що  $dn_{сеп}/d\omega \neq 0$  або  $dK_\perp/d\omega \neq 0$ , в лінії передачі НВЧ можливе існування дисперсних хвиль. Дуже рідкісний випадок, коли обидві ці похідні відмінні від нуля, але  $k_0 \frac{dn}{d\omega} - \frac{K_\perp}{K} \frac{dK_\perp}{d\omega} = 0$  розглядати не будемо.

В більшості випадків дисперсія показника заломлення середовища  $n_{сеп}$  в межах робочого діапазону частот лінії передачі є слабкою, тому

основною причиною появи дисперсії в лініях передачі НВЧ, як правило, є скінченність поперечного хвильового числа  $K_{\perp}$  та його залежність від частоти  $\omega$ . Враховуючи це, в подальшому, для спрощення, будемо вважати показник заломлення середовища  $n_{сер}$  сталою величиною і розглянемо властивості хвиль в лініях передачі при  $K_{\perp}^2 = 0$  та  $K_{\perp}^2 \neq 0$ .

При  $K_{\perp}^2 = 0$  та  $n_{сер} = \text{const}$  дисперсія в лінії передачі відсутня і  $v_{\phi} = v_{gr} = u$ . В цьому випадку в лінії передачі поширюються Т-хвилі.

В лініях передачі НВЧ, в яких  $K_{\perp}^2 \neq 0$ , поняття довжини хвилі  $\lambda$ , що було раніше введене для плоских хвиль в нескінченному однорідному ізотропному середовищі (див. (3.1.16)), потребує певного уточнення. Якщо раніше для плоских електромагнітних хвиль довжина хвилі у вакуумі визначалась як  $\lambda_0 = 2\pi / k_0$ , а у середовищі з показником заломлення  $n_{сер}$  як  $\lambda = \lambda_0 / n$ , то в лінії передачі з дисперсією замість  $\lambda_0$  або  $\lambda$  необхідно ввести поняття *довжини хвилі в лінії передачі*

$$\lambda_{\text{ЛП}} = \lambda_{\parallel} = \frac{2\pi v_{\phi}}{\omega} = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (4.7.3)$$

З характеристичного рівняння (4.4.5) випливає вираз для довжини хвилі в лінії передачі

$$\lambda_{\parallel} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{n_{сер}^2 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\perp}}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\perp}}\right)^2}}, \quad (4.7.4)$$

де

$$\lambda_{\perp} = \frac{2\pi}{K_{\perp}} \quad (4.7.5)$$

– критична або поперечна довжина хвилі, пов'язана з критичною (поперечною) частотою співвідношенням

$$\omega_{\perp} = \frac{c}{n_{сер}} K_{\perp}, \quad v_{кр} = v_{\perp} = \frac{c}{n_{сер}} \frac{K_{\perp}}{2\pi}, \quad (4.7.6)$$

де  $n_{сер}$  – коефіцієнт заломлення середовища, яке заповнює лінію передачі. В багатьох лініях передачі НВЧ, наприклад, в металевих хвильоводах, величина  $K_{\perp}$  (і відповідно  $\lambda_{\perp}$ ) для кожної власної хвилі є сталою величиною і залежить лише від геометрії поперечного перерізу лінії передачі. При цьому виявляється, що довжина хвилі в лінії передачі є функцією тільки  $\lambda_0$  чи  $\lambda$  і може бути легко обчислена за формулою (4.7.4).

З'ясуємо фізичний зміст величин  $\lambda_{\perp}$  та  $\nu_{\perp}$ . З (4.7.4) випливає, що при  $\lambda_{\perp} = \lambda_0 / n = \lambda$  довжина хвилі в лінії передачі НВЧ  $\lambda_{\parallel}$  обертається на нескінченність, тобто поширення хвилі в лінії передачі припиняється (стала поширення  $\beta = 2\pi / \lambda_{\parallel}$  стає рівною нулю). Отже, при довжині хвилі  $\lambda = \lambda_0 / n \geq \lambda_{\perp}$  (або при частоті  $\nu = \nu_0 n \leq \nu_{\perp}$ , де  $\nu_0 = c / \lambda_0$ ), хвиля в лінії передачі поширюватись не може. Відбувається так зване явище *відсічки*, а режим роботи при якому це явище спостерігається називається *поза межним режимом роботи* лінії передачі. Діапазон довжин хвиль (або частот), для якого  $\lambda < \lambda_{\perp}$  ( $\nu > \nu_{\perp}$ ) і згасання хвилі є достатньо малим, називається *робочим діапазоном* довжин хвиль (частот) лінії передачі, а режим роботи при якому реалізуються ці умови – *робочим режимом* роботи лінії передачі.

Розглянемо хвилю в лінії передачі, для якої  $K_{\perp}^2 > 0$ . В цьому випадку при  $K_{\perp} < K$  (в робочому режимі роботи лінії передачі) фазова швидкість хвилі  $v_{\phi}$  виявляється більшою за фазову швидкість світла (Т-хвилі)  $u$ , оскільки підкореневий вираз в (4.7.2) є меншим за одиницю. Такі хвилі, для яких виконується співвідношення  $v_{\phi} > u$ , називаються *швидкими*.

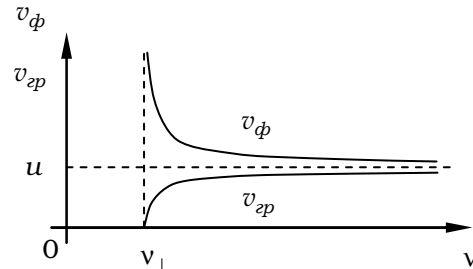
В поза межному режимі роботи лінії передачі, навпаки,  $K_{\perp} > K$  і, виходячи з (4.4.5), стала поширення хвилі стає чисто уявною

$$\beta = i|\beta'| = i\left|\sqrt{K_{\perp}^2 - K^2}\right|. \quad (4.7.7)$$

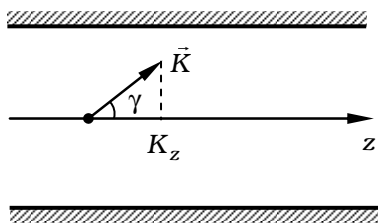
За таких умов в лінії передачі НВЧ існують не хвилі, а згасаючі коливання, амплітуда яких різко зменшується при збільшенні координати  $z$ . Відмітимо, що згасання амплітуди коливань в даному випадку можливе і за відсутності втрат в середовищі, яке заповнює лінію передачі, або в металевих елементах конструкції лінії передачі. В цьому випадку амплітуда хвилі зменшується за рахунок її інтенсивного відбиття – при зміні в просторі поля падаючої хвилі виникає відбита хвиля, яка виносить з лінії передачі значну частину енергії. Таким чином, в поза межному режимі роботи лінії передачі падаюча хвиля постійно віддає свою енергію відбитій хвилі, що й призводить до суттєвого зменшення амплітуди. Електромагнітне явище набуває коливальний, а не хвильовий характер.

При наближенні частоти хвилі  $\nu$  до критичної частоти  $\nu_{\perp}$  відбуваються суттєві зміни усіх характеристик хвилі. Наприклад, при  $\nu \rightarrow \nu_{\perp}$  групова швидкість прямує до нуля, а фазова – у нескінченність (рис. 4.7.1). Щоб пояснити це явище скористаємось методом пар-

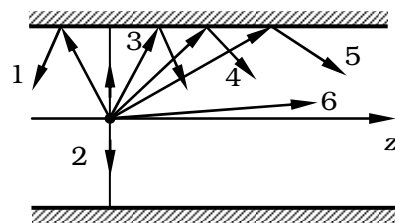
ціальних хвиль. Електромагнітне поле власних хвиль в лінії передачі представимо у вигляді суперпозиції полів однорідних плоских хвиль, що поширюються в лінії передачі під різними напрямками до її осі. Розглянемо властивості однієї з плоских хвиль, що поширюється під кутом  $\gamma$  до осі  $z$  (рис. 4.7.2). Фазова швидкість такої хвилі визначається формулою (3.5.11), а швидкість переносу енергії – формулою (3.5.15). При збільшенні кута  $\gamma$  проекція хвильового вектора плоскої хвилі  $\vec{K}$  на вісь  $z$  зменшується за законом косинуса – відповідно зменшується і швидкість переносу енергії. Навпаки, проекція фазової швидкості на вісь  $z$  зростає при збільшенні кута  $\gamma$  і при  $\gamma = \pi/2$  стає нескінченною. Отже, при  $\nu \rightarrow \nu_{\perp}$  кут між напрямком поширення парціальних хвиль в лінії передачі та віссю  $z$  асимптотично прямує до  $\pi/2$ , що призводить до різких змін властивостей власних хвиль в лінії передачі. На рис. 4.7.3 показано напрямки поширення парціальних хвиль в лінії передачі НВЧ для різних частот  $\nu$ . На високих частотах ( $\nu \gg \nu_{\perp}$ ) довжина  $z$ -складової хвильового вектора  $K_z = K \cos \gamma$  парціальних хвиль майже дорівнює хвильовому числу хвилі  $K$ , отже, фазова та групова швидкість власних хвиль при  $\nu \gg \nu_{\perp}$  асимптотично набли-



**Рис. 4.7.1. Залежність фазової  $v_{\phi}$  та групової  $v_{gp}$  швидкостей хвиль в лінії передачі НВЧ від частоти  $\nu$  при  $K_{\perp}^2 = \text{const} > 0$**



**Рис. 4.7.2. Поширення парціальної плоскої хвилі під кутом  $\gamma$  до повздовжньої осі лінії передачі**



**Рис. 4.7.3. Залежність напрямку поширення парціальних плоских хвиль в лінії передачі від частоти  $\nu$ : 1 –  $\nu_1 < \nu_{\perp}$ ; 2 –  $\nu_2 = \nu_{\perp}$ ; 3 –  $\nu_3 > \nu_{\perp}$ ; 4 –  $\nu_4 > \nu_3$ ; 5 –  $\nu_5 > \nu_4$ ; 6 –  $\nu_6 \gg \nu_{\perp}$**

жаються до фазової швидкості світла  $u$ , причому  $v_\phi > u$ ,  $v_{gp} < u$ .

Зовсім інші властивості мають електромагнітні хвилі в лініях передачі при  $K_\perp^2 < 0$ . Такі критичні хвильові числа в певному діапазоні частот мають поверхневі хвилі, властивості яких розглядалися в § 3.6. В цьому випадку критичне хвильове число є чисто уявним:  $K_\perp = i\kappa$ , де  $\kappa = \sqrt{|K_\perp^2|}$ , що призводить до зміни виразу (4.7.2) для фазової швидкості

$$v_\phi = \frac{u}{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{K}\right)^2}}. \quad (4.7.8)$$

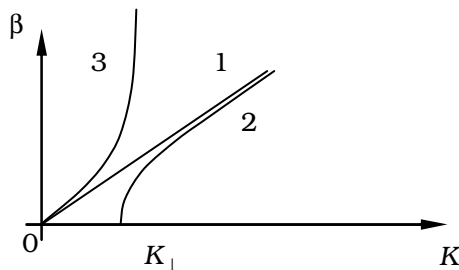
З виразу (4.7.8) випливає, що  $v_\phi < u$ . Отже, при  $K_\perp^2 < 0$  в лініях передачі поширюються *повільні* хвилі, фазова швидкість яких менша за швидкість світла. Такі хвилі можуть поширюватись в лініях передачі і без дисперсії. Дійсно, поклавши  $\kappa = aK$ , де  $a = \text{const}$ , з (4.7.2), (4.7.8) одержимо

$$v_\phi = v_{gp} = \frac{u}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad (4.7.9)$$

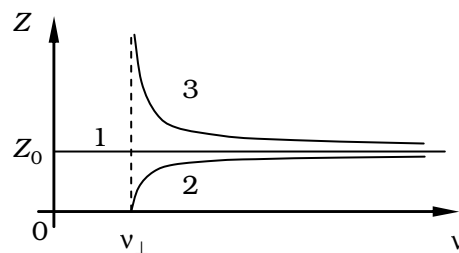
тобто при  $u = \text{const}$  дисперсії немає.

На рис. 4.7.4 показані дисперсійні залежності в координатах  $\beta, K$  для всіх трьох розглянутих випадків ( $K_\perp^2 = 0$ ,  $K_\perp^2 > 0$ ,  $K_\perp^2 < 0$ ).

Використовуючи скалярні граничні умови Шукина-Леонтовича (3.9.10) та вирази (4.5.1) для поперечних компонент поля ТЕ- та ТМ-



**Рис. 4.7.4.** Дисперсійні залежності  $\beta = f(K)$  для випадку: 1 - Т-хвиля ( $K_\perp^2 = 0$ ); 2 - швидка хвиля ( $K_\perp^2 > 0$ ); 3 - повільна хвиля ( $K_\perp^2 < 0$ )



**Рис. 4.7.5.** Залежність хвильового опору  $Z$  лінії передачі НВЧ від частоти  $\nu$  для випадку: 1 - Т-хвиля; 2 - ТМ-хвиля; 3 - ТЕ-хвиля

хвиль, можна одержати вирази для хвильового опору лінії передачі НВЧ:

для електричних хвиль

$$Z_{\Lambda\P}^{TM} = \left| \frac{E_x}{H_y} \right| = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = Z_0 \frac{\beta}{K}, \quad (4.7.10)$$

для магнітних хвиль

$$Z_{\Lambda\P}^{TE} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{\beta} = Z_0 \frac{K}{\beta}, \quad (4.7.11)$$

де  $Z_0$  – хвильовий опір середовища. Враховуючи, що Т-хвиля може бути описана електричним вектором Герца (див. § 4.4), з (4.7.10) одержуємо, що хвильовий опір Т-хвилі в лінії передачі співпадає з хвильовим опором середовища, що заповнює цю лінію:

$$Z_{\Lambda\P}^T = Z_0. \quad (4.7.12)$$

На рис. 4.7.5 показані залежності  $Z_{TM}$ ,  $Z_{TE}$ ,  $Z_T$  від частоти  $\nu$  для випадку однакового поперечного хвильового числа для електричних, магнітних та плоских хвиль.

#### 4.8. Електромагнітні хвилі в лініях передачі з втратами

При поширенні електромагнітних хвиль в реальних лініях передачі НВЧ, потужність, яку переносять хвилі, зменшується за рахунок втрат в магнітодіелектричних середовищах, які заповнюють лінію передачі НВЧ, втрат в провідних елементах конструкції лінії передачі, радіаційних втрат та ін. Електромагнітні хвилі в таких лініях передачі є згасаючими хвилями. Щоб визначити властивості цих хвиль необхідно врахувати, що електрофізичні параметри середовищ є комплексними величинами, а електромагнітне поле на поверхні провідників задовольняє граничним умовам Щукина-Леонтовича (3.9.9). Безпосереднє врахування цих умов при розгляді електродинамічної задачі суттєво ускладнює процес її розв'язання. При строгому електродинамічному аналізі виявляється, що в лінії передачі поширюються вже не Т-, ТЕ- або ТМ-хвилі, а так звані *гібридні хвилі*, які мають всі шість ненульових складових полів. За умови, що поверхневий імпеданс провідників  $Z_s \neq 0$ , розв'язки хвильових рівнянь, в загальному випадку, не є ортогональними. Враховуючи значну складність таких задач, їх розв'язок, як правило, намагаються одержати за допомогою наближених методів.

В лініях передачі НВЧ з втратами хвильові числа  $K$ ,  $K_{\perp}$  та стала



поширення хвилі  $\beta$  є комплексними величинами, причому

$$K = K' + iK'', \quad K_{\perp} = K'_{\perp} - iK''_{\perp}, \quad \beta = \beta' + i\beta'', \quad (4.8.1)$$

де  $\beta'$  – фазова стала або фазовий коефіцієнт хвилі, а  $\beta''$  – стала згасання або коефіцієнт згасання хвилі. Знак мінус при уявній частині хвильового числа  $K_{\perp}$  обрано з міркувань зручності. При такій формі запису потужність втрат в лініях передачі НВЧ виявляється завжди додатною величиною, що полегшує запис рівняння енергетичного балансу.

Підставимо останній вираз (4.8.1) у вираз (4.4.8) в припущенні, що лінія передачі є нескінченно довгою і, відповідно, в ній існують лише прямі хвилі, а відбиті хвилі – відсутні. Одержимо

$$\Phi_z(x_1, x_2, z) = A\varphi(x_1, x_2)e^{-\beta''z}e^{i\beta'z}. \quad (4.8.2)$$

Тобто при наявності в лінії передачі втрат, в ній поширюються згасаючі електромагнітні хвилі, зміна амплітуди яких визначається коефіцієнтом згасання  $\beta''$ .

Властивості електромагнітних хвиль в дисипативних середовищах вже аналізувались у § 3.8. Це дає можливість скористатись для визначення фазової та групової швидкості хвиль в лініях передачі НВЧ з втратами формулами § 3.8, § 4.7. Наприклад, з (4.7.1), випливає, що фазова та групова швидкість хвиль в лініях передачі з втратами

$$v_{\phi} \approx \frac{\omega}{\beta'}, \quad v_{gp} \approx \frac{d\omega}{d\beta'}. \quad (4.8.3)$$

Очевидно, що ці формули є наближеними і справедливі тільки при умові, що стала згасання хвилі є малою величиною порівняно з її фазовою сталою. В загальному випадку обидві величини  $v_{\phi}$ ,  $v_{gp}$  є комплексними.

В техніці й електроніці НВЧ найбільш важливе значення мають мікрохвильові системи з малими втратами. Для ліній передачі НВЧ умова малості втрат зводиться по суті до співвідношення

$$|\beta'| \gg |\beta''|. \quad (4.8.4)$$

За умови його виконання вирази для фазової та групової швидкості хвилі (4.8.3) асимптотично переходять у (4.7.1). Для лінії передачі НВЧ з малими втратами, внаслідок (4.8.4), уявні частини хвильових чисел  $K$ ,  $K_{\perp}$  також можна вважати малими:  $|K''| \ll |K'|$ ,  $|K''_{\perp}| \ll |K'_{\perp}|$ . Підставимо вирази (4.8.1) в характеристичне рівняння лінії передачі (4.4.5). З нього випливає, що стала поширення хвилі описується виразом

$$\beta^2 = (K' + iK'')^2 - (K'_{\perp} - iK''_{\perp})^2 = K'^2 - K''^2 - K_{\perp}'^2 + K_{\perp}''^2 + 2i(K'K'' + K'_{\perp}K''_{\perp}). \quad (4.8.5)$$

В наближенні малих втрат, квадратами малих величин в цьому рів-

нянні можна знехтувати. Також, припустимо, що  $K'^2 - K_{\perp}^2 \gg 2(K'K'' + K'_{\perp}K''_{\perp})$ , тобто довжина хвилі  $\lambda$  не дуже близька до критичної довжини хвилі  $\lambda_{\perp}$ . З урахуванням вищесказаного, стала поширення хвилі  $\beta = \beta' + i\beta''$  приймає вигляд

$$\beta' + i\beta'' = \sqrt{K'^2 - K_{\perp}^2} \left( 1 + i \frac{K'K'' + K'_{\perp}K''_{\perp}}{K'^2 - K_{\perp}^2} \right), \quad (4.8.6)$$

звідки одержуємо вже відомий нам вираз для фазової сталої

$$\beta' = \sqrt{K'^2 - K_{\perp}^2} \quad (4.8.7)$$

та вираз для сталої згасання хвилі

$$\beta'' = \frac{K'K'' + K'_{\perp}K''_{\perp}}{\sqrt{K'^2 - K_{\perp}^2}} = \frac{K'K'' + K'_{\perp}K''_{\perp}}{\beta'}. \quad (4.8.8)$$

Стала згасання хвилі в рамках зроблених припущень є сумою двох величин

$$\beta''_{\text{мд}} = \frac{K'K''}{\beta'}, \quad \beta''_{\text{нр}} = \frac{K'_{\perp}K''_{\perp}}{\beta'}, \quad (4.8.9)$$

першу з яких можна умовно пов'язати з втратами в магнітодіелектричних, а другу – з втратами в провідних елементах конструкції лінії передачі. Згідно з виразами (2.7.15) для комплексних проникностей  $\epsilon$ ,  $\mu$  та формули (3.1.13) для  $K$ , одержимо, в наближенні малих втрат ( $|\epsilon''| \ll |\epsilon'|$ ,  $|\mu''| \ll |\mu'|$ ),

$$\beta''_{\text{мд}} = \frac{K'K''}{\beta'} = \frac{\frac{1}{2}K'^2(\text{tg } \delta_{\epsilon} + \text{tg } \delta_{\mu})}{K' \sqrt{1 - \left(\frac{K_{\perp}}{K'}\right)^2}} = \frac{1}{2} \frac{K'}{\sqrt{1 - \left(\frac{K_{\perp}}{K'}\right)^2}} (\text{tg } \delta_{\epsilon} + \text{tg } \delta_{\mu}). \quad (4.8.10)$$

Сталу згасання  $\beta''_{\text{нр}}$  перепишемо з урахуванням (4.8.7) у вигляді

$$\beta''_{\text{нр}} = \frac{K'_{\perp}K''_{\perp}}{\beta'} = \frac{K''_{\perp}}{\sqrt{\left(\frac{K'}{K'_{\perp}}\right)^2 - 1}}. \quad (4.8.11)$$

З (4.8.10)–(4.8.11) випливає, що при  $K' \rightarrow K'_{\perp}$ ,  $\beta''_{\text{мд}} \rightarrow \infty$ ,  $\beta''_{\text{нр}} \rightarrow \infty$ . Тобто формули для  $\beta''_{\text{мд}}$ ,  $\beta''_{\text{нр}}$  непридатні, коли довжина хвилі  $\lambda$  близька до критичної довжини хвилі  $\lambda_{\perp}$ . Навпаки, коли  $\lambda \ll \lambda_{\perp}$ ,  $\beta' \approx K'$  і формула для  $\beta''_{\text{мд}}$  спрощується:

$$\beta''_{\text{мд}} = \frac{K'}{2} (\text{tg } \delta_{\epsilon} + \text{tg } \delta_{\mu}). \quad (4.8.12)$$

Для визначення  $\beta''_{np}$  необхідно знайти розв'язок рівнянь (4.4.2) з урахуванням граничних умов Щукина-Леонтовича. Ця задача є достатньо складною, тому в більшості випадків для знаходження величини  $\beta''_{np}$  користуються так званим *енергетичним* методом, який є наближеним методом розрахунку для систем з малими втратами.

Суть енергетичного метода полягає в тому, що за умови малих втрат, електромагнітне поле в реальній системі НВЧ, як правило, близьке по структурі до поля в аналогічній ідеальній (консервативній) системі. Це дозволяє при знаходженні  $\beta''_{np}$  користуватись розв'язками більш простої, електродинамічної задачі для системи без втрат. В тому випадку, коли розподіли полів в дисипативній та консервативній системах суттєво відрізняються, користуватись цим методом не можна.

Щоб проілюструвати, як за допомогою цього методу обчислити  $\beta''_{np}$ , розглянемо поширення хвилі в нескінченно довгій лінії передачі НВЧ з вакуумним заповненням і довільним поперечним перерізом (хвиля поширюється вздовж осі  $z$ ). Будь-якими втратами, окрім втрат в провідних елементах конструкції лінії передачі, будемо нехтувати і припустимо, що втрати в лінії передачі є настільки малими, що енергетичний метод знаходження величини  $\beta''_{np}$  дає малу похибку результату.

Зменшення амплітуди електромагнітного поля в лінії передачі буде описуватись множителем  $e^{-\beta''_{np}z}$  (розглядаємо тільки пряму хвилю), а вектор Умова-Пойнтинга цієї хвилі буде пропорційним  $e^{-2\beta''_{np}z}$ . При проходженні відрізка лінії передачі довжиною  $dz$  потужність  $\Sigma$ , яку переносить хвиля, зменшиться на  $d\Sigma$ , причому  $d\Sigma = -2\beta''_{np}\Sigma dz$ . Ця потужність згідно з рівнянням енергетичного балансу (2.5.16) дорівнює потужності втрат  $Pdz$  в провідних елементах лінії передачі за абсолютною величиною і протилежна за знаком;  $P$  – погонна потужність втрат. Отже, стала згасання

$$\beta''_{np} = \frac{P}{2\Sigma}. \quad (4.8.13)$$

Погонну потужність втрат в провіднику з поверхневим імпедансом  $Z_S = R_S - iX_S$  можна знайти виходячи з (3.9.14):

$$P = \frac{1}{2} R_S \oint_L |H_\tau|^2 dl, \quad (4.8.14)$$

де  $L$  – замкнений контур в поперечному перерізі лінії передачі всередині якого існує електромагнітне поле. Враховуючи співвідношення

$E_{\perp} = Z_{\text{ЛП}} H_{\perp}$  між поперечними складовими полів в лінії передачі ( $Z_{\text{ЛП}}$  – хвильовий опір лінії передачі), вираз (2.5.13) для потоку вектора Умова-Пойнтинга (цей потік є питомою потужністю, яку переносить хвиля в лінії передачі) прийме вигляд

$$\Sigma = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ Z_{\text{ЛП}} \int_S |H_{\perp}|^2 dS \right\}. \quad (4.8.15)$$

Отже,

$$\beta''_{np} = \frac{R_S}{2 \operatorname{Re}\{Z_{\text{ЛП}}\}} \frac{\oint_L |H_{\tau}|^2 dl}{\int_S |H_{\perp}|^2 dS}, \quad (4.8.16)$$

де  $H_{\tau}$  та  $H_{\perp}$  – тангенціальні та поперечні складові напруженості магнітного поля в лінії передачі без втрат.

До цього часу ми розглядали властивості затухаючих електромагнітних хвиль в лініях передачі НВЧ, виражаючи відповідні сталі згасання через вектори електричного та магнітного полів. Ці вектори в свою чергу можуть бути виражені через мембранну функцію хвилі. Підставимо вирази (4.6.3) у (4.8.16) і розглянемо випадки Т-, ТМ- та ТЕ-хвиль. У випадку Т- та ТМ-хвиль, одержимо

$$\beta''_{np} = \frac{R_S}{2 \operatorname{Re}\{Z_{\text{ЛП}}\}} \frac{K'}{\beta'} \frac{\oint_L \left| \frac{\partial \chi}{\partial n} \right|^2 dl}{\int_S |\operatorname{grad}_{\perp} \chi|^2 dS}, \quad (4.8.17)$$

а для ТЕ-хвиль

$$\beta''_{np} = \frac{R_S}{2 \operatorname{Re}\{Z_{\text{ЛП}}\}} \frac{\beta'}{K'} \left( \frac{\oint_L \left| \frac{\partial \psi}{\partial l} \right|^2 dl}{\int_S |\operatorname{grad}_{\perp} \psi|^2 dS} + \frac{K_{\perp}^4}{\beta'^2} \frac{\oint_L |\psi|^2 dl}{\int_S |\operatorname{grad}_{\perp} \psi|^2 dS} \right). \quad (4.8.18)$$

Для Т- та ТМ-хвиль магнітне поле лежить в площині поперечного перерізу лінії передачі, отже, зі збільшенням частоти стала згасання  $\beta''_{np}$  цих хвиль обумовлюється в основному зростанням  $R_S$ . Тому для ліній передачі металевої конструкції  $\beta''_{np} \sim \sqrt{\omega}$ .

Для ТЕ-хвиль залежність  $\beta''_{np} = f(\omega)$  має дещо складніший характер. Це пов'язано з тим, що в ТЕ-хвилі окрім ненульових поперечних складових поля існує відмінна від нуля повздовжня складова поля  $H_z$ . Її наявність призводить до появи струму, що протікає в поперечному перерізі лінії передачі. За рахунок цього, стала згасання  $\beta''_{np}$  ТЕ-хвиль є сумою двох доданків, перший з яких, по аналогії з ТМ-хвилями, змі-

нюється пропорційно до  $\sqrt{\omega}$ , а другий, обумовлений наявністю по-  
вздожньої складової магнітного поля, пропорційний  $R_s / \beta'^2$ , тобто,  
залежить від частоти за законом  $\omega^{-3/2}$ . Таким чином, при збільшенні  
частоти, другий доданок швидко зменшується, що обумовлено тим,  
що структура поля ТЕ-хвилі поступово наближається до структури  
поля поперечної Т-хвилі (див. рис. 4.7.3, випадок 3–6).

#### **4.9. Постановка задачі та особливості розгляду властивос- тей електромагнітних хвиль в мікрохвильових направ- ляючих системах**

Задача аналізу електромагнітного поля вільних хвиль в лінії пере-  
дачі НВЧ по суті зводиться до визначення трьох основних, найбільш  
практично важливих, характеристик:

- фазової сталої хвилі  $\beta'$  або довжини хвилі  $\lambda_{||}$ ;
- розподілу електромагнітного поля хвилі в лінії передачі, який ви-  
значається мембранною функцією хвилі;
- сталої згасання хвилі  $\beta''$ .

Інші характеристики, наприклад, фазова та групова швидкість хвилі,  
хвильовий опір лінії передачі та ін. можуть бути легко визначені, як-  
що три вищевказані характеристики є відомими. Виходячи з цього,  
при розгляді електромагнітних хвиль в конкретних типах ліній пере-  
дачі НВЧ ми будемо приділяти основну увагу визначенню саме цих  
трьох характеристик.

Найбільш просто визначати величини  $\beta'$ ,  $\beta''$  та мембранну функцію  
хвилі, якщо розв'язувати відповідну електродинамічну задачу поста-  
пно. При розгляді властивостей хвиль в конкретних типах лінії пере-  
дачі будемо намагатись притримуватись наступної послідовності дій:

- розв'язання рівняння Гельмгольца (4.4.9) для мембранної функції  
хвилі з урахуванням ідеальних граничних умов на поверхнях розді-  
лу середовищ або на поверхнях провідних елементів конструкції  
лінії передачі. На цьому етапі вважаємо, що втрат в лінії передачі  
немає. Як результат цього етапу одержуємо явний вираз для мем-  
бранної функції хвилі;
- знаючи мембранну функцію хвилі, з рівняння (4.4.9) визначаємо  
поперечне хвильове число хвилі і за допомогою характеристичного  
рівняння (4.4.5) знаходимо сталу поширення хвилі для лінії переда-  
чі без втрат;

- виходячи з відомого виразу для мембранної функції будуюмо картину розподілу електричного та магнітного поля хвилі, наприклад, розподіл цих полів в поперечному та повздовжньому перерізі лінії передачі;
- розраховуємо по формулам § 4.8 сталу згасання хвилі в лінії передачі.

### Контрольні запитання та задачі

**4.1.** Наведіть приклади ліній передачі НВЧ, в яких можливе поширення дисперсних та бездисперсних хвиль.

**4.2.** Намалюйте розподіл електричного та магнітного полів в плоскопаралельному хвилеводі. Виходячи з рисунка, доведіть, що в цих лініях передачі можуть поширюватись Т-хвилі.

**4.3.** Доведіть, що в плоскопаралельному хвилеводі зі сходиною, поблизу від сходинок окрім ТЕ-хвилі ще обов'язково повинна існувати ТМ-хвиля (рис. 4.П.1).

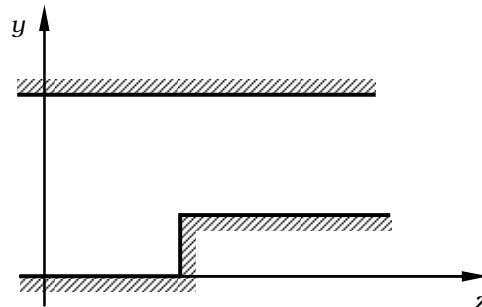
**4.4.** Як між собою співвідносяться сталі поширення, фазова швидкість та швидкість поширення енергії для Т-, Е-, Н-хвиль?

**4.5.** Пояснити явище відсічки та залежність фазової швидкості хвилі  $v_\phi(\lambda)$  в лінії передачі від довжини хвилі  $\lambda$ , користуючись методом парціальних хвиль.

**4.6.** Чому при наближенні частоти  $\nu$  електромагнітної хвилі до критичної частоти  $\nu_\perp$ , хвильовий опір  $Z_{\text{ЛП}}$  лінії передачі прямує до нуля (ТМ-хвилі), зростає до нескінченності (ТЕ-хвилі), не змінюється (Т-хвиля)? Які властивості має електромагнітна хвиля з  $Z_{\text{ЛП}} = 0$ ,  $Z_{\text{ЛП}} = \infty$ ?

**4.1.** Чи може регулярна лінія передачі бути поздовжньо-неоднорідною? Поздовжньо-однорідною, але мати неоднорідне заповнення в поперечному перерізі? Періодичною? Чи залежить це від матеріалу, з якого виготовлено лінію передачі? Чому?

**4.2.** Які лінії передачі є найбільш зручні для передачі електромаг-



**Рис. 4.П.1. Прямокутний хвилевід зі сходиною у вузькій стінці (повздовжній переріз)**

нітних сигналів з частотами, меншими за 1 ГГц? З частотами  $10 \div 100$  ГГц? З частотами  $100 \div 1000$  ГГц?

**4.3.** Чому в діапазоні НВЧ для передачі електромагнітних сигналів незручно користуватись лише одним типом лінії передачі.

**4.4.** Наведіть приклади ліній передачі НВЧ, у яких можливе поширення дисперсних та бездисперсних хвиль.

**4.5.** Чи можуть у лінії передачі НВЧ спостерігатись резонансні явища? Як це впливає на основні технічні характеристики лінії передачі?

**4.6.** Чи є еквівалентними телеграфні рівняння і закони Ома та Кірхгофа? Які з цих виразів є більш загальними?

**4.7.** За яких умов опис електромагнітних явищ у лініях передачі НВЧ можна проводити на основі телеграфних рівнянь?

**4.8.** Чи можна описати електромагнітне поле дисперсної хвилі в лінії передачі НВЧ за допомогою телеграфних рівнянь? Наведіть приклад.

**4.9.** Намалюйте розподіл електричного та магнітного полів у плоскопаралельному хвилеводі. Виходячи з рисунка, доведіть, що в цих лініях передачі можуть поширюватись Т-хвилі.

**4.10.** Доведіть, що в плоскопаралельному хвилеводі зі сходиною, поблизу від сходинок, окрім ТЕ-хвилі, ще обов'язково повинна існувати ТМ-хвиля (рис. 4.П.1).

**4.11.** Чому при наближенні частоти  $\nu$  електромагнітної хвилі до критичної частоти  $\nu_{\perp}$  хвильовий опір  $Z_{\text{ЛП}}$  лінії передачі прямує до нуля (ТМ-хвилі), зростає до нескінченності (ТЕ-хвилі), не змінюється (Т-хвиля)? Які властивості має електромагнітна хвиля з  $Z_{\text{ЛП}} = 0$ ,  $Z_{\text{ЛП}} = \infty$ ?

**4.12.** В режимі відсічки хвильовий опір лінії передачі для ТЕ-хвиль прямує до нескінченності, а для ТМ-хвиль – до нуля. Чи є це аналогією до відомих з радіоелектроніки режимів холостого ходу та короткого замикання електричного кола? Поясніть чому?

**4.13.** Поясніть фізичні причини, які призводять до зміни хвильового опору лінії передачі при зміні частоти. Чому при наближенні частоти електромагнітної хвилі до критичної частоти лінії передачі хвильовий опір лінії передачі змінюється дуже різко, а на частотах, що значно перевищують критичну частоту, ці зміни майже непомітні?

**4.14.** Що таке мембранна функція хвилі? Який її фізичний зміст?

**4.15.** Запишіть вираз для мембранної функції однорідної плоскої хвилі. Як можна довести, що ця мембранна функція дійсно описує електромагнітне поле Т-хвилі?

**4.16.** Яким чином можна побудувати картину полів деякої хвилі, якщо вектор Герца, який описує це поле, відомий?

**4.17.** Як між собою співвідносяться сталі поширення, фазова швидкість та швидкість поширення енергії для Т-, Е-, Н-хвиль?

**4.18.** Поясніть явище відсічки та залежність фазової швидкості хвилі  $v_\phi(\lambda)$  в лінії передачі від довжини хвилі  $\lambda$ , користуючись методом парціальних хвиль.

**4.19.** Чи можуть у загальному випадку Т-, ТЕ- та ТМ-хвилі існувати в лінії передачі НВЧ незалежно одна від одної? Від чого це залежить?

**4.20.** Які основні джерела втрат у лініях передачі НВЧ? Як втрати в лініях передачі НВЧ залежать від частоти?

**4.21.** Чому металеві та надпровідні лінії передачі НВЧ незручно застосовувати в області субміліметрових хвиль, а діелектричні хвилеводи, навпаки, в області метрових та дециметрових хвиль?

**4.22.** У деякій лінії передачі НВЧ з однорідним заповненням поширюється: а) квазі-Т-хвиля; б) ТЕ-хвиля; в) ТМ-хвиля. В якому випадку втрати енергії в системі будуть мінімальними? Від чого це залежить?

**4.23.** Які електродинамічні характеристики хвиль у лініях передачі є найбільш важливими? Як їх визначити, виходячи з рівнянь Максвелла і граничних умов (сформулюйте детальний план дій)?



## Розділ V

# ОДНОЗВ'ЯЗНІ ЗАКРИТІ МІКРОХВИЛЬОВІ ЛІНІЇ ПЕРЕДАЧІ

### 5.1. Особливості однозв'язних закритих мікрохвильових ліній передачі

Однозв'язна замкнена лінія передачі НВЧ являє собою замкнену циліндричну поверхню (трубу) з провідного матеріалу, яким, як правило, є метал (срібло, мідь, латунь та ін.) (див. рис. 4.4.1). В середині цієї труби немає інших провідників, тому лінія передачі є однозв'язною. Інколи порожнину однозв'язної закритої лінії передачі заповнюють діелектриком, який надалі будемо вважати лінійним, однорідним та ізотропним. Найбільш же часто використовують лінії передачі з повітряним заповненням, для якого  $\epsilon = \mu \approx 1$ . За умови, що товщина стінок труби перевищує товщину скін-шару для матеріалу, з якого зроблені ці стінки, можна вважати, що електромагнітне поле в такій лінії передачі існує лише всередині труби – тобто така лінія передачі є закритою.

Однозв'язні закриті лінії передачі НВЧ часто називають *хвильоводами* і розрізняють прямокутні (див. рис. 4.1.1г), круглі хвильоводи (див. рис. 4.1.1д), різноманітні хвильоводи з поперечним перерізом складної форми (Г-, П-, Н-, Т-, Х-хвильоводи та ін., див. рис. 4.4.1е). Слід відзначити, що цей термін сам по собі є не дуже вдалим, оскільки, в літературі з мікрохвильової електродинаміки, техніки та електроніки НВЧ, термін «хвильовід» часто розуміється в значно більш загальному сенсі, як синонім понять «лінія передачі» та «направляюча система». Тому в подальшому, щоб уникнути двозначності, термін «хвильовід» буде використовуватись тільки з відповідною деталізацією: наприклад, будемо говорити про прямокутний, круглий, коаксіальний хвильовід та ін.

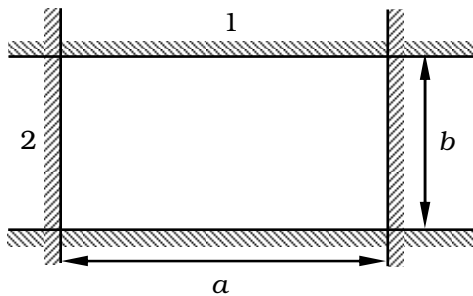
Однозв'язні закриті лінії передачі НВЧ широко використовуються в техніці й електроніці НВЧ в типовому діапазоні частот від 1 до 150÷300 ГГц для передачі сигналів малої, середньої та великої потужності. На їх основі створюються різноманітні мікрохвильові пристрої та прилади, наприклад, атенюатори, модулятори, фазообертачі, детекторні секції та ін. Межі частотної смуги, в якій застосовуються однозв'язні закриті хвильоводи, визначаються двома факторами. Нижня межа обумовлена тим, що, як буде показано далі на конкретних прикладах, розміри поперечного перерізу хвильоводу є пропорційними до

його робочої довжини хвилі. При зсуві робочої смуги частот такого хвилеводу в область менших частот, розміри його поперечного перерізу збільшуються пропорційно до росту робочої довжини хвилі. При малих частотах (менших за 3 ГГц) масогабарити хвилеводу сильно зростають, що робить його не дуже зручним у користуванні. В деяких випадках, наприклад, при передачі високопотужного мікрохвильового сигналу від радіолокаційної станції до антени, цими незручностями нехтують. Але в більшості випадків, коли необхідно передавати сигнали середньої та малої потужності використання прямокутних хвилеводів на частотах нижчих за 1 ГГц не є виправданим. В цьому діапазоні кращі характеристики мають коаксіальні кабелі. З іншого боку на частотах більших за 100÷150 ГГц втрати в стінках хвилеводу стають достатньо великими, оскільки поверхневий опір металу зростає за кореневим законом:  $R_s \sim \sqrt{\omega}$ . Це призводить до суттєвих втрат енергії при передачі сигналів з малими довжинами хвиль (2 мм та менше). В цій області довжин хвиль кращі характеристики мають діелектричні хвилеводи, а однозв'язні закриті металеві лінії передачі використовуються доволі рідко.

Найбільш широко однозв'язні закриті лінії передачі НВЧ застосовуються в діапазоні частот приблизно від 8 до 75 ГГц. В цьому діапазоні, використовуючи високоякісні однозв'язні закриті хвилеводи, стінки яких покриті сріблом або, навіть, золотом, і добре відполіровані, можна на певній довжині хвилі в межах робочого діапазону довжин хвиль хвилеводу досягти втрат при передачі сигналу на рівні  $\sim 10^{-3}$  дБ/м. Амплітуда електромагнітної хвилі в таких лініях передачі спадає в  $e \approx 2,72$  раз при проходженні хвилею відстані в декілька сотень метрів. В практичних системах, як правило, використовуються відрізки відповідних ліній передачі довжиною не більше 1–2 м і, отже, затуханням сигналу в цьому випадку часто можна нехтувати.

## 5.2. Прямокутний хвилевід

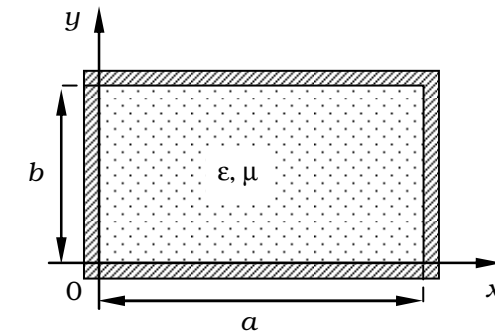
Прямокутний хвилевід – це металева труба прямокутного поперечного перерізу, заповнена, як правило, лінійним однорідним ізо- тропним діелектриком, наприклад, сухим повітрям (див. рис. 4.1.1г). Властивості електромагнітних хвиль в цій лінії передачі якісно най- більш просто дослідити, якщо уявити собі прямокутний хвилевід у ви- гляді перетину двох плоскопаралельних хвилеводів, утворених ідеально провідними площинами (рис. 5.2.1). Введемо прямокутну декартову систему координат  $x, y, z$ , так, щоб ось  $z$  співпадала з напрямком поширення хвиль в хвилеводі (рис. 5.2.2). Розмір *ши- рокої* (більшої) стінки хвилеводу позначимо  $a$ , а розмір *вузької* стінки –  $b$ . Відповідно, відстань між ідеально провідними площи- нами для першого плоскопаралель- ного хвилеводу нехай дорівнює  $a$ , а для другого –  $b$  (див. рис.



**Рис. 5.2.1. Утворення прямоку- тного хвилеводу шляхом пере- тину двох плоскопаралельних хвилеводів 1 та 2**

5.2.1). Очевидно, що і в першому і в другому плоскопаралельних хви- леводах можливе поширення ТМ- та ТЕ-хвиль. Але в першому хвилеводі властивості цих хвиль залежать від співвідношення між довжиною хвилі  $\lambda$  та роз- міром  $a$ , в іншому хвилеводі – від співвідношення між  $\lambda$  та  $b$ . Це означає, що в загальному випадку в прямокутному хвиле- воді поширюються ТЕ- та ТМ- хвилі, властивості яких визна- чаються обома розмірами  $a$  та  $b$  поперечного перерізу хвиле- воду.

**Мембранна функція.** Для визначення мембранної функції ТЕ- та ТМ-хвиль в прямокутному хвилеводі скористаємось методом розділення змінних Фур'є. Узагаль-



**Рис. 5.2.2. Поперечний переріз прямокутного хвилеводу з одно- рідним ізотропним діелектрич- ним заповненням**

нену мембранну функцію хвилі  $\varphi(x, y)$ <sup>1</sup> представимо у вигляді добутку двох функцій –  $X(x)$  та  $Y(y)$ , кожна з яких залежить тільки від однієї декартової координати  $x$  або  $y$ :

$$\varphi(x, y) = X(x)Y(y). \quad (5.2.1)$$

Підставимо цей вираз для узагальненої мембранної функції у рівняння (4.4.9), де  $x_1 \equiv x$ ,  $x_2 \equiv y$ :

$$Y(y) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + K_{\perp}^2 X(x)Y(y) = 0.$$

Поділимо одержане рівняння на добуток  $X(x)Y(y)$ , вважаючи, що він тотожно не дорівнює нулю. Одержимо рівняння

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + K_{\perp}^2 = 0,$$

перший доданок якого є функцією координати  $x$ , другий – функцією координати  $y$ , а третій є сталою величиною. Це рівняння може мати розв'язок тільки при умові, що перший та другий доданок в ньому еквівалентні деяким сталим величинам, тобто

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + K_x^2 X(x) = 0, \quad \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + K_y^2 Y(y) = 0, \quad K_x^2 + K_y^2 = K_{\perp}^2, \quad (5.2.2)$$

де  $K_x$ ,  $K_y$  – сталі. В § 4.3 було показано, що в плоскопаралельному хвилеводі існує явище відсічки і для нього  $K_{\perp}^2 > 0$ . Сталі  $K_x$  та  $K_y$  є поперечними хвильовими числами для плоскопаралельних хвилеводів 1 та 2 (див. рис. 5.2.1), тому для прямокутного хвилеводу, очевидно,  $K_x^2 > 0$ ,  $K_y^2 > 0$ ,  $K_{\perp}^2 > 0$ . З урахуванням цього розв'язки перших двох рівнянь (5.2.2) представимо у вигляді

$$X(x) = A \cos(K_x x) + B \sin(K_x x), \quad Y(y) = C \cos(K_y y) + D \sin(K_y y), \quad (5.2.3)$$

де  $A, B, C, D$  – довільні сталі.

Оскільки раніше ми припустили, що стінки хвилеводу є ідеально провідними, тангенціальні складові електричного поля на цих стінках повинні обертатись на нуль, тобто повинні виконуватись граничні умови (див. рис. 5.2.2)

$$E_x(x, y = 0, z) = E_x(x, y = b, z) = 0, \quad E_y(x = 0, y, z) = E_y(x = a, y, z) = 0. \quad (5.2.4)$$

---

<sup>1</sup> Нагадаємо, що для ТМ-хвиль ця функція є електричною мембранною функцією, а для ТЕ-хвиль – магнітною мембранною функцією.

Ці умови будуть задовольнятися автоматично, якщо мембранні функції хвиль будуть задовольняти умови (4.6.7).

Розглянемо спочатку випадок ТМ-хвиль. Електрична мембранна функція цих хвиль згідно з (4.6.7) повинна задовольняти умовам

$$X^{TM}(0) = X^{TM}(a) = 0, \quad Y^{TM}(0) = Y^{TM}(b) = 0,$$

звідки

$$X^{TM}(x) = B \sin(K_{xm}x), \quad K_{xm} = \frac{m\pi}{a}, \quad Y^{TM}(y) = D \sin(K_{yn}y), \quad K_{yn} = \frac{n\pi}{b}, \quad (5.2.5)$$

де  $m$  та  $n$  – довільні натуральні числа. Ці числа по аналогії з плоско-паралельним хвилеводом визначають кількість варіацій поля вздовж осей  $x$  та  $y$  відповідно. Отже, мембранна функція ТМ-хвилі має вигляд

$$\chi_{mn}(x, y) = A^{TM} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad (5.2.6)$$

де  $A^{TM}$  – деяка довільна стала.

Для ТЕ-хвиль, виходячи з (4.6.7), повинні виконуватись умови

$$\frac{dX^{TE}(0)}{dx} = \frac{dX^{TE}(a)}{dx} = 0, \quad \frac{dY^{TE}(0)}{dy} = \frac{dY^{TE}(b)}{dy} = 0,$$

звідки

$$X^{TE}(x) = A \cos(K_{xm}x), \quad K_{xm} = \frac{m\pi}{a}, \quad Y^{TE}(y) = C \cos(K_{yn}y), \quad K_{yn} = \frac{n\pi}{b}, \quad (5.2.7)$$

де  $m$  та  $n$  – невід'ємні цілі числа, які визначають кількість варіацій поля вздовж осей  $x$  та  $y$  відповідно. Як буде показано далі, на відміну від ТМ-хвиль, існують ТЕ-хвилі для яких числа  $m$  або  $n$  можуть дорівнювати нулю, але хвиля з  $m = n = 0$ , тобто хвиля  $TE_{00}$ , не існує. Мембранна функція ТЕ-хвилі має вигляд

$$\psi_{mn}(x, y) = B^{TE} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad (5.2.8)$$

де  $B^{TE}$  – довільна стала.

**Хвильові числа та довжини хвиль.** Згідно, з виразами (5.2.5), (5.2.7) поперечне хвильове число ТМ- та ТЕ-хвиль описується єдиною формулою

$$K_{\perp mn} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \quad (5.2.9)$$

в якій для ТМ-хвиль  $m, n$  – довільні натуральні числа, а для ТЕ-хвиль –  $m, n$  – довільні невід'ємні цілі числа, виключаючи випадок, коли

$m = n = 0$ . Стала поширення ТЕ- та ТМ-хвиль згідно з характеристичним рівнянням лінії передачі (4.4.5), має вигляд

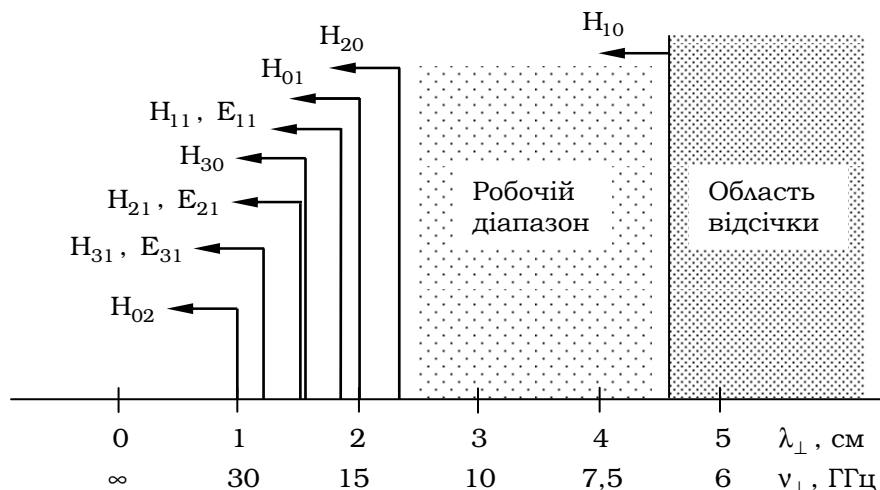
$$\beta_{mn} = \sqrt{K^2 - K_{\perp mn}^2} = \sqrt{k_0^2 n_{\text{сеп}}^2 - \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}, \quad (5.2.10)$$

де  $n_{\text{сеп}}$  – показник заломлення середовища, яким заповнена порожнина прямокутного хвилеводу. З формули (5.2.10) випливає, що при  $m = n = 0$  стала поширення ТЕ-хвилі  $\beta_{00}$  співпадає з сталою поширення Т-хвилі, тобто в хвилеводі нібито може поширюватись Т-хвиля. Очевидно, що це не так, оскільки прямокутний хвилевід є однозв'язною лінією передачі, в якій Т-хвилі існувати не можуть! Отже, ТЕ-хвиля з обома нульовими індексами, поле якої не має варіацій по вісям  $x, y$  існувати в прямокутному хвилеводі також не існує. Це можна довести і іншим, можливо більш наочним чином. Оскільки поле хвилі  $TE_{00}$  не має варіацій поля в поперечному перерізі хвилеводу, електричне поле такої хвилі є однаковим в будь-якій точці поперечного перерізу хвилеводу. Але на ідеально провідних стінках хвилеводу воно тотожно дорівнює нулю, отже в будь-якій точці в поперечному перерізі хвилеводу воно також дорівнює нулю. Вектор Умова-Пойнтинга такої хвилі тотожно дорівнює нулю, оскільки  $\vec{E} = 0$ . Тобто хвиля  $TE_{00}$  не переносить енергію, а значить існувати не може.

Виходячи з виразів (5.2.9)–(5.2.10), легко знайти критичну довжину хвилі  $\lambda_{\perp mn}$  та довжину хвилі в хвилеводі  $\lambda_{\parallel mn}$  для ТЕ- та ТМ-хвиль:

$$\lambda_{\perp mn} = \frac{2\pi}{K_{\perp mn}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}} = \frac{2ab}{\sqrt{m^2 b^2 + n^2 a^2}}, \quad \lambda_{\parallel mn} = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{4v^2}{c^2} n_{\text{сеп}}^2 - \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}}. \quad (5.2.11)$$

**Умови існування різних типів хвиль.** Враховуючи, що при  $\lambda \geq \lambda_{\perp mn}$  відбувається явище відсічки, можна визначити, які хвилі будуть поширюватись в хвилеводі, якщо величини  $\lambda, a, b$  відомі. Наприклад, для хвилі  $TE_{10}$  згідно з (5.2.11)  $\lambda_{\perp 10} = 2a$ , для хвилі  $TE_{11}$  або  $TM_{11}$   $\lambda_{\perp 11} = 2ab / \sqrt{a^2 + b^2}$ , для хвилі  $TE_{01}$   $\lambda_{\perp 01} = 2b$  і т.д. В стандартних хвилеводах  $a > b$ , тому при  $\lambda > 2a > 2b$  ТЕ- та ТМ-хвилі поширюватись в хвилеводі не можуть. При  $2b < \lambda < 2a$  в хвилеводі може поширюватись лише хвиля  $TE_{10}$ , при  $\lambda < 2b$  можливе поширення хвилі  $TE_{01}$ , при  $\lambda_{\perp 12}, \lambda_{\perp 21} < \lambda < \lambda_{\perp 11}$  в хвилеводі можуть поширюватись хвилі  $TE_{01}$ ,  $TE_{10}$ ,  $TE_{11}$ ,  $TM_{11}$ . При  $a \rightarrow \infty$  або  $b \rightarrow \infty$ , одержані в цьому параграфі формули для ТЕ- та ТМ-хвиль переходять у формули для плоскопара-

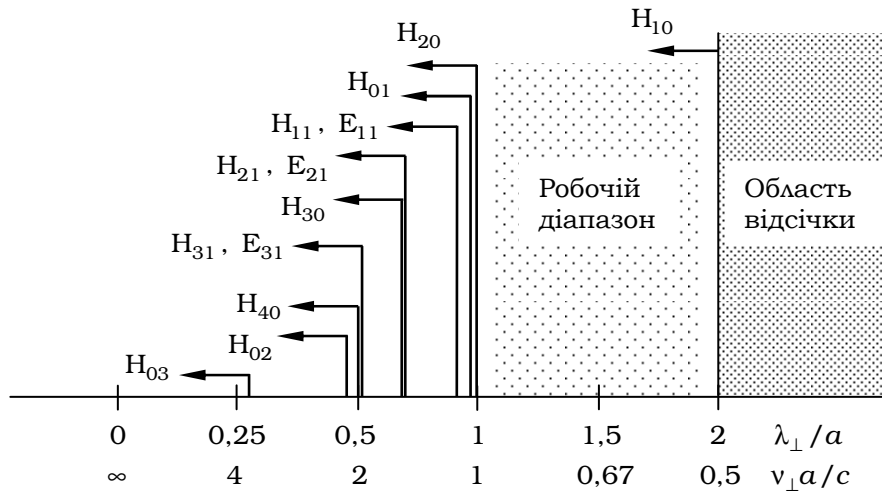


**Рис. 5.2.3. Діаграма критичних довжин хвиль  $\lambda_{\perp}$  та критичних частот  $\nu_{\perp}$  для стандартного прямокутного хвелеводу 3-см діапазону довжин хвиль з розмірами  $a = 23$  мм,  $b = 10$  мм**

лельного хвелеводу.

В більшості випадків розміри хвелеводу намагаються підібрати таким чином, щоб в ньому поширювалась лише одна хвиля, тобто реалізовувався одномодовий режим роботи. В якості такої основної хвилі обирають хвилю  $TE_{10}$  (в неї найбільша критична довжина хвилі). Оскільки критична довжина хвилі  $TE_{01}$  менша за критичну довжину хвилі  $TE_{10}$ , розмір вузької стінки хвелеводу підбирають таким чином, щоб виконувалось співвідношення  $\lambda_{110} > \lambda_{101}$ . Крім того, розміри хвелеводу повинні бути такими, щоб для хвиль  $TE_{11}$ ,  $TM_{11}$  він був поза межним. Обидві ці умови виконуються, якщо розміри хвелеводу та довжина хвилі  $\lambda$  задовольняють співвідношенням  $b < a/2$ ,  $2a > \lambda > a$ ,  $\lambda > 2b$ . Як правило, обирають  $b \approx 0,45a$ , наприклад, стандартний хвелевід 8-мм діапазону довжин хвиль має розміри  $7,2 \times 3,4$  мм<sup>2</sup>, а 3-см діапазону довжин хвиль –  $23 \times 10$  мм<sup>2</sup>. Причиною вибору такого співвідношення між розмірами стінок хвелеводу є те, що стала згасання  $TE$ -хвиль в хвелеводі залежить від співвідношення  $b/a$  і зростає, при  $a \gg b$  (це буде показано далі).

Виходячи з вищевказаного можна побудувати діаграму критичних довжин хвиль та частот для прямокутних хвелеводів з повітряним заповненням. Відповідна діаграма для стандартного прямокут-



**Рис. 5.2.4. Нормована діаграма критичних довжин хвиль  $\lambda_{\perp}/a$  та критичних частот  $v_{\perp}a/c$  для прямокутного хвильоводу з розмірами вузької стінки  $b = 0,45a$ , заповненого сухим повітрям**

ного хвильоводу 3-см діапазону довжин хвиль наведена на рис. 5.2.3. На рис. 5.2.4 наведена нормована діаграма критичних довжин хвиль та частот прямокутного хвильоводу з повітряним заповненням для випадку  $b = 0,45a$ . Значення відповідних критичних довжин хвиль та частот наведені в таблиці 5.2.1.

Як видно з рис. 5.2.3, 5.2.4 в прямокутному хвильоводі з ідеально провідними стінками, заповненому середовищем без дисперсії, ТЕ- та ТМ-хвилі з індексами  $m, n \geq 1$  є виродженими. Такі ТЕ- та ТМ-хвилі мають однакові сталі поширення, критичні довжини хвиль, фазові швидкості.

Іноколи може виникнути питання, яка буде довжина хвилі в хвильоводі, якій працює в багатомодовому режимі, наприклад, при  $\lambda/a = 0,75$  для прямокутного хвильоводу з повітряним заповненням і  $b = 0,45a$ . Згідно з рис. 5.2.4 в цьому випадку в хвильоводі поширюються хвилі  $H_{10}, H_{20}, H_{01}, H_{11}, E_{11}$ , кожна з яких має свою власну сталу поширення і відповідно довжину хвилі в хвильоводі. Прямокутний хвильовід в цьому випадку еквівалентний до 5 незалежних ліній передачі, в кожній з яких поширюється хвиля (або хвилі, враховуючи виродження ТЕ- та ТМ-хвиль) з певними значеннями  $\lambda_{\perp mn}, \lambda_{\parallel mn}, v_{\phi}$ . Набагато



складнішим питанням є питання про те яким чином розподілена потужність між хвилями, що поширюються в хвилеводі.

**Таблиця 5.2.1**

**Критичні довжини хвиль та критичні частоти хвиль в прямокутному хвилеводі з повітряним заповненням**

Тип хвилі	Стандартний 3-см хвилевід з розмірами 23×10 мм		Хвилевід з співвідношенням між розмірами вузької та широкої стінки $b/a = 0,45$	
	$\lambda_{\perp}$ , см	$\nu_{\perp}$ , ГГц	$\lambda_{\perp}/a$	$\nu_{\perp}a/c$
H <sub>10</sub>	4,60	6,52	2,0	0,5
H <sub>20</sub>	2,30	13,04	1,0	1,0
H <sub>01</sub>	2,00	15,00	0,9	1,(1)
H <sub>11</sub> , E <sub>11</sub>	1,83	16,39	0,820	1,218
H <sub>21</sub> , E <sub>21</sub>	1,51	19,87	0,669	1,495
H <sub>30</sub>	1,53	19,61	0,(6)	1,5
H <sub>31</sub> , E <sub>31</sub>	1,21	24,79	0,536	1,866
H <sub>40</sub>	1,15	26,09	0,5	2,0
H <sub>02</sub>	1,00	30,00	0,45	2,(2)
H <sub>12</sub> , E <sub>12</sub>	0,98	30,70	0,439	2,277
H <sub>41</sub> , E <sub>41</sub>	0,99	30,10	0,437	2,287
H <sub>22</sub> , E <sub>22</sub>	0,92	32,70	0,41	2,436

**Розподіл поля.** Складові електромагнітного поля прямих ТМ-хвиль згідно з (4.5.1) мають вигляд:

$$E_x(x, y, z) = i\beta \frac{\partial \chi(x, y)}{\partial x} e^{i\beta z}, \quad E_y(x, y, z) = i\beta \frac{\partial \chi(x, y)}{\partial y} e^{i\beta z},$$

$$E_z(x, y, z) = (K^2 - \beta^2) \chi(x, y) e^{i\beta z}, \quad H_x(x, y, z) = -ik_0 \epsilon \frac{\partial \chi(x, y)}{\partial y} e^{i\beta z},$$

$$H_y(x, y, z) = ik_0 \epsilon \frac{\partial \chi(x, y)}{\partial x} e^{i\beta z}, \quad H_z(x, y, z) = 0.$$

Підставляючи в ці вирази замість  $\beta$  величину  $\beta_{mn}$  з (5.2.10), замість  $K^2 - \beta^2$  величину  $K_{\perp mn}^2$ , а замість  $\chi(x, y)$  мембранну функцію (5.2.6), одержуємо

$$\begin{aligned}
E_{x,mn}(x,y,z) &= i\beta_{mn}A^{TM} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i\beta_{mn}z}, \\
E_{y,mn}(x,y,z) &= i\beta_{mn}A^{TM} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i\beta_{mn}z}, \\
E_{z,mn}(x,y,z) &= \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) A^{TM} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i\beta_{mn}z}, \\
H_{x,mn}(x,y,z) &= -i\omega\epsilon\epsilon_0 A^{TM} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i\beta_{mn}z}, \\
H_{y,mn}(x,y,z) &= i\omega\epsilon\epsilon_0 A^{TM} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i\beta_{mn}z}, \\
H_{z,mn}(x,y,z) &= 0.
\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

З написаних формул з очевидністю випливає, що існування ТМ-хвиль можливе лише при  $m, n \geq 1$ . В протилежному випадку, коли  $m = 0$  або  $n = 0$ , електромагнітне поле ТМ-хвиль тотожно обертається в нуль.

Найменшу критичну частоту  $\nu_{\perp 11} = (c / n_{сеп}) \sqrt{a^2 + b^2} / (2\pi ab)$  має хвиля  $TM_{11}$ , розподіл електричного та магнітного полів якої показано на рис. 5.2.5. Розподіл поля будь-якої іншої хвилі  $TM_{mn}$  в поперечному перерізі хвилеводу при  $m \geq 1$ ,  $n \geq 1$  можна одержати шляхом повторення розподілу поля хвилі  $TM_{11}$   $m$  раз вздовж широкої стінки хвилеводу і  $n$  раз вздовж вузької стінки хвилеводу. Як приклад, такої побудови, на рис. 5.2.6 показана структура поля для хвиль  $TM_{21}$ ,  $TM_{12}$ ,  $TM_{22}$ .

Складові електромагнітного поля прямих ТЕ-хвиль, виходячи з (4.5.1), описуються виразами

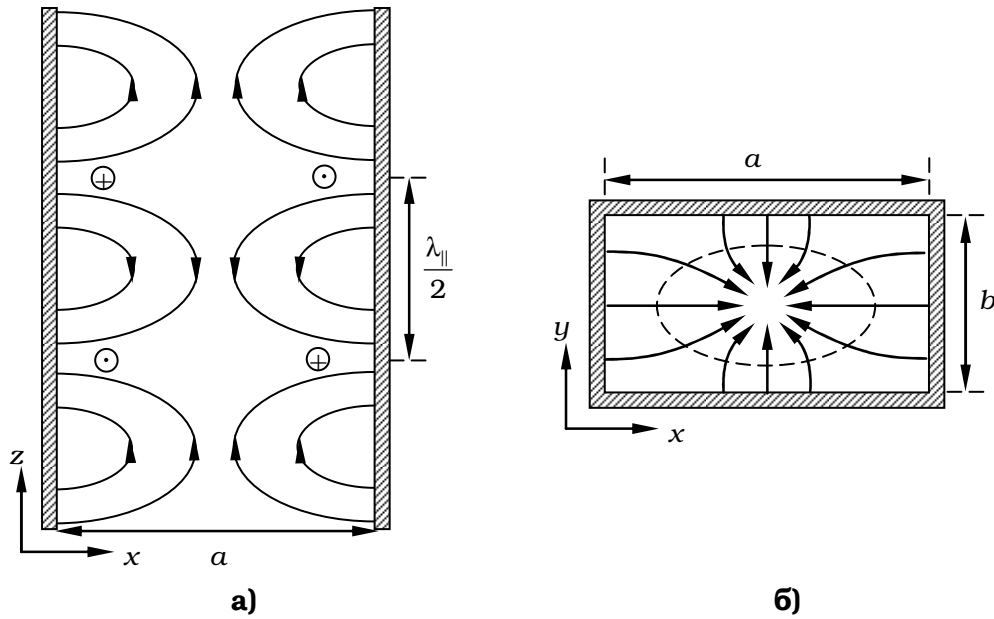
$$\begin{aligned}
E_x(x,y,z) &= ik_0\mu \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} e^{i\beta z}, \\
E_y(x,y,z) &= -ik_0\mu \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x} e^{i\beta z}, \\
E_z(x,y,z) &= 0, \\
H_x(x,y,z) &= i\beta \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x} e^{i\beta z}, \\
H_y(x,y,z) &= i\beta \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} e^{i\beta z}, \\
H_z(x,y,z) &= (K^2 - \beta^2) \psi(x,y) e^{i\beta z}.
\end{aligned}$$

Підставляючи в ці формули явні вирази для  $\beta \equiv \beta_{mn}$ ,  $K^2 - \beta_{mn}^2 \equiv K_{\perp mn}^2$ ,

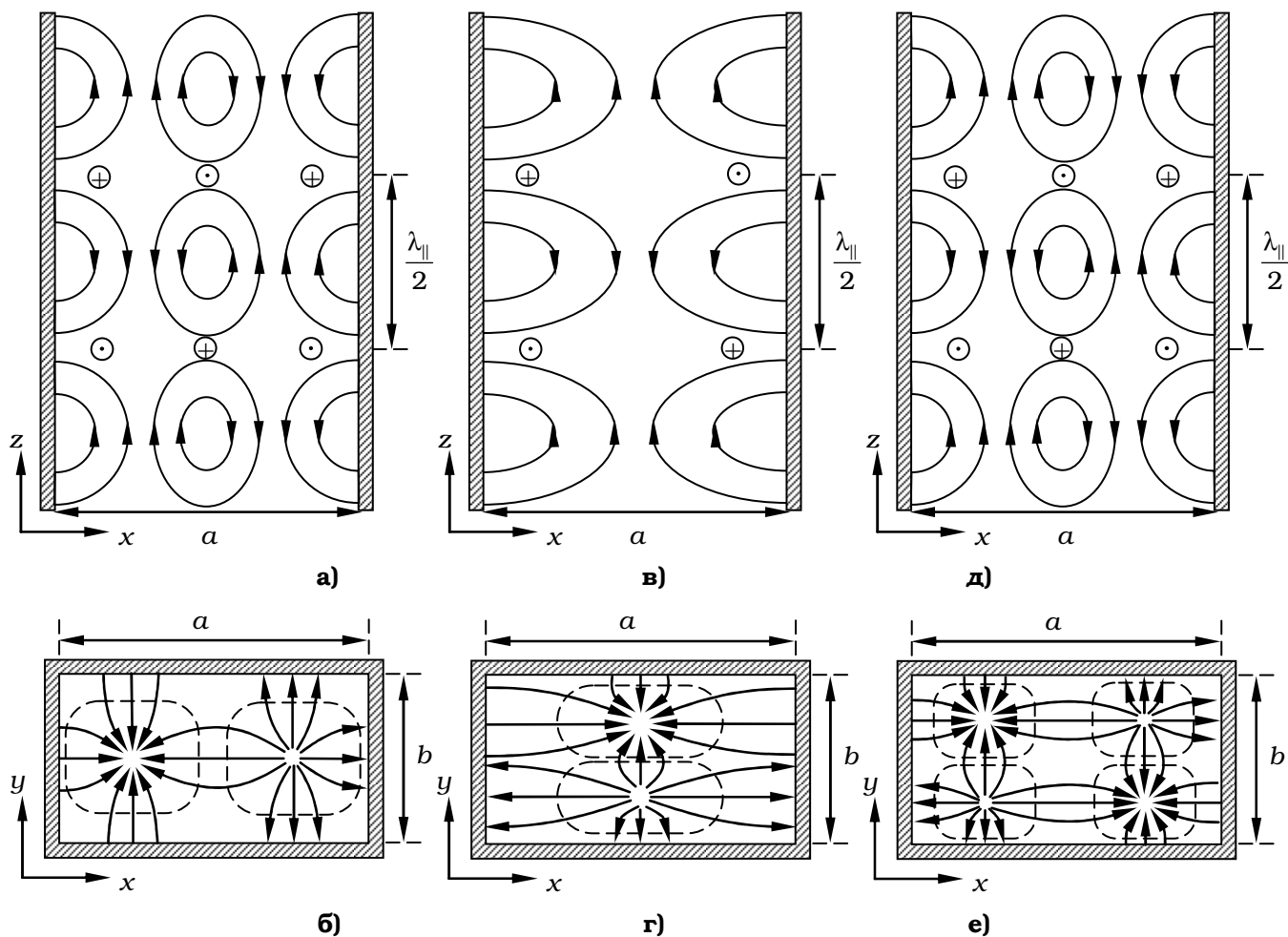
$\Psi(x, y) \equiv \Psi_{mn}(x, y)$ , одержуємо:

$$\begin{aligned}
 E_{x,mn}(x, y, z) &= -i\omega\mu_0 B^{TE} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i\beta_{mn}z}, \\
 E_{y,mn}(x, y, z) &= i\omega\mu_0 B^{TE} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i\beta_{mn}z}, \\
 E_{z,mn}(x, y, z) &= 0, \\
 H_{x,mn}(x, y, z) &= -i\beta_{mn} B^{TE} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i\beta_{mn}z}, \\
 H_{y,mn}(x, y, z) &= -i\beta_{mn} B^{TE} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i\beta_{mn}z}, \\
 H_{z,mn}(x, y, z) &= \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) B^{TE} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i\beta_{mn}z}. \quad (5.2.13)
 \end{aligned}$$

З (5.2.13) випливає, що ТЕ-хвилі можуть існувати при будь-яких значеннях індексів  $m, n$  окрім нульових (хвиля  $TE_{00}$  не існує).



**Рис. 5.2.5. Розподіл електромагнітного поля хвилі  $TM_{11}$  в повздовжньому (а) та в поперечному (б) перерізі прямокутного хвилеводу; суцільні лінії – силові лінії електричного поля, пунктирні лінії – силові лінії магнітного поля**



**Рис. 5.2.6.** Розподіл електромагнітного поля хвиль  $TM_{21}$  (а – в повздовжньому перерізі, б – в поперечному),  $TM_{12}$  (в – в повздовжньому перерізі, г – в поперечному),  $TM_{22}$  (д – в повздовжньому перерізі, е – в поперечному) прямокутного хвильоводу. Суцільні лінії – силові лінії електричного поля, пунктирні лінії – силові лінії магнітного поля

На рис. 5.2.7 показана картина полів для хвиль  $TE_{10}$ ,  $TE_{01}$  та  $TE_{11}$  відповідно. Згідно з виразами (5.2.13), розподіл поля в поперечному перерізі прямокутного хвильоводу будь-якої хвилі  $H_{m0}$  можна одержати шляхом повторення  $m$  раз вздовж широкої стінки хвильоводу роз-

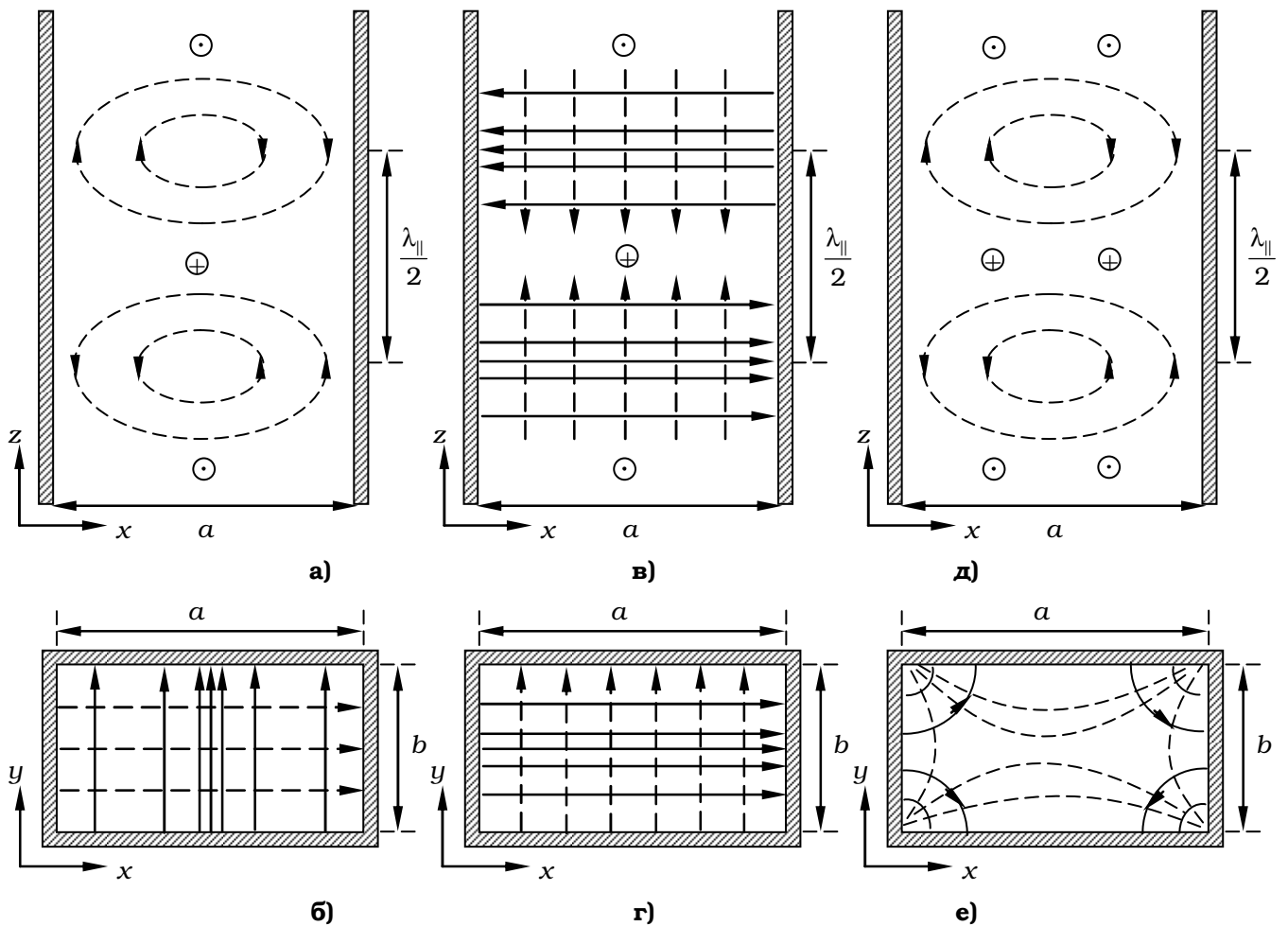
поділу поля хвилі  $TE_{10}$ . Використовуючи цей метод, наприклад, можна легко одержати розподіл поля хвилі  $TE_{20}$  (рис. 5.2.8). Оскільки розподіл поля хвилі  $H_{0n}$  можна одержати шляхом повороту на 90 градусів розподілу поля хвилі  $H_{n0}$  (широка та вузька стінки хвилеводу міняються місцями), очевидно, що розподіл поля в поперечному перерізі прямокутного хвилеводу будь-якої хвилі  $H_{0n}$  можна одержати повторенням  $n$  разів розподілу поля хвилі  $TE_{01}$  вздовж вузької стінки хвилеводу. Як приклад такої побудови картинок поля, на рис. 5.2.9 показано розподіл поля для хвилі  $H_{02}$ . Нарешті, розподіл поля хвилі  $TE_{mn}$  в поперечному перерізі прямокутного хвилеводу можна одержати шляхом повторення розподілу поля хвилі  $TE_{11}$   $m$  раз вздовж широкої стінки і  $n$  раз вздовж вузької стінки хвилеводу. Таким чином були побудовані розподіли поля хвиль  $TE_{21}$ ,  $TE_{12}$  та  $TE_{22}$ , показані на рис. 5.2.10.

**Хвильовий опір.** Оскільки розподіл поля  $TE$ - та  $TM$ -хвиль відомий, можна легко визначити хвильовий опір прямокутного хвилеводу для цих хвиль. З (5.2.12) випливає, що для хвиль  $TM_{mn}$

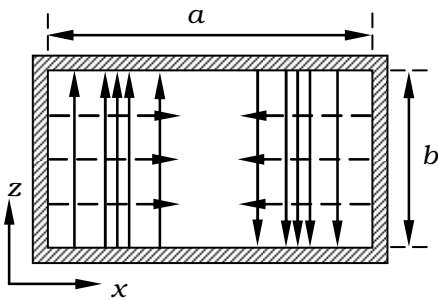
$$Z_{\Delta\Pi, mn}^{TM} = \frac{|E_{x, mn}|}{|H_{y, mn}|} = \frac{\beta_{mn}}{\omega \epsilon \epsilon_0} = \frac{\sqrt{k_0^2 \epsilon \mu - \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}}{\omega \epsilon \epsilon_0} = Z \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{k_0^2 \epsilon \mu} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}, \quad (5.2.14)$$

де  $Z$  – хвильовий опір середовища, яке заповнює хвилевід. Відповідно, для хвиль  $TE_{mn}$

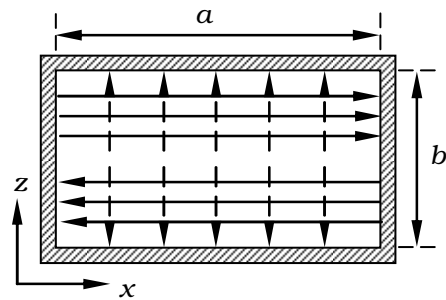
$$Z_{\Delta\Pi, mn}^{TE} = \frac{|E_{y, mn}|}{|H_{x, mn}|} = \frac{\omega \mu \mu_0}{\beta_{mn}} = \frac{\omega \mu \mu_0}{\sqrt{k_0^2 \epsilon \mu - \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}} = Z / \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{k_0^2 \epsilon \mu} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}. \quad (5.2.15)$$



**Рис. 5.2.7.** Розподіл електромагнітного поля хвиль  $TE_{10}$  (а – в повздовжньому перерізі, б – в поперечному),  $TE_{01}$  (в – в повздовжньому перерізі, г – в поперечному),  $TE_{11}$  (д – в повздовжньому перерізі, е – в поперечному) прямокутного хвилеводу. Суцільні лінії – силові лінії електричного поля, пунктирні лінії – силові лінії магнітного поля



**Рис. 5.2.8.** Розподіл електромагнітного поля хвилі  $TE_{20}$  в поперечному перерізі прямокутного хвилеводу. Суцільні лінії – силові лінії електричного поля, пунктирні лінії – силові лінії магнітного поля



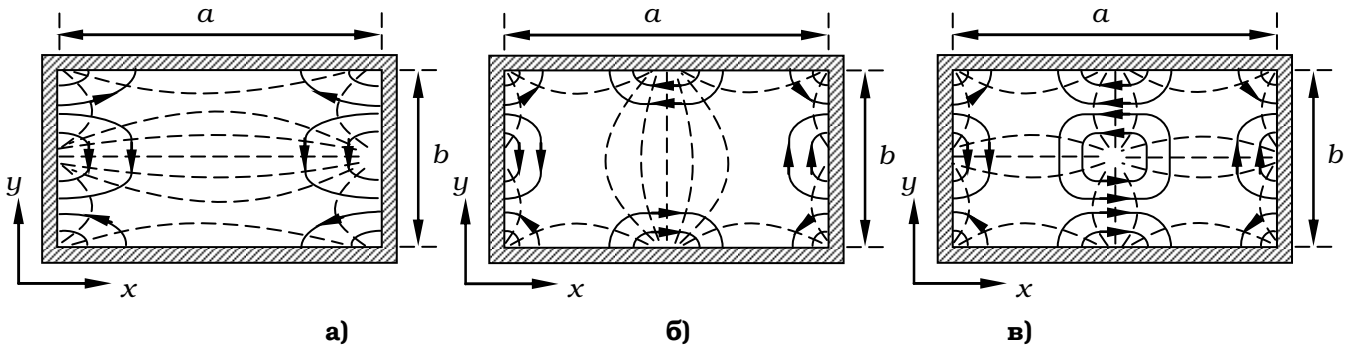
**Рис. 5.2.9.** Розподіл електромагнітного поля хвилі  $TE_{02}$  в поперечному перерізі прямокутного хвилеводу. Суцільні лінії – силові лінії електричного поля, пунктирні лінії – силові лінії магнітного поля

**Стала згасання.** При  $\lambda < \lambda_{\perp mn}$  згасання ТЕ- та ТМ-хвиль в хвилеводах обумовлено двома факторами: втратами енергії в середовищі, яке заповнює хвилевід і втратами в стінках хвилеводу внаслідок їх скінченної провідності. Нехай хвилевід заповнений середовищем з тангенсами кутів електричних та магнітних втрат, що відповідно дорівнюють  $\operatorname{tg} \delta_\epsilon$  та  $\operatorname{tg} \delta_\mu$ . Тоді, виходячи з (4.8.10), стала згасання хвилі за рахунок втрат в середовищі, що заповнює хвилевід

$$\beta''_{\text{мд},mn} = \frac{1}{2} \frac{K'}{\sqrt{1 - \left(\frac{K_{\perp mn}}{K'}\right)^2}} (\operatorname{tg} \delta_\epsilon + \operatorname{tg} \delta_\mu) = \frac{k_0}{2} \frac{|n_{\text{сеп}}| (\operatorname{tg} \delta_\epsilon + \operatorname{tg} \delta_\mu)}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{k_0^2 |n_{\text{сеп}}|^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}}. \quad (5.2.16)$$

З (5.2.16) випливає, що за відсутності дисперсії, хвилі з більшими індексами  $m, n$  мають більші втрати. При  $\lambda \ll \lambda_{\perp mn}$  стала згасання  $\beta''_{\text{мд},mn}$  пропорційна до частоти хвилі  $\omega$ .

Стала згасання ТМ-хвиль за рахунок втрат в металевих стінках хвилеводу може бути знайдена по формулі (4.8.17):



**Рис. 5.2.10. Розподіл електромагнітного поля хвиль  $TE_{21}$  (а),  $TE_{12}$  (б),  $TE_{22}$  (в) в поперечному перерізі прямокутного хвилеводу. Суцільні лінії – силові лінії електричного поля, пунктирні лінії – силові лінії магнітного поля**

$$\beta''_{np,mn} = \frac{R_S}{2 \operatorname{Re}\{Z_{\Lambda\Pi}\}} \frac{k_0 \sqrt{\epsilon' \mu'}}{\beta_{mn}} \frac{\oint_L \left| \frac{\partial \chi_{mn}}{\partial n} \right|^2 dl}{\int_S |\operatorname{grad}_\perp \chi_{mn}|^2 dS}.$$

Підставляючи в цю формулу замість  $Z_{\Lambda\Pi}$  вираз (5.2.14), в якому  $\epsilon = \epsilon'$ ,  $\mu = \mu'$ , одержуємо

$$\beta_{np,mn}'' = \frac{R_S}{2Z_0} \varepsilon' \sqrt{\varepsilon' \mu'} \frac{k_0^2}{\beta_{mn}^2} \frac{\oint_L \left| \frac{\partial \chi_{mn}}{\partial n} \right|^2 dl}{\int_S |\text{grad}_\perp \chi_{mn}|^2 dS}.$$

Інтеграли в цьому виразі можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} \oint_L \left| \frac{\partial \chi_{mn}}{\partial n} \right|^2 dl &= 2 \left( \left| \frac{dX(0)}{dx} \right|^2 \int_0^b Y^2(y) dy + \left| \frac{dY(0)}{dy} \right|^2 \int_0^a X^2(x) dx \right) = \\ &= 2 (A^{TM})^2 \left[ \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cos^2(0) \int_0^b \sin^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) dy + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \cos^2(0) \int_0^a \sin^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right) dx \right] = \\ &= (A^{TM})^2 \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} b + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} a \right), \\ \int_S |\text{grad}_\perp \chi_{mn}|^2 dS &= \int_S \left( \left| Y(y) \frac{dX(x)}{dx} \right|^2 + \left| X(x) \frac{dY(y)}{dy} \right|^2 \right) dS = \\ &= (A^{TM})^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \int_0^a dx \int_0^b dy \cos^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) + (A^{TM})^2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \times \\ &\times \int_0^a dx \int_0^b dy \sin^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) = (A^{TM})^2 \frac{ab}{4} \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right). \end{aligned}$$

Враховуючи вирази для інтегралів, для сталої згасання  $\beta_{np,mn}''$  хвилі  $\text{TM}_{mn}$  остаточно маємо

$$\beta_{np,mn}'' = \frac{R_S}{2Z_0} \varepsilon' \sqrt{\varepsilon' \mu'} \frac{k_0^2}{\beta_{mn}^2} \frac{(A^{TM})^2 \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} b + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} a \right)}{(A^{TM})^2 \frac{ab}{4} \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)} = \frac{2R_S}{Z_0} \varepsilon' \sqrt{\varepsilon' \mu'} \frac{k_0^2}{\beta_{mn}^2} \frac{\left( \frac{m^2 \pi^2}{a^3} + \frac{n^2 \pi^2}{b^3} \right)}{\left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)}. \quad (5.2.17)$$

По аналогії з вищенаведеними виразами для ТМ-хвиль для хвилі  $\text{TE}_{mn}$  можна одержати

$$\beta_{np}'' = \frac{R_S}{2Z_0} \frac{1}{\mu' \sqrt{\varepsilon' \mu'}} \frac{\beta_{mn}^2}{k_0^2} \left( \frac{\oint_L \left| \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial l} \right|^2 dl}{\int_S |\text{grad}_\perp \psi_{mn}|^2 dS} + \frac{K_{\perp mn}^4}{\beta_{mn}^2} \frac{\oint_L |\psi_{mn}|^2 dl}{\int_S |\text{grad}_\perp \psi_{mn}|^2 dS} \right).$$

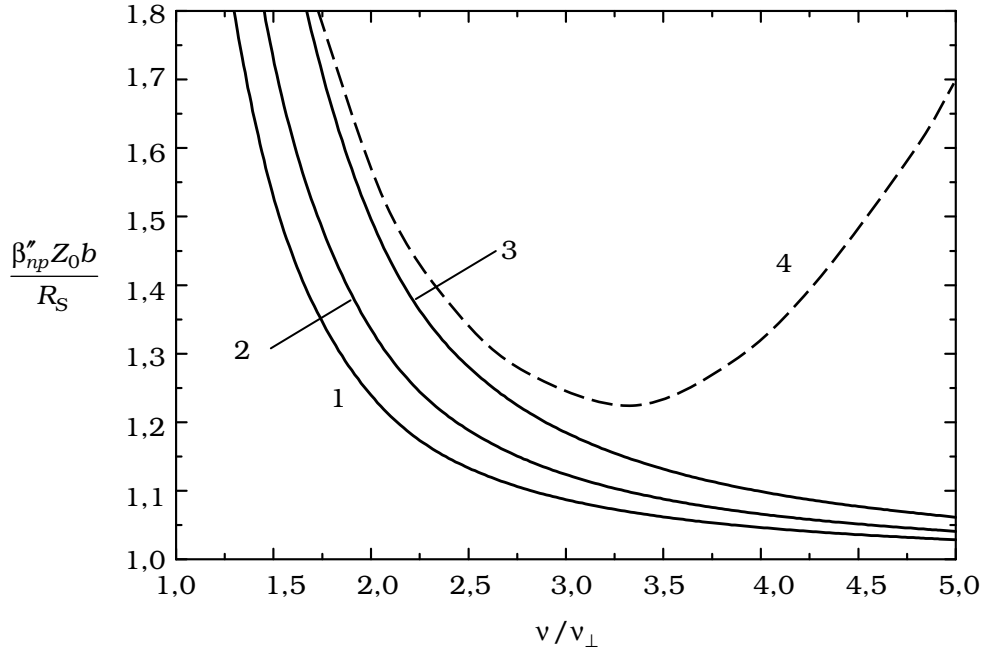
Інтеграли, які входять у цей вираз, запишемо у вигляді



$$\begin{aligned}
& \oint_L \left| \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial l} \right|^2 dl = 2 \left( |X(0)|^2 \int_0^b \left| \frac{dY(y)}{dy} \right|^2 dy + |Y(0)|^2 \int_0^a \left| \frac{dX(x)}{dx} \right|^2 dx \right) = \\
& = 2 (B^{TE})^2 \left[ \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \cos^2(0) \int_0^b \sin^2 \left( \frac{n\pi}{b} y \right) dy + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cos^2(0) \int_0^a \sin^2 \left( \frac{m\pi}{a} x \right) dx \right] = \\
& = 2 (B^{TE})^2 \left( \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{b}{2} + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{a}{2} \right) = (B^{TE})^2 \pi^2 \left( \frac{n^2}{b} + \frac{m^2}{a} \right), \\
& \oint_L |\psi_{mn}|^2 dl = 2 \left( |X(0)|^2 \int_0^b Y^2(y) dy + |Y(0)|^2 \int_0^a X^2(x) dx \right) = \\
& = 2 (B^{TE})^2 \left[ \int_0^b \cos^2 \left( \frac{n\pi}{b} y \right) dy + \int_0^a \cos^2 \left( \frac{m\pi}{a} x \right) dx \right] = 2 (B^{TE})^2 \left( \frac{a}{\delta_m} + \frac{b}{\delta_n} \right), \\
& \int_S |\text{grad}_\perp \psi_{mn}|^2 dS = \int_S \left( \left| Y(y) \frac{dX(x)}{dx} \right|^2 + \left| X(x) \frac{dY(y)}{dy} \right|^2 \right) dS = \\
& = (B^{TE})^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \int_0^a dx \int_0^b dy \sin^2 \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos^2 \left( \frac{n\pi}{b} y \right) + (B^{TE})^2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \times \\
& \times \int_0^a dx \int_0^b dy \cos^2 \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \sin^2 \left( \frac{n\pi}{b} y \right) = (B^{TE})^2 \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{ab}{2\delta_n} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{ab}{2\delta_m} \right), \\
& \text{де } \delta_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m > 0 \end{cases}, \quad \delta_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n > 0 \end{cases}. \text{ Отже, для хвиль } TE_{mn}
\end{aligned}$$

$$\beta_{np}'' = \frac{R_S}{Z_0} \frac{1}{\mu' \sqrt{\epsilon' \mu'}} \frac{\beta_{mn}^2}{k_0^2} \frac{\pi^2 \left( \frac{n^2}{b} + \frac{m^2}{a} \right) + 2 \frac{K_{\perp mn}^4}{\beta_{mn}^2} \left( \frac{a}{\delta_m} + \frac{b}{\delta_n} \right)}{ab \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{1}{\delta_n} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{1}{\delta_m} \right)}. \quad (5.2.18)$$

**Найголовніші результати для основної хвилі.** Основною хвилею прямокутного хвилеводу є хвиля  $TE_{10}$ . Критична довжина для цієї хвилі  $\lambda_{\perp 10} = 2a$ , критичне хвильове число  $K_{\perp 10} = \pi/a$ , хвильовий опір дорівнює  $Z_{\perp 10}^{TE} = Z / \sqrt{1 - \frac{1}{k_0^2 \epsilon \mu} \frac{\pi^2}{a^2}}$ , а стала поширення хвилі  $\beta_{10}^{TE} = \sqrt{k_0^2 - \frac{\pi^2}{a^2}} = k_0 \sqrt{1 - \left( \frac{K_{\perp 10}}{k_0} \right)^2}$ . Стала згасання хвилі  $TE_{10}$  в прямокутному хвилеводі з повітряним заповненням згідно з (5.2.18) дорівнює



**Рис. 5.2.11. Залежність нормованої сталої згасання хвилі  $H_{10}$  прямокутного хвильоводу з повітряним заповненням від нормованої частоти для випадків: 1 -  $b/a = 0,1$ ; 2 -  $b/a = 0,25$ ; 3, 4 -  $b/a = 0,5$ . Для кривих 1-3:  $R_S = R_S(v_{\perp})$ ; 4 -  $R_S = R_S(v)$**

$$\beta''_{np} = \frac{R_S(v)}{Z_0 b} \frac{1 + 2 \left( \frac{K_{\perp 10}}{k_0} \right)^2 \frac{b}{a}}{\sqrt{1 - \left( \frac{K_{\perp 10}}{k_0} \right)^2}} = \frac{R_S(v)}{Z_0 b} \frac{1 + 2 \left( \frac{v_{\perp 10}}{v} \right)^2 \frac{b}{a}}{\sqrt{1 - \left( \frac{v_{\perp 10}}{v} \right)^2}}. \quad (5.2.19)$$

Вона зростає при збільшенні співвідношення  $b/a$  (рис. 5.2.11). На перший погляд здається, що при  $v \gg v_{\perp}$  втрати повинні суттєво зменшуватись. Це однак не так, якщо прийняти до уваги, що при  $v \gg v_{\perp}$  поверхневий опір стінок хвильоводу  $R_S(v)$  може бути значно більшим за цей опір  $R_S(v_{\perp})$  при  $v = v_{\perp}$ . Якщо вважати стінки хвильоводу металевими, для яких  $R_S(v) \sim \sqrt{v}$ , то з (5.2.19) одержимо, що крива  $\beta''_{np}(v/v_{\perp})$  має мінімум (крива 4 на рис. 5.2.11).

### 5.3. Круглий хвилевід

Круглий хвилевід є провідною трубою з круглим поперечним перерізом (див. рис. 4.1.1 д). Найчастіше, використовують хвилеводи з повітряним заповненням для яких  $\epsilon \approx \mu \approx 1$ . Іноколи, якщо треба змінити межі робочої смуги частот хвилеводу не змінюючи його поперечних розмірів, застосовуються круглі хвилеводи, порожнина яких заповнена лінійним однорідним ізотропним діелектриком.

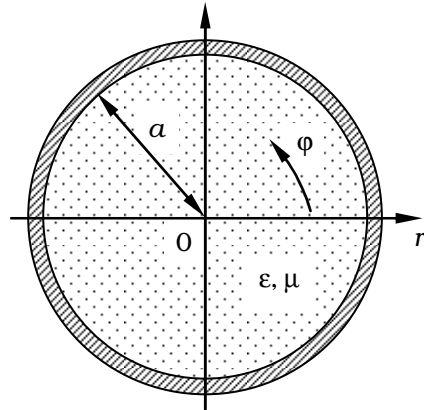
Подібно прямокутним хвилеводам круглі хвилеводи найбільш широко використовуються в діапазоні сантиметрових та міліметрових хвиль, на їх основі створюються різноманітні пристрої та прилади.

Розв'язок електродинамічної задачі про поширення електромагнітних хвиль в круглому хвилеводі з фізичної точки зору не відрізняється від аналогічної задачі для прямокутного хвилеводу. Основна математична відмінність у розгляді цих задач полягає у введенні для круглого хвилеводу іншої (циліндричної) системи координат, в якій граничні умови на металевій поверхні хвилеводу записуються більш просто.

Введемо циліндричну систему координат  $r, \phi, z$  початок якої співпадає з центром поперечного перерізу хвилеводу, а ось  $z$  паралельна осі хвилеводу (рис. 5.3.1). Тоді, поки що припускаючи, що втрат в системі немає, граничні умови на поверхні ідеально провідного циліндра з радіусом  $r = a$ , можна записати у вигляді

$$E_{\phi}(r = a, \phi, z) = E_z(r = a, \phi, z) = 0. \quad (5.3.1)$$

**Мембранна функція.** Мембранна функція електромагнітних хвиль в круглому хвилеводі задовольняє рівняння (4.4.9), в якому поперечний оператор Лапласа має вигляд  $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$ . Узагальнену мембранну функцію  $\eta(r, \phi)$  електромагнітної хвилі в круглому хвилеводі представимо у вигляді добутку двох функцій одна з яких залежить тільки від радіальної змінної  $r$ , а інша від кута  $\phi$ :



**Рис. 5.3.1. Поперечний переріз круглого хвилеводу з однорідним ізотропним діелектричним заповненням**

$$\eta(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi). \quad (5.3.2)$$

Підставляючи цей вираз у рівняння (4.4.9), одержуємо

$$\Phi \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \Phi \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2} R \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + K_{\perp}^2 R \Phi = 0. \quad (5.3.3)$$

Помножимо це рівняння на  $r^2$  і поділимо на добуток  $R(r) \Phi(\varphi)$  (звичайно, вважаємо, що він не дорівнює нулю):

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + K_{\perp}^2 r^2 + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0.$$

Перші три доданки в одержаному рівнянні є функціями лише координати  $r$ , а останній – функцією тільки азимутального кута  $\varphi$ . Тобто сума двох функцій, одна з яких залежить тільки від координати  $r$ , а інша – від координати  $\varphi$ , повинна дорівнювати нулю. Це можливе тільки за умови, що обидві ці функції дорівнюють з точністю до знака « $\pm$ » одній і тій же сталій, яку ми позначимо  $m^2$ . Причому, якщо, як це традиційно робиться в електродинаміці, обрати, що функція кута  $\varphi$  дорівнює  $-m^2$ , виявиться, що функція координати  $r$  дорівнює  $m^2$ . Отже, рівняння (5.3.3) розпадається на два:

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + K_{\perp}^2 r^2 = m^2, \quad \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0, \quad (5.3.4)$$

де  $m^2$  – стала розділення змінних.

Розглянемо спочатку перше з рівнянь (5.3.4). Поділимо його на  $r^2$  і помножимо на функцію  $R$ . Одержимо так зване рівняння Бесселя [10, 11].

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( K_{\perp}^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0.$$

Вводячи нову безрозмірну змінну  $t = K_{\perp} r$ , це рівняння можна трохи спростити:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dR}{dt} + \left( 1 - \frac{m^2}{t^2} \right) R = 0. \quad (5.3.5)$$

Загальним розв'язком рівняння (5.3.5) є функція

$$R(r) = A_1 J_m(K_{\perp} r) + A_2 N_m(K_{\perp} r), \quad (5.3.6)$$

де  $A_1, A_2$  – довільні сталі,  $J_m(t)$  – функція Бесселя першого роду  $m$ -го порядку,  $N_m(t)$  – функція Бесселя другого роду (функція Неймана або Вебера)  $m$ -го порядку. Функція Неймана в точці  $r = 0$  має особливість ( $\lim_{t \rightarrow 0} N_m(t) = -\infty$ ), тому очевидно, вона не може описувати електромагні-

тне поле в круглому хвилеводі<sup>1</sup>. Отже, функція  $R(r)$  має вигляд

$$R(r) = A_1 J_m(K_{\perp} r). \quad (5.3.7)$$

Розв'язок другого рівняння (5.3.4) запишеться як

$$\Phi(\varphi) = B_1 \cos(m\varphi) + B_2 \sin(m\varphi). \quad (5.3.8)$$

Очевидно, що функція  $\Phi(\varphi)$  є  $2\pi$ -періодичною, крім того, шляхом зміни початку відліку по куту  $\varphi$  можна досягти того, що одна з сталих  $B_1, B_2$  буде дорівнювати нулю. Для визначеності, наприклад, оберемо початок відліку по куту  $\varphi$  таким чином, щоб стала  $B_2$  дорівнювала нулю. Тоді функція  $\Phi(\varphi)$  буде мати вигляд

$$\Phi(\varphi) = B_1 \cos(m\varphi).$$

Отже, електрична мембранна функція ТМ-хвиль має вигляд

$$\chi(r, \varphi) = A^{TM} J_m(K_{\perp} r) \cos(m\varphi), \quad (5.3.9)$$

а магнітна мембранна функція ТЕ-хвиль запишеться як

$$\psi(r, \varphi) = B^{TE} J_m(K_{\perp} r) \cos(m\varphi). \quad (5.3.10)$$

**Хвильові числа та довжини хвиль.** Граничні умови (5.3.1), що повинні виконуватись для електромагнітних полів, еквівалентні граничним умовам

$$\chi(r = a, \varphi, z) = 0, \quad \frac{\partial \psi(r = a, \varphi, z)}{\partial r} = 0, \quad (5.3.11)$$

записаним для мембранних функцій. Ці умови є частинним випадком загальних граничних умов (4.6.7).

Підставляючи вирази (5.3.9)–(5.3.10) у граничні умови (5.3.11), одержуємо

$$J_m(K_{\perp} a) \cos(m\varphi) = 0, \quad \frac{dJ_m(K_{\perp} a)}{dr} \cos(m\varphi) = 0.$$

Обидва ці рівняння мають нескінченну кількість розв'язків. Позначимо  $n$ -й корінь рівняння  $J_m(t) = 0$  як  $t_{mn}$ , а  $n$ -й корінь рівняння  $dJ_m(t)/dt = 0$  як  $t'_{mn}$ . Значення коренів  $t_{mn}$  та  $t'_{mn}$  для деяких малих значень індексів  $m, n$  наведені в табл. 5.3.1.

Виходячи з зроблених позначень критичні хвильові числа ТМ-хвиль можна розрахувати по формулі

---

<sup>1</sup> Дійсно, нескінченно велике поле, наприклад, електричне поле  $\vec{E}$ , означає нескінченно велику густину енергії  $w_e \sim |\vec{E}|^2$  і, відповідно, для будь-якого скінченного об'єму  $V$  нескінченну енергію  $\int_V w_e dV$ , чого, звісно, бути не може.

$$K_{\perp mn}^{TM} = t_{mn} / a, \quad (5.3.12)$$

а критичні хвильові числа ТЕ-хвиль можуть бути знайдені як

$$K_{\perp mn}^{TE} = t'_{mn} / a. \quad (5.3.13)$$

Повздовжні хвильові числа (сталі поширення) ТЕ- та ТМ-хвиль описуються формулами

$$\beta_{mn}^{TM} = \sqrt{k_0^2 n_{cep}^2 - t_{mn}^2 / a^2}, \quad \beta_{mn}^{TE} = \sqrt{k_0^2 n_{cep}^2 - t_{mn}'^2 / a^2}, \quad (5.3.14)$$

які випливають з характеристичного рівняння лінії передачі (4.4.5);  $n_{cep} = \sqrt{\epsilon\mu}$  – показник заломлення середовища, що заповнює порожнину хвильоводу.

Відповідно критичні довжини хвиль  $\lambda_{\perp mn}^{TM}$ ,  $\lambda_{\perp mn}^{TE}$  і критичні частоти  $\nu_{\perp mn}^{TM}$ ,  $\nu_{\perp mn}^{TE}$ , а також довжини хвиль в хвильоводі  $\lambda_{\parallel mn}^{TM}$ ,  $\lambda_{\parallel mn}^{TE}$ , ТМ- та ТЕ-хвиль в круглому хвильоводі можуть бути визначені по формулам

$$\lambda_{\perp mn}^{TM} = \frac{2\pi a}{t_{mn}}, \quad \lambda_{\perp mn}^{TE} = \frac{2\pi a}{t'_{mn}}, \quad \nu_{\perp mn}^{TM} = \frac{ct_{mn}}{2\pi n_{cep} a}, \quad \nu_{\perp mn}^{TE} = \frac{ct'_{mn}}{2\pi n_{cep} a}, \quad (5.3.15)$$

$$\lambda_{\parallel mn}^{TM} = \frac{2\pi}{\beta_{mn}^{TM}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k_0^2 n_{cep}^2 - t_{mn}^2 / a^2}}, \quad \lambda_{\parallel mn}^{TE} = \frac{2\pi}{\beta_{mn}^{TE}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k_0^2 n_{cep}^2 - t_{mn}'^2 / a^2}}. \quad (5.3.16)$$

**Умови існування різних типів хвиль.** Виявляється цікавий факт: згідно з табл. 5.3.1 найбільшу критичну довжину хвилі серед ТЕ- та ТМ-хвиль круглого хвильоводу має хвиля  $TE_{11}$ , а не хвиля з найменшими можливими значеннями індексів  $m, n$ . Хвиля  $TE_{11}$  є основною хвилею круглого хвильоводу і має критичну довжину хвилі  $\lambda_{\perp 11}^{TE} = 3,415a$ . Першим вищим типом хвилі є хвиля  $TM_{01}$ , для якої  $\lambda_{\perp 01}^{TM} = 2,62a$ . Далі в порядку зменшення критичної довжини хвилі йдуть хвилі  $TE_{21}$  ( $\lambda_{\perp 21}^{TE} = 2,057a$ ), хвилі  $TM_{11}$  та  $TE_{01}$  з  $\lambda_{\perp 11}^{TM} = \lambda_{\perp 01}^{TE} = 1,64a$

**Таблиця 5.3.1.**

**Значення нулів  $t_{mn}$  та  $t'_{mn}$  функції Бесселя першого роду  $m$ -го порядку  $J_m(t)$  та її похідної  $dJ_m(t)/dt$**

$m$	$t_{mn}$			$t'_{mn}$		
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
0	2,405	5,520	8,654	3,832	7,016	10,174
1	3,832	7,016	10,174	1,840	5,335	6,705
2	5,135	8,417	11,620	3,054	6,705	9,969
3	6,380	9,761	13,015	4,201	8,015	11,346
4	7,588	11,065	14,373	5,318	9,282	12,682

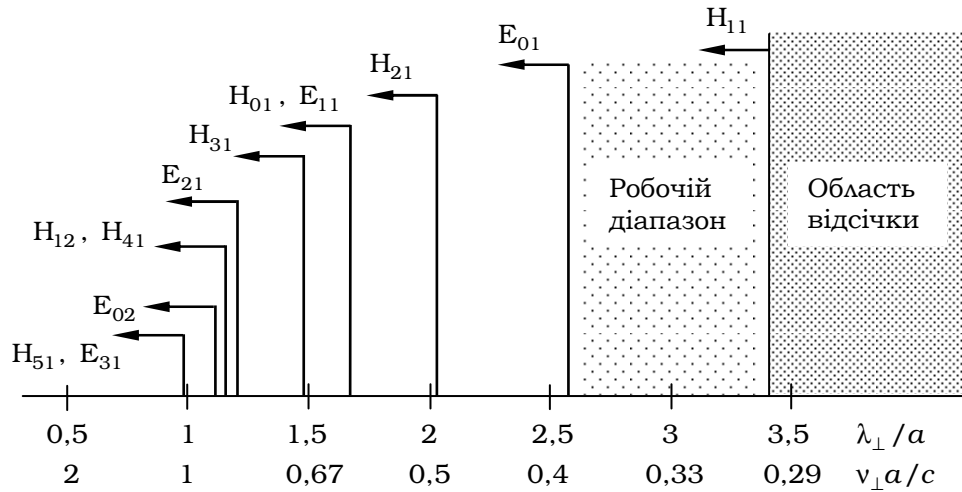
та інші. В таблиці 5.3.2 наведені нормовані значення критичних довжин хвиль та частот для круглого хвилеводу з повітряним заповненням ( $\epsilon = \mu = 1$ ). На рис. 5.3.2 показана відповідна графічна діаграма критичних довжин хвиль та частот.

Одномодовий режим роботи круглого хвилеводу реалізується в діапазоні довжин хвиль приблизно від  $\lambda_1 = 3,4a$  до  $\lambda_2 = 2,6a$ . Динамічний діапазон довжин хвиль круглого хвилеводу, тобто відношення  $\lambda_1 / \lambda_2$ , дорівнює 1,31, що помітно менше ніж у прямокутного хвилеводу, де цей параметр досягає двох. Завдяки більш вузькому динамічному діапазону довжин хвиль, круглі хвилеводи на відміну від прямокутних хвилеводів доволі рідко використовуються в техніці й електроніці НВЧ для передачі електромагнітних сигналів складної форми.

**Таблиця 5.3.2.**

**Критичні довжини хвиль та критичні частоти хвиль в круглому хвилеводі з повітряним заповненням**

<b>ТМ-хвилі</b>			<b>ТЕ-хвилі</b>		
<b>Тип хвилі</b>	$\lambda_{\perp mn}^{TM} / a$	$v_{\perp mn}^{TM} a / c$	<b>Тип хвилі</b>	$\lambda_{\perp mn}^{TE} / a$	$v_{\perp mn}^{TE} a / c$
E <sub>01</sub>	2,62	0,38	H <sub>11</sub>	3,41	0,29
E <sub>11</sub>	1,64	0,61	H <sub>21</sub>	2,06	0,49
E <sub>21</sub>	1,22	0,82	H <sub>01</sub>	1,64	0,61
E <sub>02</sub>	1,14	0,88	H <sub>31</sub>	1,49	0,67
E <sub>31</sub>	0,99	1,01	H <sub>12</sub>	1,18	0,85
E <sub>12</sub>	0,90	1,11	H <sub>41</sub>	1,18	0,85
E <sub>22</sub>	0,75	1,33	H <sub>51</sub>	0,98	1,02
E <sub>03</sub>	0,72	1,39	H <sub>22</sub>	0,94	1,06
E <sub>13</sub>	0,62	1,61	H <sub>02</sub>	0,90	1,11
E <sub>23</sub>	0,54	1,85	H <sub>13</sub>	0,74	1,35
E <sub>33</sub>	0,48	2,08	H <sub>03</sub>	0,62	1,61



**Рис. 5.3.2. Нормована діаграма критичних довжин хвиль  $\lambda_{\perp}/a$  та критичних частот  $\nu_{\perp}a/c$  для круглого хвильоводу з повітряним заповненням**

Другим недоліком круглих хвильоводів є виродження електромагнітних хвиль, що поширюються в цих лініях передачі. З табл. 5.3.1 випливає, що для довільних  $n$ -х коренів рівнянь  $J_1(t) = 0$  і  $dJ_0(t)/dt = 0$  виконується рівність

$$t_{1n} = t'_{0n}.$$

Ця рівність безпосередньо випливає з властивостей функцій Бесселя. Використовуючи (5.3.15) останнє співвідношення можна записати так:

$$\lambda_{\perp 1n}^{TM} = \lambda_{\perp 0n}^{TE}. \quad (5.3.17)$$

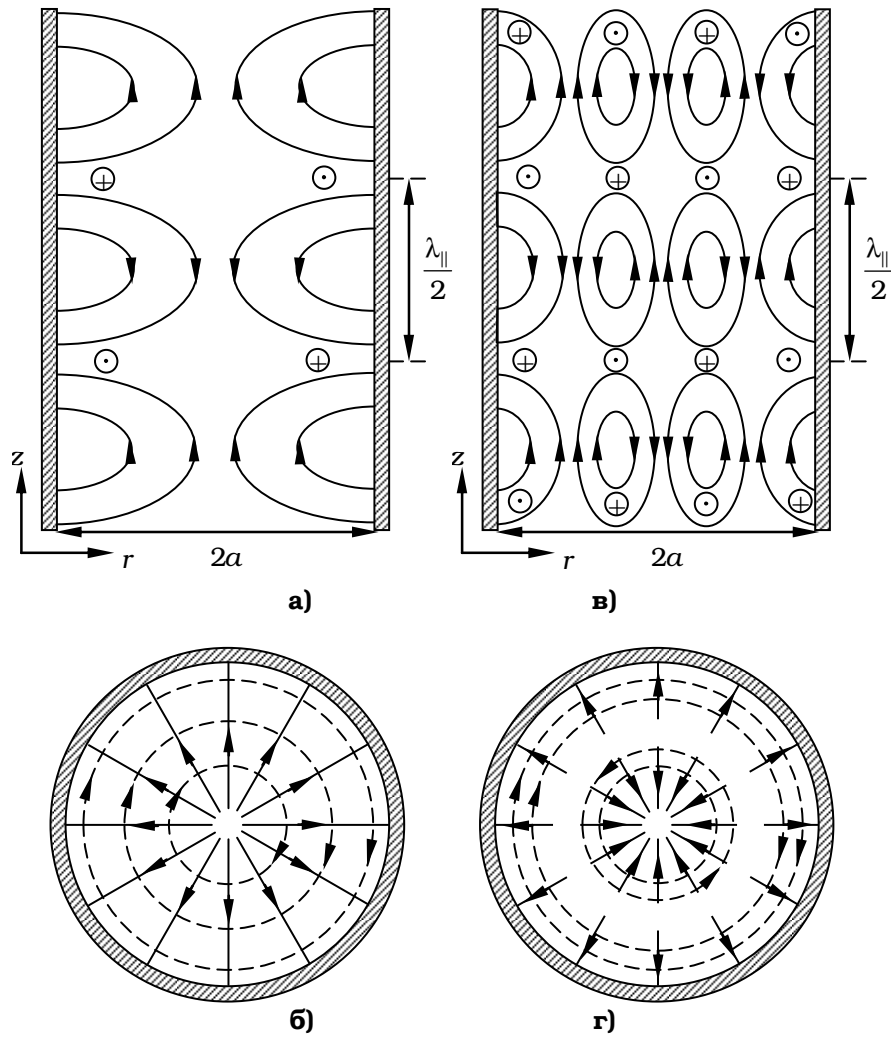
Рівність (5.3.17) означає, що відокремити хвилі  $TM_{1n}$  та  $TE_{0n}$  звичайним способом, тобто підбираючи радіус хвильоводу  $a$  так, щоб для однієї з хвиль хвильовід був позамежним, неможливо. Одночасне існування в хвильоводі двох різних хвиль з однаковими критичними довжинами хвилі і фазовими сталими призводить до нестійкості площини поляризації вздовж осі хвильоводу, що, звичайно, є негативним фактором.

Як ми побачимо далі, хвиля  $TE_{01}$  круглого хвильоводу зручна для дальнього хвильоводного зв'язку. При цьому важливою проблемою є забезпечення таких умов поширення хвилі  $TE_{01}$  в круглому хвильоводі, при яких не відбулося б її виродження в хвилю  $TM_{11}$ .

При виготовленні реальних круглих хвильоводів, в їх конструкції завжди є деякі хоча б і незначні дефекти (вигини хвильоводу, зміни його діаметру, спотворення форми поперечного перерізу та ін.) за рахунок яких це виродження знімається. При цьому в реальних круглих хвильоводах поширюються вже дві хвилі –  $TE_{01}$  та  $TM_{11}$  – з різними фазовими швидкостями і критичними частотами. Однак, хоча виродження знімається, різниці  $|K_{\perp 11}^{TM} - K_{\perp 01}^{TE}|$  та  $|\beta_{11}^{TM} - \beta_{01}^{TE}|$  є малими порівняно з самими хвильовими числами. Отже, відокремлення хвиль  $TE_{01}$



та  $TM_{11}$  все ж таки залишається складною задачею. Щоб гарантовано позбавитись від паразитної хвилі  $TM_{11}$ , як правило, доводиться ускладнювати конструкцію лінії передачі – наприклад, наносити на



**Рис. 5.3.3. Розподіл електромагнітного поля хвиль  $TM_{01}$  (а – в повздовжньому перерізі, б – в поперечному) та  $TM_{02}$  (в – в повздовжньому перерізі, г – в поперечному) круглого хвелеводу. Суцільні лінії – силові лінії електричного поля, пунктирні лінії – силові лінії магнітного поля**

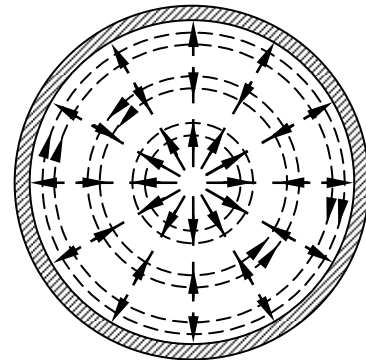
стілки хвильоводу діелектричне покриття. Як ми побачимо далі, у хвилі  $TE_{01}$  електричне поле ( $E_\phi$ ) поблизу від стінки хвильоводу близьке до нуля і тому тонкий діелектричний шар майже не збурює його і не впливає на поширення хвилі  $TE_{01}$  в хвильоводі. Вплив діелектричного покриття на електромагнітне поле хвилі  $TM_{11}$  навпаки, суттєвий. За рахунок нанесеного на стінки хвильоводу діелектричного шару згасання хвилі  $TM_{11}$  зростає, а коефіцієнт трансформації хвилі  $TE_{01}$  в хвилю  $TM_{11}$  зменшується.

**Розподіл поля.** Електромагнітне поле ТМ-хвиль в круглому хвильоводі буде описується виразами

$$\begin{aligned} E_r &= i\beta A^{TM} \frac{dJ_m(K_\perp r)}{dr} \cos(m\phi) e^{i\beta z}, \\ E_\phi &= -i\beta \frac{m}{r} A^{TM} J_m(K_\perp r) \sin(m\phi) e^{i\beta z}, \\ E_z &= (K^2 - \beta^2) A^{TM} J_m(K_\perp r) \cos(m\phi) e^{i\beta z}, \\ H_r &= i\omega\epsilon\epsilon_0 \frac{m}{r} A^{TM} J_m(K_\perp r) \sin(m\phi) e^{i\beta z}, \\ H_\phi &= i\omega\epsilon\epsilon_0 A^{TM} \frac{dJ_m(K_\perp r)}{dr} \cos(m\phi) e^{i\beta z}, \\ H_z &= 0, \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

які безпосередньо впливають з (4.5.2) та виразу (5.3.9) для електричної мембранної функції.

На рис. 5.3.3 показана структура полів двох нижчих по частоті<sup>1</sup> ТМ-хвиль з азимутально-однорідним розподілом поля. Поле цих хвиль не залежить від координати  $\phi$  і в поперечному перерізі лінії передачі нагадує структуру поля в циліндричному конденсаторі. Розподіл поля хвилі  $TM_{01}$  в поперечному перерізі хвильоводу виявляється близьким до розподілу поля для основної (ТЕМ-) моди циліндричного конденсатора. Розподіл поля хвилі  $TM_{02}$  близький до розподілу поля для однієї з вищих мод коли-



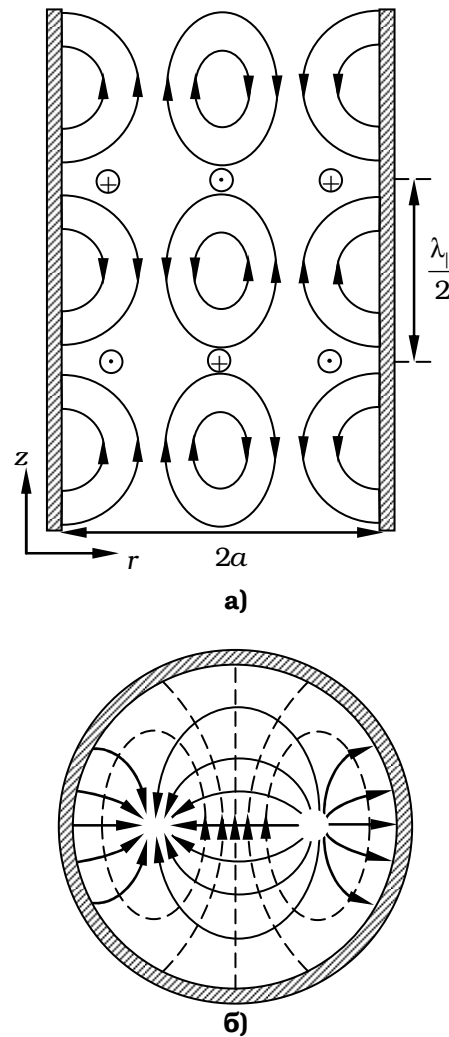
**Рис. 5.3.4. Розподіл електромагнітного поля хвилі  $TM_{03}$  в поперечному перерізі круглого хвильоводу. Суцільні лінії – силові лінії електричного поля, пунктирні лінії – силові лінії магнітного поля**

<sup>1</sup> Маються на увазі хвилі з найбільшими критичними довжинами хвилі або з найменшими критичними частотами.

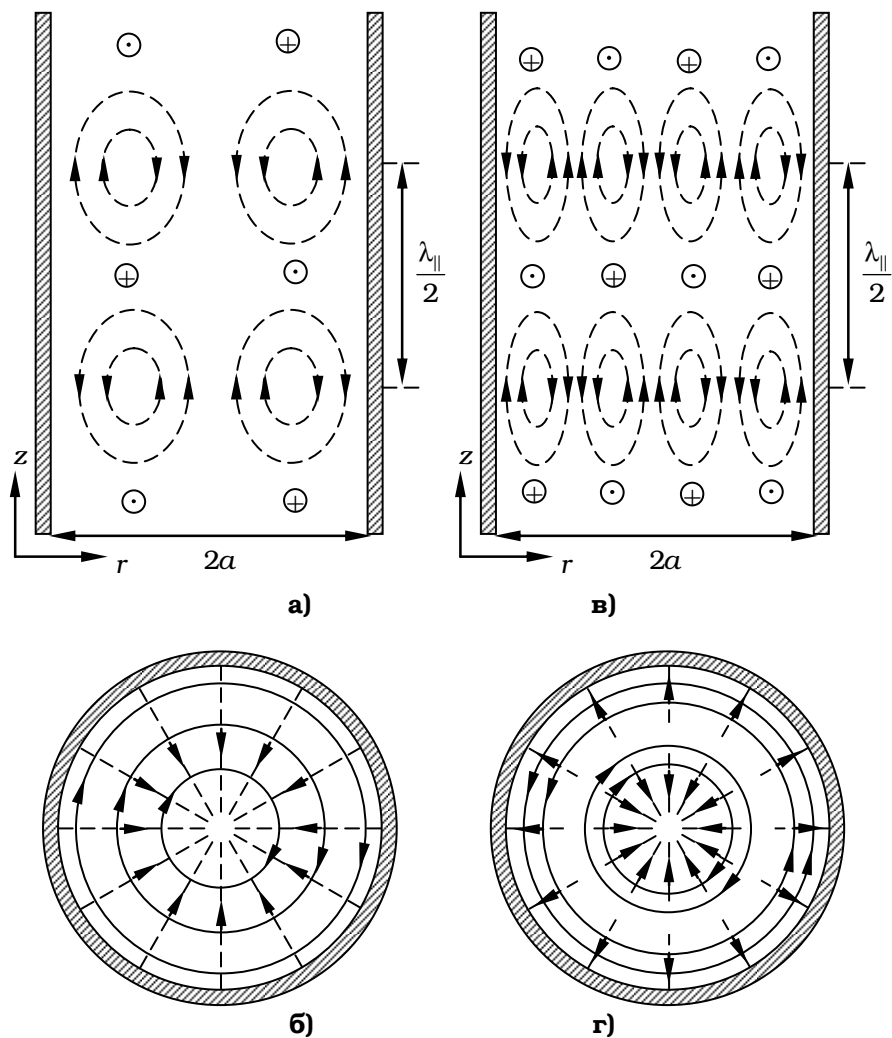
вань в циліндричному конденсаторі. Як і раніше індекси  $m$  та  $n$  в позначенні хвилі  $TM_{mn}$  відображають кількість варіацій поля вздовж відповідної координати ( $\phi, r$ ).

Структуру поля вищих хвиль  $TM_{0n}$  в круглому хвилеводі легко одержати повторюючи  $n$  разів розподіл хвилі  $TM_{01}$  (див. рис. 5.3.3 а) вздовж координати  $r$ . При цьому також необхідно врахувати зміну фази поля (напрямок його силових ліній), яка змінюється на  $\pi$  з кожною варіацією поля. Як приклад застосування цього правила на рис. 5.3.4 показано розподіл поля хвилі  $TM_{03}$  в поперечному перерізі хвилеводу. Порівнюючи між собою картини силових ліній полів для хвиль  $TM_{01}$ ,  $TM_{02}$ ,  $TM_{03}$ , бачимо, що розподіл поля хвилі  $TM_{03}$  можна легко побудувати, якщо розділити поперечний переріз хвилеводу на  $n$  уявних кілець (на рис. 5.3.3 а –  $n=1$ , 5.3.3 б –  $n=2$ , 5.3.4 –  $n=3$ ), які вкладені одне в одне, і в кожному кільці побудувати розподіл поля хвилі  $TM_{01}$ , враховуючи зміну напрямку силових ліній при переході від одного кільця до сусіднього.

Структура поля азимутально-неоднорідних ТМ-хвиль має складніший характер ніж для азимутально-однорідних хвиль. На рис. 5.3.5 показано картину полів для нижчої по частоті ТМ-хвилі, поле якої залежить від азимутального кута  $\phi$ . Із збільшенням індексів  $m, n$  структура поля азимутально-неоднорідних ТМ-хвиль суттєво ускладнюється.



**Рис. 5.3.5. Розподіл електромагнітного поля хвилі  $TM_{11}$  в повздовжньому (а) та в поперечному (б) перерізі круглого хвилеводу. Суцільні лінії – силові лінії електричного поля, пунктирні лінії – силові лінії магнітного поля**



**Рис. 5.3.6. Розподіл електромагнітного поля хвиль  $TE_{01}$  (а – в повздовжньому перерізі, б – в поперечному) та  $TE_{02}$  (в – в повздовжньому перерізі, г – в поперечному) круглого хвилеводу. Суцільні лінії – силові лінії електричного поля, пунктирні лінії – силові лінії магнітного поля**

Використовуючи вираз (5.3.10) для  $\psi(r, \phi)$  та формули (4.5.2), складові електромагнітного поля TE-хвиль в круглому хвилеводі можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
E_r &= -i\omega\mu_0 \frac{m}{r} B^{TE} J_m(K_\perp r) \sin(m\varphi) e^{i\beta z}, \\
E_\varphi &= -i\omega\mu_0 B^{TE} \frac{dJ_m(K_\perp r)}{dr} \cos(m\varphi) e^{i\beta z}, \\
E_z &= 0, \\
H_r &= i\beta B^{TE} \frac{dJ_m(K_\perp r)}{dr} \cos(m\varphi) e^{i\beta z}, \\
H_\varphi &= -i\beta \frac{m}{r} B^{TE} J_m(K_\perp r) \sin(m\varphi) e^{i\beta z}, \\
H_z &= (K^2 - \beta^2) B^{TE} J_m(K_\perp r) \cos(m\varphi) e^{i\beta z}. \quad (5.3.10)
\end{aligned}$$

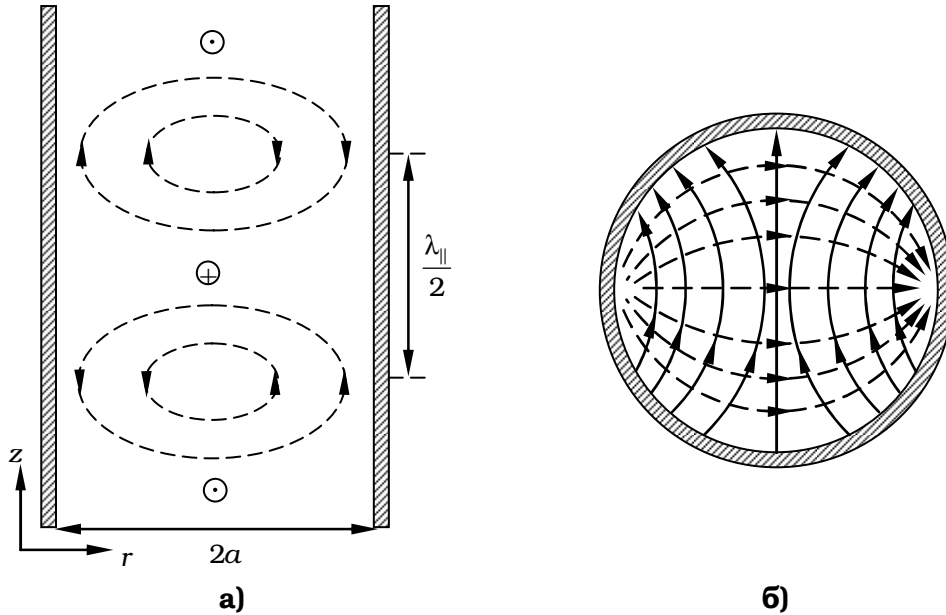
На рис. 5.3.6 показано розподіл поля для двох азимутально-однорідних ТЕ-хвиль з кількістю варіацій поля по координаті  $r$   $n=1$  і  $n=2$ . Порівнюючи картини полів цих хвиль легко зрозуміти як змінюється розподіл поля при зміні індексу  $n$ . Як і у випадку ТМ-хвиль при збільшенні індексу  $n$  зростає кількість варіацій поля вздовж радіальної координати  $r$ . Це проявляється на картині полів у вигляді зміни напрямку силових ліній поля; як і раніше кількість таких змін дорівнює  $n-1$ .

Серед азимутально-неоднорідних ТЕ-хвиль найбільш важливою є хвиля  $TE_{11}$ , яка є основною хвилею круглого хвилеводу. Картина її полів показана на рис. 5.3.7.

При розгляді структури поля електромагнітних хвиль в круглому хвилеводі цікаво порівняти розподіл полів ТМ- та ТЕ-хвиль з відповідним розподілом для прямокутного хвилеводу. Виявляється, якщо не звертати уваги на різні значення індексів для хвиль в прямокутному та круглому хвилеводах, розподіли деяких з цих хвиль є якісно однаковими. Так розподіл поля хвилі  $TM_{01}$  при поступовій трансформації поперечного перерізу хвилеводу від кола до прямокутника переходить у розподіл поля хвилі  $TM_{11}$  прямокутного хвилеводу (рис. 5.3.8). Хвиля  $TE_{11}$  круглого хвилеводу по своїй структурі поля виявляється близькою до хвилі  $TE_{10}$  прямокутного хвилеводу (рис. 5.3.9).

Разом з тим слід відзначити і деякі відмінності в класифікації хвиль для хвилеводів з круглою та прямокутною формою поперечного перерізу. По-перше, це відмінність в значеннях індексів для хвиль з подібним розподілом поля. Це призводить до того, що хвилі одного класу з однаковими індексами, які існують в прямокутному та круглому хвилеводі, можуть мати якісно різні розподіли поля. По-друге, на відміну від прямокутних хвилеводів, де можуть існувати як хвилі  $TM_{mn}$ ,  $TE_{mn}$  так і хвилі  $TM_{nm}$ ,  $TE_{nm}$  з оберненим порядком індексів, в

круглому хвилеводі ТМ- та ТЕ-хвилі з другим нульовим індексом (відсутні варіації поля вздовж радіальної координати  $r$ ) існувати не можуть.



**Рис. 5.3.7. Розподіл електромагнітного поля хвилі  $TE_{11}$  в повздовжньому (а) та в поперечному (б) перерізі круглого хвилеводу. Суцільні лінії – силові лінії електричного поля, пунктирні лінії – силові лінії магнітного поля**

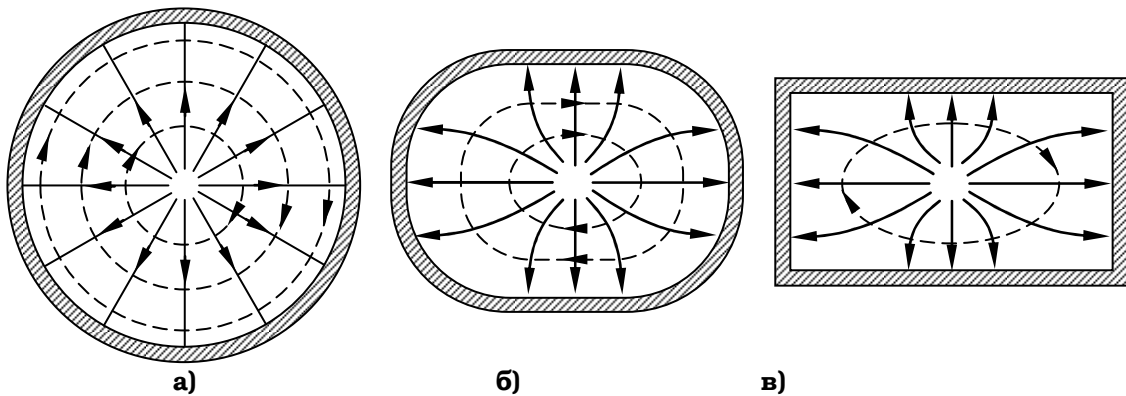
**Хвильовий опір.** Хвильовий опір круглого хвилеводу для ТЕ- та ТМ-хвиль визначимо виходячи з загальних формул (4.7.10)–(4.7.11). Підставляючи в ці формули вирази для сталої поширення ТМ- та ТЕ-хвиль в круглому хвилеводі, одержуємо:

$$Z_{\Lambda\Pi,mn}^{TM} = \frac{|E_{r,mn}|}{|H_{\phi,mn}|} = \frac{\beta_{mn}}{\omega\epsilon\epsilon_0} = \frac{\sqrt{k_0^2 n_{сеп}^2 - t_{mn}^2 / a^2}}{\omega\epsilon\epsilon_0} = Z \sqrt{1 - \frac{t_{mn}^2}{k_0^2 n_{сеп}^2 a^2}},$$

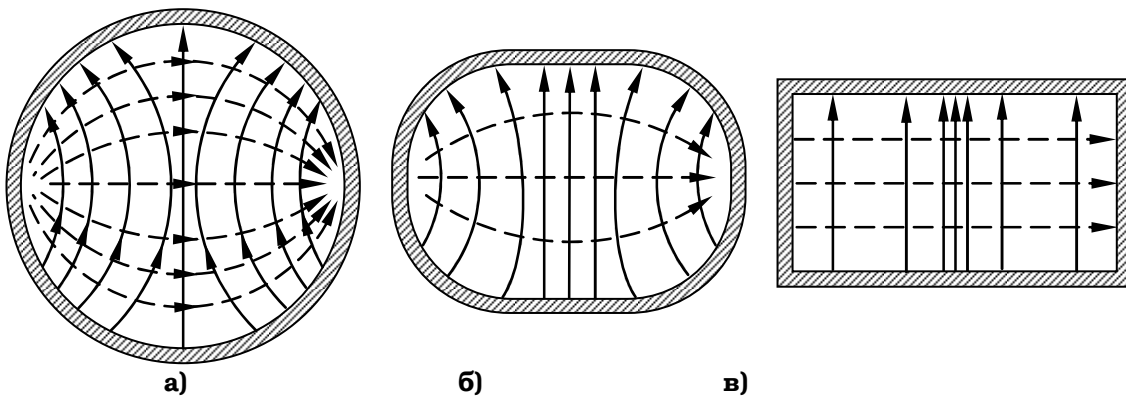
$$Z_{\Lambda\Pi,mn}^{TE} = \frac{|E_{r,mn}|}{|H_{\phi,mn}|} = \frac{\omega\mu\mu_0}{\beta_{mn}} = \frac{\omega\mu\mu_0}{\sqrt{k_0^2 n_{сеп}^2 - t_{mn}^2 / a^2}} = Z / \sqrt{1 - \frac{t_{mn}^2}{k_0^2 n_{сеп}^2 a^2}}, \quad (5.3.11)$$

де  $Z$  – хвильовий опір середовища, яке заповнює хвилевід.

**Стала згасання.** Формули для складових полів ТМ- та ТЕ-хвиль в круглому хвилеводі є складнішими за аналогічні формули для ТМ- та ТЕ-хвиль прямокутного хвилеводу. Це значно ускладнює математич-



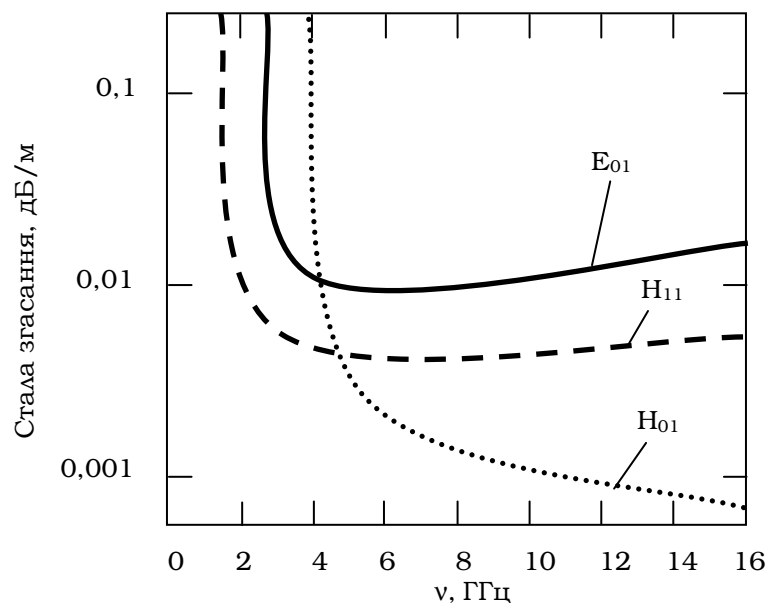
**Рис. 5.3.8.** Трансформація розподілу електромагнітного поля хвилі  $TM_{01}$  в круглому хвилеводі (а) в розподіл електромагнітного поля хвилі  $TM_{11}$  прямокутного хвилеводу (в); б – розподіл електромагнітного поля хвилі в хвилеводі з формою поперечного перерізу, яка є проміжною між колом та прямокутником. Суцільні лінії – силові лінії електричного поля, пунктирні лінії – силові лінії магнітного поля



**Рис. 5.3.9.** Трансформація розподілу електромагнітного поля хвилі  $TE_{11}$  в круглому хвилеводі (а) в розподіл електромагнітного поля хвилі  $TE_{10}$  прямокутного хвилеводу (в); б – розподіл електромагнітного поля хвилі в хвилеводі з формою поперечного перерізу, яка є проміжною між колом та прямокутником. Суцільні лінії – силові лінії електричного поля, пунктирні лінії – силові лінії магнітного поля

ний розрахунок сталої згасання ТМ- та ТЕ-хвиль в круглому хвилеводі, тому що виявляється необхідним розглядати інтеграли від циліндричних функцій. Щоб обминути ці труднощі обмежимося якісним аналізом механізму втрат енергії в круглому хвилеводі.

Перш за все припустимо, що втрати середовищі, що заповнює хвилевід, є малими порівняно з втратами в провідній циліндричній поверхні, що утворює хвилевід. Таке припущення є природнім, оскільки в більшості випадків хвилеводи мають або повітряне заповнення або заповнюються слабопоглинаючими діелектриками.



**Рис. 5.3.10. Частотна залежність сталої згасання деяких хвиль в циліндричному хвилеводі з радіусом  $a = 5$  см**

Стала згасання ТЕ- та ТМ-хвиль, обумовлена втратами в провідних стінках хвилеводу може бути розрахована по наступним простим формулам []:

для електричних хвиль  $TM_{mn}$

$$\beta''_{np,mn} = 8,69 \sqrt{\frac{\omega \epsilon \epsilon_0}{2\sigma}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{\perp}}{v}\right)^2}}, \quad (5.3.12)$$

для магнітних хвиль  $TE_{mn}$



$$\beta''_{np,mn} = 8,69 \sqrt{\frac{\omega \epsilon \epsilon_0}{2\sigma}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{\perp}}{v}\right)^2}} \left[ \left(\frac{v_{\perp}}{v}\right)^2 + \frac{m^2}{t_{mn}^2 - m^2} \right], \quad (5.3.13)$$

де  $\sigma$  – електропровідність стінок хвилеводу,  $\epsilon$  – діелектрична проникність діелектрика, що заповнює хвилевід. Розраховані таким чином сталі згасання вимірюються в дБ/м.

З останньої формули випливає цікавий і важливий результат: при  $m = 0$  залежність сталої згасання від частоти  $\nu$  не обов'язково повинна бути зростаючою. Наприклад, для хвилі  $H_{01}$  з (5.3.13) випливає, що

$$\beta''_{np,H_{01}} = 8,69 \sqrt{\frac{\omega \epsilon \epsilon_0}{2\sigma}} \frac{\left(\frac{v_{\perp}}{v}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{\perp}}{v}\right)^2}}, \quad (5.3.14)$$

тобто при  $\nu > \nu_{\perp}$  функція  $\beta''_{np,H_{01}}(\nu)$  є спадаючою. Це робить хвилю  $H_{01}$  зручною для реалізації систем дальнього хвилеводного зв'язку. На рис. 5.3.10 показана порівняльні характеристики згасання деяких хвиль в круглому хвилеводі в діапазоні частот від 1 до 16 ГГц.

Особливості хвилі  $H_{01}$  інтенсивно вивчалися вітчизняними і закордонними вченими починаючи з 60-х років попереднього сторіччя. Були розроблені спеціальні лінії передачі в яких вдавалось досягти згасання хвилі  $H_{01}$  в 7 разів меншого ніж згасання основної хвилі  $H_{11}$ . Були побудовані робочі прототипи таких ліній передачі довжиною 30–50 км. При проходженні такої лінії передачі електромагнітний сигнал згасав лише в 1,5÷2 рази. В сучасній техніці й електроніці НВЧ такі лінії передачі однак майже не застосовуються – їх витіснили більш зручні та ефективні волоконно-оптичні лінії передачі.

**Найголовніші результати для основної хвилі.** Основною хвилею круглого хвилеводу є хвиля  $TE_{11}$ . Критична довжина для цієї хвилі  $\lambda_{11}^{TE} = 3,41a$ , критичне хвильове число  $K_{11}^{TE} = 1,84/a$ , хвильовий опір

дорівнює  $Z_{11}^{TE} = Z / \sqrt{1 - \frac{3,39}{k_0^2 n_{cep}^2 a^2}}$ , а стала поширення хвилі

$\beta_{11}^{TE} = \sqrt{k_0^2 n_{cep}^2 - 3,39/a^2}$ . Стала згасання хвилі  $TE_{11}$  в круглому хвилеводі з повітряним заповненням згідно з (5.3.13) дорівнює (в дБ/м)

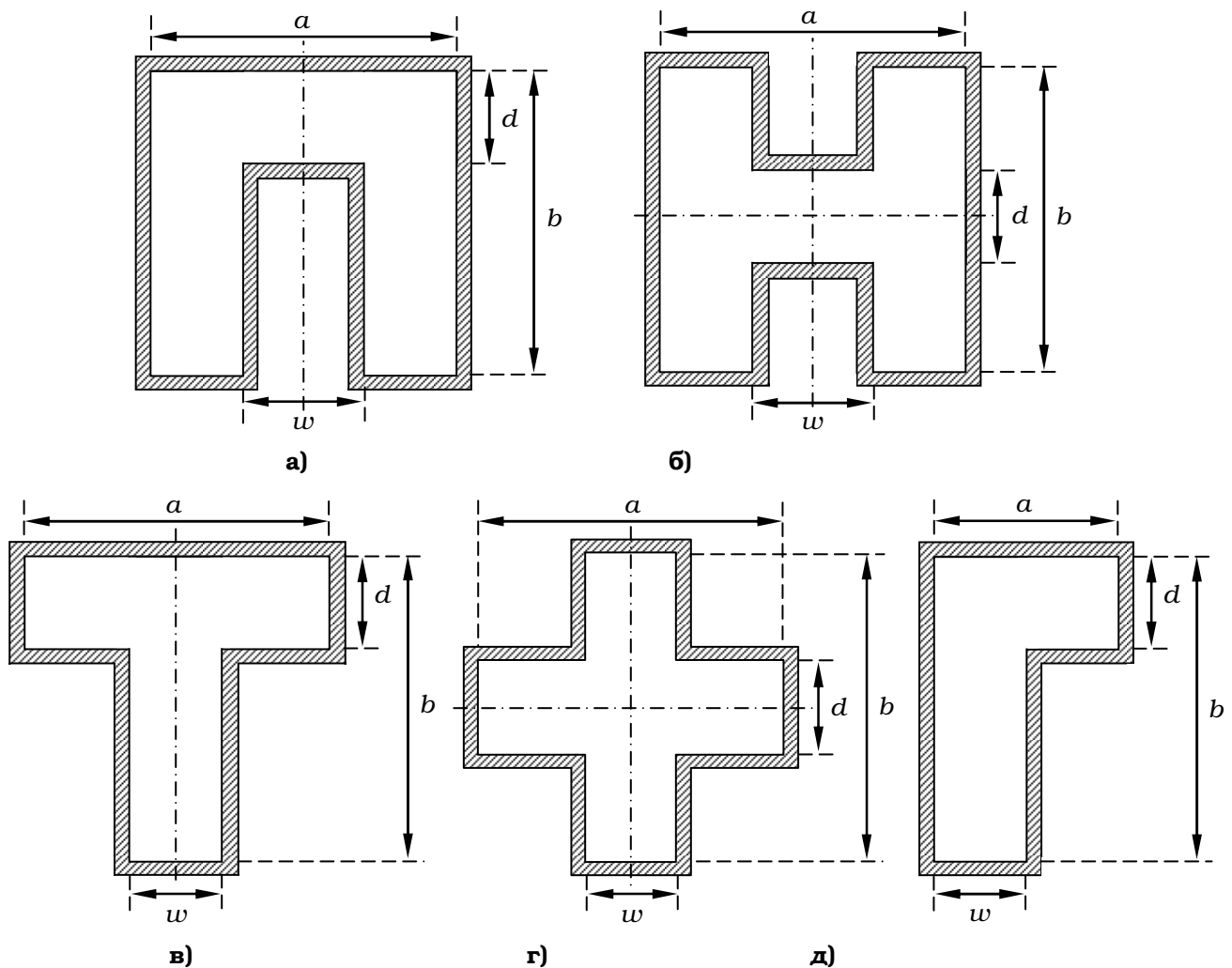
$$\beta_{np,11}^* = 8,69 \sqrt{\frac{\omega \epsilon \epsilon_0}{2\sigma}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{\perp}}{v}\right)^2}} \left[ \left(\frac{v_{\perp}}{v}\right)^2 + 0,42 \right]. \quad (5.3.15)$$

Якщо знехтувати залежністю поверхневого опору стінок хвилеводу від частоти  $\nu$ , то найменше значення сталої згасання буде досягатись при  $\lambda / a \approx 1,2$ .

#### 5.4. Металеві хвилеводи з складною формою поперечного перерізу

Робочий діапазон довжин хвиль стандартних металевих хвилеводів з прямокутним або круглим поперечним перерізом визначається розмірами хвилеводу і при фіксованих розмірах поперечного перерізу є достатньо вузьким. Як було показано в попередніх параграфах максимальний динамічний діапазон прямокутного хвилеводу складає 2,0, а круглого – 1,31. По таким лініям передачі незручно передавати широкосмугові сигнали, або декілька сигналів з різними частотами, оскільки в таких системах суттєво проявляється дисперсія. Наявність помітних дисперсійних властивостей та вузького діапазону частот призвели до того, що в техніці та електроніці НВЧ стали застосовувати металеві хвилеводи з поперечним перерізом складної форми, які позбавлені вищезгаданих вад. Окрім меншого прояву дисперсії та більшого робочого діапазону частот слід також відмітити їх кращі масогабаритні показники порівняно зі звичайними прямокутними або круглими хвилеводами.

Серед металевих хвилеводів складної форми найбільш часто використовуються П-, Н-, Т-, Х- (хрестоподібні) та Г-подібні хвилеводи (рис. 5.4.1). Такі хвилеводи являють собою металеву трубу з відповідним складним профілем поперечного перерізу. Розглянемо властивості хвиль в П- та Н-подібному хвилеводах (див. рис. 5.4.1 а, б). Теорія таких хвилеводів достатньо складна і точний розрахунок властивостей електромагнітних хвиль в таких хвилеводах можливий лише за допомогою чисельних методів аналізу. Значний вклад в теорію таких систем був зроблений вченими ростовської наукової школи під керівництвом В. С. Михайлевського, харківської наукової школи під керівництвом В. П. Шестопалова та ленінградської наукової школи під керівництвом Г. І. Веселова. При необхідності проведення більш глибокого аналізу зацікавлений читач може звернутись до відповідних публікацій. Ми ж далі обмежимося тільки якісними міркуваннями, тим



**Рис. 5.4.1. Складна форма поперечного перерізу деяких хвилеводів, що застосовуються в техніці й електроніці НВЧ: а) П-подібний хвилевід; б) Н-подібний хвилевід; в) Т-подібний хвилевід; г) Х-подібний (хрестоподібний) хвилевід; д) Г-подібний хвилевід. Штрих-пунктирна лінія є лінією симетрії, яка розмежовує елементарні Г-подібні області, що утворюють поперечний переріз хвилеводу**

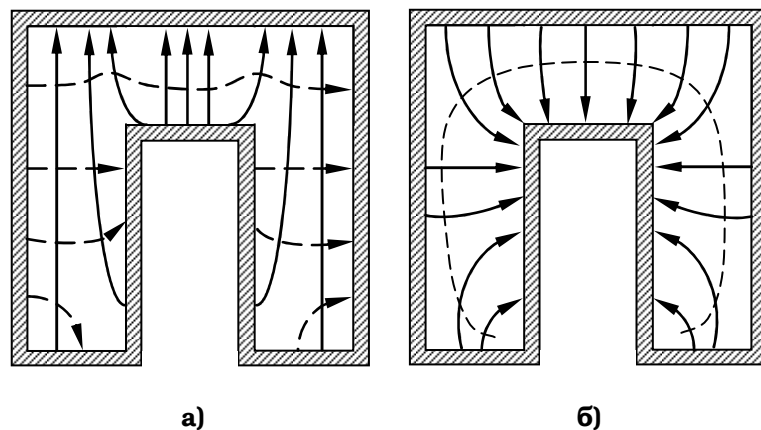
більше, що вони дозволяють пояснити основні особливості хвилеводів з складною формою поперечного перерізу.

При  $d \rightarrow b$  геометрія П-подібного хвилеводу наближається до геометрії прямокутного хвилеводу. Відповідно, за умови  $d \rightarrow b$  властиво-

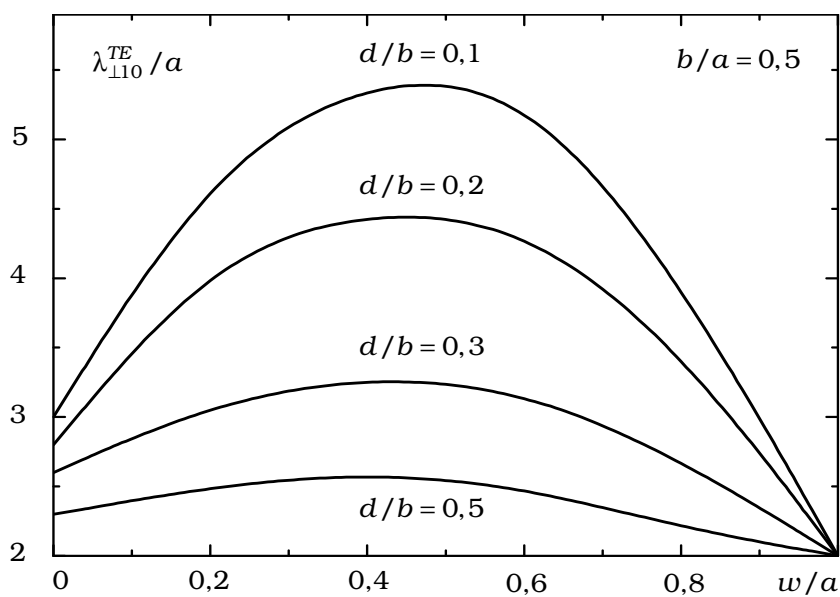
сті ТЕ- та ТМ-хвиль в П-подібному хвилеводі виявляються близькими до властивостей ТЕ- та ТМ-хвиль в прямокутному хвилеводі. Враховуючи цю особливість можна легко побудувати розподіл електромагнітного поля в П-подібному хвилеводі. Очевидно, що при  $d \rightarrow b$  картина полів хвиль в П-подібному хвилеводі повинна переходити в картину полів прямокутного хвилеводу. При  $d > 0$ ,  $d < b$  розподіл поля в П-подібних хвилеводах залишається якісно подібним до розподілу поля в прямокутному хвилеводі, але силові лінії поля викривляються таким чином, щоб вектор напруженості електричного поля завжди був перпендикулярним до стінок хвилеводу (оскільки ми вважаємо їх ідеально провідними). Виходячи з таких міркувань можна побудувати розподіл поля хвиль ТЕ<sub>10</sub> та ТМ<sub>11</sub> в П-подібному хвилеводі (рис. 5.4.2).

При зменшенні розміру  $d$  зазор між широкими стінками в центральній частині П- та Н-подібних хвилеводів зменшується. Це відбувається в тому місці де напруженість електричного поля хвилі ТЕ<sub>10</sub> прямокутного хвилеводу максимальна (див. рис. 5.2.7 б, 5.4.2 а). Зменшення відстані між широкими стінками П-подібного хвилеводу є еквівалентним до збільшення ємності  $C \sim 1/d$  між цими стінками хвилеводу, а це в свою чергу завдяки залежності  $v_{\perp} \sim C^{-1/2}$  призводить до зменшення критичної частоти хвиль, що поширюються в таких хвилеводах. Тобто при фіксованій робочій довжині хвилі  $\lambda$  це призводить до зменшення дисперсії.

На рис. 5.4.3 показано залежність нормованої критичної довжини основної хвилі П-подібного хвилеводу від його нормованих геометричних розмірів. Враховуючи, що для хвилі ТЕ<sub>10</sub> прямокутного хвилеводу  $\lambda_{\perp 10}^{TE} = 2a$ , з рис. 5.4.3 бачимо, що робочий діапазон хвиль П-подібного хвилеводу в декілька разів перевищує робочий діапазон хвиль прямокутного хвилеводу з тими же самими розмірами поперечного перерізу  $a \times b$ . Це означає, що при однаковій критичній довжині хвилі розміри П-подібного хвилеводу можуть бути значно меншими за розміри прямокутного хвилеводу.



**Рис. 5.4.2.** Розподіл електромагнітного поля в поперечному перерізі  $\Pi$ -подібного хвилеводу для випадку хвилі  $TE_{10}$  (а) та  $TM_{11}$  (б). Суцільні лінії – силові лінії електричного поля, пунктирні лінії – силові лінії магнітного поля

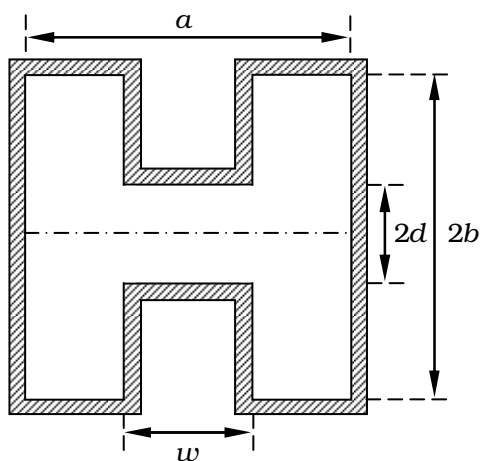


**Рис. 5.4.3.** Залежність нормованої довжини основної хвилі  $\lambda_{110}^{TE} / a$   $\Pi$ -подібного хвилеводу від нормованого розміру хвилеводу  $w/a$

$H$ -подібний хвилевід можна розглядати як два  $\Pi$ -подібних хвилеводи, що мають єдину широку стінку (рис. 5.4.4). Як і раніше будемо

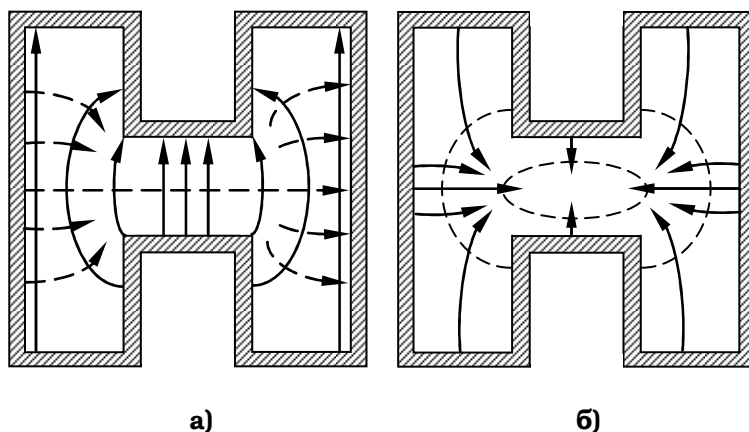
вважати, що стінки хвилеводу мають нескінченну провідність, тоді силові лінії електричного поля повинні бути перпендикулярним до стінок хвилеводу. За таких умов розподіл поля не зміниться, якщо видалити єдину для обох П-подібних хвилеводів широку стінку при  $y = b$ . В результаті такої операції з рис. 5.4.2 легко одержати картину поля основної хвилі  $TE_{10}$  Н-подібного хвилеводу (рис. 5.4.5 а). Поруч на рис. 5.4.5 б показана картина полів для хвилі  $TM_{11}$  Н-подібного хвилеводу.

Дисперсійні властивості Н-подібного хвилеводу аналогічні дисперсійним властивостям П-подібного хвилеводу. Нехай Н-подібний хвилевід утворений двома однаковими П-подібними хвилеводами у яких відсутня єдина для обох хвилеводів широка стінка (див. рис. 5.4.4). Такий Н-подібний хвилевід має розмір широкої стінки, що дорівнює розміру широкої стінки П-подібного хвилеводу, а розмір його вузької стінки та розмір зазору між широкими стінками є вдвічі більшими ніж у П-подібного хвилеводу. Оскільки видалення єдиної для обох П-подібних хвилеводів широкої стінки не впливає на розподіл поля в Н-подібному хвилеводі, очевидно, що і критичні довжини хвиль для П- та Н-подібних хвилеводів є однаковими. За рахунок того, що відстань між широкими стінками Н-подібного хвилеводу є вдвічі більшою ніж у П-подібного хвилеводу, приблизно в два рази зростає потужність при якій відбувається електричний пробій хвилеводу. Отже, Н-подібний хвилевід виявляється більш зручним для передачі потужних НВЧ сигналів ніж П-подібний хвилевід. Дорівнюючи між собою картини полів, зображені на рис. 5.4.2, 5.4.5 можна прийти до висновку, що всі вони можуть бути утворені шляхом комбінації картин полів  $TE_{10}$  та  $TM_{11}$  хвиль Г-подібного хвилеводу. Це є природнім, оскільки форма поперечного перерізу П-подібного хвилеводу утворюється шляхом дзеркального відображення поперечного перерізу Г-подібного хвилеводу відносно площини симетрії  $x = a/2$ , після чого єдина вузька стінка хвилеводів при  $x = a/2$  видаляється (див. рис. 5.4.1). Аналогічним чином розподіл електромагнітного поля хвиль  $TE_{10}$  та  $TM_{11}$  в Н-подібному хвилеводі може бути утворений чотирикратним дзеркальним відображенням картин полів Г-подібного хвилеводу. Користуючись цією аналогією вдається достатньо легко побудувати картину поля в Х- (хрестоподібному), Т-подібному хвилеводі та в інших хвилеводах з більш складною формою поперечного перерізу.



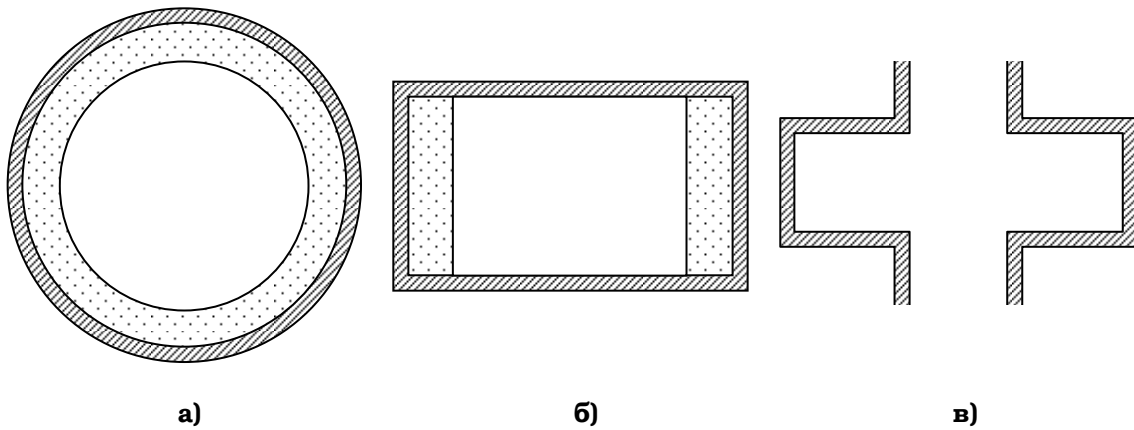
**Рис. 5.4.4.** Представлення Н-подібного хвиеводу у вигляді об'єднання двох П-подібних хвиеводів. Штрих-пунктирна лінія зображує видалену ширину стінки П-подібних хвиеводів

Основними недоліками хвиеводів з складною формою поперечного перерізу є більший коефіцієнт згасання та менша потужність пробою<sup>1</sup> ніж в прямокутних хвиеводах. Більший коефіцієнт згасання обумовлюється збільшенням периметру стінок хвиеводу при фіксованій потужності, що переноситься в хвиеводі, що внаслідок (4.8.16) призводить до більших втрат. Зменшення зазору між стінками хвиеводу, поява сходинок та виступів, утворених металевими стінками хвиеводу призводять до того, що напруженість електричного поля поблизу від цих сингулярностей сильно зростає. Відповідно, електричний пробій в хвиеводах з складною формою поперечного перерізу може відбуватись при мен-



**Рис. 5.4.5.** Розподіл електромагнітного поля в поперечному переріз Н-подібного хвиеводу для випадку хвилі  $TE_{10}$  (а) та  $TM_{11}$  (б). Суцільні лінії – силові лінії електричного поля, пунктирні лінії – силові лінії магнітного поля

<sup>1</sup> Потужність при якій відбувається електричний пробій лінії передачі.



**Рис. 5.4.6. Хвилеводи в яких відбувається явище розрідження спектру хвиль: а) круглий хвилевід з діелектричним покриттям стінок хвилеводу; б) прямокутний хвилевід з діелектричними вставками; в) жолобковий хвилевід**

ших потужностях.

Окрім хвилеводів з складною формою поперечного перерізу і однорідним діелектричним (як правило, повітряним) заповненням в техніці й електроніці НВЧ широко застосовуються хвилеводи з більш простою геометричною формою поперечного перерізу, але з неоднорідним магніто-діелектричним заповненням. Типовим прикладом такого хвилеводу є круглий хвилевід з нанесеним на стінки хвилеводу тонким діелектричним шаром (рис. 5.4.6 а). Серед систем з прямокутною симетрією часто застосовуються прямокутні хвилеводи з діелектричними вставками (див. рис. 5.4.6 б). Особливим варіантом хвилеводу з поперечним перерізом складної форми є жолобковий хвилевід – прямокутний хвилевід в широких стінках якого прорізані щілини (див. рис. 5.4.6 в).

В хвилеводі з частковим діелектричним заповненням згідно з (4.7.6) критична частота хвиль зменшується порівняно з хвилеводами, що мають повітряне заповнення. Ця зміна однак не описується просто множителем  $n_{сер} = \sqrt{\epsilon\mu}$ , оскільки середовище з проникностями  $\epsilon, \mu$  лише частково заповнює поперечний переріз хвилеводу. Замість показника заломлення середовища  $n_{сер}$  слід використовувати ефективний показник заломлення середовища  $n_{сер, ефф} = \sqrt{\epsilon_{ефф}\mu_{ефф}}$ , який є функцією проникностей  $\epsilon, \mu$  та геометричних розмірів системи.

Отже, при частковому заповненні хвилеводу діелектриком критична частота хвилі зменшується, а критична довжина хвилі залишається тією ж самою (нагадаємо, що вона визначається лише геометричними розмірами поперечного перерізу хвилеводу). Тому для того, щоб критична частота хвилеводу з повітряним заповненням  $\nu_{\perp}$  співпадала з критичною частотою частково-заповненого хвилеводу  $\nu_{\perp, \epsilon\mu}$  розміри поперечного перерізу останнього треба зменшити в

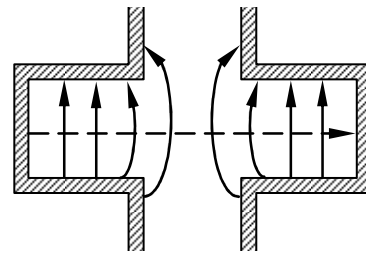


$n_{сер, ефф} = v_{\perp} / v_{\perp \epsilon \mu}$  раз. За рахунок цього ефекту вдається зменшити поперечні розміри ліній передачі не змінюючи їх робочої смуги частот. З іншого боку наявність в порожнині хвильоводу діелектричних вставок змінює умови поширення в ньому хвиль. Для деяких хвиль з введенням діелектричних вставок стала згасання сильно зростає. Це відбувається за рахунок двох процесів: зміни структури поля хвилі і безпосередньо за рахунок згасання хвилі в діелектрику.

Якщо розміри та параметри діелектричних вставок підібрані таким чином, що стала згасання робочої хвилі (або хвиль) в лінії передачі є значно меншою за сталі згасання інших хвиль, які можуть поширюватись в лінії передачі, можна вважати, що цих інших хвиль не існує. Деякі з хвиль, які могли б існувати в лінії передачі, фактично, зникають (їх амплітуда є надто малою). Відбувається так зване явище розрідження спектру хвиль, що можуть поширюватись в лінії передачі. Це явище широко застосовується в техніці НВЧ. Наприклад, воно використовується в круглому хвильоводі з діелектричним кільцем (див. рис. 5.4.6 а).

Іншим способом розрідження спектру хвиль в лінії передачі є створення в конструкції лінії передачі повздовжніх щілин. Для деяких типів хвиль ці щілини грають ту ж саму роль, що й діелектричні вставки. Структура поля цих хвиль сильно спотворюється, а потужність, яку переносять хвилі, вже майже не переноситься вздовж осі хвильоводу, а ефективно випромінюється крізь щілини назовні. Для робочих типів хвиль наявність щілин майже не впливає на характеристики хвилі. Прикладом такої лінії передачі є жолобковий хвильовід, розподіл поля робочої хвилі  $TE_{10}$  якого показано на рис. 5.4.7. Видно, що з введенням щілин розподіл поля хвилі  $TE_{10}$  майже не змінюється (див. рис. 5.2.7б і рис. 5.4.7).

Суттєвою перевагою ліній передачі з розрідженим спектром є значно більш широка смуга частот. Наприклад, стандартний 8-мм прямокутний хвильовід з розмірами  $7,2 \times 3,4 \text{ мм}^2$  має смугу частот  $26,5 \div 40 \text{ ГГц}$ , а жолобковий хвильовід з аналогічними розмірами має



**Рис. 5.4.7. Розподіл електромагнітного поля хвилі  $TE_{10}$  в поперечному перерізі жолобкового хвильоводу. Суцільні лінії – силові лінії електричного поля, пунктирні лінії – силові лінії магнітного поля**

смугу частот  $37 \div 150$  ГГц. Крім того, за рахунок зменшення поверхні провідних стінок хвиля  $TE_{10}$  жолобкового хвилеводу має помітно меншу сталу згасання ніж хвиля  $TE_{10}$  прямокутного хвилеводу.

### Контрольні запитання та задачі

**5.1.** Поясніть основні особливості однозв'язних закритих ліній передачі НВЧ.

**5.2.** Чому металеві хвилеводи, як правило, застосовуються на частотах менших за  $150 \div 300$  ГГц; найчастіше в діапазоні сантиметрових та міліметрових хвиль?

**5.3.** Поясніть залежність критичної довжини хвилі прямокутного хвилеводу від його розмірів користуючись відомостями про хвилі в плоскопаралельному хвилеводі (див. § 4.3).

**5.4.** Чи можна одержати вирази для мембранних функцій  $TE$ - та  $TM$ -хвиль прямокутного хвилеводу, якщо врахувати, що в поперечному перерізі хвилеводу існують стоячі хвилі? Розглянути випадок хвиль  $TE_{10}$  та  $TM_{11}$ .

**5.5.** Запишіть загальний розв'язок двовимірного рівняння Гельмгольца для прямокутного хвилеводу з ідеально провідними стінками. Сформулюйте граничні умови на поверхні стінок хвилеводу для  $TE$ - та  $TM$ -хвиль і визначте мембранні функції цих хвиль.

**5.6.** Запишіть вирази для хвильових чисел  $TE$ - та  $TM$ -хвиль прямокутного хвилеводу.

**5.7.** Охарактеризуйте властивості основної хвилі прямокутного хвилеводу та вкажіть межі робочого діапазону частот хвилеводу з розмірами поперечного перерізу  $a \times b$ .

**5.8.** Розміри хвилеводу з повітряним заповненням дорівнюють  $7,2 \times 3,4$  мм<sup>2</sup>. Визначте частоти, починаючи з яких в хвилеводі можливе поширення хвилі  $TE_{10}$ ,  $TE_{11}$ ,  $TM_{11}$ .

**5.9.** Чи можуть хвилі  $TE_{10}$  та  $TE_{01}$ ,  $TE_{11}$  та  $TM_{11}$  прямокутного хвилеводу мати однакові критичні довжини хвиль? Поясніть в якому випадку це може бути.

**5.10.** Які характеристики хвиль в прямокутному хвилеводі змінюються при зміні співвідношення  $b/a$ , де  $a$  – розмір широкої стінки хвилеводу,  $b$  – розмір вузької стінки.

**5.11.** Порівняйте характеристики металевих та надпровідних прямокутних хвилеводів. Чи є перевага в застосуванні хвилеводів,

зроблених з надпровідника? На яких частотах ця перевага буде суттєва?

**5.12.** Охарактеризуйте властивості основного типу хвилі круглого хвилеводу і вкажіть робочий діапазон довжин хвиль круглого хвилеводу.

**5.13.** Чому найбільш важливою для практики є хвиля  $TE_{01}$  круглого хвилеводу, а не основна хвиля цього хвилеводу?

**5.14.** Які фізичні причини заважають застосовувати хвилю  $TE_{01}$  круглого хвилеводу для реалізації дальнього хвилеводного зв'язку? Як їх обійти?

**5.15.** Що таке азимутально-однорідні та азимутально-неоднорідні хвилі в круглому хвилеводі? Поясніть ці терміни виходячи з картини полів цих хвиль.

**5.16.** Які причини обмежують знизу сталу згасання хвилі  $TE_{01}$  круглого хвилеводу?

**5.17.** Чому в техніці й електроніці НВЧ застосовуються хвилеводи з поперечним перерізом складної форми?

**5.18.** Охарактеризуйте властивості основних хвиль в П- та Н-подібних хвилеводах.

**5.19.** Як змінюються властивості електромагнітних хвиль в П- та Н-подібних хвилеводах при збільшенні розміру зазору між широкими стінками хвилеводу в його центральній частині? При зменшенні?

**5.20.** Чому П- та Н-подібні хвилеводи мають кращі масогабаритні показники ніж прямокутні хвилеводи, але не дуже зручні для передачі великих НВЧ потужностей?

**5.21.** Що таке явище розрідження спектру хвиль лінії передачі? Навіщо воно застосовується? Наведіть приклади ліній передачі в яких спостерігається дане явище.

**5.22.** Доведіть, що наявність щілин в широких стінках прямокутного хвилеводу майже не впливає на розподіл поля хвилі  $TE_{10}$ .

**5.23.** Виходячи з картини полів хвиль в прямокутному хвилеводі, обґрунтуйте які типи хвиль в жолобковому хвилеводі будуть активно випромінювати свою енергію крізь щілини в оточуючий хвилевід простір.

## ДОДАТКИ

### Додаток 1

#### Елементи векторної алгебри та векторного аналізу

##### Деякі формули векторної алгебри

Скалярний добуток векторів

$$\vec{A}\vec{B} = (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{A}) = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \widehat{A\vec{B}}. \quad (Д1.1)$$

В прямокутній декартовій системі координат  $x, y, z$  для векторів  $\vec{A}\{A_x, A_y, A_z\}$  та  $\vec{B}\{B_x, B_y, B_z\}$ :

$$\vec{A}\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (Д1.2)$$

Векторний добуток векторів

$$\vec{A} \times \vec{B} = [\vec{A} \times \vec{B}] = -[\vec{B} \times \vec{A}] = \vec{n} \cdot |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \widehat{A\vec{B}}, \quad \vec{n} \perp \vec{A}, \quad \vec{n} \perp \vec{B}, \quad (Д1.3)$$

де  $\vec{n} = [\vec{A} \times \vec{B}] / \|\vec{A} \times \vec{B}\|$  – одиничний вектор перпендикулярний до векторів  $\vec{A}$  та  $\vec{B}$ ; вектори  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{n}$  утворюють праву трійку векторів. В прямокутній декартовій системі координат  $x, y, z$  для векторів  $\vec{A}\{A_x, A_y, A_z\}$  та  $\vec{B}\{B_x, B_y, B_z\}$ :

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{e}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \vec{e}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \vec{e}_z (A_x B_y - A_y B_x), \end{aligned} \quad (Д1.4)$$

де  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  – одиничні вектори (орти) системи координат.

Мішаний добуток векторів

$$\vec{A}[\vec{B} \times \vec{C}] = \vec{B}[\vec{C} \times \vec{A}] = \vec{C}[\vec{A} \times \vec{B}] = -\vec{B}[\vec{A} \times \vec{C}] = -\vec{C}[\vec{B} \times \vec{A}] = -\vec{A}[\vec{C} \times \vec{B}]. \quad (Д1.5)$$

В прямокутній декартовій системі координат  $x, y, z$  для векторів  $\vec{A}\{A_x, A_y, A_z\}$ ,  $\vec{B}\{B_x, B_y, B_z\}$  та  $\vec{C}\{C_x, C_y, C_z\}$ :

$$\vec{A}[\vec{B} \times \vec{C}] = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} =$$

$$= A_x (B_y C_z - B_z C_y) + A_y (B_z C_x - B_x C_z) + A_z (B_x C_y - B_y C_x). \quad (Д1.6)$$

Подвійний векторний добуток векторів

$$\vec{A} \times [\vec{B} \times \vec{C}] = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}). \quad (Д1.7)$$

### Інтегральні теореми

*Теорема Остроградського-Гауса.* Якщо вектор  $\vec{A}$  та його перші частинні похідні однозначні та неперервні в об'ємі  $V$  та на поверхні  $S$ , що обмежує цей об'єм, то для вектора  $\vec{A}$  виконується співвідношення

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{A} dV, \quad (Д1.8)$$

де  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ ,  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до поверхні  $S$ .

*Теорема Стокса.* Якщо вектор  $\vec{A}$  та його перші частинні похідні однозначні та неперервні на поверхні  $S$  та на контурі  $L$ , який її обмежує, то для вектора  $\vec{A}$  виконується співвідношення

$$\oint_L \vec{A} d\vec{L} = \int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S}, \quad (Д1.9)$$

причому вектор  $\vec{A}$ , напрямок обходу контуру  $L$  та зовнішня нормаль  $\vec{n}$  до поверхні  $S$  утворюють праву трійку векторів.

### Оператор Гамільтона (набла-оператор)

Усі просторові диференціальні операції над полями – градієнт, дивергенцію, ротор, оператор Лапласа – можна виразити через єдиний диференціальний оператор Гамільтона (набла-оператор)  $\nabla$ :

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi, \quad (Д1.10)$$

$$\text{div } \vec{A} = \nabla \vec{A}, \quad (Д1.11)$$

$$\text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A}, \quad (Д1.12)$$

$$\Delta \varphi = \nabla^2 \varphi, \quad (Д1.13)$$

$$\Delta \vec{A} = \nabla (\nabla \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A}). \quad (Д1.14)$$

В прямокутній декартовій системі координат  $x, y, z$  набла-оператор має вигляд:

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (Д1.15)$$

де  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  – одиничні вектори (орти) системи координат.

## Диференціальні операції та співвідношення

Для довільних векторних функцій  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  та скалярних функцій  $\varphi$ ,  $\psi$  виконуються співвідношення:

$$\text{grad}(\varphi + \psi) = \text{grad} \varphi + \text{grad} \psi, \quad (\text{Д1.16})$$

$$\text{div}(\vec{A} + \vec{B}) = \text{div} \vec{A} + \text{div} \vec{B}, \quad (\text{Д1.17})$$

$$\text{rot}(\vec{A} + \vec{B}) = \text{rot} \vec{A} + \text{rot} \vec{B}, \quad (\text{Д1.18})$$

$$\text{grad}(\varphi\psi) = \psi \text{grad} \varphi + \varphi \text{grad} \psi, \quad (\text{Д1.19})$$

$$\text{div}(\varphi \vec{A}) = \vec{A} \text{grad} \varphi + \varphi \text{div} \vec{A}, \quad (\text{Д1.20})$$

$$\text{div}[\vec{A} \times \vec{B}] = \vec{B} \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \text{rot} \vec{B}, \quad (\text{Д1.21})$$

$$\text{rot}(\varphi \vec{A}) = [\text{grad} \varphi \times \vec{A}] + \varphi \text{rot} \vec{A}, \quad (\text{Д1.22})$$

$$\text{div grad} \varphi = \Delta \varphi, \quad (\text{Д1.23})$$

$$\text{div rot} \vec{A} = 0, \quad (\text{Д1.24})$$

$$\text{rot grad} \varphi = 0, \quad (\text{Д1.25})$$

$$\text{rot rot} \vec{A} = \text{grad div} \vec{A} - \Delta \vec{A}. \quad (\text{Д1.26})$$

## Додаток 2

### Системи ортогональних координат

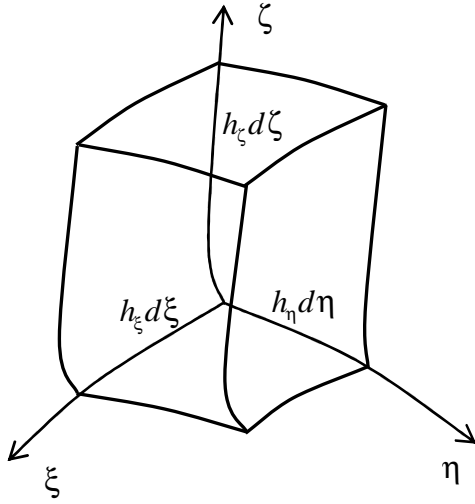
#### Узагальнена криволінійна ортогональна система координат $\xi, \eta, \zeta$

На рис. Д2.1 зображений нескінченно малий прямокутний паралелепіпед (викривлений), який утворений перетинанням площин  $\xi = \text{const}$ ,  $\eta = \text{const}$ ,  $\zeta = \text{const}$  та  $\xi + d\xi$ ,  $\eta + d\eta$ ,  $\zeta + d\zeta$ , причому  $d\xi > 0$ ,  $d\eta > 0$ ,  $d\zeta > 0$ . Якщо площу граней паралелепіпеда позначити як  $dS_\xi$ ,  $dS_\eta$ ,  $dS_\zeta$  (індекси  $\xi, \eta, \zeta$  визначають координату, яка є незмінною на відповідній грані), а його об'єм позначити як  $dV$ , то

$$dS_\xi = h_\eta h_\zeta d\eta d\zeta,$$

$$dS_\eta = h_\xi h_\zeta d\xi d\zeta,$$

$$dS_\zeta = h_\xi h_\eta d\xi d\eta,$$



**Рис. Д2.1. Криволінійна ортогональна система координат  $\xi, \eta, \zeta$**

$$dV = h_\xi h_\eta h_\zeta d\xi d\eta d\zeta, \quad (\text{Д2.1})$$

де  $h_\xi, h_\eta, h_\zeta$  – коефіцієнти Ламе.

Довжина нескінченно малого відрізка  $ds$ , що з'єднує дві точки з координатами  $\xi, \eta, \zeta$  та  $\xi + d\xi, \eta + d\eta, \zeta + d\zeta$  (це довжина діагоналі паралелепіпеда) визначається як

$$ds = \sqrt{h_\xi^2 d\xi^2 + h_\eta^2 d\eta^2 + h_\zeta^2 d\zeta^2}. \quad (\text{Д2.2})$$

Диференціальні операції: градієнт, дивергенція, ротор, оператор Лапласа визначені формулами:

$$\text{grad } \Phi = \bar{\xi} \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \bar{\eta} \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \bar{\zeta} \frac{1}{h_\zeta} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \quad (\text{Д2.3})$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\zeta A_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi h_\zeta A_\eta) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_\xi h_\eta A_\zeta) \right], \quad (\text{Д2.4})$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} = & \bar{\xi} \frac{1}{h_\eta h_\zeta} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\zeta A_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_\eta A_\eta) \right] + \bar{\eta} \frac{1}{h_\xi h_\zeta} \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_\xi A_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\zeta A_\zeta) \right] + \\ & + \bar{\zeta} \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta A_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi A_\xi) \right], \end{aligned} \quad (\text{Д2.5})$$

$$\Delta \Phi = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_\eta h_\zeta}{h_\xi} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_\xi h_\zeta}{h_\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_\xi h_\eta}{h_\zeta} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \right], \quad (\text{Д2.6})$$

де  $\Phi$  – довільна скалярна функція координат  $\xi, \eta, \zeta$ ,  $\vec{A} = (A_\xi, A_\eta, A_\zeta)$  – довільна векторна функція координат  $\xi, \eta, \zeta$ ,  $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$  – одиничні вектори (орти) криволінійної системи координат  $\xi, \eta, \zeta$ .

### **Картезіанська система координат $x, y, z$**

Коефіцієнти Ламе:

$$h_x = h_y = h_z = 1. \quad (\text{Д2.7})$$

Площі граней та об'єм нескінченно малого паралелепіпеда:

$$dS_x = dydz, \quad dS_y = dx dz, \quad dS_z = dx dy, \quad dV = dx dy dz. \quad (\text{Д2.8})$$

Відстань  $ds$  між точками  $x, y, z$  та  $x + dx, y + dy, z + dz$ :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (\text{Д2.9})$$

Явні вирази для основних диференціальних операцій:

$$\text{grad } \Phi = \bar{x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \bar{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \bar{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (\text{Д2.10})$$

$$\text{div } \bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (\text{Д2.11})$$

$$\text{rot } \bar{A} = \bar{x} \left[ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] + \bar{y} \left[ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] + \bar{z} \left[ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right], \quad (\text{Д2.12})$$

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (\text{Д2.13})$$

### Циліндрична система координат $r, \varphi, z$

Коефіцієнти Ламе:

$$h_r = 1, \quad h_\varphi = r, \quad h_z = 1. \quad (\text{Д2.14})$$

Площі граней та об'єм нескінченно малого скривленого паралелепіпеда:

$$dS_r = r d\varphi dz, \quad dS_\varphi = r dr dz, \quad dS_z = r dr d\varphi, \quad dV = r dr d\varphi dz. \quad (\text{Д2.15})$$

Відстань  $ds$  між точками  $r, \varphi, z$  та  $r + dr, \varphi + d\varphi, z + dz$ :

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2}. \quad (\text{Д2.16})$$

Явні вирази для основних диференціальних операцій:

$$\text{grad } \Phi = \bar{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \bar{\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \bar{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (\text{Д2.17})$$

$$\text{div } \bar{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} A_r + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (\text{Д2.18})$$

$$\text{rot } \bar{A} = \bar{r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] + \bar{\varphi} \left[ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] + \bar{z} \frac{1}{r} \left[ A_\varphi + r \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right], \quad (\text{Д2.19})$$

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (\text{Д2.20})$$

### Сферична система координат $r, \theta, \varphi$

Коефіцієнти Ламе:



$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta. \quad (\text{Д2.21})$$

Площі граней та об'єм нескінченно малого скривленого паралелепіпеда:

$$dS_r = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad dS_\theta = r \sin \theta dr d\varphi, \quad dS_\varphi = r dr d\theta, \\ dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (\text{Д2.22})$$

Відстань  $ds$  між точками  $r, \theta, \varphi$  та  $r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi$ :

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2}. \quad (\text{Д2.23})$$

Явні вирази для основних диференціальних операцій:

$$\text{grad } \Phi = \vec{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \vec{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \vec{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad (\text{Д2.24})$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{2}{r} A_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \quad (\text{Д2.25})$$

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{r} \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] + \vec{\theta} \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta A_\varphi) \right] + \\ + \vec{\varphi} \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right], \quad (\text{Д2.26})$$

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}. \quad (\text{Д2.27})$$

**Н а в ч а л ь н и й   п о с і б н и к**

МЕЛКОВ Геннадій Андрійович  
ПРОКОПЕНКО Олександр Володимирович

**Вибрані розділи з курсу «Мікрохвильова електродинаміка та електроніка»**

Підписано до друку 11.03.2013. Формат 60х84/10.  
Гарнітура Bookman Old Style. Ум.-друк. арк. 22,6.

Радіофізичний факультет  
Київського національного університету  
імені Тараса Шевченка