

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Ольшевський С.В.

ЦИФРОВЕ ОБРОБЛЕННЯ СИГНАЛІВ

Конспект лекцій за курсом

КИЇВ – 2014

АННОТАЦІЯ

В процесі підготовки спеціалістів–радіотехніків в галузі проектування радіоелектронних засобів з цифровим обробленням сигналів провідне значення має формування поглиблених знань фундаментальних принципів які лежать в основі фізичних явищ, математичних моделей, та алгоритмів цифрового представлення неперервних процесів. В курсі викладені основи теорії дискретних послідовностей та систем. Викладена теорія дискретних перетворень, зокрема z -перетворення, дискретного перетворення Фур'є, перетворення Гільберта, та показані методи і напрямки їх практичного застосування при обробці сигналів. Розглянуті методики розрахунку продуктивності та розрядності цифро-аналогових та аналогово-цифрових перетворювачів виходячи з властивостей оброблюваного сигналу. Викладена теорія, ситема класифікації та методи розрахунку цифрових фільтрів. Наведені основи теорії багатовимірних послідовностей, та конкретні прийоми її застосування для оброблення зображень. Матеріали, викладені в даному курсі можуть бути корисні також для студентів суміжних спеціальностей

Тема №1. ДИСКРЕТНІ СИГНАЛИ І СИСТЕМИ

Лекція 1

1.1. Дискретні сигнали

1.1.1. Послідовності

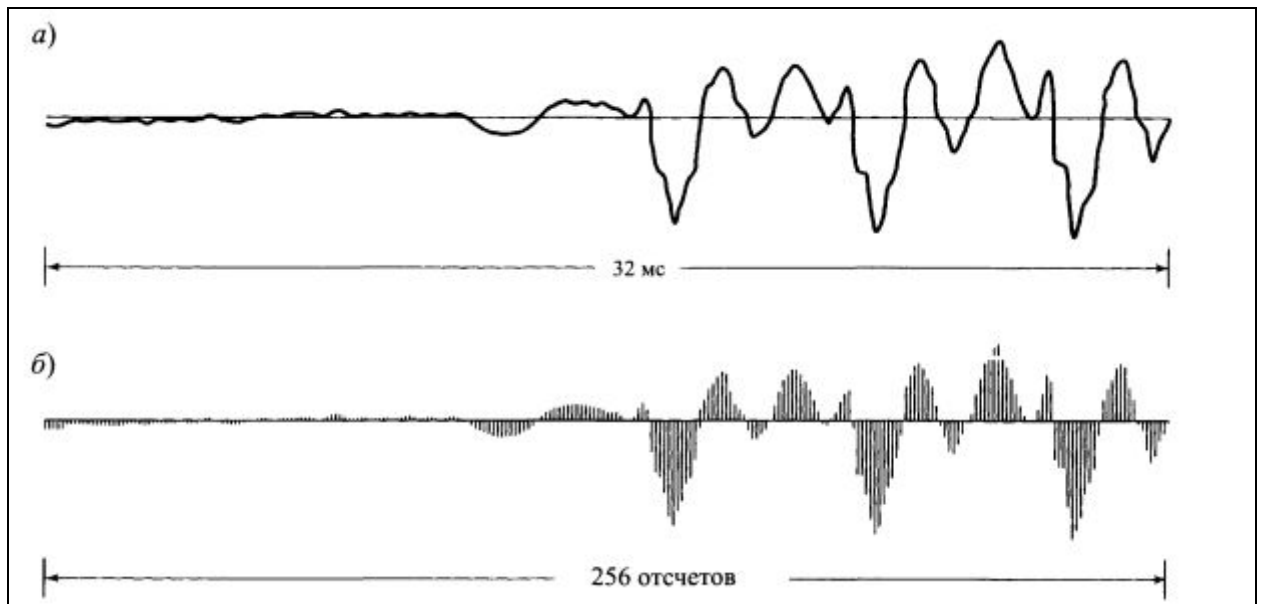
Математично дискретні сигнали представляються послідовностями чисел. Числова послідовність x , n -й член якої позначають через $x[n]$ формально записується як

$$x = \{x[n]\}, \quad -\infty < n < \infty,$$

де n — ціле число.

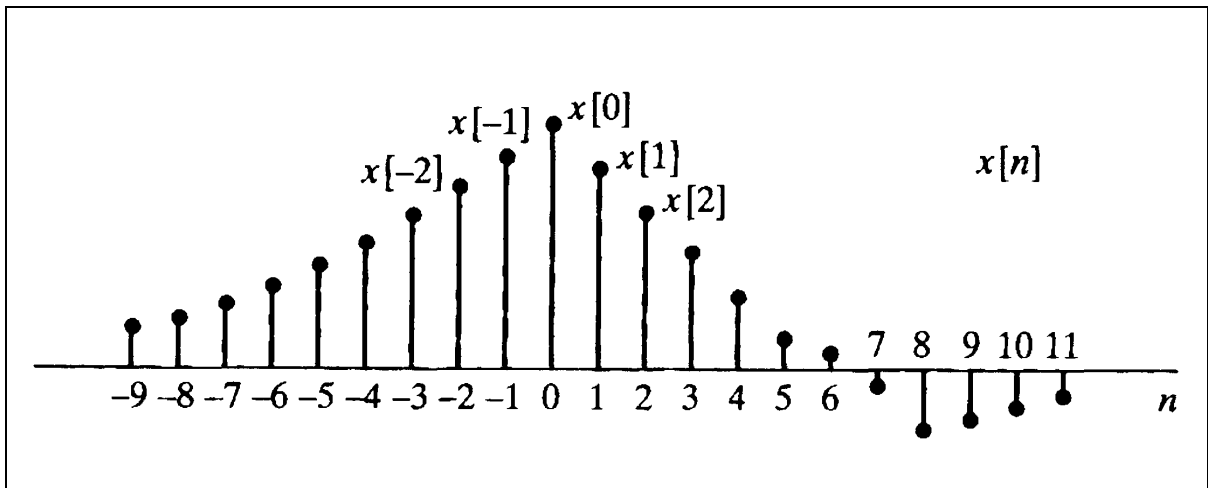
Для аналогового сигналу $x_a(t)$ в момент часу nT

$$x[n] = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty.$$



Число T називають крок дискретизації, а обернене до нього — частотою дискретизації.

Графічне представлення дискретного сигналу



1.1.2. Операції над послідовностями

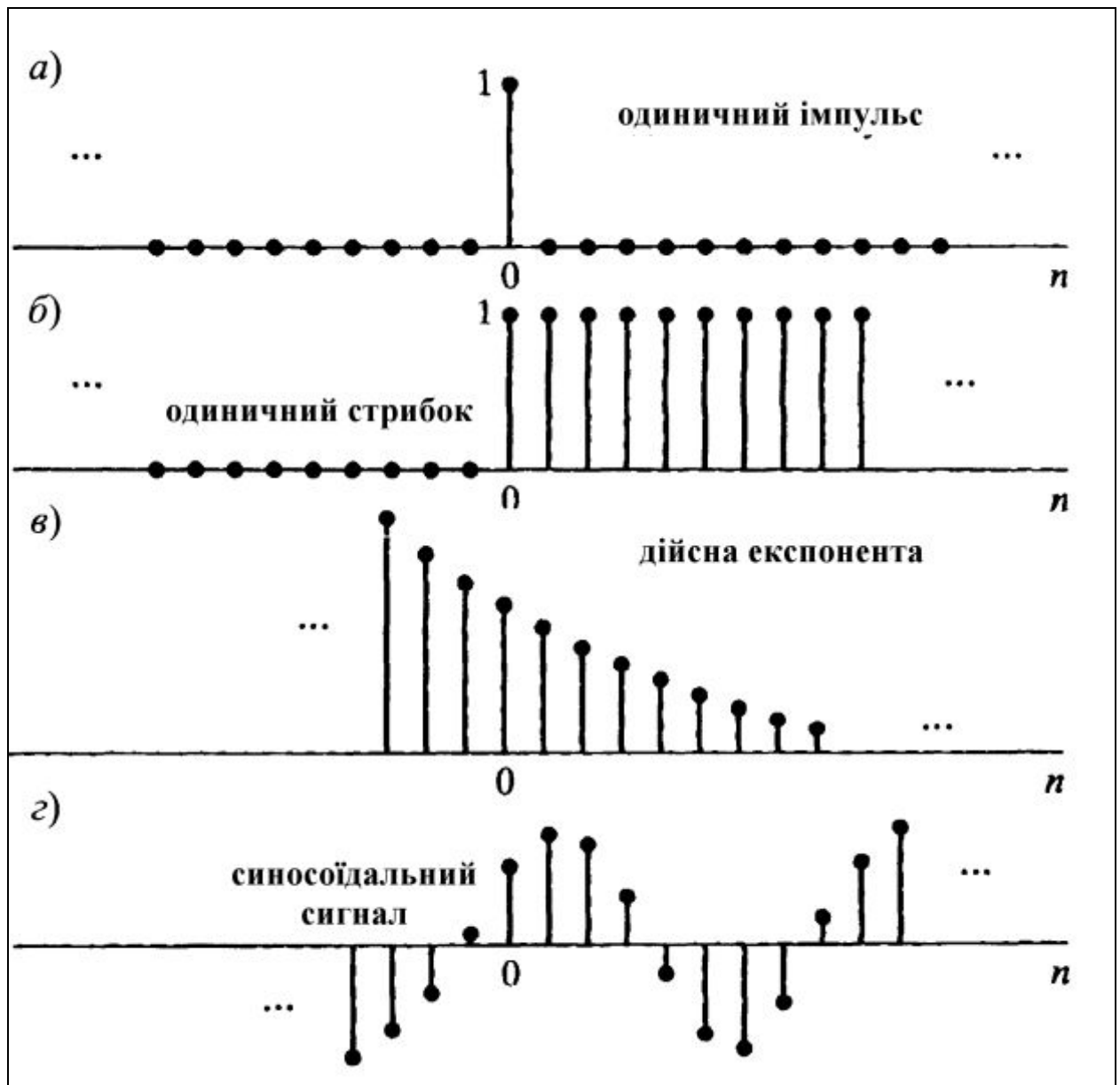
Добуток та сума двох послідовностей $x[n]$ и $y[n]$ визначаються почленно

$z[n] = x[n] \cdot y[n]$ – добуток, $w[n] = x[n] + y[n]$ – сума

Добуток послідовності $x[n]$ на число a вважається послідовність, утворена з $x[n]$ в результаті множення кожного її члена на a .

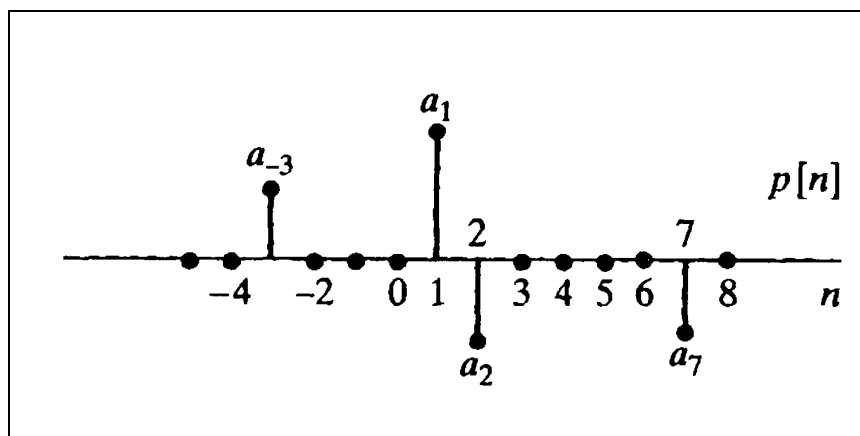
Послідовність $y[n]$ називають затриманою, або зсунутою версією послідовності $x[n]$ якщо $y[n] = x[n - n_0]$, де n_0 — целое число.

1.1.3. Стандартні послідовності



Одиничний імпульс

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$



$$p[n] = a_{-3}\delta[n + 3] + a_1\delta[n - 1] + a_2\delta[n - 2] + a_7\delta[n - 7]$$

Для довільної послідовності справедливе співвідношення:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k].$$

Одиничний стрибок визначається формулою:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$$

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n - 1] + \delta[n - 2] + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - k].$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1].$$

Експоненціальна послідовність визначається формулою:

$$x[n] = A\alpha^n.$$

Якщо A и α – дійсні числа, то відповідна послідовність також називається дійсною.

Якщо $0 < \alpha < 1$ і A позитивне, то значення послідовності позитивні і зменшуються при зростанні n .

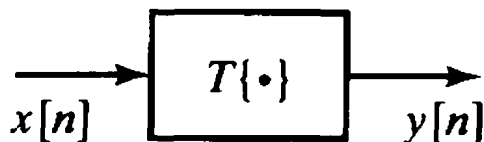
Якщо $-1 < \alpha < 0$, знаки членів послідовності змінюються по черзі, але їх абсолютні значення все одно зменшуються.

Якщо $|\alpha| > 1$ послідовність зростає за абсолютною величиною із зростанням n .

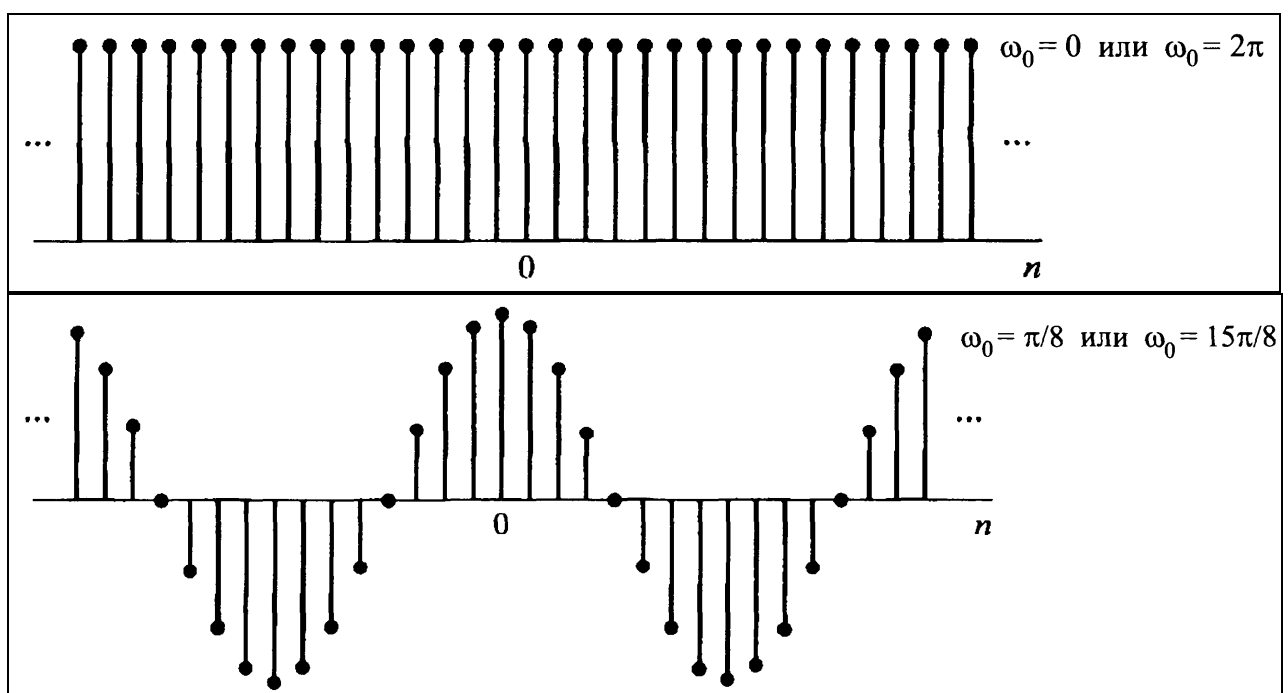
1.2. Дискретні системи

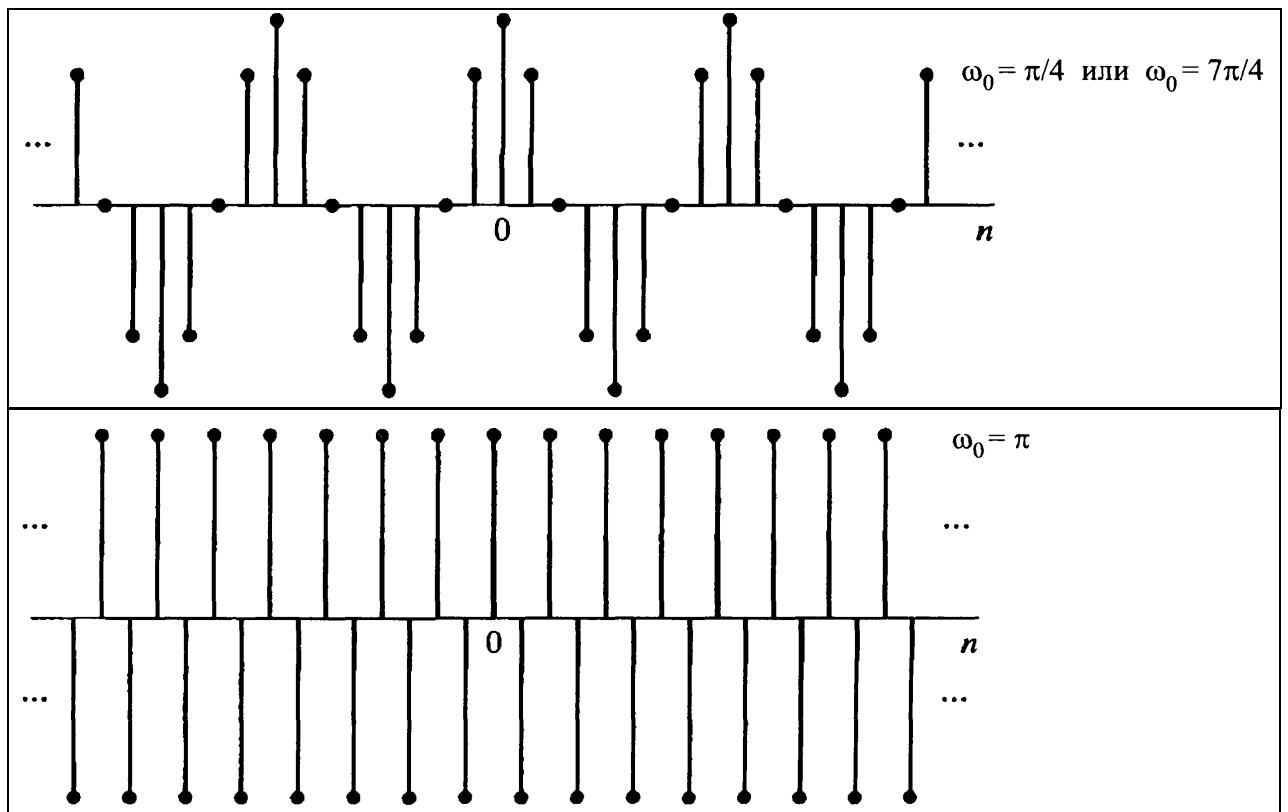
З точки зору математики система з дискретним часом визначається як перетворення, або оператор, що переводить вхідну послідовність (сигнал) $x[n]$ у вихідну послідовність $y[n]$ (відгук, або реакцію системи), що можна позначити як:

$$y[n] = T\{x[n]\}$$



Нехай $x[n] = \omega_0 n$ а $T \equiv \cos$ тоді $y[n] = \cos(x[n]) = \cos(\omega_0 n)$





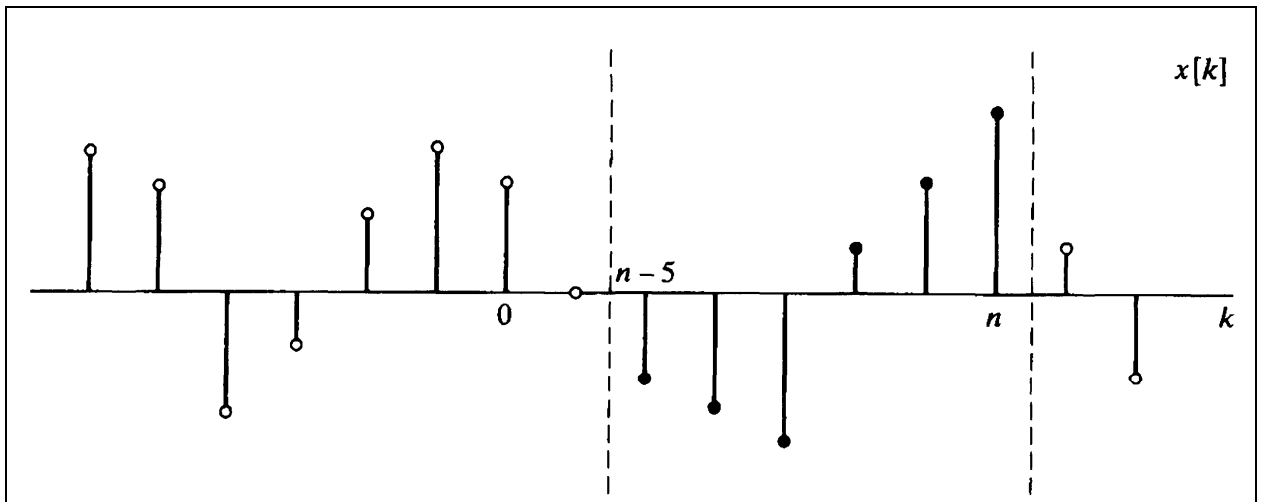
Ідеальна система затримки (ІСЗ) – це дискретна система яка визначається за формулою

$$y[n] = x[n - n_d], \quad -\infty < n < \infty,$$

де n_d – фіксоване натуральне число, яке зветься **затримкою системи**.

Ковзаюче середнє – це дискретна система яка визначається за формулою

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n - k] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \times \\ \times (x[n + M_1] + x[n + M_1 - 1] + \dots + x[n] + \dots + x[n - M_2]).$$



1.2.1. Системи без запам'ятовування

Систему, n -й відлік $y[n]$ реакції якої при кожному n залежить тільки від одного відліку (з тим же самим індексом n) вхідного сигналу $x[n]$, називають системою без запам'ятовування.

Прикладом такої системи є:

$$y[n] = (x[n])^2 \quad \forall n.$$

1.2.2. Лінійні системи

Визначення

Якщо $y_1[n]$ і $y_2[n]$ – відгуки системи на сигнали $x_1[n]$ і $x_2[n]$, то систему називають лінійною тоді і тільки тоді, коли вона має наступні властивості:

- 1) $T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\}$ – аддитивність
- 2) $T\{ax[n]\} = aT\{x[n]\}$ – однорідність

де a — довільна константа.

Визначення за принципом суперпозиції

Нехай $y_k[n]$ є відгук системи на послідовність $x_k[n]$, тоді дискретна система є лінійною, якщо для послідовності $x[n] = \sum_k a_k x_k[n]$, відгуком системи є $y[n] = \sum_k a_k y_k[n]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k].$$

Прикладом лінійної системи є суматор:

Прикладом нелінійної системи є $w[n] = \log_{10} |x[n]|$.

1.2.3. Стаціонарні системи

Нехай дискретна система визначена формулою $y[n] = T\{x[n]\}$. Вона називається стаціонарною, якщо для будь-якої вхідної послідовності $x[n]$ і довільного цілого числа n_0 виконано співвідношення:

$$T\{x[n - n_0]\} = y[n - n_0].$$

Прикладом нестаціонарної системи є компресор:

$$y[n] = x[Mn], \quad -\infty < n < \infty.$$

Число M – фактор ущільнення.

1.2.4. Детермінованість дискретних систем

Систему називають детермінованою, якщо член вхідної послідовності з номером n залежить тільки від тих членів вхідної послідовності, номер яких не перевищує n .

Наслідок

Якщо $x_1[n] = x_2[n]$ при $n \leq n_0$, то $y_1[n] = y_2[n]$ при $n \leq n_0$.

Прикладом не детермінованої та детермінованої систем є права різницєва: $y[n] = x[n+1] - x[n]$ і ліва різницєва: $y[n] = x[n] - x[n-1]$ системи – відповідно.

1.2.5. Стійкість дискретних систем

Система стійка, якщо і тільки якщо її реакція на будь-який обмежений за амплітудою сигнал – обмежена.

Послідовність $x[n]$ називається обмеженою, якщо знайдеться таке кінцеве позитивне число B_x , що

$$\forall n \quad |x[n]| \leq B_x < \infty.$$

Таким чином, в стійкій системі для кожної обмеженої вхідної послідовності знайдеться така позитивна константа B_y , що $\forall n \quad |y[n]| \leq B_y < \infty$.

Система : $y[n] = x[n]^2$ – стійка.

1.2.6. Стаціонарні лінійні системи (СЛС)

Нехай $h_k[n]$ є відгук на $\delta[n - k]$, тоді

$$y[n] = T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k] \right\}$$

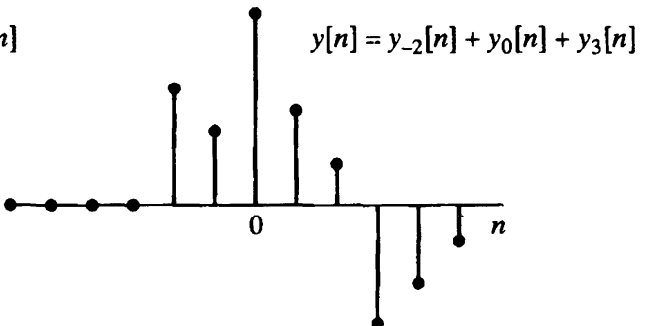
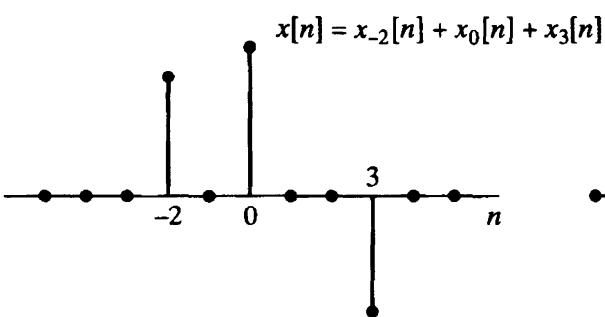
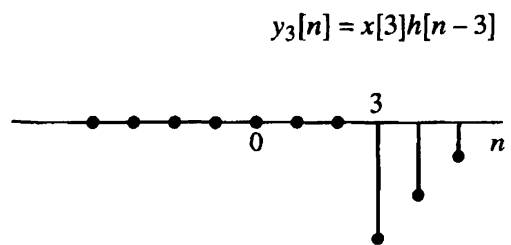
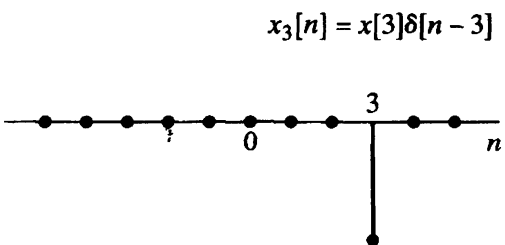
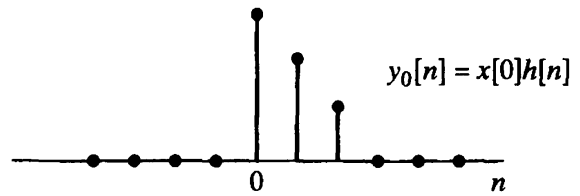
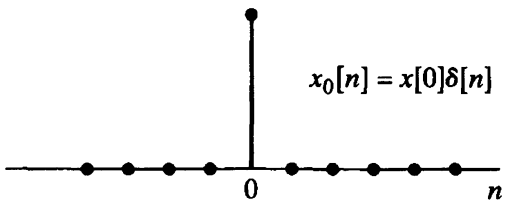
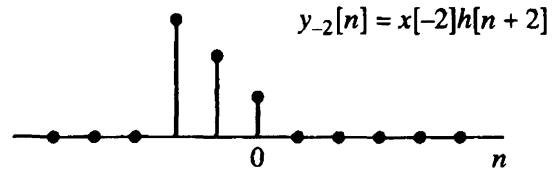
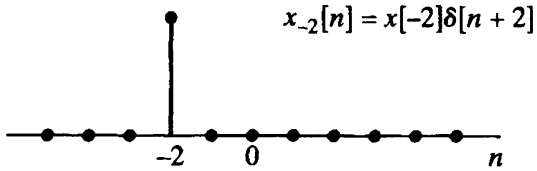
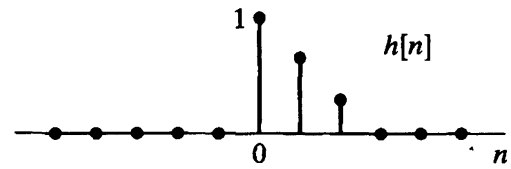
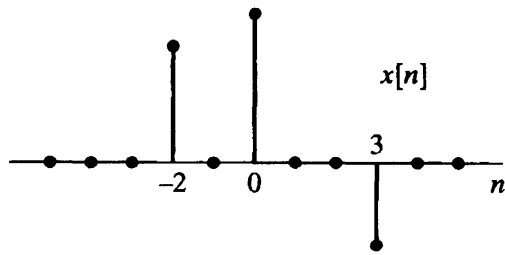
Як наслідок лінійності виконується принцип суперпозиції

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T \{ \delta[n - k] \} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n]$$

З властивості стаціонарності витікає, що якщо $h[n]$ - реакція системи на $\delta[n]$ (за термінологією імпульсна характеристика системи), то реакція системи на сигнал $\delta[n - n_0]$ дорівнюватиме $h[n - n_0]$.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k]$$

Дискретна згортка $y[n] = x[n] * h[n]$



1.2.7. Властивості стаціонарних лінійних систем

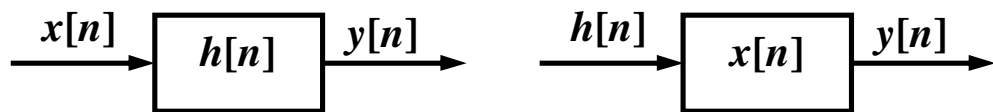
Властивості СЛС витікають із властивостей операції згортки:

1. Комутативність:

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

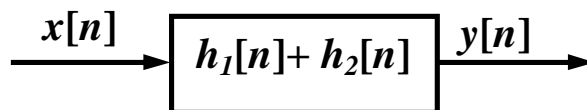
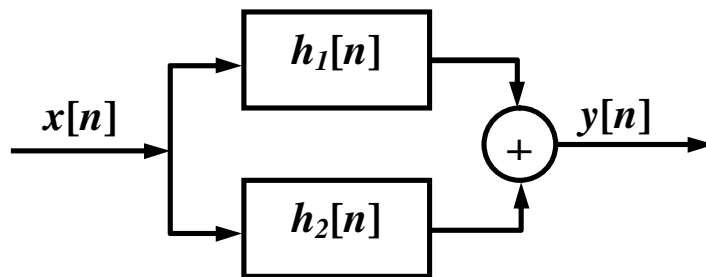
Доведення Робимо заміну в параметрі сумування $m=n-k$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] = h[n] * x[n].$$

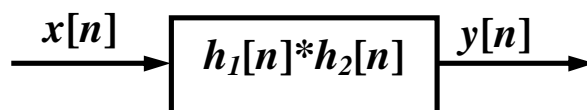
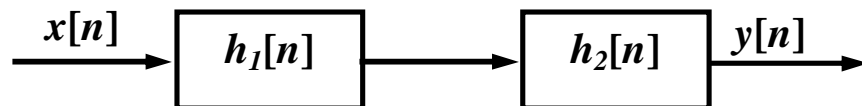


2. Дистрибутивність:

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$



$$h[n] = h_1[n] + h_2[n].$$



$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

Лінійна стаціонарна система є стійкою тоді і тільки тоді, коли її імпульсна характеристика - абсолютно підсумовувана послідовність, тобто якщо:

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty.$$

Доведення достатності

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]|$$

$$\forall k \quad |x[n]| \leq B_x$$

Для всіх справедлива нерівність $|x[n-k]| \leq B_x$

$$|y[n]| \leq B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

Доведення необхідності

Якщо $S = \infty$ то є принаймні одна обмежена $x[n]$ відгук на яку буде необмеженим

$$x[n] = \begin{cases} \frac{h^*[-n]}{|h[-n]|}, & h[n] \neq 0, \\ 0, & h[n] = 0, \end{cases}$$

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h[k]|^2}{|h[k]|} = S.$$

1.2.8. Лінійні різницеві рівняння з постійними коефіцієнтами

Важливий підклас лінійних стаціонарних систем складається з таких систем, у яких пара сигнал – відгук зв'язана лінійним різницеvim рівнянням порядку N з постійними коефіцієнтами:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m]$$

Наприклад суматор:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]. \quad y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]$$

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]$$

$$y[n] = x[n] + y[n-1]$$

$$\boxed{y[n] - y[n-1] = x[n]}$$

Нехай маємо пару $(x_p[n]; y_p[n])$ зв'язану лінійним різницеvim рівнянням, тоді послідовність

$$y[n] = y_p[n] + y_h[n],$$

де $y_h[n]$ – будь-яке рішення цього рівняння з $x[n]=0$, тобто рішення рівняння:

$$\sum_{k=0}^N a_k y_h[n-k] = 0$$

Це рівняння називають однорідним, а його рішення - однорідним рішенням.

Послідовність $y_h[n]$ є членом сімейства рішень виду

$$y_h[n] = \sum_{m=1}^N A_m z_m^n$$

де комплексні числа z_m є корні поліному

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = 0.$$

- Вихідна послідовність визначена вхідною послідовністю не однозначно. Для однозначності потрібна допоміжна інформація.
- Якщо допоміжна інформація дана у вигляді N послідовних значень вихідної послідовності, відліки виходу з великими номерами можна знайти, переписавши рівняння у вигляді рекурентного співвідношення, що виражає $y[n]$ через $y[k]$ з меншими номерами, а відліки з меншими номерами виходять з рівняння, переписаного як рекурентне співвідношення, що виражає $y[n]$ через $y[k]$ з великими номерами.
- Лінійність, стаціонарність і детермінована системи залежать від допоміжних умов. Якщо додатково припускати, що система в початковому положенні знаходиться в стані спокою, то вона буде лінійною, стаціонарною і детермінованою.

Тема №2. Z – ПЕРЕТВОРЕННЯ

Лекція №2.

2.1. Власні функції лінійних стаціонарних систем (ЛСС)

Нехай $x[n]$ – така довільна послідовність з ОВ $-\infty < n < \infty$, що вона може бути розкладена в ряд Лорана:

$$x[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_i z_i^{-n} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_i r_i^n e^{j\omega_i n}, \quad -\infty < n < \infty$$

Нехай $h[n]$ – імпульсна характеристика лінійної стаціонарної системи.

Тоді відгук $y[n]$ системи на послідовність $x[n]$ можна записати як

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_i r_i^{n-k} e^{j\omega_i(n-k)} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_i \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] r_i^{n-k} e^{j\omega_i(n-k)}.$$

Розглянемо окремий i -й доданок записаного ряду поділений на коефіцієнт A_i :

$$y_i[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] r_i^{n-k} e^{j\omega_i(n-k)} = r_i^n e^{j\omega_i n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] r_i^{-k} e^{-j\omega_i k}.$$

Вираз $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] r_i^{-k} e^{-j\omega_i k}$ не залежить від k для всіх членів ряду. Позначимо його як

$$H(r_i e^{j\omega_i}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] r_i^{-k} e^{-j\omega_i k}.$$

Тоді

$$y_i[n] = H(r_i e^{j\omega_i}) r_i^n e^{j\omega_i n}.$$

З отриманого виразу видно, що послідовність $x[n] = r^n e^{j\omega n}$ є власною для ЛСС з характеристичним числом $H(re^{j\omega})$, яке є лише функцією частоти ω і називається комплексною частотною характеристикою (КЧХ).

Відповідним чином відгук ЛСС на довільну послідовність

$$y[n] = T\{x[n]\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_i y_i[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} H(r_i e^{j\omega_i}) A_i r_i^n e^{j\omega_i n} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} H(z_i) A_i z_i^n.$$

2.2. Z-представлення.

В загальному випадку розглянута довільна послідовність $x[n]$ може не мати представлення у вигляді ряду Лорана. Наприклад, якщо вона неперіодична. Проте в теорії функцій комплексної змінної доведено, що на неперервній області частот такі послідовності можуть бути представлені контурним інтегралом:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz,$$

де

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n},$$

А C – контур з напрямом обходу проти годинникової стрілки, розташований в області збіжності $X(z)$ і такий, що оточує початок координат на z – площині.

Оператор $\mathbb{Z}\{\cdot\}$, що описує відповідність між $x[n]$, та $X(z)$ називається прямим **Z-перетворенням**. Вона позначається як:

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathbb{Z}} X(z).$$

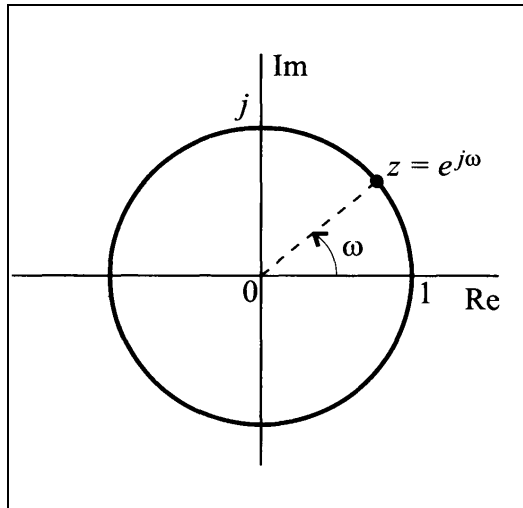
Таке перетворення носить назву **двостороннє Z-перетворення** на відміну від одностороннього:

$$\aleph(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

В Ейлеровому представленні $z = re^{j\omega}$ Z-перетворення має вигляд

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n}$$

Останню рівність можна інтерпретувати як перетворення Фур'є добутку початкової послідовності $x[n]$ на експоненціальну r^{-n} . Очевидно, при $r = 1$ права частина формули дає Фур'є-образ послідовності $x[n]$.

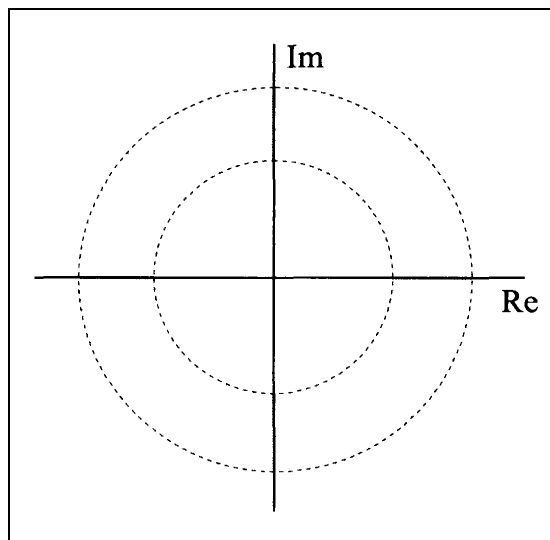


Достатня умова збіжності z-перетворення

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty$$

Збіжність z-перетворення цілком залежить від величини $|z|$, оскільки $|X(z)| < \infty$

тоді коли: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||z|^{-n} < \infty$.



До найбільш важливих і корисних Z-перетворень відносяться ті, для яких $X(z)$ на ОЗ ряду записується як раціональна функція, тобто

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

де $P(z)$ і $Q(z)$ – многочлени змінної z . Значення z , при яких $X(z) = 0$, називаються **нулями** $X(z)$, а ті точки, в яких $X(z) \rightarrow \infty$, – **полюсами**. Поліуси раціональної функції $X(z)$, розташовані в кінцевій області комплексної площини, співпадають з нулями знаменника $Q(z)$. Крім того, полюси можуть з'являтися в точках $z = 0$ і $z \rightarrow \infty$. Існує ряд важливих спостережень про зв'язок розташування полюсів раціональної функції $X(z)$ і ОЗ відповідного ряду.

2.3. Властивості області збіжності z-перетворення

Нехай алгебраїчний вираз, що описує z-перетворення, – раціональна функція, а сигнал $x[n]$ має кінцеву амплітуду, за виключенням, можливо, точок $n = 0$ або $n \rightarrow \infty$.

Властивість 1: ОЗ - це кільце або диск на комплексній площині з центром в нулі, тобто $0 \leq r_R < |z| < r_L \leq \infty$.

Властивість 2: перетворення Фур'є послідовності $x[n]$ збігається абсолютно тоді і тільки тоді, коли ОЗ перетворення містить одиничне коло.

Властивість 3: ОЗ не може містити жодного полюса.

Властивість 4: ОЗ z-перетворення сигналу обмеженої тривалості, тобто сигналу з ненульовими відліками, розташованими в кінцевому інтервалі $-\infty < N_1 \leq n \leq N_2 < \infty$ - уся комплексна площина, за виключенням, можливо, $z = 0$ та $z \rightarrow 0$.

Властивість 5: ОЗ z-перетворення правосторонньої послідовності, тобто послідовності з нульовими відліками при $n < N_1 < \infty$, є "зовнішність" кола з центром в нулі (включаючи навіть іноді $z \rightarrow 0$), на межі якого розташований полюс функції $X(z)$ з максимальним модулем.

Властивість 6: ОЗ z -перетворення лівобічної послідовності, тобто послідовності з нульовими відліками при $n > N_2 > \infty$, - внутрішність круга з центром в нулі (можливо разом з центром), на межі якого розташований полюс функції $X(z)$ з мінімальним модулем.

Властивість 7: ОЗ z -перетворення двосторонньої послідовності, тобто тій, яка не являється ні право-, ні лівобічною, є кільце з центром в нулі, на межах якого розташовані полюси функції $X(z)$, а усередині кільця (згідно з властивістю 3) їх немає.

Властивість 8: ОЗ має бути зв'язною.

2.4. Зворотне z -перетворення

Існує ряд формальних і неформальних методів відновлення послідовності по алгебраїчному виразу її z -перетворення і ОЗ. Формальний підхід до z -перетворення ґрунтується на інтегральній теоремі Коші. Проте для типових послідовностей і їх z -перетворень, що зустрічаються при аналізі дискретних лінійних систем, важливіші менш формальні процедури.

Розглянемо деякі з цих процедур, а саме:

- табличний метод,
- метод простих дробів.
- метод розкладання у ступеневі ряди.

2.4.1. Табличний метод

Табличний метод полягає у використанні відомих послідовностей і функцій, пов'язаних z -перетворенням.

Стандартна послідовність	Z -перетворення	ОЗ
1. $\delta[n]$	1	всє z
2. $u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
3. $-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
4. $\delta[n - m], m > 0$	z^{-m}	всє $z \neq 0$
$\delta[n - m], m < 0$	z^{-m}	всє $z \neq \infty$
5. $a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
6. $-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
7. $na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
8. $-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
9. $u[n] \cos \omega_0 n$	$\frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
10. $u[n] \sin \omega_0 n$	$\frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
11. $u[n] r^n \cos \omega_0 n$	$\frac{1 - z^{-1} r \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} r \cos \omega_0 + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
12. $u[n] r^n \sin \omega_0 n$	$\frac{z^{-1} r \sin \omega_0}{1 - 2z^{-1} r \cos \omega_0 + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$	$\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$	$ z > 0$

Наприклад, перетворення послідовності $x[n] = a^n u[n]$, де a може бути як дійсним, так і комплексним числом.

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{\mathbb{Z}} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

Нехай $X(z) = \frac{2z}{2z-1}$, його легко перетворити у вираз $X(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$

Для ОЗ $|z| > 0.5$ обернене z-перетворення дасть послідовність $x[n] = \frac{u[n]}{2^n}$

Для ОЗ $|z| < 0.5$ зворотнє z-перетворення дасть послідовність $x[n] = -\frac{u[-1-n]}{2^n}$

2.4.2. Метод простих дробів

Цей метод застосовується для раціональних функцій $X(z) = \frac{P_1(z^{-1})}{P_2(z^{-1})}$, де

$P_1(z^{-1}); P_2(z^{-1})$ – поліноми від z^{-1} .

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}$$

Нехай $c_k \neq 0$ – нулі а $d_k \neq 0$ – полюси раціональної функції, тоді

$$X(z) = \frac{a_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{b_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

Випадок 1: Якщо $M < N$ і кратність усіх полюсів рівна 1, то $X(z)$ може бути представлена у вигляді:

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{(1 - d_k z^{-1})}$$

де

$$A_k = \left((1 - d_k z^{-1}) X(z) \right) \Big|_{z=d_k}$$

Випадок 2: Якщо $M \geq N$, то до правої частини рівності необхідно додати многочлен міри $(M - N)$. Тому при $M \geq N$ формула розкладання дробу в суму простих має вигляд

$$X(z) = \sum_{r=0}^{N-M} B_r z^{-1} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{(1 - d_k z^{-1})}$$

Коефіцієнти B_r можна знайти діленням в стовпчик чисельника на знаменник. Ступінь залишку, що виходить, буде вже менше ступеня знаменника.

Випадок 3: Якщо $X(z)$ має кратний полюс і $M \geq N$, формулу розкладання дробу необхідно модифікувати далі. Зокрема, якщо $X(z)$ має полюс кратності s в точці $z = d_i$, а кратність інших полюсів - одиниця, то формула розкладання дробу прийме вигляд:

$$X(z) = \sum_{r=0}^{N-M} B_r z^{-1} + \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{A_k}{(1 - d_k z^{-1})} + \sum_{m=1}^s \frac{C_m}{(1 - d_i z^{-1})^m}$$

де

$$C_m = \frac{1}{(s-m)!(-d_i)^{s-m}} \left(\frac{d^{s-m}}{dw^{s-m}} \left((1-d_i w)^s X(w^{-1}) \right) \right) \Big|_{w=d_i^{-1}}$$

Члени $B_r z^{-1}$ відповідають зсувам одиничного імпульсу, помноженого на константу, тобто послідовностям $B_r \delta[n-r]$. Дробові члени $\frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}$ відповідає за одну з послідовностей: $(d_k)^n u[n]$ чи $-(d_k)^n u[-n-1]$. Щоб вибрати одну з них, треба згадати властивості ОЗ. З них виходить, що якщо $X(z)$ має тільки прості полюси (кратності 1) і ОЗ описується нерівністю $r_R < |z| < r_L$, то цей полюс d_k відповідає правосторонній послідовності $(d_k)^n u[n]$, якщо $d_k < r_R$; цей же полюс відповідає лівобічній послідовності $-(d_k)^n u[-n-1]$, якщо $d_k > r_L$. Таким чином, можна використовувати ОЗ для сортування полюсів. Кратні полюси розбиваються на дві групи аналогічно.

2.4.2. Метод розкладання в ступеневі ряди

Z - перетворення визначається як ряд Лорана, коефіцієнтами якого служать відліки послідовності $x[n]$. Таким чином, якщо z-перетворення задане ступеневим рядом

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \dots + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots,$$

ми можемо знайти будь-який конкретний відлік послідовності $x[n]$, дивлячись на коефіцієнт при відповідному ступені z^{-1} . Ми вже застосовували цей підхід при пошуку зворотного перетворення поліноміальної частини раціональної функції при $M > N$. Такий спосіб дуже корисний при роботі з послідовностями кінцевої довжини, z-перетворення яких може і не мати простішої форми запису, чим у вигляді многочлена від z^{-1} .

2.5. Властивості z – перетворення/

Вираз $X(z)$ означатиме z -перетворення послідовності $x[n]$, а символом R_x ми позначимо ОЗ цього z -перетворення, тобто

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathbb{Z}} X(z), \quad z \in R_x$$

R_x складається з безлічі точок z , що задовольняють подвійній нерівності $r_R < |z| < r_L$. Якщо йтиметься про пару послідовностей, ми користуватимемося наступними позначеннями:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{\mathbb{Z}} X_1(z), \quad z \in R_{x_1};$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{\mathbb{Z}} X_2(z), \quad z \in R_{x_2};$$

1. Лінійність

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{\mathbb{Z}} aX_1(z) + bX_2(z),$$

$$R_{ax_1+bx_2} \supset R_{x_1} \cap R_{x_2};$$

2. Затримка

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{\mathbb{Z}} z^{-n_0} X(z), \quad x \in R'_x;$$

де R'_x співпадає з R_x за виключенням долучення або видалення точок $z = 0; z \rightarrow \infty$

3. Множення на експоненціальну послідовність

$$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{\mathbb{Z}} X\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad x \in R_{x_0x}, \quad \text{де } R_{x_0x} = |z_0| R_x;$$

4. Диференціювання z-образу

$$nx[n] \xleftrightarrow{\mathbb{Z}} -z \frac{dX(z)}{dz}, \quad R_{nx} = R_x;$$

5. Спряження комплексної послідовності

$$x^*[n] \xleftrightarrow{\mathbb{Z}} X^*(z^*), \quad R_{x^*} = R_x;$$

6. Обернення в часі

$$x[-n] \xleftrightarrow{\mathbb{Z}} X\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in \frac{1}{R_x};$$

7. Згортка послідовностей

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{\mathbb{Z}} X_1(z)X_2(z), \quad R_{x_1 * x_2} \supset R_{x_1} \cap R_{x_2};$$

Теорема про початкове значення

Якщо послідовність $x[n]$ задовольняє умові $x[n] = 0$ при $n < 0$ (тобто вона детермінована), то

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Тема 3. ДИСКРЕТИЗАЦІЯ НЕПЕРЕРВНОГО СИГНАЛУ

Лекція №3.

3.1. Періодична дискретизація

Звичайним методом отримання дискретного представлення безперервного сигналу служить періодична, або рівномірна, дискретизація, коли послідовність відліків $x[n]$ з'являється по безперервному сигналу $x_c(t)$ згідно з формулою:

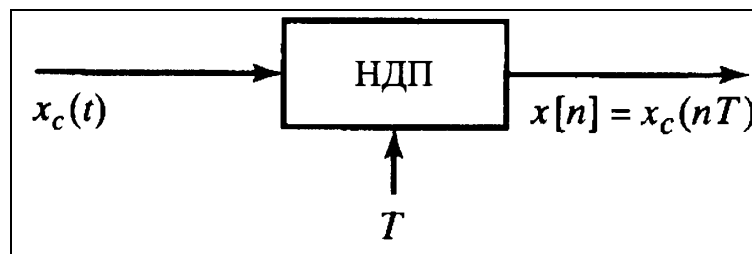
$$x[n] = x_c(nT), \quad -\infty < n < \infty.$$

Параметр T тут називається кроком дискретизації, а зворотна до нього величина

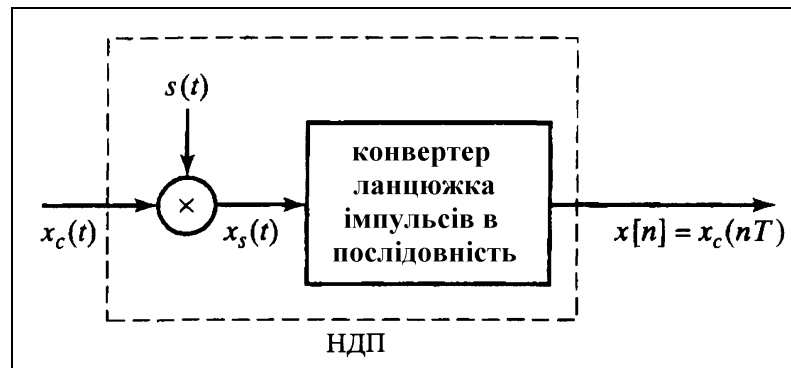
$f_s = \frac{1}{T}$ - частотою дискретизації, вимірюваної числом відліків за секунду. Якщо ми вважаємо за краще вимірювати частоту в радіанах за секунду, частоту дискретизації можна перерахувати як

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T}.$$

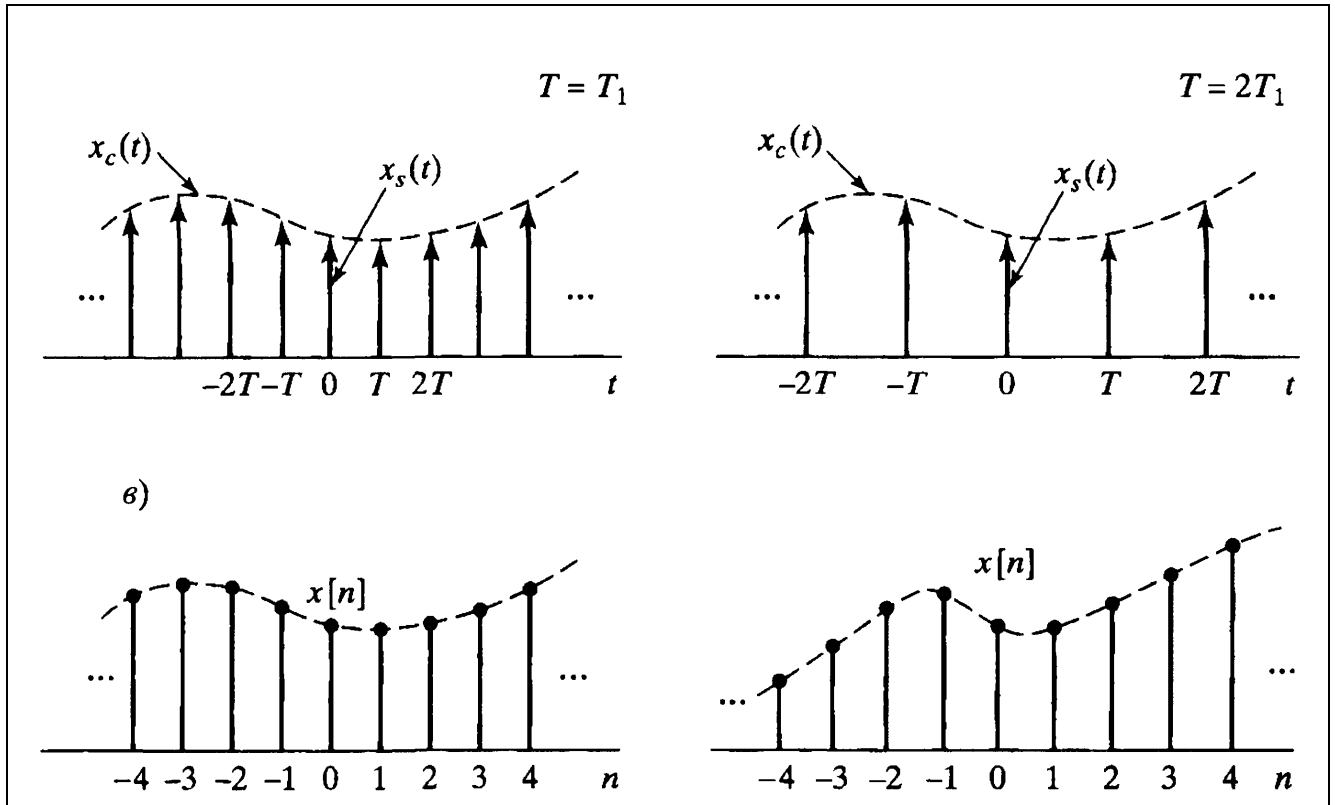
Систему, що здійснює цю операцію називатимемо ідеальним неперервно-дискретним перетворювачем (НДП), а на схемах її зображуватимемо:



Фізичний зміст процедури дискретизації можна представити, як модуляцію періодичної серії імпульсів $s(t)$ неперервним сигналом $x_c(t)$:



Як приклад результату застосування НДП представлені безперервний мовний сигнал $x_c(t)$ і відповідна послідовність відліків $x[n]$.



3.2. Частотне представлення дискретизації

Для виведення частотного співвідношення між вхідним і вихідним сигналами ідеального НДП розглянемо процедуру перетворення $x_c(t)$ в $x_s(t)$ за допомогою модуляції періодичного ланцюжка імпульсів:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT),$$

де $\delta(t)$ – δ -функція Дірака. Модулюючи сигнал $x_c(t)$ функцією $s(t)$, отримуємо:

$$x_s(t) = x_c(t)s(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(t)\delta(t - nT),$$

виходячи з фільтруючих властивостей δ -функції остаточно маємо:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t-nT)$$

Тепер розглянемо Фур'є-образ функції $x_s(t)$. Оскільки вона рівна добутку функцій $x_c(t)$ і $s(t)$, її перетворення є згорткою Фур'є-образів $X_c(j\Omega)$ і $S(j\Omega)$. Відомо, що перетворення Фур'є періодичного ланцюжка імпульсів знову періодичний ланцюжок імпульсів, тобто:

$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

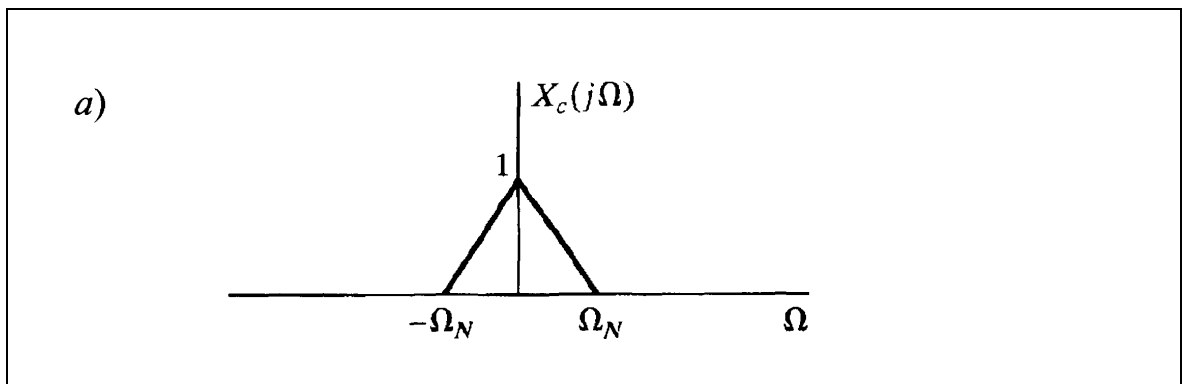
де $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$ – частота дискретизації, вимірювана в рад/с. Оскільки

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega)$$

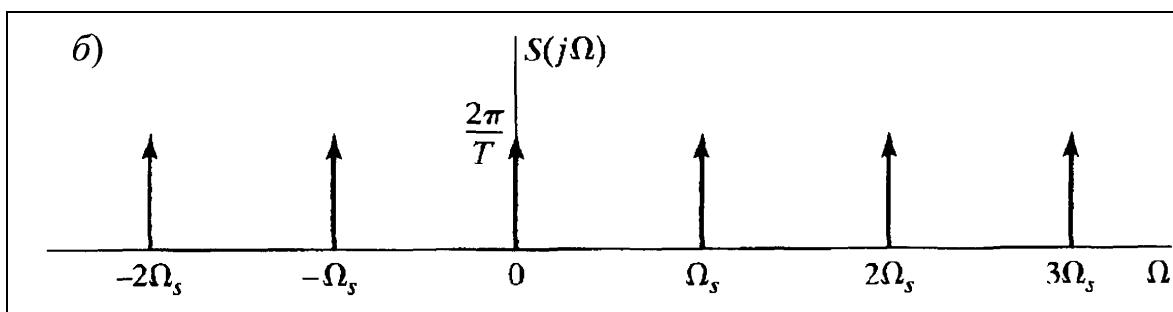
де * означає згортку по безперервній змінній, то

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s))$$

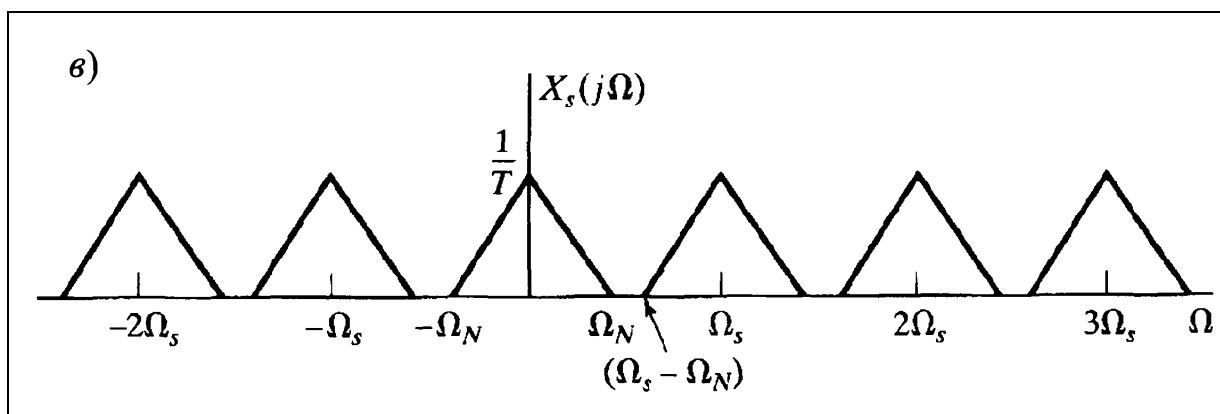
Розглянемо вузькосмуговий неперервний сигнал з максимальної ненульовою гармонікою Ω_N . Його Фур'є-образ має вигляд:



Фур'є-образ періодичної серії імпульсів:



Фур'є-образ серії імпульсів модульованої вузькосмуговим сигналом:



Очевидно, що, коли

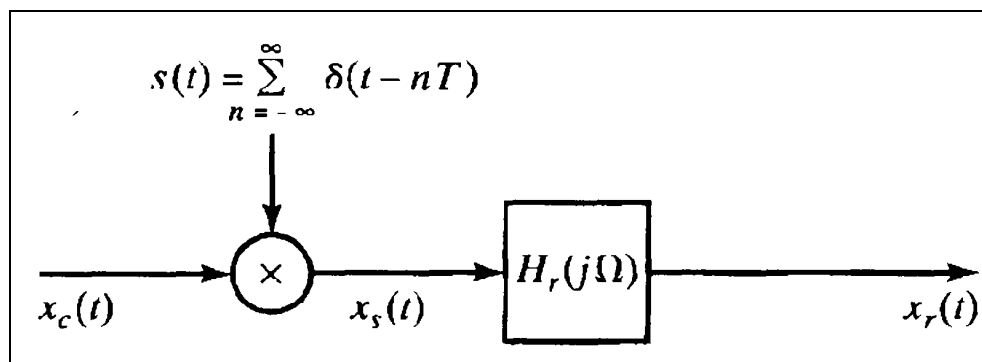
$$\Omega_s - \Omega_N > \Omega_N, \text{ тобто } \Omega_s > 2\Omega_N$$

дублікати $X_c(j\Omega)$ не перекриваються і, отже, при їх підсумовуванні виходить

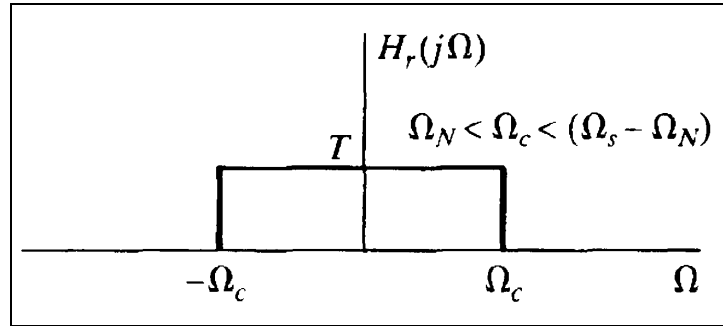
періодичне (з точністю до множника $\frac{1}{T}$) продовження функції $X_c(j\Omega)$. Отже,

$x_c(t)$ відновлюється по $x_s(t)$ за допомогою ідеального фільтру нижніх частот.

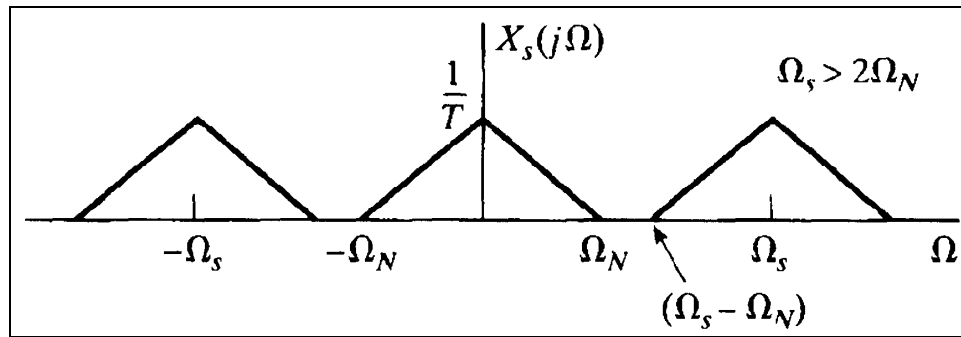
Розглянемо модулятор ланцюжка імпульсів, за яким стоїть ЛС-система



із спектральною характеристикою $H_r(j\Omega)$

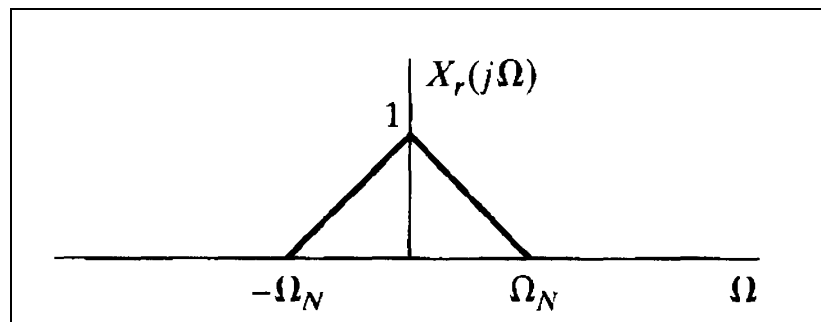


де Ω_c – частота відсічки та коефіцієнтом підсилення T (ідеальний фільтр нижніх частот що задовольняє умові $\Omega_N < \Omega_c < (\Omega_s - \Omega_N)$), то з модульованого сигналу:

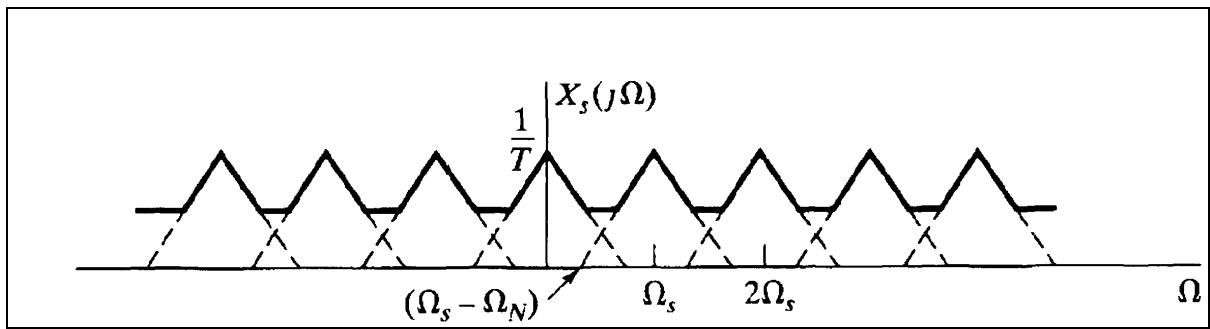


відповідно до правила каскадного включення ЛС він утворить Фур'є-образ:

$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega) X_s(j\Omega) = X_c(j\Omega)$$



Якщо $\Omega_s \leq 2\Omega_N$, копії графіків функції $X_c(j\Omega)$ накладаються один на одного. Тому функцію $X_c(j\Omega)$ вже неможливо відновити за допомогою фільтру нижніх частот:



В цьому випадку відновлений вихідний сигнал $x_r(t)$ пов'язаний з оригінальним безперервним сигналом через спотворення, яке має назву спотворенням із-за накладення спектрів, або просто накладенням спектрів, або хибними частотами.

Теорема Котельникова-Найквіста про дискретизацію:

Нехай $x_c(t)$ – вузькосмуговий сигнал з $X_c(j\Omega) = 0$, при $|\Omega| > \Omega_N$.

Тоді $x_c(t)$ однозначно визначається своєю дискретизацією

$$x[n] = x_c(nT) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \text{ якщо } \Omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_N$$

Частоту Ω_N зазвичай називають частотою Найквіста, а частоту $2\Omega_N$, яка обмежує частоту дискретизації знизу, – мінімально допустимою частотою дискретизації.

Кінцева мета математичного представлення процесу дискретизації – виразити $X(e^{j\omega})$ (дискретне Фур'є-представлення послідовності $x[n]$) в термінах $X_s(j\Omega)$ і $X_c(j\Omega)$, для чого перепишемо $X_s(j\Omega)$ в іншому виді. Застосовуючи безперервне перетворення Фур'є до рівності

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT), \text{ отримуємо}$$

$$X_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega nT}$$

Із врахуванням $x[n] = x_c(nT)$ та $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$ маємо:

$$X_s(j\Omega) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\Omega T} = X(e^{j\Omega T})$$

Відповідно до отриманого вище $X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s))$ отримуємо:

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s)),$$

що еквівалентно:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T} \right) \right)$$

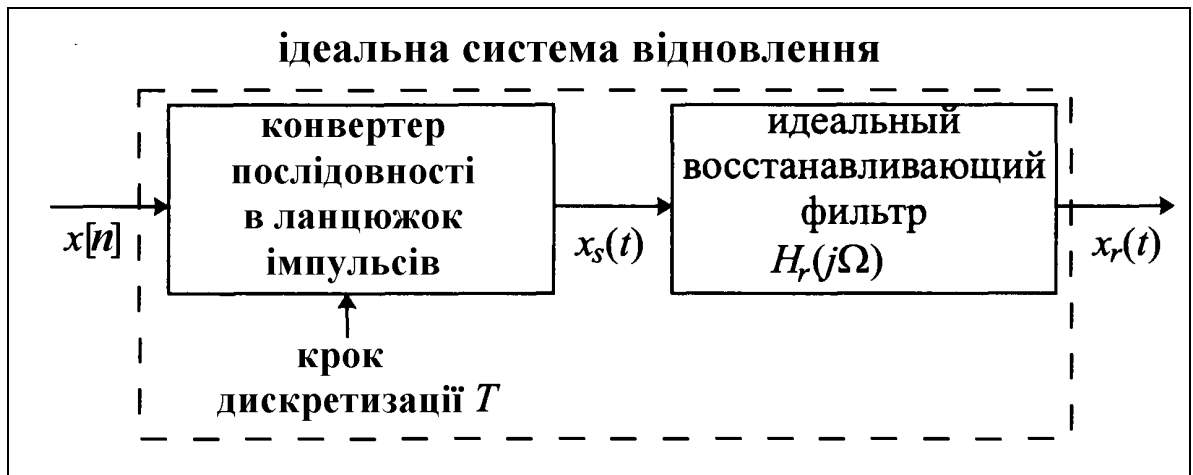
3.3. Відновлення вузькосмугового сигналу за його відліками

Встановлено, що якщо профільтрувати модульований неперервним сигналом $x_c(t)$ ланцюжок імпульсів відповідним фільтром нижніх частот, то Фур'є-образ результату фільтрування співпадатиме з Фур'є-образом неперервного сигналу $x_c(t)$, і тому вихідний з фільтру сигнал виявляється ідентичний сигналу модуляції. По послідовності відліків $x[n]$ можна сформувати серію імпульсів $x_s(t)$, значення яких визначаються формулою:

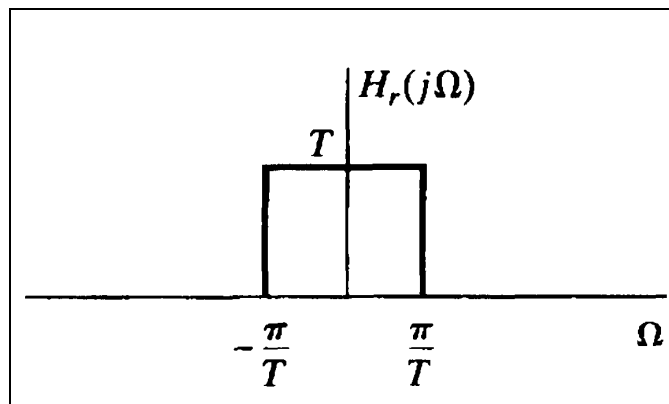
$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t - nT)$$

Відлік під номером n пов'язаний з імпульсом в точці $t = nT$, де T - крок дискретизації, відповідної послідовності $x[n]$. Якщо цей ланцюжок імпульсів подати на вхід ідеального безперервного фільтру нижніх частот з КЧХ $H_r(j\Omega)$ і імпульсною характеристикою $h_r(t)$, то буде отриманий відгук

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_r(t - nT)$$

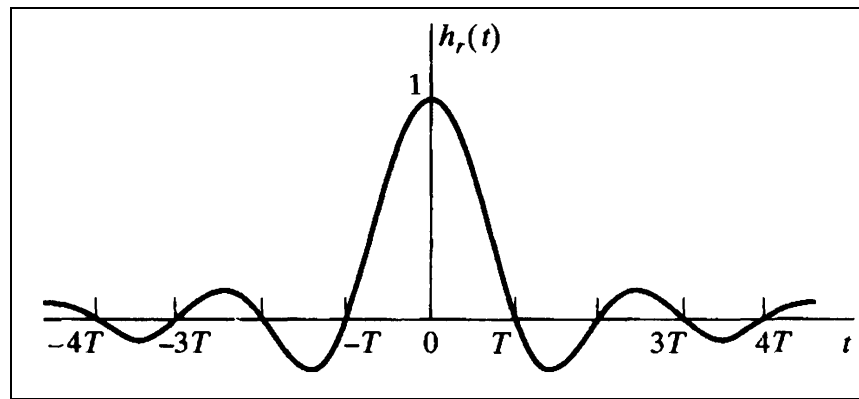


Комплексна частотна характеристика такого фільтра:



Відповідно імпульсна характеристика $h_r(t)$ є зворотним перетворенням Фур'є від функції $H_r(j\Omega)$ і при частоті відсічення $\frac{\pi}{T}$ обчислюється за правилом:

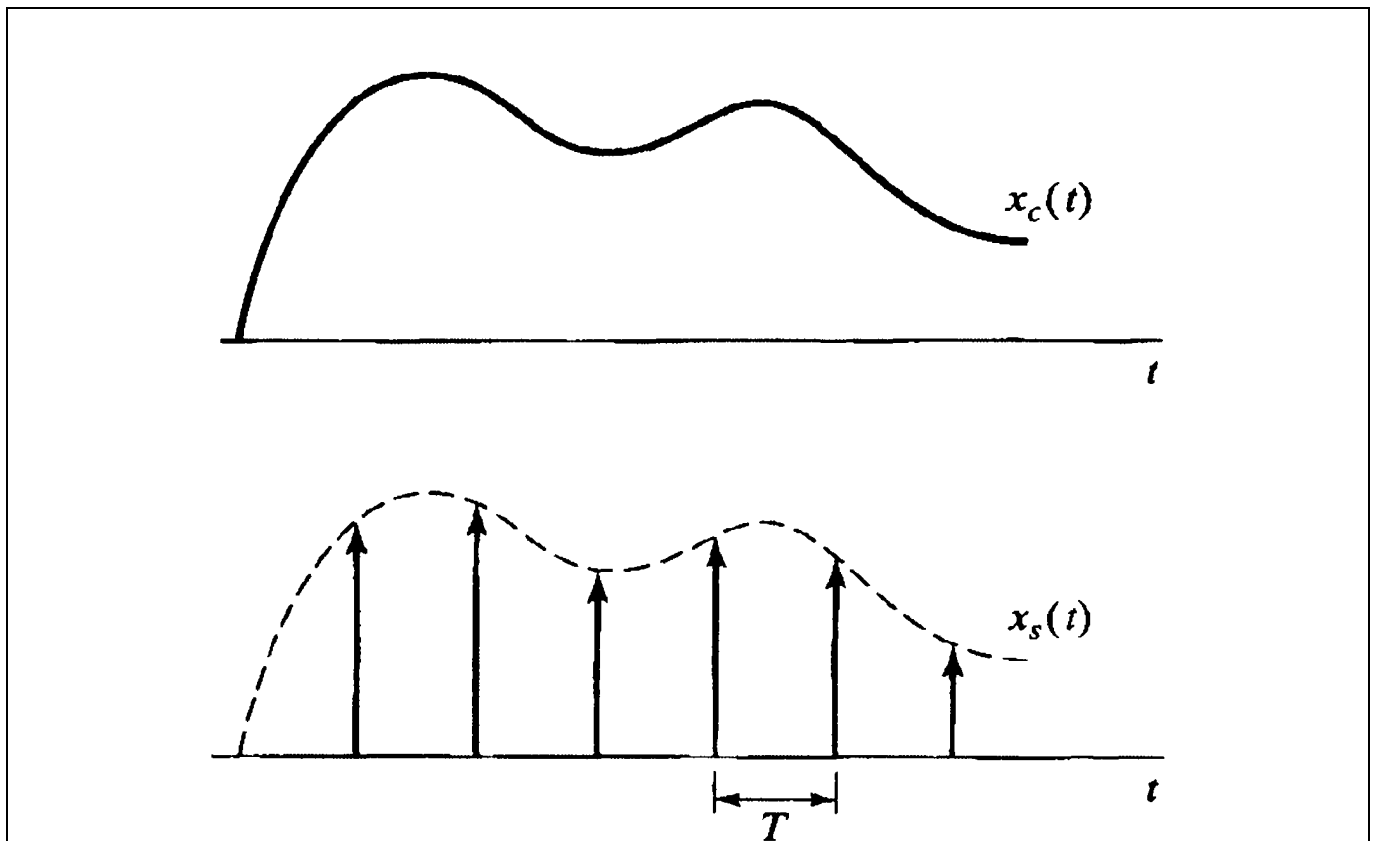
$$h_r(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

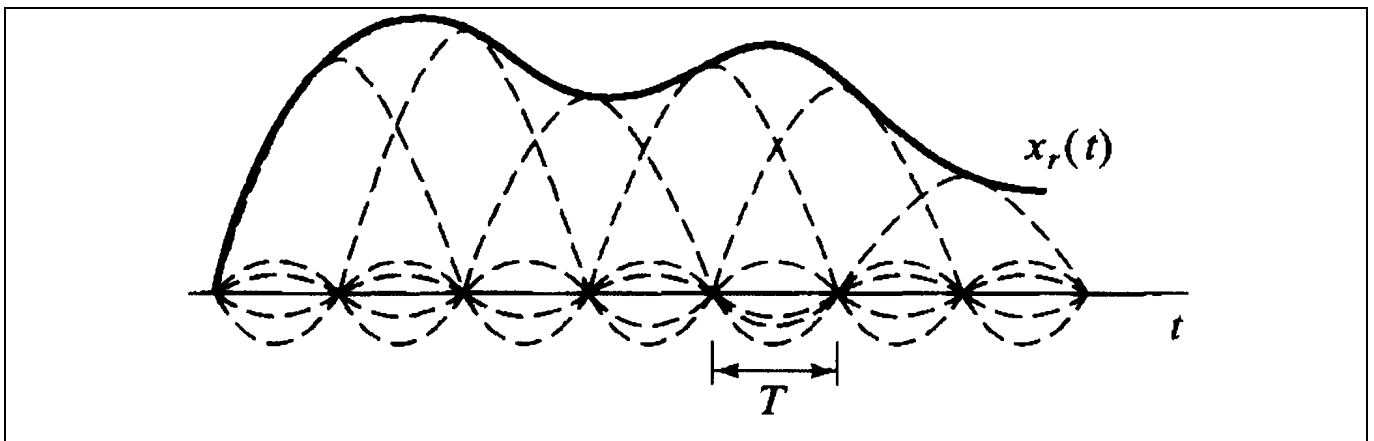


звідки:

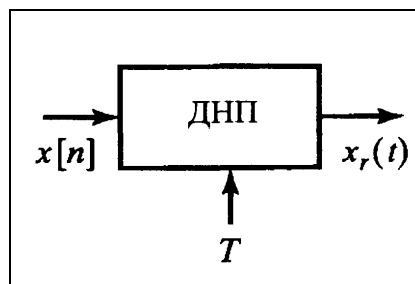
$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin(\pi(t-nT)/T)}{\pi(t-nT)/T}$$

Якщо $x[n] = x_c(nT)$, де $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq \frac{\pi}{T}$, то $x_r(t)$ співпадає з $x_c(t)$.





Операція відновлення вузькосмугового неперервного сигналу за його дискретним аналогом носить назву Дискретно-неперервне перетворення (ДНП) та зображується графічно:



Властивості ідеального ДНП найпростіше досліджувати в частотній області. Для виведення співвідношень між його входом і виходом в цій області до обох частин

формули $x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_r(t-nT)$ застосуємо перетворення Фур'є:

$$X_r(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]H_r(j\Omega)e^{-j\Omega Tn}$$

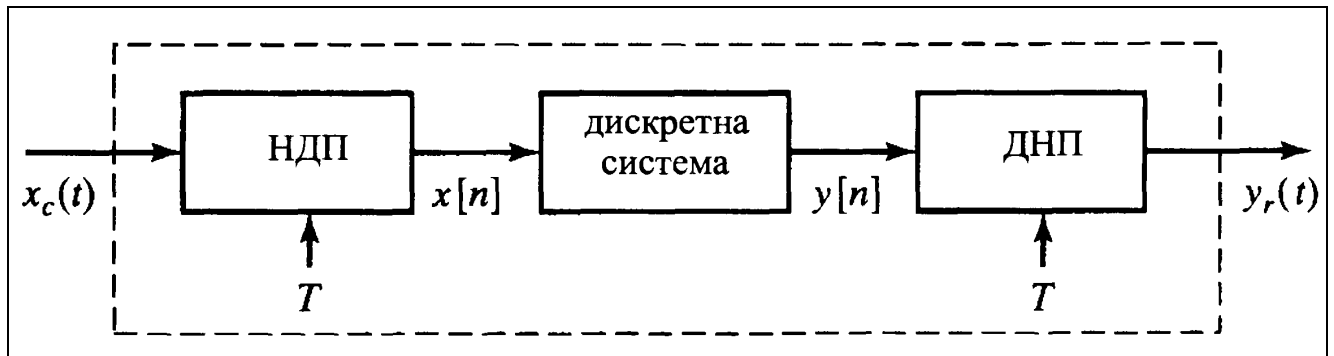
Виносячи множник $H_r(j\Omega)$ з суми, можна записати:

$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)X(e^{j\Omega T})$$

Лекція №4.

3.4. Дискретна обробка неперервних сигналів

Своє головне застосування дискретні системи знаходять в обробці неперервних сигналів, що досягається за допомогою схеми:



Вона складається з послідовного з'єднання НДП, власне дискретної системи і ДНП.

НДП генерує дискретний сигнал $x[n] = x_c(nT)$. Дискретне Фур'є перетворення цієї послідовності співвідноситься з безперервним перетворенням Фур'є :

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

ДНП створює на виході неперервний сигнал виду:

$$y_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T}$$

де послідовність $y[n]$ є реакцією дискретної системи на послідовність $x[n]$.

$Y_r(j\Omega)$ – неперервне перетворення Фур'є сигналу $y_r(t)$ і $Y(e^{j\omega})$ – Фур'є-образ послідовності $y[n]$ пов'язані співвідношенням:

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y(e^{j\Omega T}) = \begin{cases} Y(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0, & |\Omega| \geq \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

Для лінійних стаціонарних систем:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$$

де $H(e^{j\omega})$ – її КЧХ або, що те ж саме, – Фур'є-образ її імпульсної характеристики, а $X(e^{j\omega})$ і $Y(e^{j\omega})$ – Фур'є-образи вхідного і вихідного сигналів відповідно. Комбінуючи ці рівняння, отримуємо:

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) X(e^{j\Omega T})$$

Підставляючи $\omega = \Omega T$ в суму $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$, знаходимо

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

Якщо $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq \frac{\pi}{T}$, то ідеальний відновлюючий фільтр нижніх

частот з характеристикою $H_r(j\Omega)$ компенсує множник $\frac{1}{T}$ і відбирає в наведеній сумі тільки член з $k = 0$, тобто

$$Y_r(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}) X_c(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0, & |\Omega| \geq \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

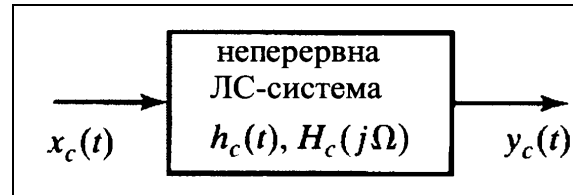
або

$$Y_r(j\Omega) = H_{eff}(j\Omega) X_c(j\Omega),$$

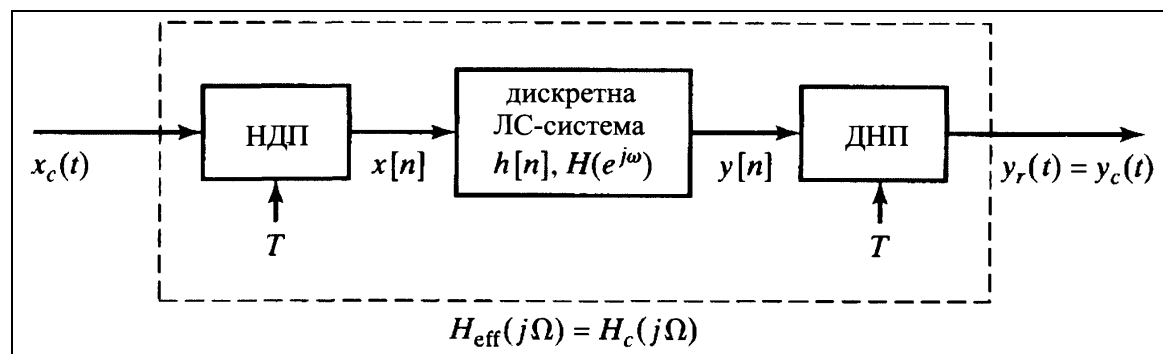
де

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0, & |\Omega| \geq \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

Розглянемо неперервну ЛС-систему:



та еквівалентну їй систему з вузько смуговим входом:



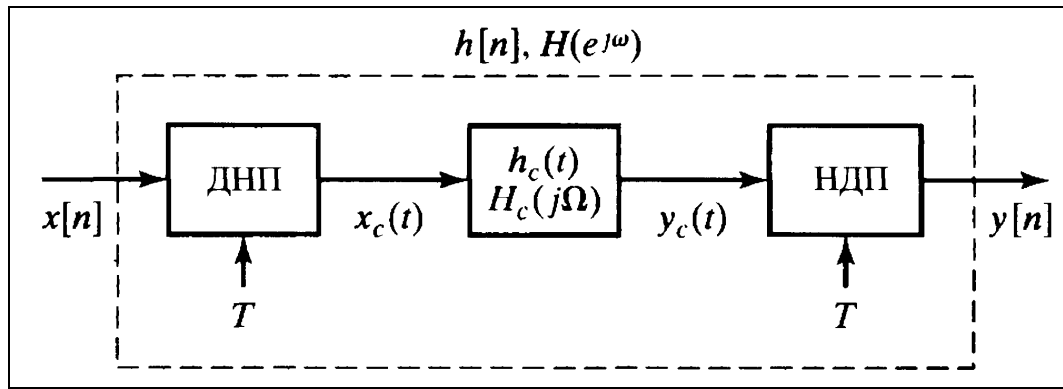
то якщо при виконанні умов:

$$\begin{cases} H(e^{j\omega}) = H_c\left(\frac{j\omega}{T}\right), & |\omega| < \pi \\ H_c(j\Omega) = 0, & |\Omega| \geq \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

здійснюється $h[n] = Th_c(nT)$, кажуть що дискретна система є імпульсно-інваріантною версією неперервної системи.

3.5. Безперервна обробка дискретних сигналів

Розглянемо можливість застосування неперервних методів обробки сигналів до дискретних систем. Цей підхід може бути здійснений за допомогою схеми:



За визначенням ідеального ДНП функція $X_c(j\Omega)$, а значить, і $Y_c(j\Omega)$ повинні набувати нульових значень при $|\Omega| \geq \frac{\pi}{T}$. У зв'язку з цим НДП дає дискретизацію сигналу $y_c(t)$ без накладення спектрів, і ми можемо записати $x_c(t)$ і $y_c(t)$ як:

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T},$$

$$y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T},$$

де $x[n] = x_c(nT)$ і $y[n] = y_c(nT)$. Випишемо співвідношення в частотній області для сигналів наведеної системи

$$X_c(j\Omega) = TX(e^{j\Omega T}), \quad |\Omega| < \pi/T,$$

$$Y_c(j\Omega) = H_c(j\Omega) X_c(j\Omega), \quad |\Omega| < \pi/T,$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} Y_c\left(j \frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi.$$

Таким чином, можна бачити, що наведена система поводить ся, як дискретна система з КЧХ:

$$H(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi,$$

Або (еквівалентне твердження) КЧХ наведеної системи буде співпадати з КЧХ дискретної – $H(e^{j\omega})$, якщо КЧХ безперервної системи рівна

$$H_c(j\Omega) = H(e^{j\Omega T}), \quad |\Omega| < \frac{\pi}{T},$$

3.6. Зміна частоти дискретизації за допомогою дискретної обробки

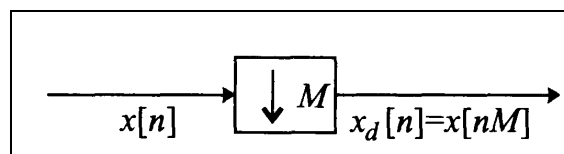
Безперервний сигнал $x_c(t)$ добре представляється дискретним, тобто послідовністю відліків $x[n] = x_c(nT)$. Проте часто постає задача отримати послідовність $x'[n] = x_c(nT')$ де $T' \neq T$ маючи лише $x[n]$.

3.6.1. Зменшення частоти дискретизації в ціле число разів

Зниження частоти дискретизації методами цифрової обробки легко досягається використовуючи компресор, або проріджувач $x_d[n] = x[Mn] \equiv x_c(nMT)$.

Якщо $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq \Omega_N$ та $\frac{\pi}{T'} = \frac{\pi}{MT} \geq \Omega_N$, то $x_d[n]$ – точне

представлення сигналу $x_c(t)$. Тобто частота дискретизації може бути зменшена в M разів без накладення спектрів, якщо початкова частота дискретизації рівна принаймні добутку M на мінімально допустиму частоту дискретизації або якщо смуга послідовності в результаті дискретного фільтрування була зменшена в M разів. У загальній ситуації операція зменшення частоти дискретизації (включаючи усі попередні фільтрування) іменуватиметься знижувальною дискретизацією та позначатиметься графічно.



Фур'є-образ послідовності $x[n] = x_c(nT)$ дорівнює

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T} \right) \right).$$

Аналогічно для $x_d[n] = x_c(nT')$

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{T'} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{T'} - \frac{2\pi r}{T'} \right) \right) = \frac{1}{MT} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi r}{MT} \right) \right)$$

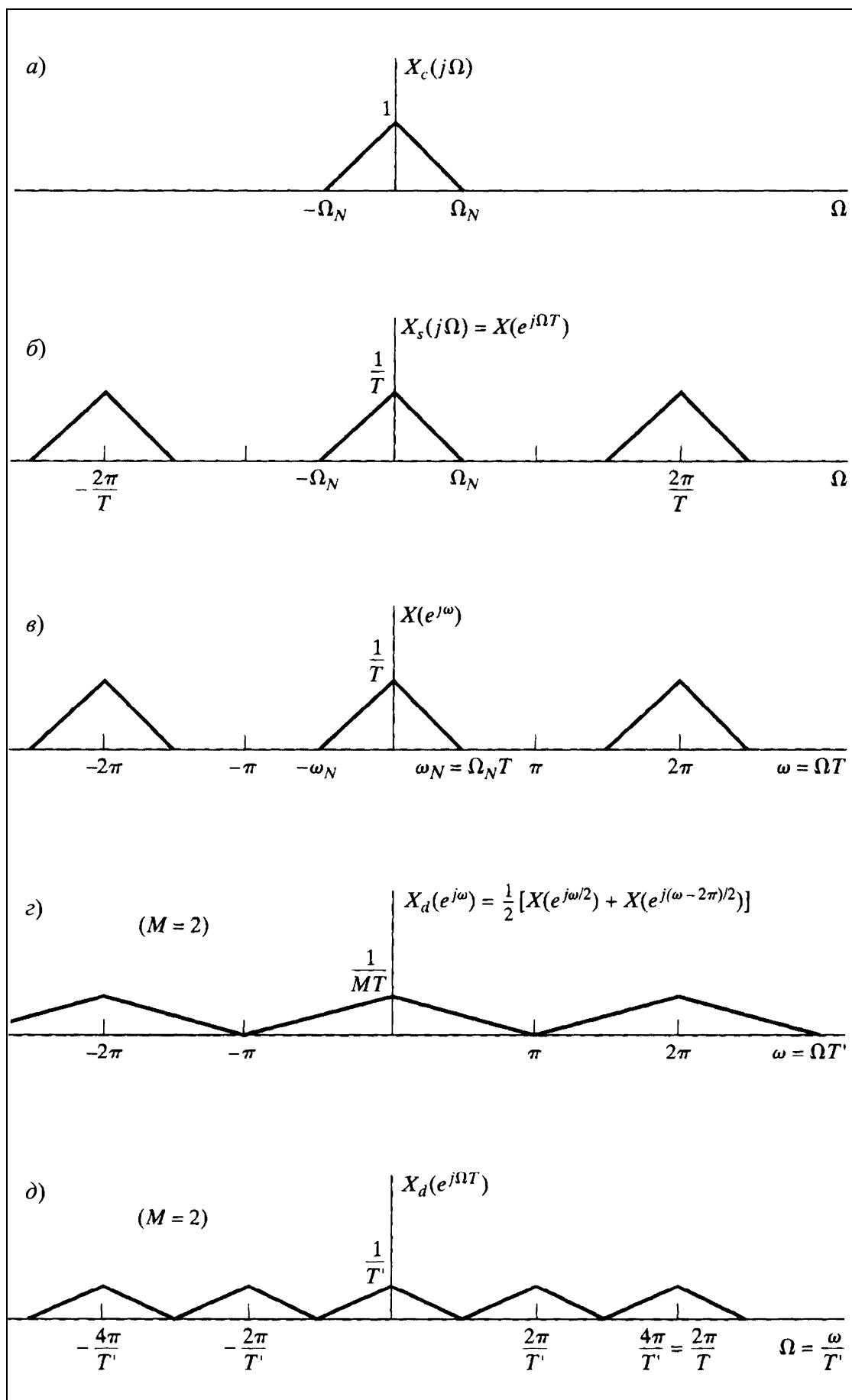
після заміни індексу підсумовування $r = i + kM$, $-\infty < k < \infty$, $0 \leq i \leq M-1$ отримаємо

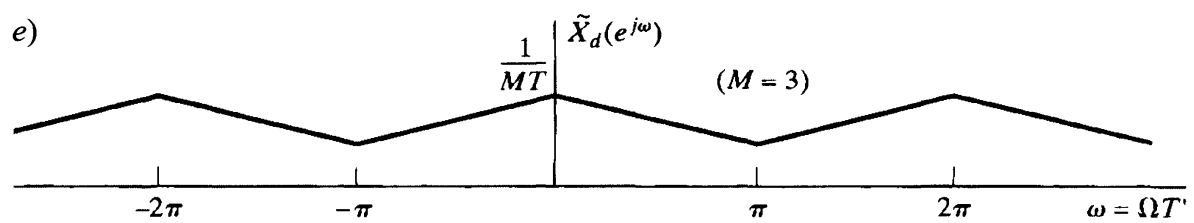
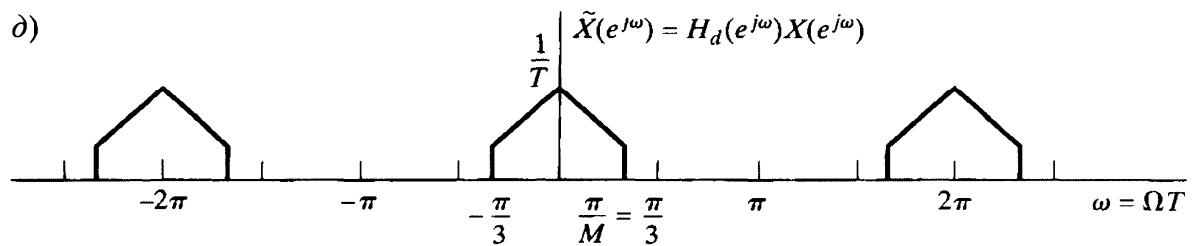
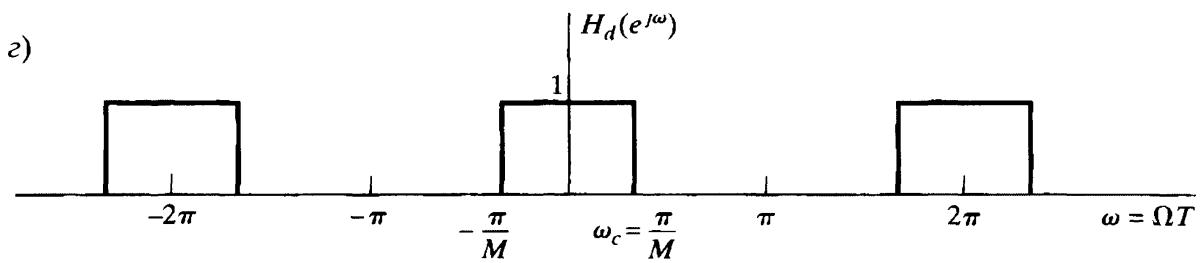
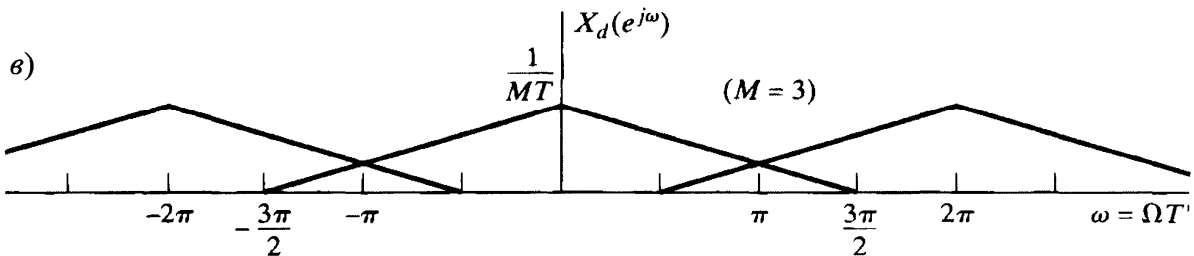
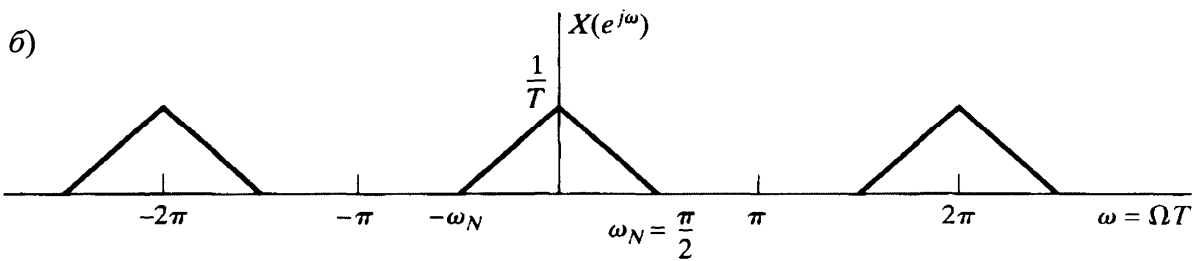
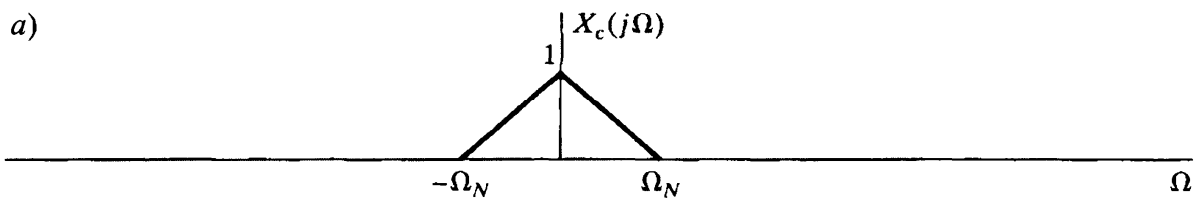
$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi k}{T} - \frac{2\pi i}{MT} \right) \right) \right].$$

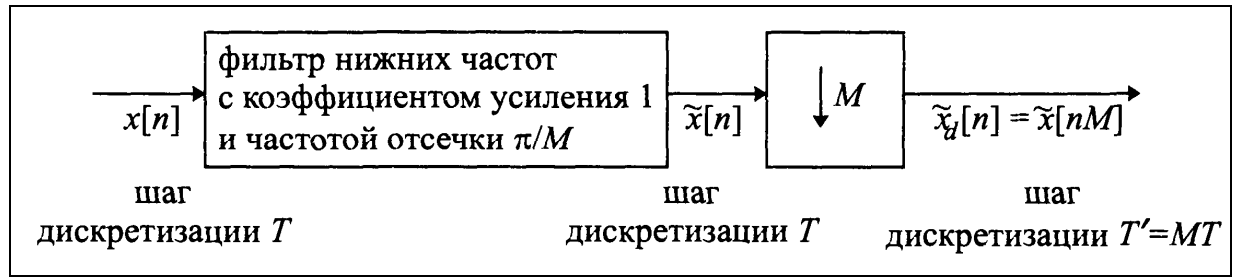
$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi k}{T} - \frac{2\pi i}{MT} \right) \right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\omega - 2\pi i}{MT} - \frac{2\pi k}{T} \right) \right) = X \left(e^{j \frac{(\omega - 2\pi i)}{M}} \right).$$

Таким чином

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X \left(e^{j \frac{(\omega - 2\pi i)}{M}} \right).$$

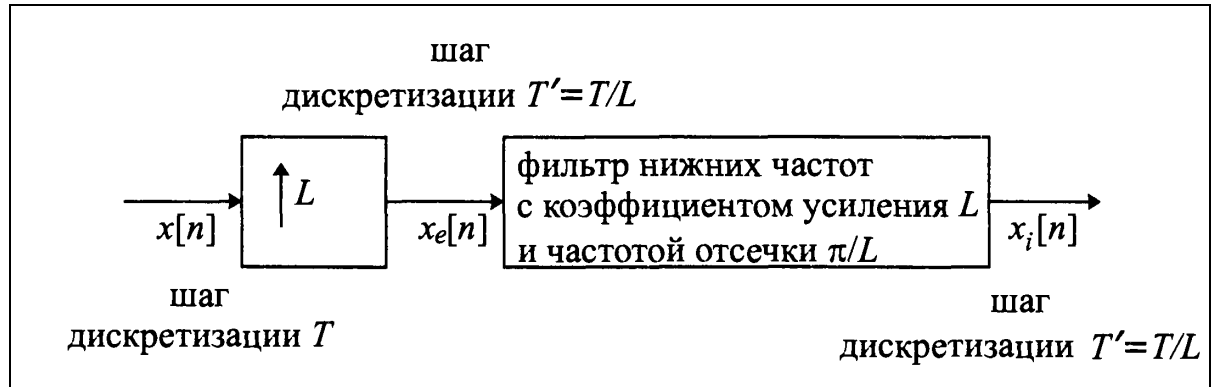






3.6.2. Збільшення частоти дискретизації в ціле число разів

Складнішим є випадок, коли необхідно збільшити частоту дискретизації



Підсистема, розташована на малюнку, називається розширювачем частоти дискретизації або просто розширювачем. Сигнал розширювача, що виходить, описується формулою:

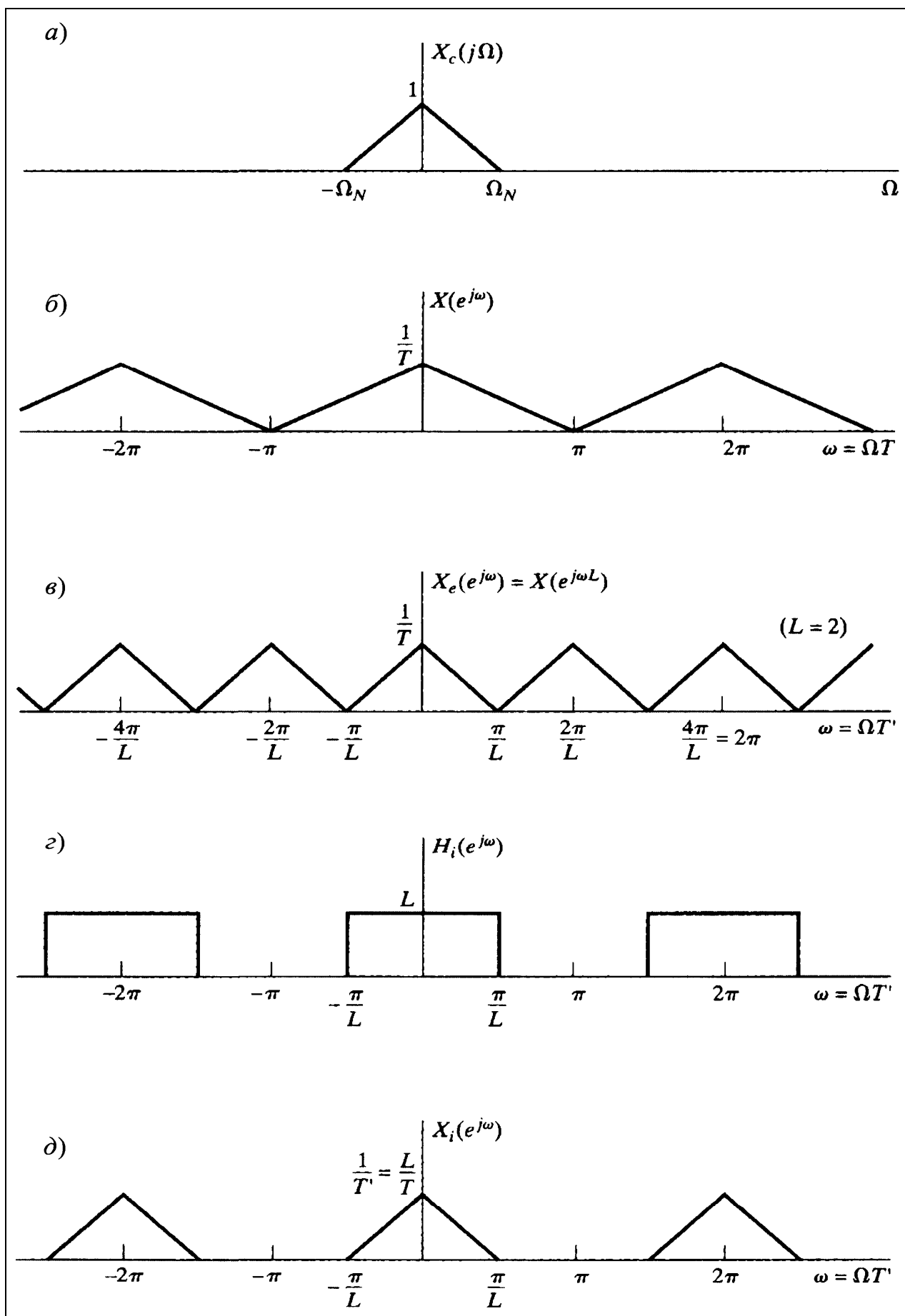
$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots, \\ 0, & n \neq 0, \pm L, \pm 2L, \dots, \end{cases}$$

або

$$x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL].$$

Фур'є-образ послідовності $x_e[n]$ має вигляд:

$$X_e(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL] \right) e^{-j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega Lk} = X(e^{j\omega L}).$$

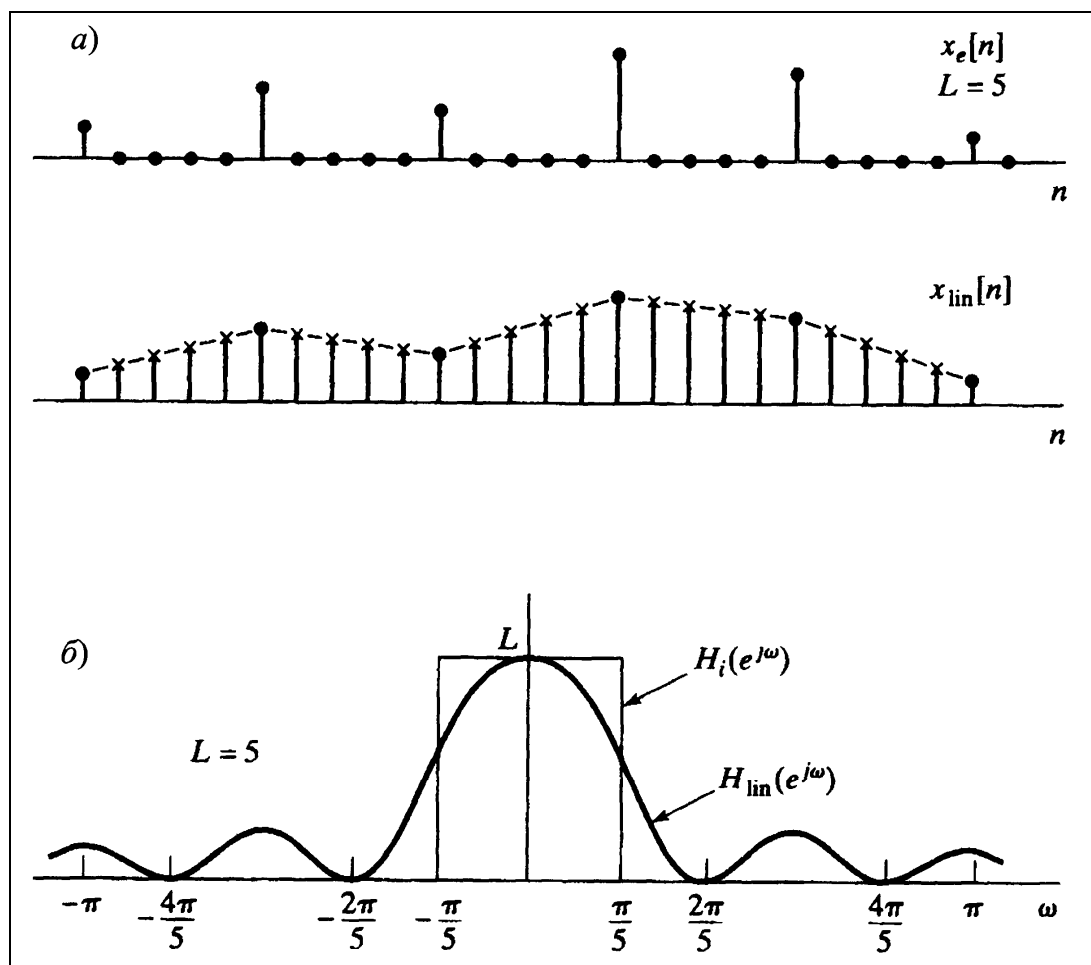


Таку систему прийнято називати інтерполятором, оскільки вона відновлює відсутні відліки. Тому термін «підвищувальна дискретизація», можна розглядати як синонім поняття «інтерполяція». При достатньо високій, по відношенню до частоти Найквіста, вихідній частоті дескритизації, відновлення відсутніх відліків досить точно може бути проведене за допомогою лінійної інтерполяції. Ця процедура може бути здійснена за допомогою дискретної системи з імпульсною характеристикою:

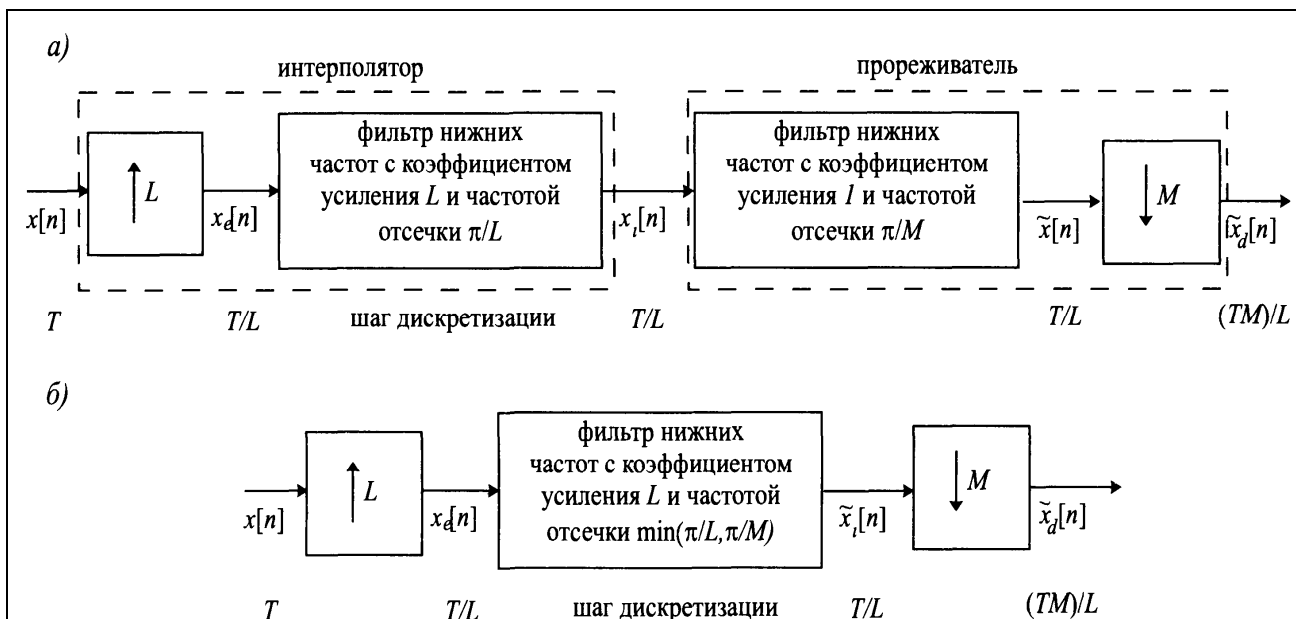
$$h_{lin}[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{L}, & |n| \leq L \\ 0, & |n| > L \end{cases}$$

При такому фільтрі інтерпольований сигнал дорівнює

$$x_{lin}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_e[k] h_{lin}[n - k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_{lin}[n - kL]$$



3.6.3. Зміна частоти дискретизації на раціональний множник



При $M > L$ виходить схема збільшення кроку дискретизації (зменшення частоти дискретизації), а при $M < L$ - протилежна схема. Оскільки фільтри інтерполяції і проріджування об'єднані в каскад, їх можна замінити одним фільтром нижніх частот з коефіцієнтом посилення L і частотою відсічки, рівною найменшому із від-

ношень, $\frac{\pi}{L}$ і $\frac{\pi}{M}$. Якщо $M < L$, то значення частоти відсічки – $\frac{\pi}{M}$ і відбува-

ється зменшення частоти дискретизації. Послідовність $x[n]$, отримана дискретизацією з частотою Найквіста, дає послідовність $x[n]$, що є версією вихідного вузькосмугового сигналу, пропущеного крізь фільтр нижніх частот, якщо відсутні

хібні частоти. З іншого боку, при $M < L$ значення частоти відсічки – $\frac{\pi}{L}$ і вже не треба обмежувати смугу сигналу частотою Найквіста.

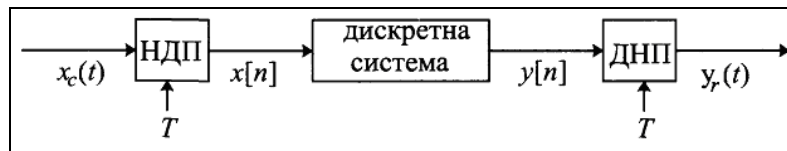
Тема 4. ТЕХНІКА АНАЛОГОВО-ЦИФРОВОГО ТА ЦИФРО-АНАЛОГОВОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ

Лекція №5

4.1. Цифрова обробка аналогових сигналів

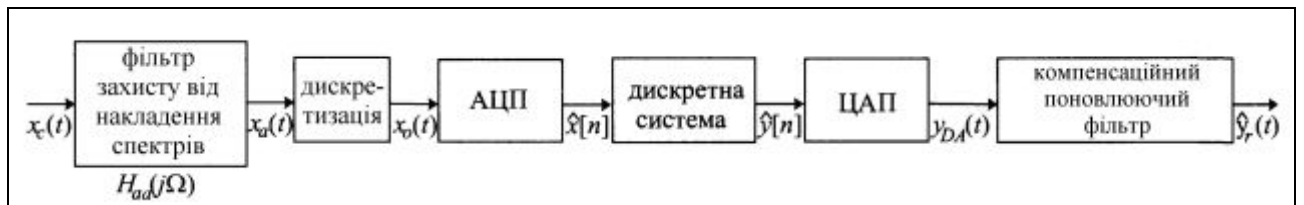
Попереднє обговорення представлення безперервних сигналів дискретними обмежувалося ідеальними моделями періодичної дискретизації і вузькосмуговій інтерполяції.

Були введені ідеалізовані системи що здійснюють дискретизацію, які ми називали ідеальним неперервно-дискретним перетворювачем (НДП), і вузькосмугові ідеалізовані системи що здійснюють процес інтерполяції (відновлення) називаються ідеальним дискретно-неперервним перетворювачем (ДНП). Ідеальні перетворювачі дозволили нам сконцентрувати свою увагу на математичних співвідношеннях, що зв'язують вузькосмугові сигнали з їх дискретизацією. За допомогою ідеальних НДП і ДНП було показано, як дискретні ЛС-системи використовуються в конфігураціях типу:



для реалізації безперервних ЛС-систем за умови, що вхідний сигнал є вузькосмуговим, а частота дискретизації обмежена знизу частотою Найквіста.

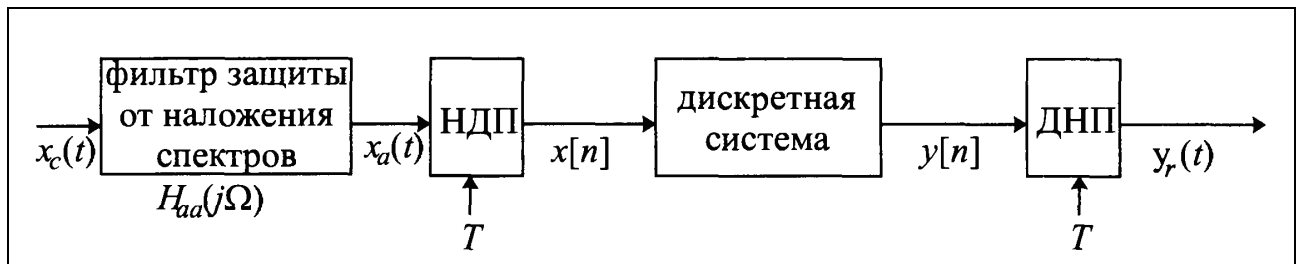
Сигнали, що зустрічаються в практичних застосуваннях, не бувають ідеально вузькосмуговими. Крім того, неможливо утілити ідеальні фільтри у конкретні працюючі пристрої, а ідеальним НДП і ДНП можна лише апроксимувати АЦП і ЦАП. Блок-схема, відображає реалістичнішу модель цифрової обробки безперервних (аналогових) сигналів. Лекція присвячена вивченню властивостей складових частин цієї схеми.



4.1.1. Попереднє фільтрування для усунення ефекту накладення спектрів

При обробці аналогових сигналів дискретними системами стараються мінімізувати частоту дискретизації, що обумовлено бажанням понизити кількість арифметичних операцій, потрібних для реалізації системи, яке пропорційне числу відліків, що піддаються обробці. Якщо вхідний сигнал не є вузькосмуговим або його частота Найквіста занадто висока, потрібне попереднє фільтрування. Типовий приклад такої ситуації виникає при обробці мовного сигналу, коли нижніх частот (3 – 4 кГц) цілком досить для його розпізнавання, незважаючи на

те що сигнал може нести істотну інформацію і в діапазоні частот від 4 до 20 кГц. Навіть при вузькосмуговому сигналі широкосмуговий аддитивний шум може заповнити область верхніх частот, і в результаті дискретизації шумові компоненти внесуть завади в смугу нижніх частот. Щоб позбавитися від накладення спектрів, вхідний сигнал необхідно примусово обмежити по смузі до частот, розташованих нижче половини бажаної частоти дискретизації. Це можна зробити фільтром нижніх частот, застосованим до безперервного сигналу перед НДП.



У цьому контексті фільтр нижніх частот, попередній НДП, називається фільтром захисту від накладення спектрів. У ідеалі КЧХ фільтру захисту від накладення спектрів повинна виглядати як

$$H_{aa}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c. \end{cases}$$

Уся система - від реакції фільтру захисту від накладення спектрів $x_a(t)$ до вихідного сигналу $y_r(t)$ – поводить як ЛС-система, оскільки вхідний в НДП сигнал $x_a(t)$ примусово обмежений частотою $\frac{\pi}{T}$ рад. з фільтром захисту від накладення спектрів. Таким чином, уся ефективна КЧХ системи дорівнюватиме добутку характеристики $H_{aa}(j\Omega)$ і ефективною КЧХ перетворення від $x_a(t)$ до $y_r(t)$.

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \Omega_c, \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c. \end{cases}$$

Отже, при ідеальному фільтрі нижніх частот, що захищає від накладення спектрів, система поводить як ЛС-система з КЧХ, приведеною у формулі для $H_{\text{eff}}(j\Omega)$, навіть у тому випадку, коли функція $X_c(j\Omega)$ не є вузькосмуговою. На практиці КЧХ $H_{aa}(j\Omega)$ не може бути ідеальне вузькосмуговою, але її значення можна зробити досить малими при $|\Omega| > \frac{\pi}{T}$, так що накладення спектрів

мінімізується і загальна КЧХ системи задовольнятиме наближеному співвідношенню:

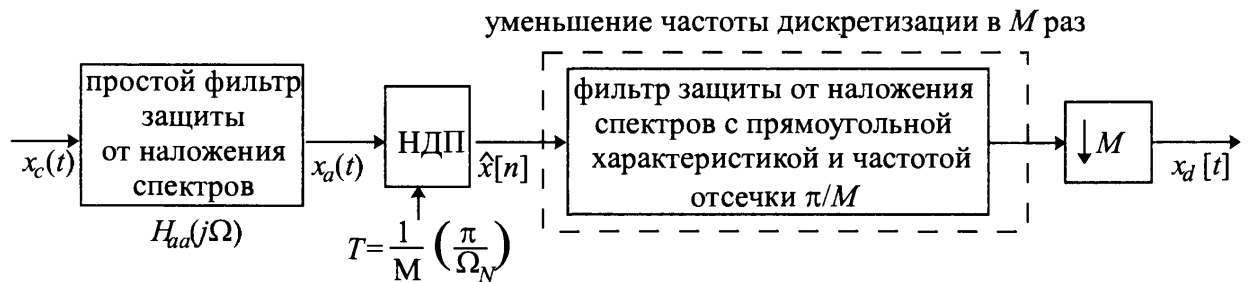
$$H_{\text{eff}}(j\Omega) \approx H_{aa}(j\Omega)H(e^{j\Omega T}).$$

Для досягнення зневажливо малих значень КЧХ при $\omega > \frac{\pi}{T}$ необхідно, щоб

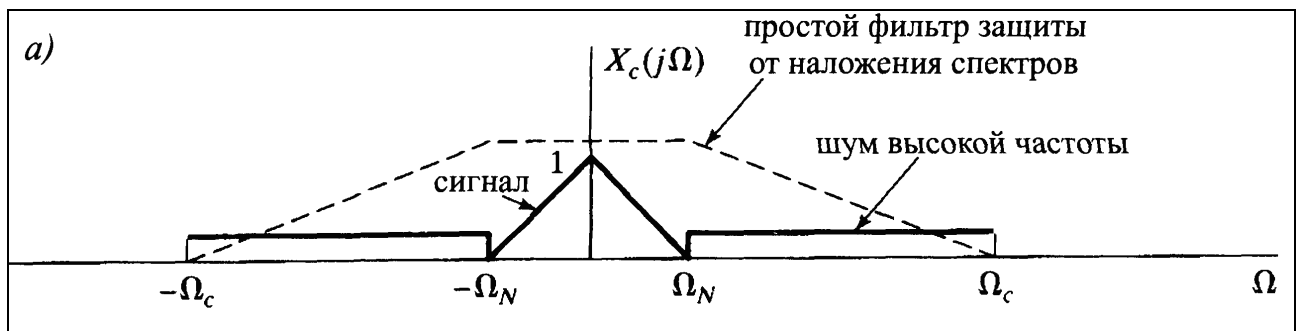
$H_{aa}(j\Omega)$ починала вводити загасання ще в частотах до $\frac{\pi}{T}$. Формула підказує,

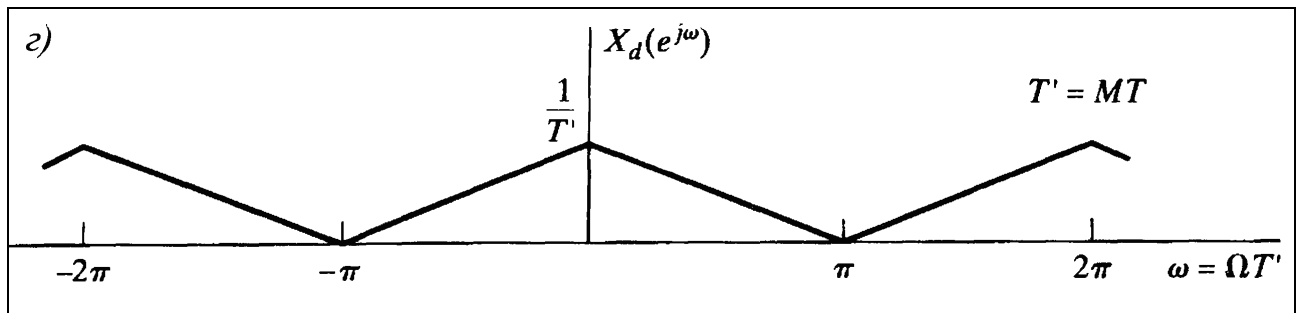
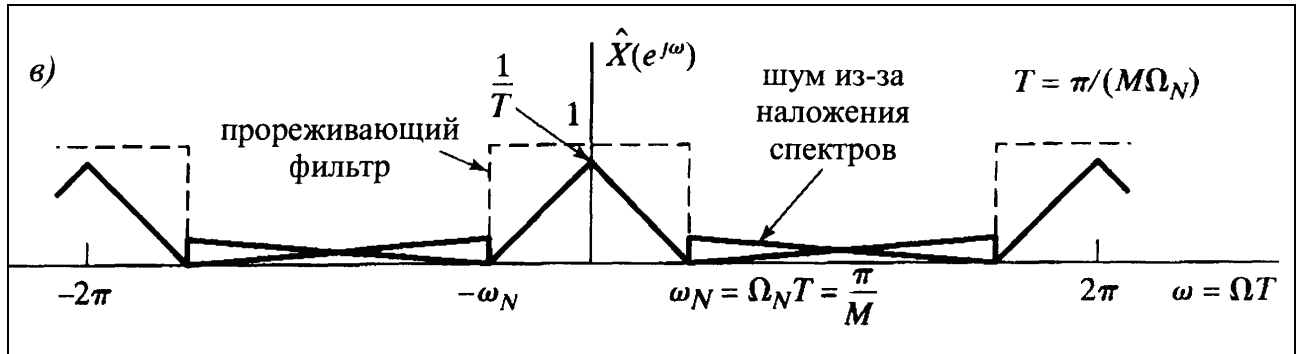
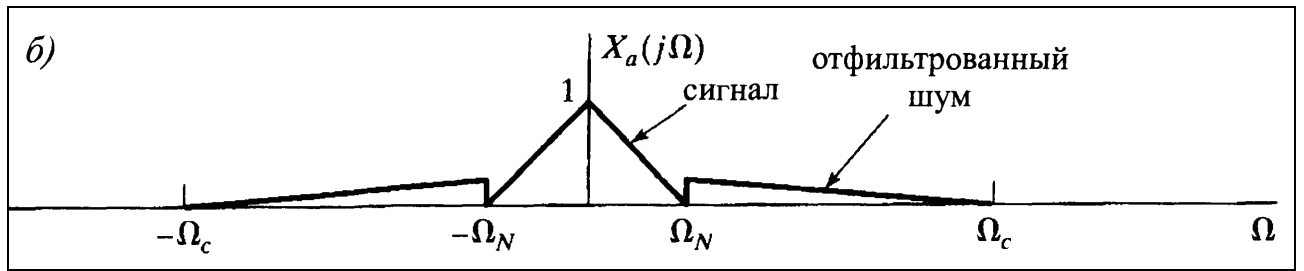
що спад фільтру захисту від накладення спектрів (і інші лінійні стаціонарні спотворення, що обговорюються нижче) міг би принаймні частково компенсуватися, якщо його враховувати при розробці дискретних систем.

Один з підходів до вирішення проблеми уникнення використання дорогого аналогового фільтра з крутим зрізом може полягати в зменшенні частоти дискретизації.



де через Ω_N позначена найвища частотна компонента, яка повинна зберегтися після виконання процедури фільтрування для захисту від накладення спектрів. Спочатку ми застосовуємо дуже простий фільтр, що має плавну частотною відсічення, значно затухаючого поблизу $M\Omega_N$. Далі вставляємо НДП з частотою дискретизації, що значно перевищує $2\Omega_N$, наприклад $2M\Omega_N$. Після цього частота дискретизації зменшується в M разів системою, що містить фільтр захисту від накладення спектрів з крутим зрізом, реалізований в дискретній області. Подальша дискретна обробка для мінімізації розрахунків може бути проведена з низькою частотою дискретизації. Таке використання перетворення частоти дискретизації, що йде за передискретизацією, ілюструється діаграмами:





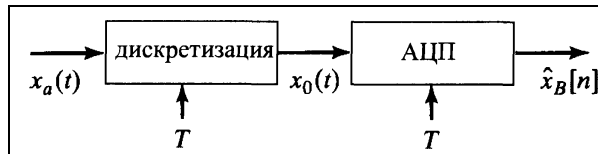
Фур'є-перетворення сигналу, який займає смугу $|\Omega| < \Omega_N$ та перетворення Фур'є того, що могло б відповідати високочастотному "шуму", або небажаним компонентам, які необхідно подавити за допомогою фільтру захисту від накладення спектрів представлено на діаграмі а). Пунктирний лінією відмічена КЧХ фільтру захисту від накладення спектрів, який відсікає частоту не різко, а плавно зменшує до нуля в точці Ω_c . Діаграма б) демонструє Фур'є-перетворення вихідного сигналу після м'якої фільтрації.

Якщо сигнал $x_a(t)$ дискретизований з кроком T так, що $\left(\frac{2\pi}{T} - \Omega\right) < \Omega_N$, то ДВПФ послідовності $x[n]$ співпадає із діаграмою в). Вихід дискретного фільтру далі можна піддати знижуючій дискретизації з множником M і отримати послідовність $x_d[n]$, чий Фур'є-образ показаний на діаграмі г).

Уся процедура фільтрування з різкою частотою відсічення може бути проведена дискретною системою. При цьому потрібно лише незначну попередню обробку сигналу безперервним фільтром. Оскільки фаза дискретних КИХ-фільтрів може бути лінійною, прийом передискретизації можна використати для реалізації фільтрування, що захищає від накладення спектрів, практично без спотворення фази. Переваги цього прийому особливо видно, коли важливо зберігати не лише частотний спектр, але і форму сигналу.

4.1.2. Перетворення аналогового сигналу в цифровий

При обробці безперервного сигналу ідеальним яким перетворює безперервний (аналоговий) сигнал на цифровий, тобто послідовність кінцевої точності, або квантовану по рівню послідовність



Обидві системи можна реалізувати фізичними пристроями. АЦП - цей фізичний пристрій, що перетворює амплітуду напругу або сили струму, що подається на вхід, в двійковий код, представляючий квантовані значення амплітуди вхідного сигналу. Під контролем зовнішнього годинника АЦП може обчислювати відлік кожні T с. Проте перетворення відбувається не миттєво, і з цих причин високо-ефективні АЦП зазвичай включають схему дискретизації і запам'ятовування. Ідеальна система дискретизації і запам'ятовування - це система з вихідним сигналом виду

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT),$$

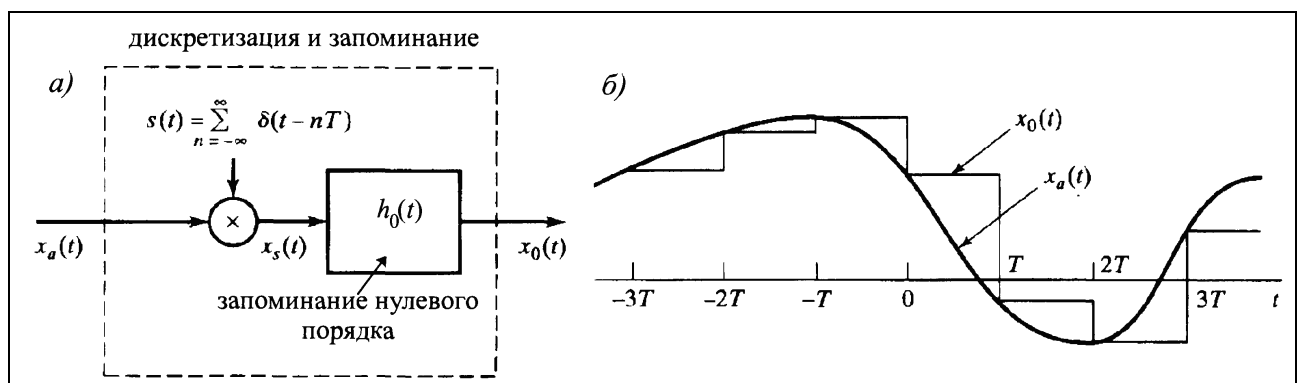
де $x[n] = x_a(nT)$ - ідеальна дискретизація сигналу $x_a(t)$, а $h_0(t)$ - імпульсна характеристика системи запам'ятовування нульового порядку, тобто

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Якщо переписати формулу у вигляді згортки

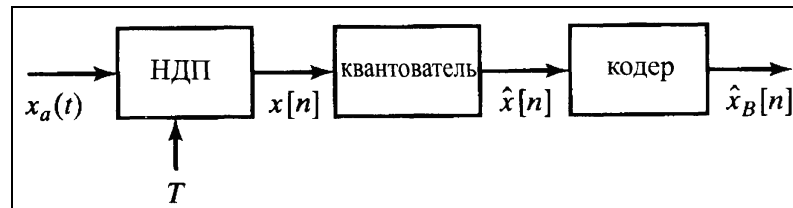
$$x_0(t) = h_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t - nT),$$

то можна помітити, що ідеальна схема дискретизація і запам'ятовування еквівалентна модулятору ланцюжка імпульсов, за яким йде лінійне фільтрування з системою запам'ятовування нулевого порядку.



Вихід системи запам'ятовування нульового порядку має ступінчасту форму, тобто значення відліків постійні на відрізках завдовжки в T_c , де T - крок дискретизації. Фізичні схеми дискретизації і запам'ятовування розробляються так, щоб дискретизація сигналу відбувалася максимально можливою швидкістю, а відліки запам'ятовувалися з найменшою помилкою. Вся процедура має на меті збереження значення напруги (чи сили струму) на виході, що істотно для АЦП.

Квантуваль - це нелінійна система, чия функція полягає в перетворенні значень кожного відліку вхідного сигналу $x[n]$ у одне з кінцевого безліч заданих величин.

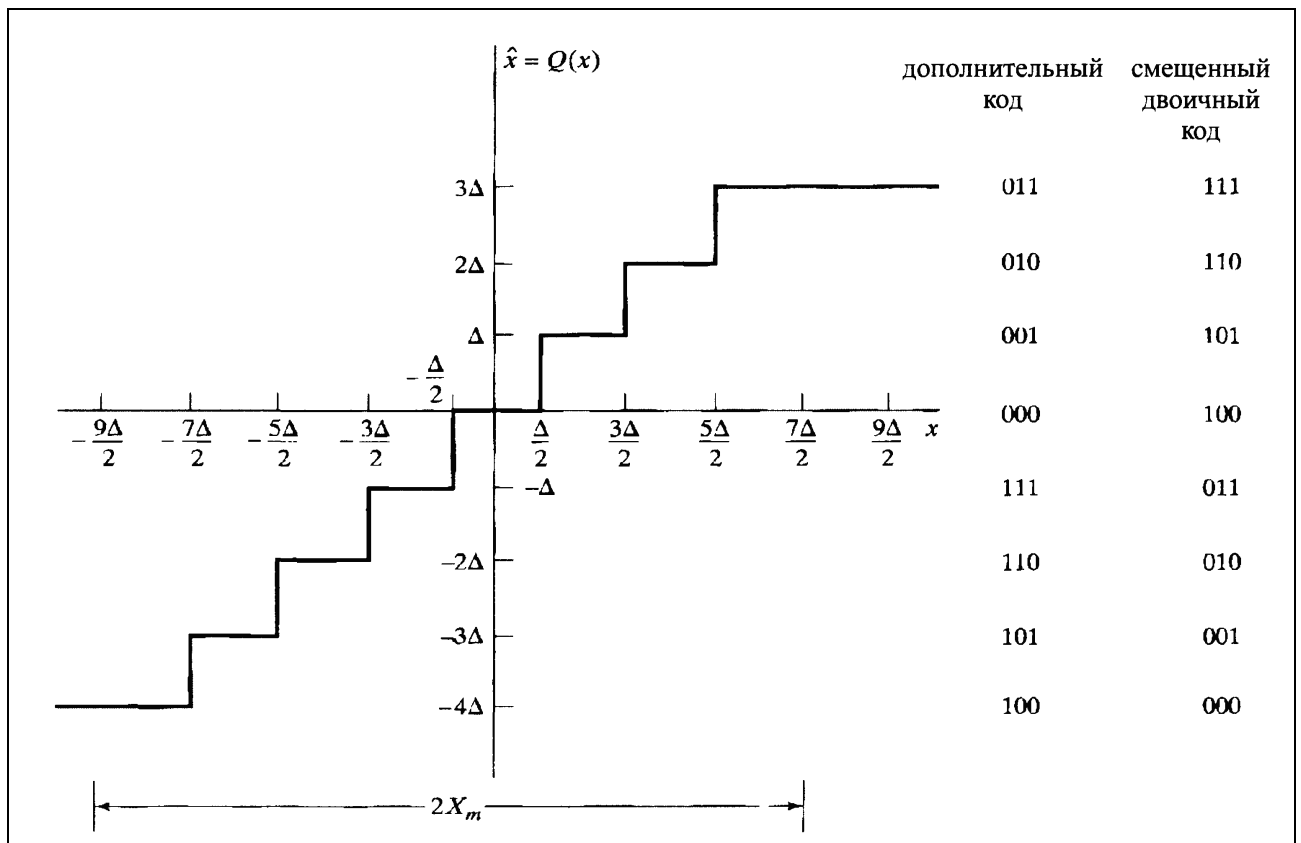


Позначимо цю операцію як

$$\hat{x}[n] = Q(x[n])$$

і називатимемо члени послідовності $\hat{x}[n]$ квантованим відліком. Квантуваль можна визначати з рівномірними або нерівномірними рівнями. Однак, оскільки ми плануємо робити обчислення над відліками, варто вибирати рівномірне квантування.

Типовий рівномірний квантуваль, характеристики в якому закруглені до найбільш близького рівня квантування показаний на діаграмі.



Передусім помітимо, що такий квантователь підходить для сигналів як з позитивними, так і негативними відліками (біполярний). Якщо апріорі відомо, що відліки, що входять, завжди позитивні (чи негативні), то зручніше вибрати інший розподіл рівнів квантування. Наведений квантователь має парне число рівнів квантування. Але, оскільки один з них зайнятий нулем, виходить різна кількість позитивних і негативних рівнів квантування. Як правило, число рівнів квантування дорівнює мірі двійки і, оскільки ця міра значно більше восьми, відмінністю у кількості негативних і позитивних рівнів можна нехтувати.

У наведеному прикладі – вісім рівнів, і ми можемо позначити їх за допомогою двійкового коду з трьох бітів. (У загальному випадку для кодування 2^{B+1} рів-

нів можна використовувати двійкові $(B+1)$ – значні числа.) В принципі для позначення рівнів можна брати будь-які символи, і існує безліч двійкових схем кодування, що мають свої переваги і недоліки залежно від конкретного застосування. Наприклад, правий стовпець двійкових чисел ілюструє зміщений двійковий код, в якому рівні нумеруються числами в двійковій системі числення в порядку їх зростання, починаючи з самого негативного. Проте при цифровій обробці сигналу прийнятніше користуватися двійковим кодом, що дозволяє виконувати арифметичні дії безпосередньо з мітками як з числовим представленням квантованих відліків. Лівий стовпець показує розмітку рівнів, що відповідає додатковому двійковому коду. Така система представлення чисел зі знаками використовується у більшості комп'ютерів і мікропроцесорів. Таким чином, це, можливо, найбільш зручний спосіб нумерації рівнів квантування. Замітимо між іншим, що зміщений двійковий код можна перетворити в додатковий код, просто додаючи найбільш значущий біт. У додатковому двійковому коді крайній лівий, або найбільш значущий, біт відповідає за знак числа, а інші представляють або ціле, або дробове абсолютне значення числа. Ми припускаємо, що має місце остання ситуація, тобто вважаємо, що двійкова кома коштує між двома самими лівими знаками. Значення двійкових символів додатко-

вого коду при $B = 2$ виписані в таблиці. У загальній ситуації $(B+1)$ – бітовий дріб, записаний в додатковому двійковому коді вигляду

$$a_0 \diamond a_1 a_2 \dots a_B,$$

представляє число

$$-a_0 2^0 + a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + \dots + a_B 2^{-B}.$$

Відмітимо, що символ "о" означає "двійкову точку" числа. Взаємозв'язок між словами коду і рівнями квантування сигналу залежить від параметра X_t з. У загальній ситуації цей параметр називається повномасштабним рівням АЦП. Як правило, його значення коливається від 10 до 1В.

Двоїчний символ	Чисельне значення \hat{x}_B
$0_{\diamond}11$	$3/4$
$0_{\diamond}10$	$1/2$
$0_{\diamond}01$	$1/4$
$0_{\diamond}00$	0
$1_{\diamond}11$	$-1/4$
$1_{\diamond}10$	$-1/2$
$1_{\diamond}01$	$-3/4$
$1_{\diamond}00$	-1

Відстань між сусідніми рівнями квантування складає

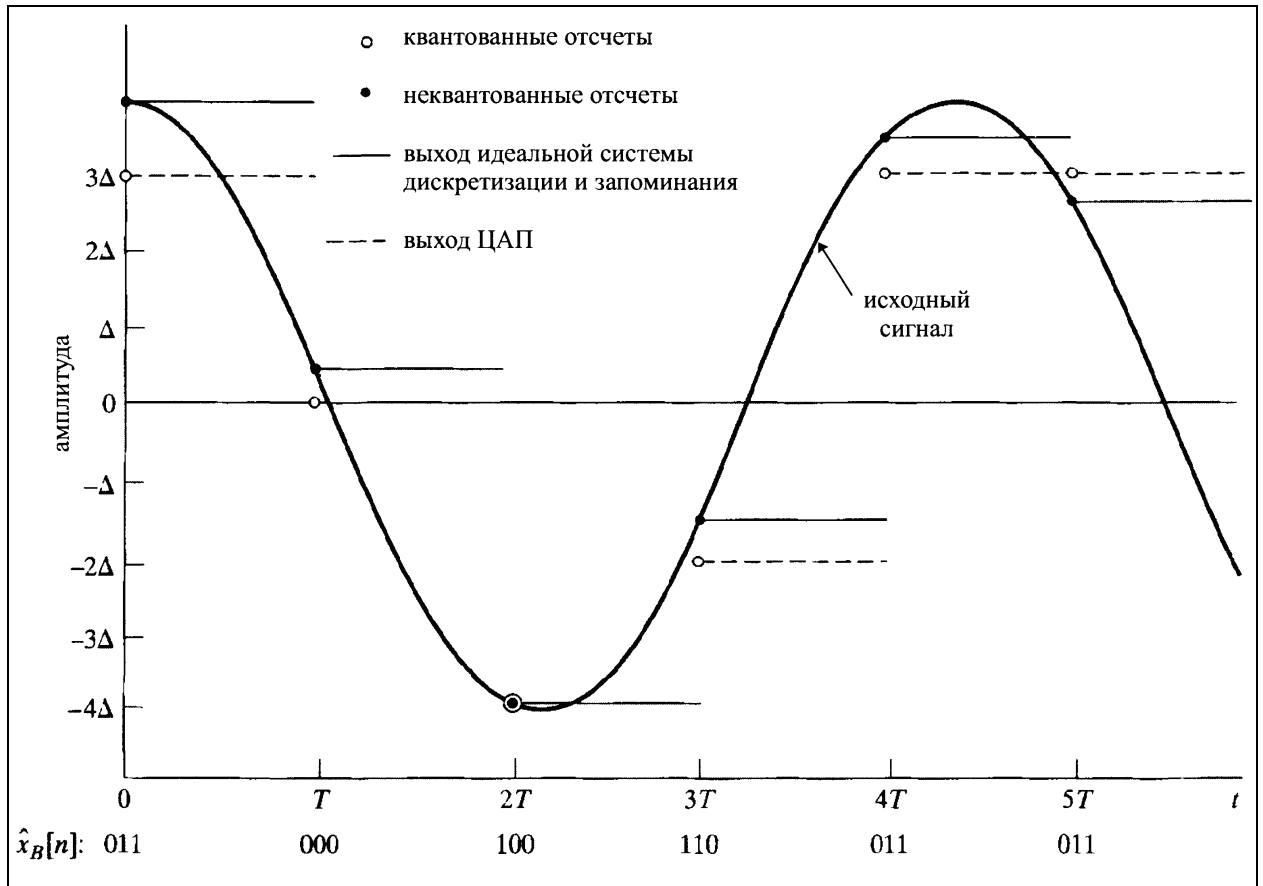
$$\Delta = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B}.$$

Найменші рівні квантування ($\pm\Delta$) відповідають найменшому значущому біту двійкового слова. Більше того, має місце чисельне співвідношення між словом коду і квантованими відліками :

$$\hat{x}[n] = X_m \hat{x}_B[n],$$

оскільки ми припустили, що $\hat{x}_B[n]$ - двійкове число, що задовольняє нерівності $-1 \leq \hat{x}_B[n] < 1$ (у додатковому двійковому коді). При такій схемі кодований відлік $x_B[n]$ прямо пропорційний квантованому відліку (в дополнительном двійковому коді), і тому його можна використати як чисельне представлення амплітуди. Дійсно, прийнято припускати, що вхідний сигнал нормалізований таким чином, що чисельні значення квантованого відліку $\hat{x}[n]$ і двійкового слова $\hat{x}_B[n]$ співпадають, і тому не виникає необхідності проводити межу між квантованими відліками і їх двійковими позначеннями.

На діаграмі показаний простий приклад квантування і кодування відліків синусоїдальної хвилі за допомогою 3-бітового квантувача.



Неквантовані відліки $\hat{x}[n]$ позначаються чорними точками, а квантовані - кружечками. На цьому малюнку представлений вихідний сигнал ідеальної схеми дискретизації і запам'ятовування. Пунктирна лінія означає "вихід ЦАП". Вхідний аналоговий сигнал $x_a(t)$ виходить за межі повномасштабного рівня квантувача, окремі положительні відліки виявляються "зрізаними".

4.1.3. Аналіз помилок квантування

Очевидно, що квантований відлік $\hat{x}[n]$ у більшості випадків відрізняється від істинного значення $x[n]$. Різниця між ними називається помилкою квантування і визначається по формулі

$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n].$$

Наприклад, у разі 3-бітового квантувача при $\Delta/2 < x[n] \leq 3\Delta/2$ значення $\hat{x}[n]$ дорівнює Δ , звідки

$$-\Delta/2 < e[n] \leq \Delta/2.$$

Для даної ситуації ця нерівність залишається вірною завжди, коли

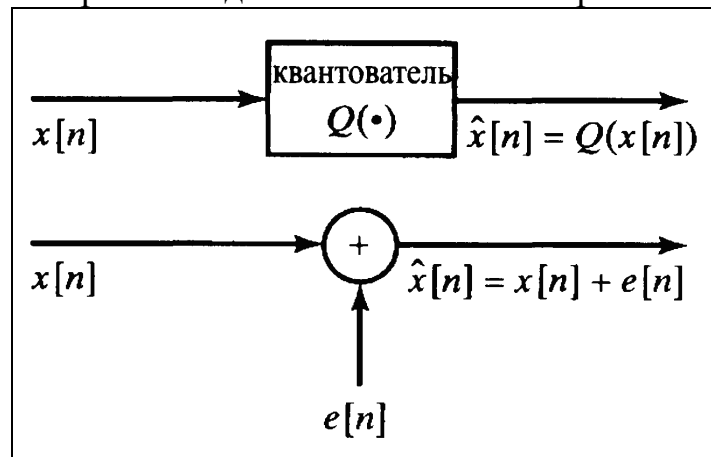
$$-9\Delta/2 < x[n] \leq 7\Delta/2.$$

У загальному випадку $(B + 1)$ - бітового квантувача із значенням Δ помилка квантування задовольняє зазначеній нерівності за умови

$$(-X_m - \Delta/2) < x[n] \leq (X_m - \Delta/2).$$

Якщо $x[n]$ виходить за цю область, як відбувається при $t = 0$ то помилка квантування за абсолютною величиною перевищує $\Delta/2$, і говорять, що відліки зрізуються.

Спрощена, але корисна модель квантовача зображена нижче.



Модель в точності еквівалентна квантовачу за умови, що нам відома помилка $e[n]$.

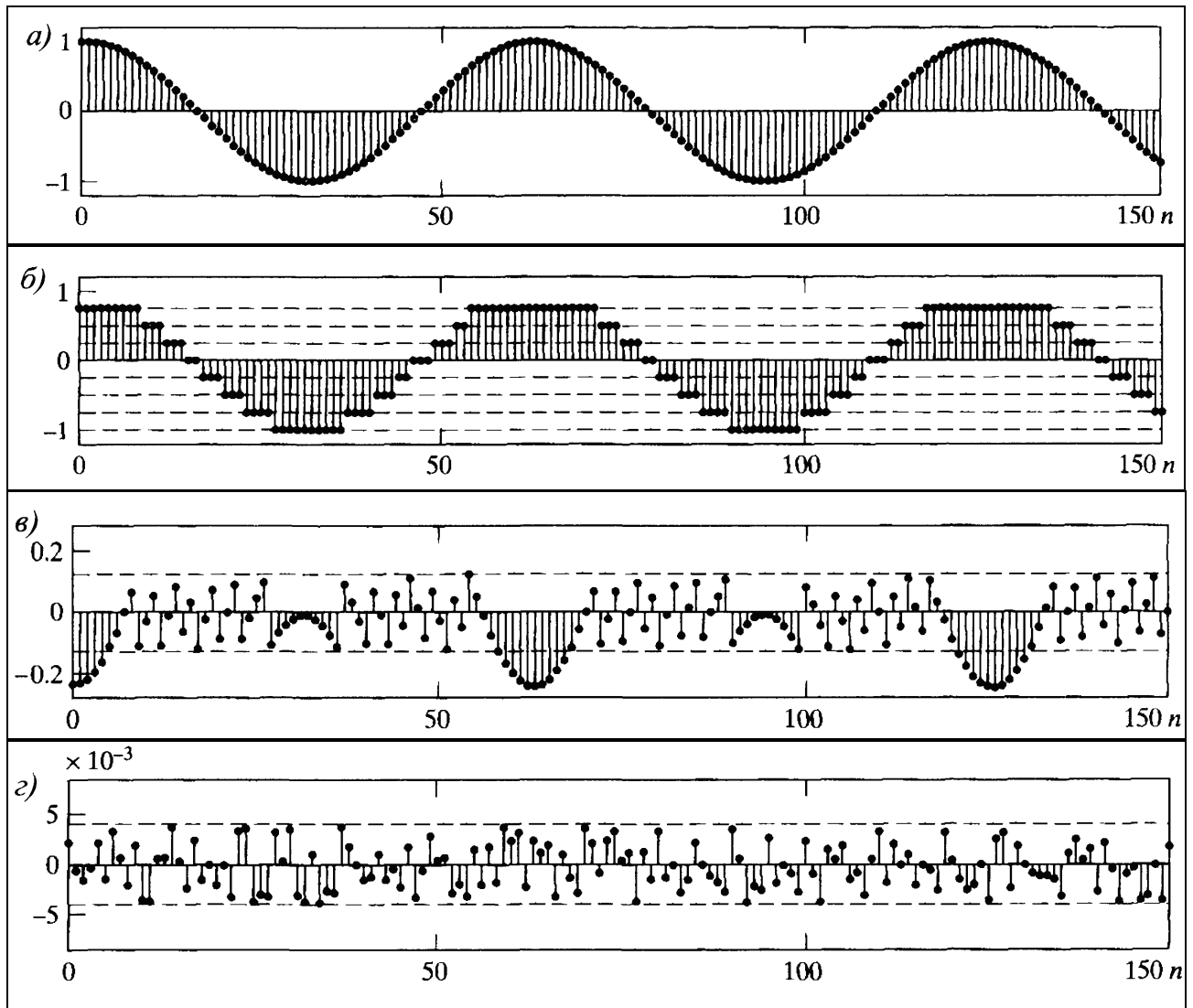
У більшості випадків, проте, помилка невідома, і у таких ситуаціях є корисною статистична модель. Статистичне представлення помилок квантування виходить з наступних припущень:

1. Послідовність помилок $e[n]$ є послідовністю відліків стаціонарного випадкового процесу.
2. Послідовність $e[n]$ не корелює з послідовністю $x[n]$.
3. Випадкові величини процесу помилок не корелюють між собою, тобто помилки - це випадковий процес, що описує білий шум.
4. Вірогідність помилок розподілена рівномірно на відрізок помилок квантування.

Приклад шуму квантування: а) неквантовані відліки сигналу

$$x[n] = 0.99 \times \cos\left(\frac{n}{10}\right); \quad \text{б) квантовані відліки сигналу } x[n], \text{ отримані за допомогою 3 - бітового квантовача; в) послідовність помилок квантування сигналу } x[n] \text{ 3 - бітовим квантевателем; г) послідовність помилок квантування сигналу } x[n] \text{ 8 - бітовим квантевателем}$$

ногою 3 – бітового квантовача; в) послідовність помилок квантування сигналу $x[n]$ 3 – бітовим квантевателем; г) послідовність помилок квантування сигналу $x[n]$ 8 – бітовим квантевателем



Оскільки сусідні відліки шуму не корелюють один з одним, а $e[n]$ – з $x[n]$ можна вважати, що $e[n]$ – рівномірно розподілена послідовність типу білого шуму. Середнє значення величини $e[n]$ дорівнює 0, а її дисперсія обчислюється за формулою:

$$\sigma_e^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta^2}{12}.$$

Для $(B+1)$ – бітового квантувача з повномасштабним рівнем X_m дисперсія шуму, або потужність, дорівнює

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B} X_m^2}{12}.$$

Звичайною мірою кількості деградації сигналу із-за аддитивного шуму служить відношення сигнал/шум (С/Ш), визначене як відношення дисперсії (потужності) сигналу до дисперсії шуму. Виражене в децибелах (дБ) відношення сигнал/шум для $(B+1)$ - бітового дискретизатора дорівнює

$$C/Ш = 10 \lg \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right) = 10 \lg \left(\frac{12 \cdot 2^{2B} \sigma_x^2}{X_m^2} \right) = 6,02B + 10,8 - 20 \lg \left(\frac{X_m}{\sigma_x} \right).$$

Звідси витікає, що при додаванні кожного біта до довжини слова, що означає рівні квантування, С/Ш збільшується приблизно на бдБ.

4.1.4. Перетворення цифрового сигналу в аналоговий

У термінах перетворення Фур'є відновлення відбувається по формулі:

$$X_r(j\Omega) = X(e^{j\omega})H_r(j\Omega),$$

де $X(e^{j\omega})$ - ДВПФ послідовності відліків, а $X_r(j\Omega)$ - Фур'є-образ відновленого неперервного сигналу. Ідеальний фільтр нижніх частот описується характеристичною функцією:

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T. \end{cases}$$

При такому виборі $H_r(j\Omega)$ співвідношення між відновленим сигналом $x_r(t)$ і послідовністю $x[n]$ має вигляд

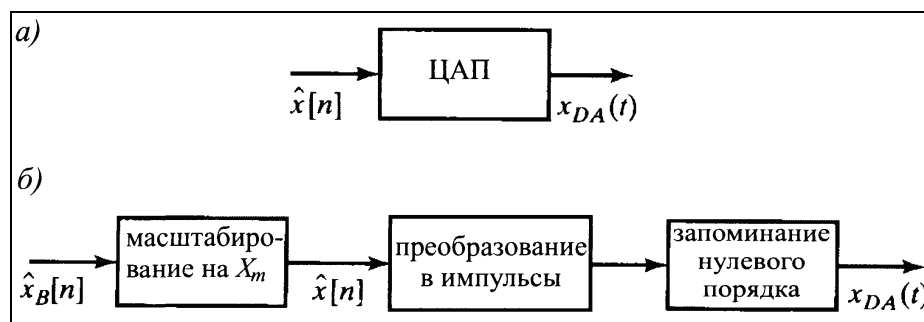
$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T}.$$

Система, що відновлює сигнал $x_r(t)$ по послідовності $x[n]$, називається ідеальним дискретно-безперервним перетворювачем (ДНП).

Фізичною реалізацією ДНП служить ідеальний цифро-аналоговий перетворювач (ЦАП), до якого приєднується апроксимований фільтр нижніх частот. ЦАП отримує на вході послідовність двійкових слів і видає безперервний сигнал виду

$$x_{ЦА}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_m \hat{x}_B[n] h_0(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] h_0(t - nT),$$

де $h_0(t)$ - імпульсна характеристика системи запам'ятовування нульового порядку.



ЦАП зберігає в пам'яті квантовані відліки одного кроку дискретизації, як це робить схема дискретизації і запам'ятовування з неквантованими вхідними відліками. Якщо для представлення ефектів квантування використати модель аддитивного шуму, маємо рівність:

$$x_{ЦА}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]h_0(t - nT).$$

Введемо функції

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT),$$

$$e_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]h_0(t - nT)$$

і перепишемо через них формулу:

$$x_{ЦА}(t) = x_0(t) + e_0(t).$$

Компонента $x_0(t)$ відноситься до вхідного сигналу $x_a(t)$, $x[n] = x_a(nT)$.

Шумовий сигнал $e_0(t)$ залежить від послідовності шумів квантування $e[n]$ так само, як $x_0(t)$ залежить від відліків неквантованого сигналу. Після перетворення Фур'є формула набуває вигляду:

$$X_0(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]H_0(j\Omega)e^{-j\Omega nT} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega T n} \right) H_0(j\Omega) = X(e^{j\Omega T})H_0(j\Omega).$$

Оскільки

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a \left(j \left(\Omega - \frac{2\pi k}{T} \right) \right),$$

то

$$X_0(j\Omega) = \left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a \left(j \left(\Omega - \frac{2\pi k}{T} \right) \right) \right] H_0(j\Omega).$$

Якщо частоти $X_a(j\Omega)$ обмежені значенням π/T , то зсунуті копії цього сигналу не накладаються один на одного. Тому реакцією компенсуючого поновлюючого фільтру з КЧХ

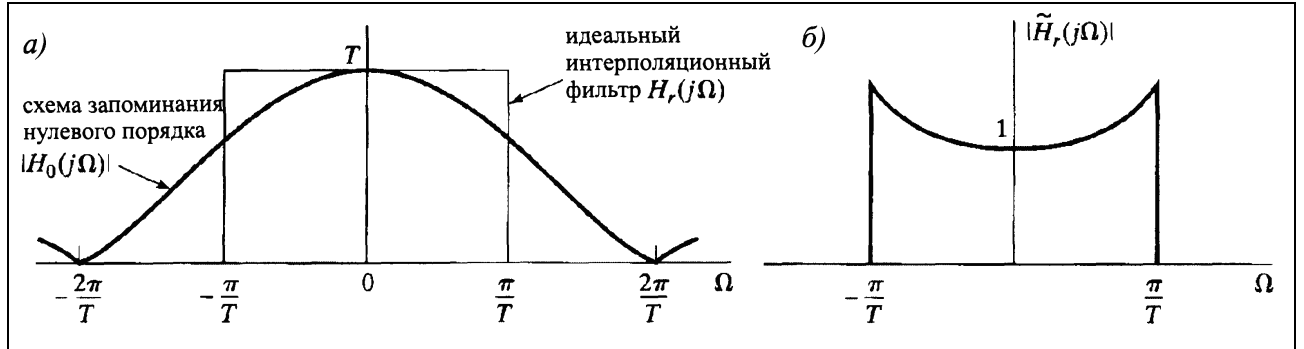
$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \frac{H_r(j\Omega)}{H_0(j\Omega)}$$

на сигнал $x_0(t)$ буде $x_0(t)$. Легко показати, що КЧХ фільтру запам'ятовування нульового порядку дорівнює

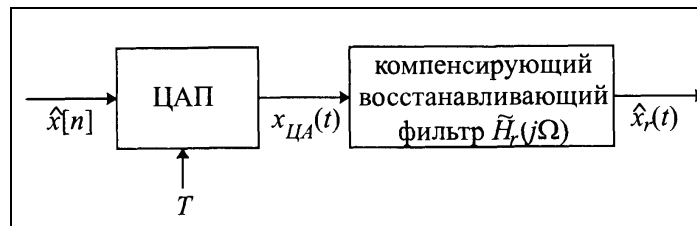
$$H_0(j\Omega) = \frac{2 \sin(\Omega T/2)}{\Omega} e^{-j\Omega T/2}.$$

Отже, КЧХ компенсуючого відновлюючого фільтру має вигляд:

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega T/2}{\sin(\Omega T/2)} e^{j\Omega T/2}, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| > \pi/T. \end{cases}$$



Розглянемо ЦАП, за яким йде ідеальний компенсуючий відновлюючий фільтр.



Вихідний сигнал такої системи буде рівний

$$\hat{x}_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T}$$

Інакше кажучи, вихідний сигнал можна записати як

$$\hat{x}_r(t) = x_a(t) + e_a(t),$$

Якщо дискретна система лінійна і стаціонарна, то вихідний сигнал усієї системи розкладається в суму:

$$\hat{y}_r(t) = y_a(t) + e_a(t),$$

де

$$Y_a(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega) H_0(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) H_{aa}(j\Omega) X_c(j\Omega).$$

Тут $H_{aa}(j\Omega)$, $H_0(j\Omega)$ і $\tilde{H}_r(j\Omega)$ – КЧХ фільтру захисту від накладення спектров, фільтру запам'ятовування нульового порядку в ЦАП і відновлюючого фільтру нижніх частот відповідно.

Функція $H(e^{j\Omega T})$ - це КЧХ дискретної системи. Аналогічно, припускаючи, що шум квантування, АЦП, що вноситься, є білим шумом з дисперсією $\sigma_e^2 = \Delta^2/12$, можна показати, що спектр потужності шуму на виході описується функцією

$$P_{e_a}(j\Omega) = \left| \tilde{H}_r(j\Omega) H_0(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) \right|^2 \sigma_e^2,$$

тобто вхідний шум квантування послідовно міняється в результаті дискретного і безперервного фільтрування. В припущеннях про незначне накладення спектрів ефективна КЧХ усієї системи, що реагує сигналом $y_r(t)$ на вхід $x_c(t)$, буде дорівнювати

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega) H_0(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) H_{aa}(j\Omega).$$

Якщо фільтр захисту від накладення спектрів ідеальний і компенсація поновлюючого фільтру теж ідеальна, то ефективна КЧХ описується формулою:

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \Omega_c, \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c. \end{cases}$$

Інакше розумну модель ефективної характеристики дає формула

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega) H_0(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) H_{aa}(j\Omega).$$

Ця формула підкаже, що компенсація недоліків, що з'являються на будь-якій з чотирьох стадій, в принципі може бути включена у будь-який з членів, наприклад дискретна система може містити відповідну компенсацію для фільтру захисту від накладення спектрів або системи запам'ятовування нульового порядку, або відновлюючого фільтру, або для усіх відразу. На додаток до фільтрування, що описується останньою формулою, співвідношення нагадує про те, що вихідний сигнал буде засмічений відфільтрованим шумом квантування.

Лекція №6

4.2. Перетворення цифрового сигналу в аналоговий

У термінах перетворення Фур'є відновлення відбувається по формулі:

$$X_r(j\Omega) = X(e^{j\omega})H_r(j\Omega),$$

де $X(e^{j\omega})$ - ДВПФ послідовності відліків, а $X_r(j\Omega)$ - Фур'є-образ відновленого неперервного сигналу. Ідеальний фільтр нижніх частот описується характеристичною функцією:

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T. \end{cases}$$

При такому виборі $H_r(j\Omega)$ співвідношення між відновленим сигналом $x_r(t)$ і послідовністю $x[n]$ має вигляд

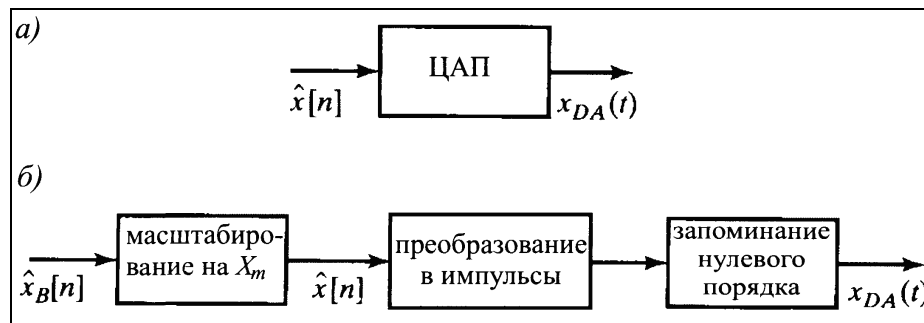
$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T}.$$

Система, що відновлює сигнал $x_r(t)$ по послідовності $x[n]$, називається ідеальним дискретно-безперервним перетворювачем (ДНП).

Фізичною реалізацією ДНП служить ідеальний цифро-аналоговий перетворювач (ЦАП), до якого приєднується апроксимований фільтр нижніх частот. ЦАП отримує на вході послідовність двійкових слів і видає безперервний сигнал виду

$$x_{\text{ЦА}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_m \hat{x}_B[n] h_0(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] h_0(t - nT),$$

де $h_0(t)$ - імпульсна характеристика системи запам'ятовування нульового порядку.



ЦАП зберігає в пам'яті квантовані відліки одного кроку дискретизації, як це робить схема дискретизації і запам'ятовування з неквантованими вхідними відлі-

ками. Якщо для представлення ефектів квантування використати модель аддитивного шуму, маємо рівність:

$$x_{\text{ЦА}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]h_0(t - nT).$$

Введемо функції

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT),$$

$$e_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]h_0(t - nT)$$

і перепишемо через них формулу:

$$x_{\text{ЦА}}(t) = x_0(t) + e_0(t).$$

Компонента $x_0(t)$ відноситься до вхідного сигналу $x_a(t)$, $x[n] = x_a(nT)$.

Шумовий сигнал $e_0(t)$ залежить від послідовності шумів квантування $e[n]$ так само, як $x_0(t)$ залежить від відліків неквантованого сигналу. Після перетворення Фур'є формула набуває вигляду:

$$X_0(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]H_0(j\Omega)e^{-j\Omega nT} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega T n} \right) H_0(j\Omega) = X(e^{j\Omega T})H_0(j\Omega).$$

Оскільки

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a \left(j \left(\Omega - \frac{2\pi k}{T} \right) \right),$$

то

$$X_0(j\Omega) = \left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a \left(j \left(\Omega - \frac{2\pi k}{T} \right) \right) \right] H_0(j\Omega).$$

Якщо частоти $X_a(j\Omega)$ обмежені значенням π/T т, то зсунуті копії цього сигналу не накладаються один на одного. Тому реакцією компенсуючого поновлюючого фільтру з КЧХ

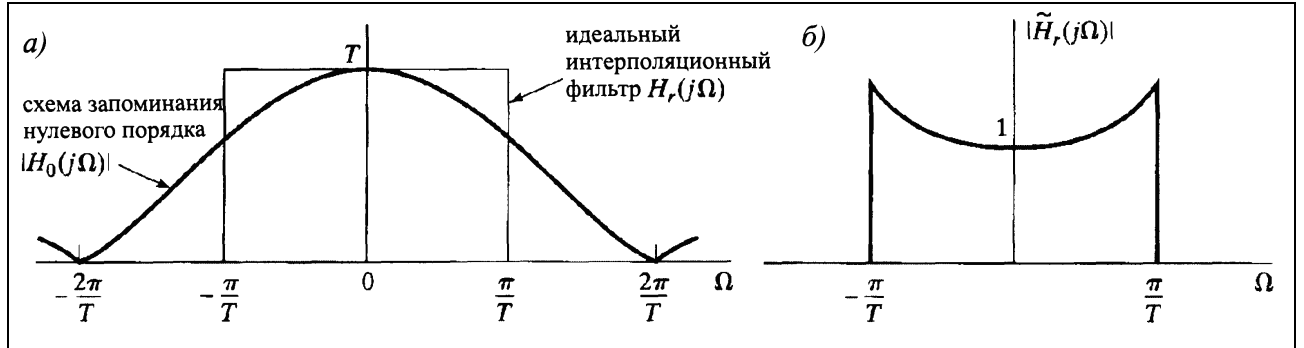
$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \frac{H_r(j\Omega)}{H_0(j\Omega)}$$

на сигнал $x_0(t)$ буде $x_0(t)$. Легко показати, що КЧХ фільтру запам'ятовування нульового порядку дорівнює

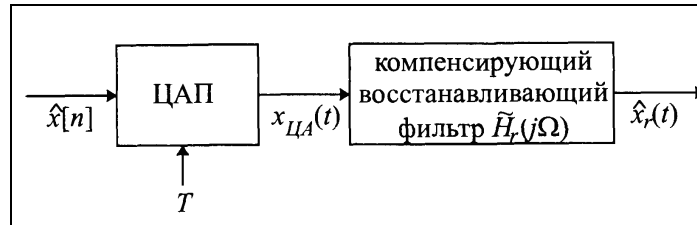
$$H_0(j\Omega) = \frac{2 \sin(\Omega T/2)}{\Omega} e^{-j\Omega T/2}.$$

Отже, КЧХ компенсуючого відновлюючого фільтру має вигляд:

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega T/2}{\sin(\Omega T/2)} e^{j\Omega T/2}, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| > \pi/T. \end{cases}$$



Розглянемо ЦАП, за яким йде ідеальний компенсуючий відновлюючий фільтр.



Вихідний сигнал такої системи буде рівний

$$\hat{x}_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T}$$

Інакше кажучи, вихідний сигнал можна записати як

$$\hat{x}_r(t) = x_a(t) + e_a(t),$$

Якщо дискретна система лінійна і стаціонарна, то вихідний сигнал усієї системи розкладається в суму:

$$\hat{y}_r(t) = y_a(t) + e_a(t),$$

де

$$Y_a(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega) H_0(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) H_{aa}(j\Omega) X_c(j\Omega).$$

Тут $H_{aa}(j\Omega)$, $H_0(j\Omega)$ і $\tilde{H}_r(j\Omega)$ – КЧХ фільтру захисту від накладення спектров, фільтру запам'ятовування нульового порядку в ЦАП і відновлюючого фільтру нижніх частот відповідно. Функція $H(e^{j\Omega T})$ – це КЧХ дискретної системи. Аналогічно, припускаючи, що шум квантування, АЦП, що вноситься, є

білим шумом з дисперсією $\sigma_e^2 = \Delta^2/12$, можна показати, що спектр потужності шуму на виході описується функцією

$$P_{e_a}(j\Omega) = \left| \tilde{H}_r(j\Omega) H_0(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) \right|^2 \sigma_e^2,$$

тобто вхідний шум квантування послідовно міняється в результаті дискретного і безперервного фільтрування. В припущеннях про незначне накладення спектрів ефективна КЧХ усій системи, що реагує сигналом $y_r(t)$ на вхід $x_c(t)$, буде дорівнювати

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega) H_0(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) H_{aa}(j\Omega).$$

Якщо фільтр захисту від накладення спектрів ідеальний і компенсація поновлюючого фільтру теж ідеальна, то ефективна КЧХ описується формулою:

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \Omega_c, \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c. \end{cases}$$

Інакше розумну модель ефективної характеристики дає формула

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega) H_0(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) H_{aa}(j\Omega).$$

Ця формула підкаже, що компенсація недоліків, що з'являються на будь-якій з чотирьох стадій, в принципі може бути включена у будь-який з членів, наприклад дискретна система може містити відповідну компенсацію для фільтру захисту від накладення спектрів або системи запам'ятовування нульового порядку, або відновлюючого фільтру, або для усіх відразу. На додаток до фільтрування, що описується останньою формулою, співвідношення нагадує про те, що вихідний сигнал буде засмічений відфільтрованим шумом квантування.

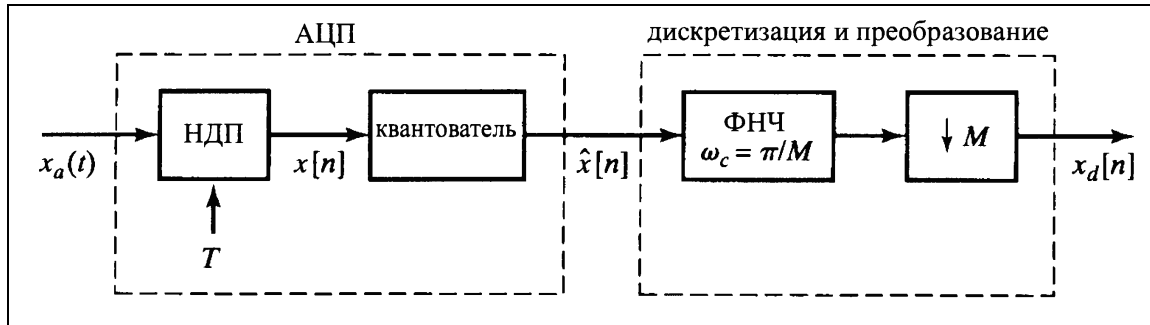
4.3. Передискретизація і формування шумів в АЦП і ЦАП

У випадку аналогово-цифрового перетворення передискретизація дає можливість реалізувати фільтр захисту від накладення спектрів з крутим зрізом через включення в систему цифрового фільтрування і проріджування. Передискретизація, дискретне фільтрування і знижуюча дискретизація теж дозволяють збільшити розмір кроку Δ в квантувателі або, що теж саме, зменшити число бітів, потрібних в АЦП.

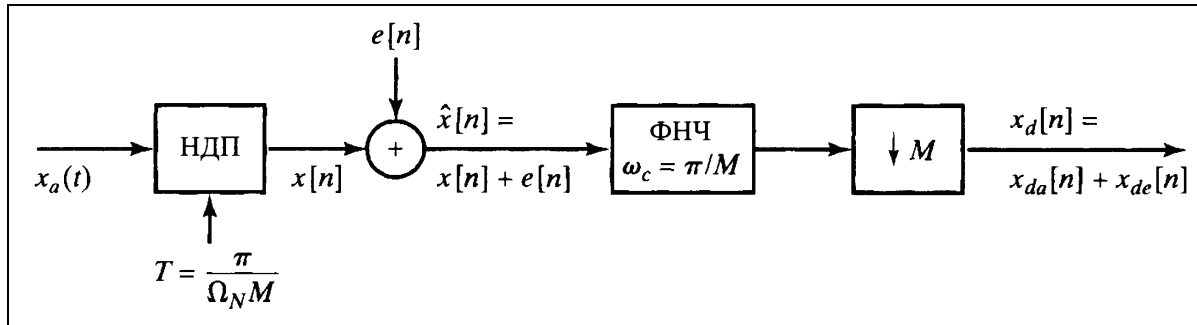
4.3.1. Передискретизований АЦП з простим квантуванням

Щоб досліджувати зв'язок передискретизації з величиною кроку квантування, розглянемо стаціонарний в широкому сенсі випадковий процес $x_a(t)$ з нульовим середнім значенням. Його спектральну щільність потужності позначимо символом $\Phi_{x_a x_a}(j\Omega)$, а автокореляційну функцію - $\varphi_{x_a x_a}(\tau)$ - Для простоти міркувань припускати, що сигнал $x_a(t)$ завжди вузькосмуговий, а саме

$\Phi_{x_a x_a}(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq \Omega_N$. Крім того, вважаємо, що $\frac{2\pi}{T} = 2M\Omega_N$. Константа M (ціле число) називається коефіцієнтом передискретизації.



Спираючись на модель аддитивного шуму, можна замінити наведену систему системою:



За проріджувальний фільтр взято ідеальний фільтр нижніх частот з одиничним коефіцієнтом посилення і частотою відсічення $\omega_c = \frac{\pi}{M}$. Зважаючи на лінійності усієї наступної системи її вихідний сигнал $x_d[n]$ складається з двох компонент. Одна з них - реакція на поданий сигнал $x_a(t)$, а інша - на

шум $e[n]$. Позначимо ці компоненти відповідно через $x_{da}[n]$ і $x_{de}[n]$. Наша мета - визначити відношення потужності сигналу $\varepsilon \{x_{da}^2[n]\}$ до потужності шуму квантування $\varepsilon \{x_{de}^2[n]\}$ у вихідному сигналі $x_d[n]$ як функцію від величини кроку квантування Δ і коефіцієнта передискретизації M . Оскільки система лінійна, а шум, по припущенню, не залежить від сигналу, що подається на вхід, потужності компонент можна обчислювати окремо один від одного. Нехай $\varphi_{xx}[m]$ та $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ автокореляційна функція і спектральна щільність потужності сигналу $x[n]$.

Тоді, за визначенням, $\varphi_{xx}[m] = \varepsilon \{x[n+m]x[n]\}$ і, оскільки, $x[n] = x_a(nT)$

і $x[n+m] = x_a(nT + mT)$, то $\varepsilon \{x[n+m]x[n]\} = \varepsilon \{x_a((n+m)T)x_a(nT)\}$

Отже, $\varphi_{xx}[m] = \varphi_{x_a x_a}(mT)$

Тобто автокореляційна функція послідовності відліків - це дискретизована версія автокореляційної функції відповідного безперервного сигналу. Зокрема, отримані формули разом з припущенням про стаціонарності в широкому сенсі дають підставу стверджувати, що $\mathcal{E}\{x_a^2(t)\}$ - константа, що не залежить від t .

Отже,

$$\mathcal{E}\{x^2[n]\} = \mathcal{E}\{x_a^2(nT)\} = \mathcal{E}\{x_a^2(T)\}, \quad \forall n \text{ и } t.$$

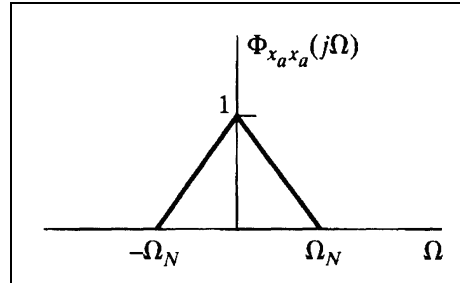
Оскільки спектральна щільність потужності - Фур'є-образ автокореляційної функції, то як наслідок рівності $\varphi_{xx}[m] = \varphi_{x_a x_a}(mT)$ отримуємо

$$\Phi_{xx}(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_{x_a x_a} \left(j \left(\Omega - \frac{2\pi k}{T} \right) \right).$$

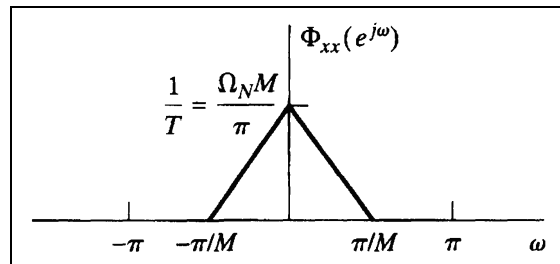
Припускаючи, що вхідний сигнал обмежений по частоті умовою, а коефіцієнт передискретизації M задовольняє співвідношенню $2\pi/T = 2M\Omega_N$, те, підставляючи $\Omega = \omega/T$ у формулу, отримуємо

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{T} \Phi_{x_a x_a} \left(j \frac{\omega}{T} \right), & |\omega| < \pi/M, \\ 0, & \pi/M < \omega \leq \pi. \end{cases}$$

Наприклад, якщо $\Phi_{x_a x_a}(j\Omega)$ має вигляд:



і виконана рівність $2\pi/T = 2M\Omega_N$, то $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ буде такою



Сумарна потужність початкового аналогового сигналу описується рівністю

$$\mathcal{E}\{x_a^2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_N}^{\Omega_N} \Phi_{x_a x_a}(j\Omega) d\Omega.$$

Таким чином сумарна потужність дискретизованого сигналу дорівнює

$$\mathcal{E}\{x^2[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \frac{1}{T} \Phi_{x_a x_a} \left(j \frac{\omega}{T} \right) d\omega$$

Враховуючи той факт, що $\Omega_N T = \pi/M$, і роблячи підстановку $\Omega = \omega/T$, отримуємо

$$\mathcal{E}\{x^2[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_N}^{\Omega_N} \Phi_{x_a x_a}(j\Omega) d\Omega = \mathcal{E}\{x_a^2(t)\}.$$

Отже, сумарні потужності дискретизованого і початкового аналогового сигналів в точності співпадають. Оскільки проріджувальний фільтр - це ідеальний фільтр нижніх частот з частотою відсічення $\omega_c = \pi/M$, сигнал $x[n]$ проходить через фільтр незмінним. Отже, компонента сигналу $x_{da}[n] = x[nM] = x_a(nMT)$ має ту ж сумарну потужність. Це можна побачити з спектру потужності, помітивши, що оскільки $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ обмежена по частоті умовою $|\omega| < \frac{\pi}{T}$, то

$$\Phi_{x_{da} x_{da}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \Phi_{xx}(e^{j(\omega - 2\pi k)/M}) = \frac{1}{M} \Phi_{xx}(e^{j\omega/M}), \quad |\omega| < \pi.$$

Таким чином приходимо до рівності

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{x_{da}^2[n]\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{x_{da} x_{da}}(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{M} \Phi_{xx}(e^{j\omega/M}) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega = \mathcal{E}\{x^2[n]\}, \end{aligned}$$

Потужність залишається незмінною тому, що масштабування осі частот, що виникає при дискретизації, урівноважується зворотним масштабуванням осі амплітуд, так що площа під графіком спектру потужності не міняється при переході від $\Phi_{x_a x_a}(j\Omega)$ до $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ і далі до $\Phi_{x_{da} x_{da}}(e^{j\omega})$

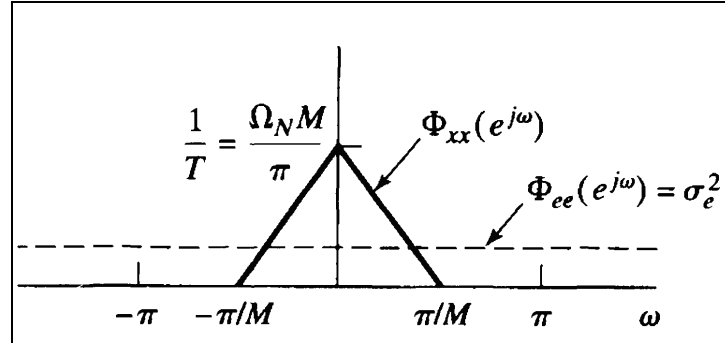
Тепер звернемося до шумової компоненти, генерованої квантователем. Згідно моделі припускаємо, що $e[n]$ - стаціонарний в широкому сенсі процес білого шуму з нульовим середнім значенням і дисперсією 1. Значить, автокореляційна функція і спектральна щільність потужності сигналу $e[n]$ рівні, відповідно,

$$\varphi_{ee}[m] = \sigma_e^2 \delta[m]$$

Та

$$\Phi_{ee}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2, \quad |\omega| < \pi.$$

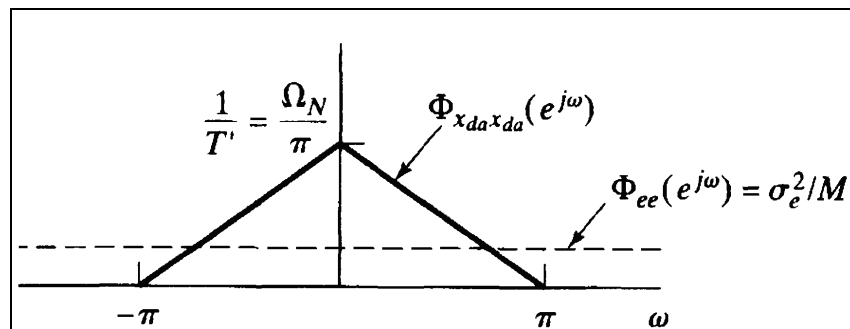
Спектральна щільність потужності сигналів $e[n]$ і $x[n]$ має вигляд



Спектральна щільність потужності квантованого сигналу $x[n]$ являється їх сумою, оскільки відліки сигналу і шуму квантування в нашій моделі вважаються незалежними. Хоча ми довели незалежність мощності сигналів $x[n]$ і $x[n]$ від M , замовітим, що при зростанні коефіцієнта передискретизації M зменшується накладення спектрів і шум, що являється ефектом передискретизації, позволяющим поліпшити відношення С/Ш, зменшуючи частоту дискретизації. Більше точно, ідеальний фільтр нижніх частот звільняє від шуму смугу $\frac{\pi}{M} < |\omega| \leq \pi$, не зачіпаючи сигнальну компоненту. Потужність шуму на виході ідеального фільтру нижніх частот складає

$$\mathcal{E}\{e^2[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \sigma_e^2 d\omega = \frac{\sigma_e^2}{M}.$$

Далі, сигнал після фільтрування піддається знижуючій дискретизації і потужність сигналу на виході цієї процедури залишається незмінною. Результируюча спектральна щільність потужності обох компонент $x_{da}[n]$ і $x_{de}[n]$ – має вигляд



Площа під графіком спектральної щільності потужності сигналу не міняється, оскільки масштабування частотної і амплітудної осей компенсують один одного. З іншого боку, потужність шуму на виході прореживателя співпадає з потужністю шуму на виході фільтру нижніх частот, тобто

$$\mathcal{E}\{x_{de}^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma_e^2}{M} d\omega = \frac{\sigma_e^2}{M} = \frac{\Delta^2}{12M}.$$

Таким чином, потужність шуму квантування $\mathcal{E}\{x_{de}^2[n]\}$ зменшується в M разів за рахунок фільтрування і знижуючої дискретизації, тоді як потужність сигналу залишається незмінною. При цій потужності шуму квантування існує явна залежність між коефіцієнтом M і величиною кроку квантування Δ . Рівність

$\Delta = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B}$ стверджує, що для квантователя з $B + 1$ бітами і максимумами

рівня вхідного сигналу, розташованими між $\pm X_m$, величина кроку дорівнює

$$\Delta = \frac{X_m}{2^B}, \text{ і, отже,}$$

$$\mathcal{E}\{x_{de}^2[n]\} = \frac{1}{12M} \left(\frac{X_m}{2^B} \right)^2.$$

Остання формула, зокрема, говорить про можливість зменшення потужності шуму за рахунок збільшення коефіцієнта передискретизації M . Оскільки потужність сигналу не залежить від M , збільшення цього коефіцієнта спричинить за собою збільшення відношення С/Ш. Як альтернативу при фіксованій потужності шуму квантування $P_{de} = \mathcal{E}\{x_{de}^2[n]\}$ необхідна кількість бітів визначається по формулі:

$$B = -\frac{1}{2} \log_2 M - \frac{1}{2} \log_2 12 - \frac{1}{2} \log_2 P_{de} + \log_2 X_m.$$

Таким чином, подвоєння коефіцієнта передискретизації M призводить до ач-номії 1/2 біта при збереженні цього відношення С/Ш, або, кажучи інакше, якщо ми проведемо передискретизацію з коефіцієнтом $M + 4$, для отримання бажаної точності при представленні сигналу нам буде потрібно на один біт менше.

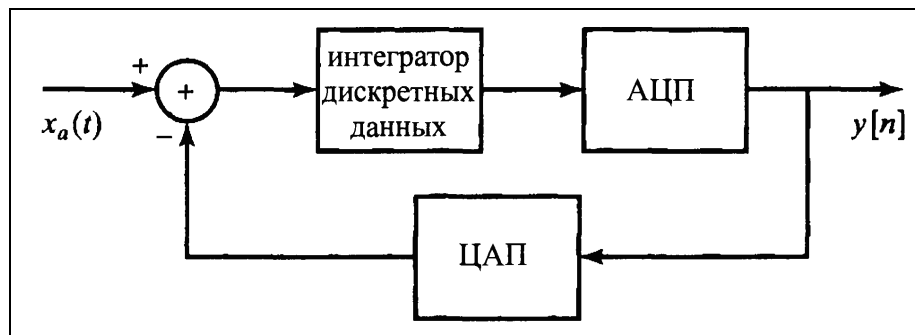
Лекція №7

4.3.2. Передискретизований АЦП з формуванням шумів

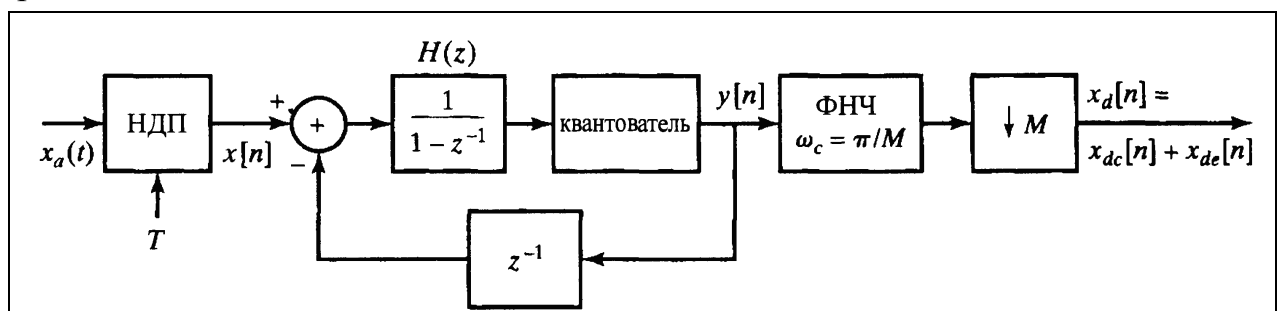
У попередньому підрозділі ми продемонстрували, як передискретизація і про-ріджування можуть поліпшити відношення С/Ш, що справляє враження чудо-вого результату. Дійсно, ми можемо в принципі використовувати досить грубе ква-нтування при початковій дискретизації сигналу, але отримувати при цьому до-сить точне представлення початкових відліків, проводячи дії над спотвореними шумом величинами, якщо коефіцієнт передискретизації досить високий. Про-блема, з якою ми на даний момент зіткнулися, полягає в тому, що для істотного скорочення числа необхідних бітів треба вибрати дуже великий коефіцієнт пе-

редискретизації. Наприклад, для зменшення числа бітів з 16 до 12 знадобиться коефіцієнт $M = 4^4 = 256$, що здається досить дорогим. Проте основний принцип передискретизації дозволяє отримати велику вигоду, якщо комбінувати попередній прийом з концепцією формування спектру шуму зворотним зв'язком. При прямому квантуванні спектральна щільність шуму залишається постійною упродовж усієї смуги частот. Ключова ідея формування шумів полягає в такій модифікації процедури АЦП, при якій спектральна щільність потужності шуму квантування була б не однорідною, а формувалася так, щоб велика її частина була зосереджена поза смугою $|\omega| < \frac{\pi}{M}$. На цьому шляху послідовне ви-

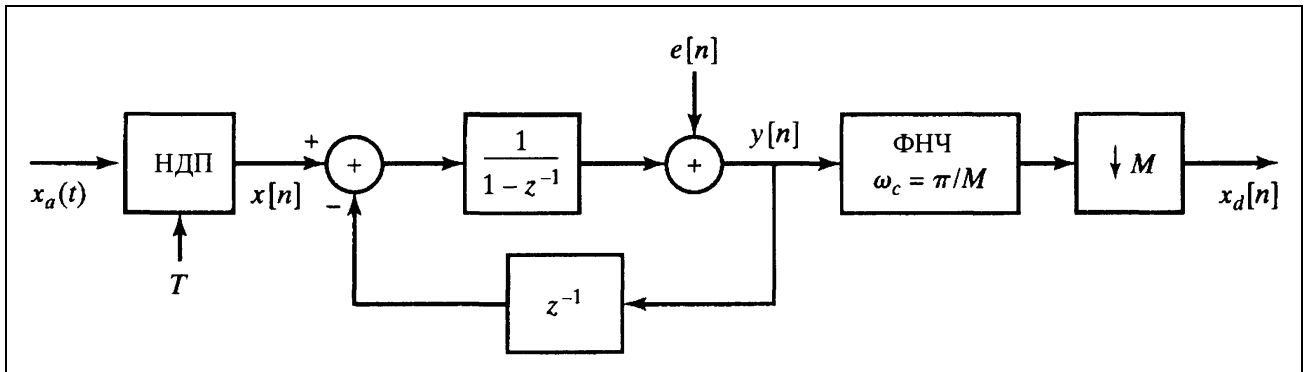
користання фільтрування і знижуючої дискретизації прибирає велику частину потужності шуму квантування. Квантувальць з формуванням шумів, що зазвичай називається дискретним передаточним дельта-сигма модулятором. Блок-схема реалізації системи інтегральними схемами має вигляд.



Інтегратор на малюнку - це дискретний інтегратор на перемикальних конденсаторах. АЦП можна реалізувати багатьма способами, але, як правило, в якості його беруть 1-бітовий квантувальць або компаратор. ЦАП перетворить цифровий вихідний сигнал назад в аналоговий імпульс, який віднімається по сигналу, що подається на вхід інтегратора. Цю систему можна замінити еквівалентною дискретною системою:



Інтегратор на конденсаторах, що перемикаються представлений там акумуляторною системою затримка при зворотному зв'язку зображує затримку в ЦАП. Врахуємо помилки квантування, ввівши джерело аддитивного шуму, і замінимо наведену систему лінійною моделлю.



Вихідний сигнал $y[n]$ у цій системі розкладається в суму двох компонент : $y_x[n]$, соотвествующую вхідному сигналу $x[n]$, і $\hat{e}[n]$, що відповідає шуму $e[n]$. Символом $H_x(z)$ позначимо передатну функцію від $x[n]$ до $y[n]$, а символом $H_e(z)$ - від $e[n]$ до $y[n]$. Передаточні функції обчислюються стандартним методом і дорівнюють

$$H_x(z) = 1,$$

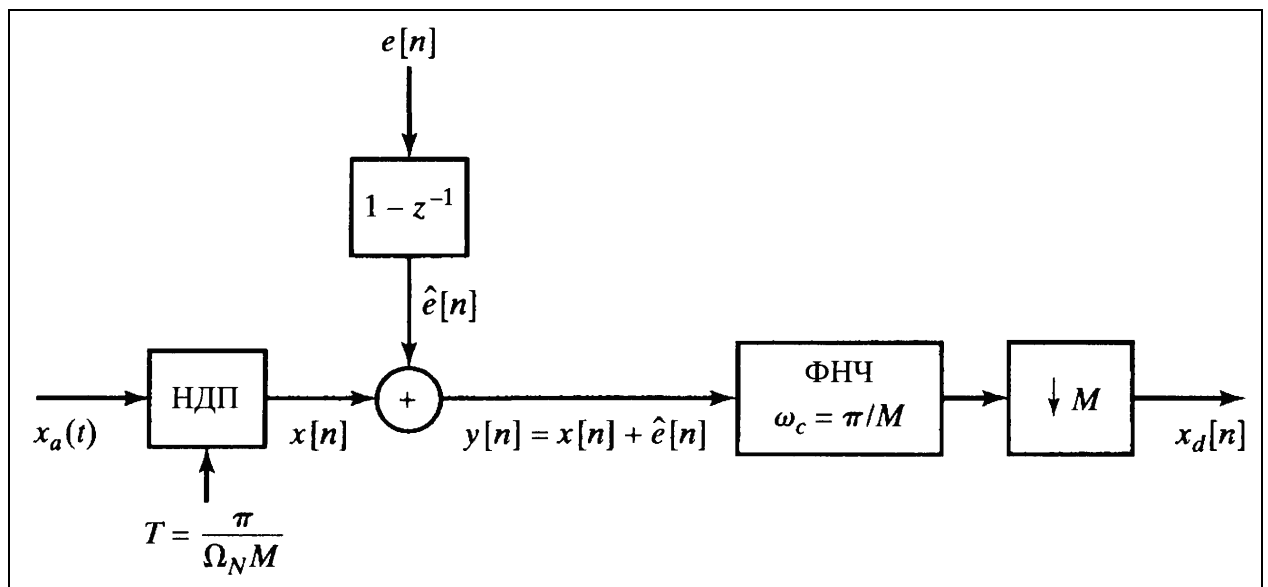
$$H_e(z) = 1 - z^{-1}.$$

Отже,

$$y_x[n] = x[n],$$

$$\hat{e}[n] = e[n] - e[n-1].$$

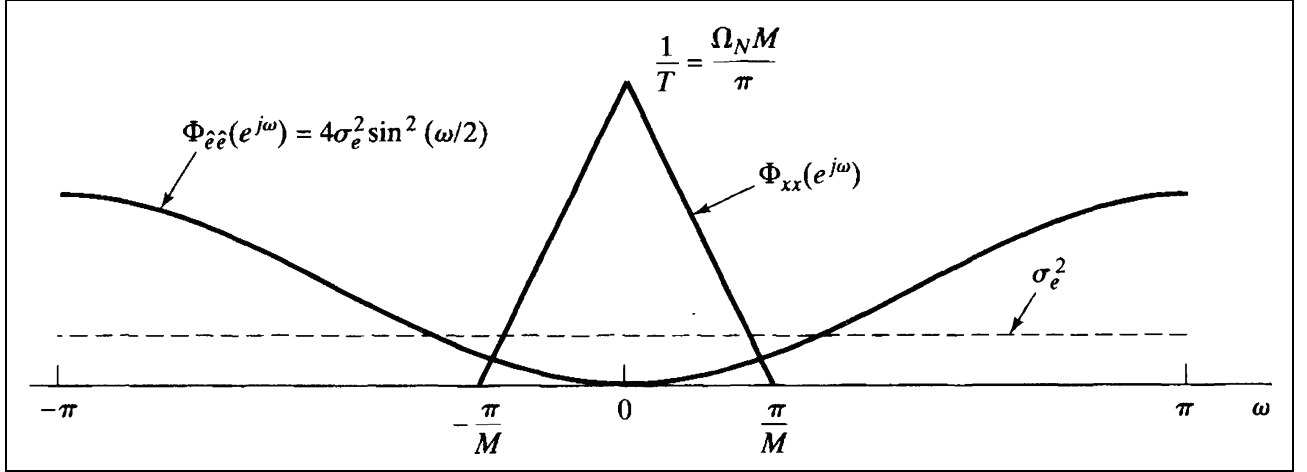
Вихідний сигнал $y[n]$ можна еквівалентно представити як $y[n] = x[n] + \hat{e}[n]$, де $x[n]$ з'являється на виході незмінним, а шум квантування піддається дії різницевого оператора $H_e(z)$. Цей процес показаний блоксхемою.



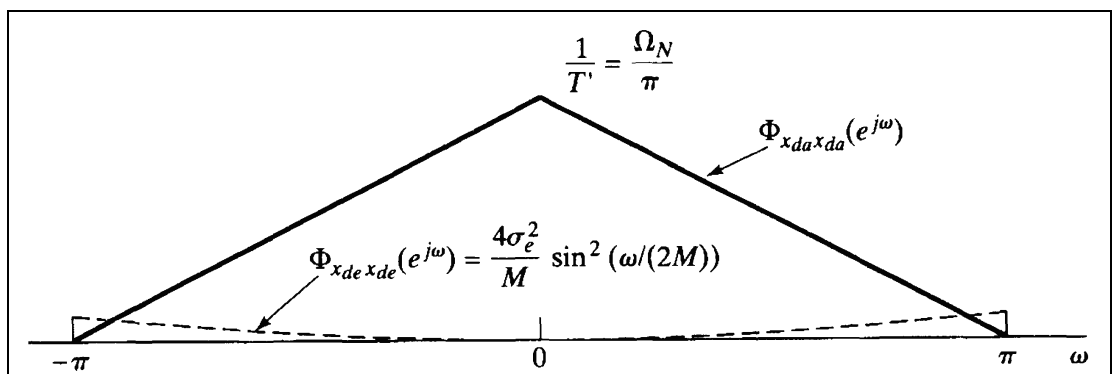
Із урахуванням спектральної щільності потужності шуму $e[n]$, спектральна щільність потужності шуму квантування $\hat{e}[n]$, присутнього в $y[n]$, дорівнює

$$\Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 |H_e(e^{j\omega})|^2 = \sigma_e^2 [2 \sin \frac{\omega}{2}]^2.$$

На малюнку нижче наведено спектральну щільність потужності $\hat{e}[n]$, спектр потужності $e[n]$ і спектр потужності корисного сигналу.



Цікаво відмітити, що сумарна потужність шуму зростає від $\mathcal{E}\{e^2[n]\} = \sigma_e^2$ у квантувателі до $\mathcal{E}\{\hat{e}^2[n]\} = \sigma_e^2$ на виході системи, що формує шум. При передискретизації з формуванням шумів, шум квантування формується таким чином, що всередину смуги $|\omega| < \pi/M$ потрапляє менша частина його потужності, ніж у разі прямого квантування з передискретизацією, де спектр шуму є плоским. На малюнку нижче показана спектральна щільність потужності $\Phi_{x_{da}x_{da}}(e^{j\omega})$, накладена на спектральну щільність потужності $\Phi_{x_{de}x_{de}}(e^{j\omega})$.



Оскільки понижуючий дискретизатор не зачіпає потужність сигналу, в $x_{da}[n]$ вона буде дорівнювати

$$P_{da} = \mathcal{E}\{x_{da}^2[n]\} = \mathcal{E}\{x^2[n]\} = \mathcal{E}\{x_a^2(t)\}.$$

В результаті, потужність шуму квантування обчислюється як

$$P_{de} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{x_{de}x_{de}}(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta^2}{12M} \int_{-\pi}^{\pi} \left(2 \sin \left(\frac{\omega}{2M} \right) \right)^2 d\omega.$$

Для наближеного порівняння отриманих фактів з результатами передискретизації АЦП припустимо, що коефіцієнт M досить великий, так що $\sin\left(\frac{\omega}{2M}\right) \approx \frac{\omega}{2M}$

З таким припущенням маємо оцінку $P_{de} \approx \frac{1}{36} \frac{\Delta^2 \pi^2}{M^3}$

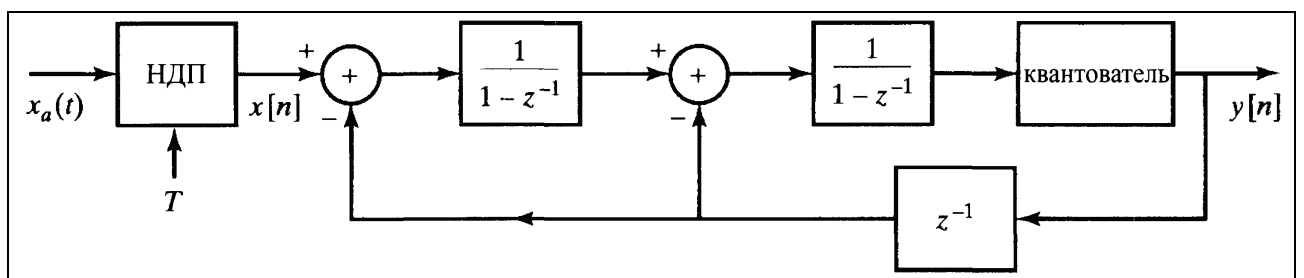
В отриманій формулі теж простежується взаємозв'язок між коефіцієнтом M і величиною кроку квантування Δ . При $(B+1)$ – бітовому квантуванні і максимальних рівнях сигналу, розташованих між $\pm X_m$, величина кроку дорівнює $\Delta = \frac{X_m}{2^B}$. Отже, для досягнення цієї потужності шуму квантування слід вибрати число

$$B = -\frac{3}{2} \log_2 M + \log_2 \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \log_2 P_{de} + \log_2 X_m.$$

У таблиці нижче наведені порівняльні економії бітів квантователя : при прямому квантуванні без передискретизації ($M=1$), при прямому квантуванні з передискретизацією, і при передискретизації з формуванням шумів першого порядку

M	Прямое квантование	Формирование шумов
4	1	2, 2
8	1, 5	3, 7
16	2	5, 1
32	2, 5	6, 6
64	3	8, 1

Таким чином при прямому квантуванні подвоєння коефіцієнта M веде до економії 0.5 біта, а метод формування шуму дає економію в 1,5 біта. Стратегію формування шумів можна продовжити, підключивши другу стадію акумуляції:



Можна довести, що і в цьому випадку з квантувателем у вигляді моделі джерела аддитивного білого шуму вихідний сигнал теж розкладається на дві компоненти:

$$y[n] = x[n] + \hat{e}[n].$$

Тут $\hat{e}[n]$ – результат обробки шуму квантування $e[n]$ передаточною функцією $H_e(z) = (1 - z^{-1})^2$. Відповідна спектральна щільність потужності шуму квантування, присутнього в сигналі $y[n]$, дорівнює $\Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 (2 \sin(\omega/2))^4$

Так що у результаті, хоча сумарна потужність шуму на виході системи формування шумів другого порядку більше, ніж у разі такої ж системи першого порядку, на смугу сигналу доводиться ще менша її частина. У загальній ситуації можна використати p стадій акумуляції і зворотного зв'язку. При цьому

$$\Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 (2 \sin(\omega/2))^{2p}$$

У таблиці нижче зведена інформація про економію бітів квантувача у вигляді функції від порядку p формування шумів і коефіцієнта M . Помітимо, що при $p=2$ і $M=64$ має місце збільшення точності майже на 13 бітів в припущенні, що 1-бітовий квантовач забезпечує 14-бітову точність на виході проріджувача.

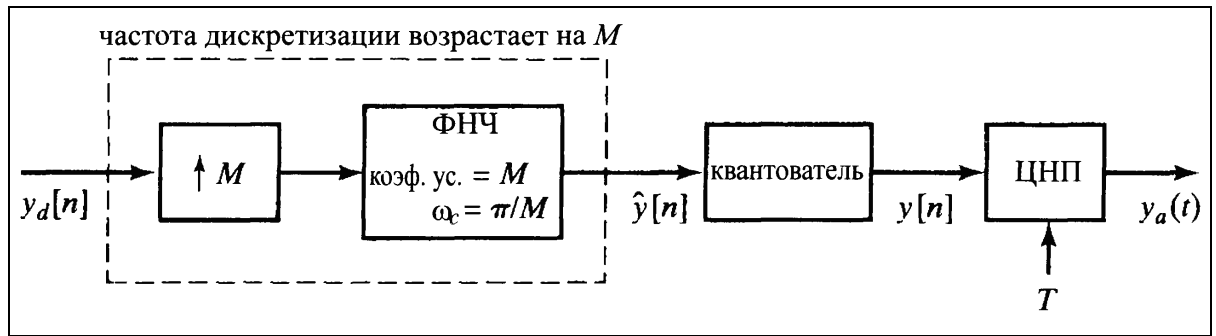
Порядок квантовача p	Коефіцієнт передискретизації M				
	4	8	16	32	64
0	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
1	2,2	3,7	5,1	6,6	8,1
2	2,9	5,4	7,9	10,4	12,9
3	3,5	7,0	10,5	14,0	17,5
4	4,1	8,5	13,0	17,5	22,0
5	4,6	10,0	15,5	21,0	26,5

Хоча цифрові петлі зворотного зв'язку обіцяють значне зменшення шумового фону, але і з ними виникають проблеми. При великому значенні порядку p збільшується можливість нестійкості і коливань.

4.3.3. Передискретизація і формування шумів в ЦАП

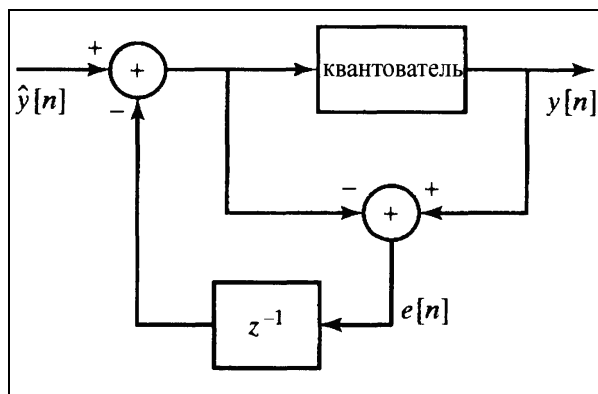
Для спрощення фільтрування хибних частот і збільшення точності сигнал спочатку піддається процедурі передискретизації, але кінцевий вихід $x_d[n]$ АЦП дискретизується з частотою Найквіста, обчисленою за сигналам $x_a(t)$. Звичайно, при цифровій обробці або навіть простому представленні аналогового сигналу в цифровій формі, як, наприклад, в системі електронного звукозапису, ба-

жана мінімальна частота дискретизації. Природно застосувати той же принцип до зворотної операції - ЦАП.

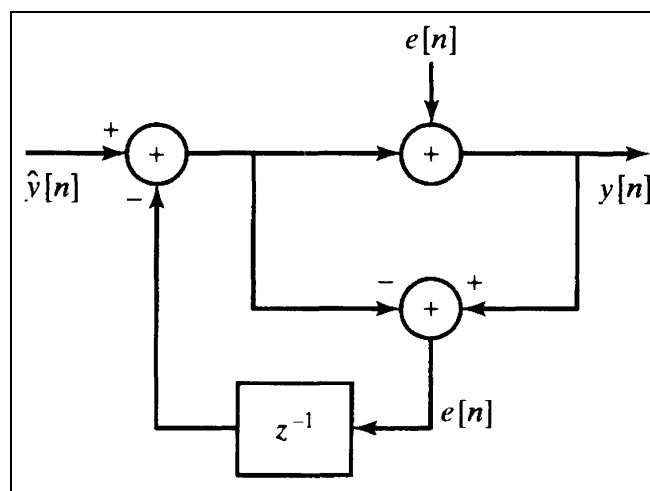


Послідовність $y_d[n]$, яку належить перетворити в неперервний сигнал, спочатку піддається процедурі підвищуючої дискретизації, в результаті чого виходить послідовність $\hat{y}[n]$. Потім $\hat{y}[n]$ переквантовують і передають на вхід ЦАП, який отримує двійкові відліки з числом знаків, утворених в процесі переквантування. Якщо є упевненість, що шум квантування не зачіпає смугу сигналу, можна використати простий ЦАП з декількома бітами. У цій ситуації від шумового фону можна позбавитися нескладним аналоговим фільтруванням.

Структура квантователя, що формує шум квантування так само, як в системі формування шумів першого порядку має вигляд:

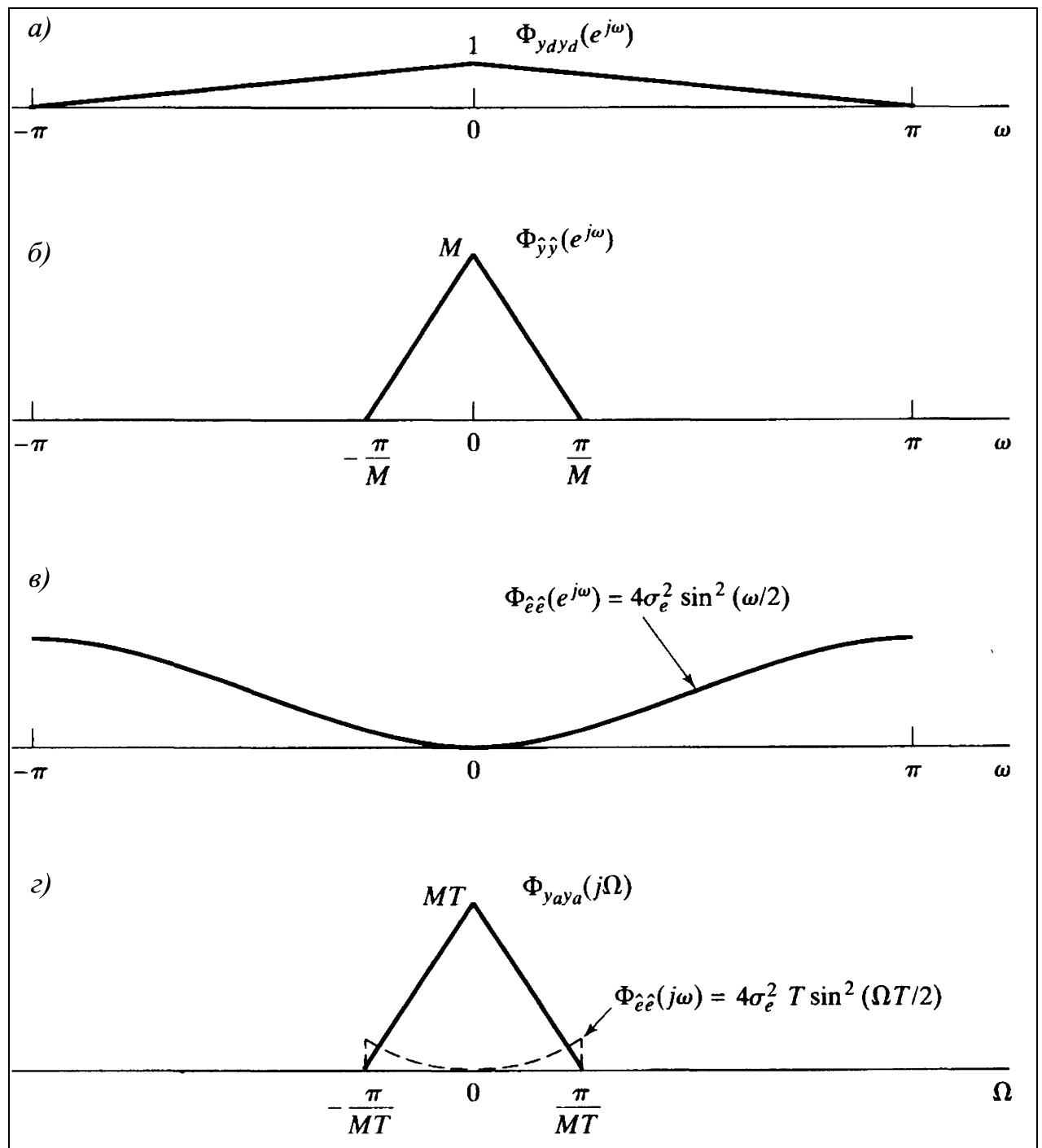


Замінивши квантователь на джерело аддитивного білого шуму $e[n]$ отримаємо систему:



Передаточная функція від сигналу $\hat{y}[n]$ до $y[n]$ тотожно дорівнює одиниці, тобто підданий підвищувальній дискретизації сигнал $\hat{y}[n]$ приходить до виходу незмінним. Передаточна функція $H_e(z)$ від $e[n]$ до $y[n]$ дорівнює $H_e(z) = 1 - z^{-1}$. Отже, компонента, що відповідає за шум квантування $e[n]$, що з'являється на виході системи формування шумів, має спектральну щільність потужності виду $\Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 \left(2 \sin(\omega/2)\right)^2$ де, $\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12}$.

Ілюстрація цього підходу до ЦАП показана на малюнку:



Спектральна щільність потужності $\Phi_{y_d y_d}(e^{j\omega})$ вхідного сигналу $y_d[n]$ зображена на діаграмі а). Має місце припущення, що сигнал $y_d[n]$ дискретизовано з частотою Найквіста. Спектральна щільність потужності сигналу на виході підвищувального дискретизатора (з коефіцієнтом M) зображена на діаграмі б). Спектральній щільності потужності виходу системи **квантователь/формування шумів** відповідає діаграма в). Діаграма г) представляє спектр потужності сигнальної компоненти в суперпозиції із спектром потужності шумової компоненти аналогового виходу ДНП. Ми вважаємо, що ДНП забезпечене ідеальним поновлюючим фільтром нижніх частот з частотою відсічення π/MT , який фільтрує максимально можливу кількість шуму квантування. На практиці хотілося б позбутись аналогових відновлюючих фільтрів з крутим зрізом. З діаграми г) слідує, що якщо допустити дещо більш високий шумовий фон, то необхідність в прямокутності характеристики відновлюючого фільтру в ДНП відпадає. Більше того, при використанні техніки багатоступінчастого формування шумів можна отримати спектр шуму на виході виду

$$\Phi_{\tilde{e}\tilde{e}}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 \left(2 \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \right)^{2p},$$

що зсовує більшу кількість шуму до верхніх частот. В цьому випадку специфікації аналогового відновлюючого фільтру можна було б ослабити ще сильніше.

Тема 5. ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Лекція №8

5.1. Представлення періодичних послідовностей : дискретні ряди Фур'є

Розглянемо N - періодичну послідовність $\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + rN]$ для будь-яких цілих чисел n і r . Як і безперервні періодичні сигнали, такі послідовності можна представляти рядом Фур'є, що складається з суми гармонійно пов'язаних одна з однією комплексних експоненціальних послідовностей, т. е. експонент, частоти яких кратні основній частоті $2\pi/N$ асоційованою з періодичною послідовністю $\tilde{x}[n]$. Періодичні комплексні експоненти мають вигляд:

$$e_k[n] = e^{j(2\pi/N)kn} = e_k[n + rN]$$

де k – ціле число. Ці експоненти задовольняють тотожності

$$e_{k+\ell N}[n] = e^{j(2\pi/N)(k+\ell N)n} = e^{j(2\pi/N)kn} e^{j2\pi\ell n} = e^{j(2\pi/N)kn} = e_k[n]$$

Рядом Фур'є періодичної послідовності $\tilde{x}[n]$ називають суму.

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}$$

Коефіцієнти $\tilde{X}[k]$ ряду Фур'є виходять з послідовності $\tilde{x}[n]$ по наступній формулі:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn}$$

Для зручності позначимо $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$. Співвідношення:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}, \quad \tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}.$$

складають пару аналізу-синтезу і називаються представленням періодичної послідовності у вигляді ДРФ.

Умовне позначення такого представлення $\tilde{x}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} \tilde{X}[k]$.

5.2. Властивості дискретних рядів Фур'є

Лінійність: Нехай ДРФ періодичних послідовностей $\tilde{x}_1[n]$ и $\tilde{x}_2[n]$ періоду N мають вигляд: $\tilde{x}_1[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} \tilde{X}_1[k]$, $\tilde{x}_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} \tilde{X}_2[k]$. Тоді $a\tilde{x}_1[n] + b\tilde{x}_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} a\tilde{X}_1[k] + b\tilde{X}_2[k]$.

Зрушення послідовності: Якщо $\tilde{X}[k]$ — коефіцієнти ДРФ періодичної послідовності $\tilde{x}[n]$, то коефіцієнти ДРФ зрушеної послідовності $\tilde{x}[n-m]$ рівні $\tilde{x}[n-m] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} W_N^{km} \tilde{X}[k]$.

Двоїстість: Якщо $\tilde{X}[k]$ — коефіцієнти ДРФ періодичної послідовності $\tilde{x}[n]$, то $N\tilde{x}[-k]$ — коефіцієнти ДРФ періодичної послідовності $\tilde{X}[n]$. $\tilde{x}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} \tilde{X}[k]$, $\tilde{X}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} N\tilde{x}[-k]$.

Симетричність:

$\tilde{x}^*[\pm n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} \tilde{X}^*[\mp k],$ $\operatorname{Re}\{\tilde{x}[n]\} \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} \frac{1}{2}(\tilde{X}[k] + \tilde{X}^*[-k]),$ $j \operatorname{Im}\{\tilde{x}[n]\} \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} \frac{1}{2}(\tilde{X}[k] - \tilde{X}^*[-k]),$	Для дійсних $\tilde{x}[n]$ $\tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[-k], \tilde{X}_R[k] = \tilde{X}_R[-k],$ $\tilde{X}_I[k] = -\tilde{X}_I[-k], \tilde{X}[k] = \tilde{X}[-k] ,$ $\angle \tilde{X}[k] = -\angle \tilde{X}[-k],$
--	---

Періодична згортка:

Нехай $\tilde{x}_1[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} \tilde{X}_1[k]$, $\tilde{x}_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} \tilde{X}_2[k]$, $\tilde{x}_3[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} \tilde{X}_3[k]$.

Тоді для $\tilde{x}_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_2[m]\tilde{x}_1[n-m]$ — $\tilde{X}_3[k] = \tilde{X}_2[k]\tilde{X}_1[k]$.

N -периодическая последовательность	Коэффициенты ДРФ (период N)
1. $\tilde{x}[n]$	$\tilde{X}[k]$
2. $\tilde{x}_1[n], \tilde{x}_2[n]$	$\tilde{X}_1[k], \tilde{X}_2[k]$
3. $a\tilde{x}_1[n] + b\tilde{x}_2[n]$	$a\tilde{X}_1[k] + b\tilde{X}_2[k]$
4. $\tilde{X}[n]$	$N\tilde{x}[-k]$
5. $\tilde{x}[n - m]$	$W_N^{km} \tilde{X}[k]$
6. $W_N^{-\ell n} \tilde{x}[n]$	$\tilde{X}[k - \ell]$
7. $\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n - m]$ (периодическая свертка)	$\tilde{X}_1[k] \tilde{X}_2[k]$
8. $\tilde{x}_1[n] \tilde{x}_2[n]$	$\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[\ell] \tilde{X}_2[k - \ell]$
9. $\tilde{x}^*[n]$	$\tilde{X}^*[-k]$
10. $\tilde{x}^*[-n]$	$\tilde{X}^*[k]$
11. $\operatorname{Re} \{\tilde{x}[n]\}$	$\tilde{X}_e[k] = \frac{1}{2}(\tilde{X}[k] + \tilde{X}^*[-k])$
12. $j \operatorname{Im} \{\tilde{x}[n]\}$	$\tilde{X}_o[k] = \frac{1}{2}(\tilde{X}[k] - \tilde{X}^*[-k])$
13. $\tilde{x}_e[k] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] + \tilde{x}^*[-n])$	$\operatorname{Re} \{\tilde{X}[k]\}$
14. $\tilde{x}_o[k] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] - \tilde{x}^*[-n])$	$j \operatorname{Im} \{\tilde{X}[k]\}$
свойства 15–17 справедливы лишь для вещественных $x[n]$	
15. свойства симметрии для вещественной $\tilde{x}[n]$	$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[-k] \\ \operatorname{Re} \{\tilde{X}[k]\} = \operatorname{Re} \{\tilde{X}[-k]\} \\ \operatorname{Im} \{\tilde{X}[k]\} = -\operatorname{Im} \{\tilde{X}[-k]\} \\ \tilde{X}[k] = \tilde{X}[-k] \\ \angle \tilde{X}[k] = -\angle \tilde{X}[-k] \end{array} \right.$
16. $\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] + \tilde{x}[-n])$	$\operatorname{Re} \{\tilde{X}[k]\}$
17. $\tilde{x}_o[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] - \tilde{x}[-n])$	$j \operatorname{Im} \{\tilde{X}[k]\}$

5.3. Перетворення Фур'є періодичних сигналів

Нехай дискретно-дійсним перетворенням ДДП періодичної послідовності $\tilde{x}[n]$ буде ланцюжок імпульсів в частотній області, значення яких пропорційні коефіцієнтам її ДРФ $\tilde{X}[k]$:

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

$\tilde{X}(e^{j\omega}) - 2\pi$ – періодична функція, що забезпечується N -періодичністю послідовності $\tilde{X}[k]$ і відстанню між сусідніми імпульсами, рівним $2\pi/N$ (N - ціле). З іншого боку ми знаємо, що дискретно-дійсне перетворення Фур'є ДДПФ довільної послідовності $x[n]$ як окремий випадок Z -перетворення має вигляд

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Покажемо, що $\tilde{X}(e^{j\omega})$ є ДДПФ послідовності $\tilde{x}[n]$, для чого застосуємо до обох частин рівності зворотне перетворення Фур'є

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \tilde{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\omega n} d\omega,$$

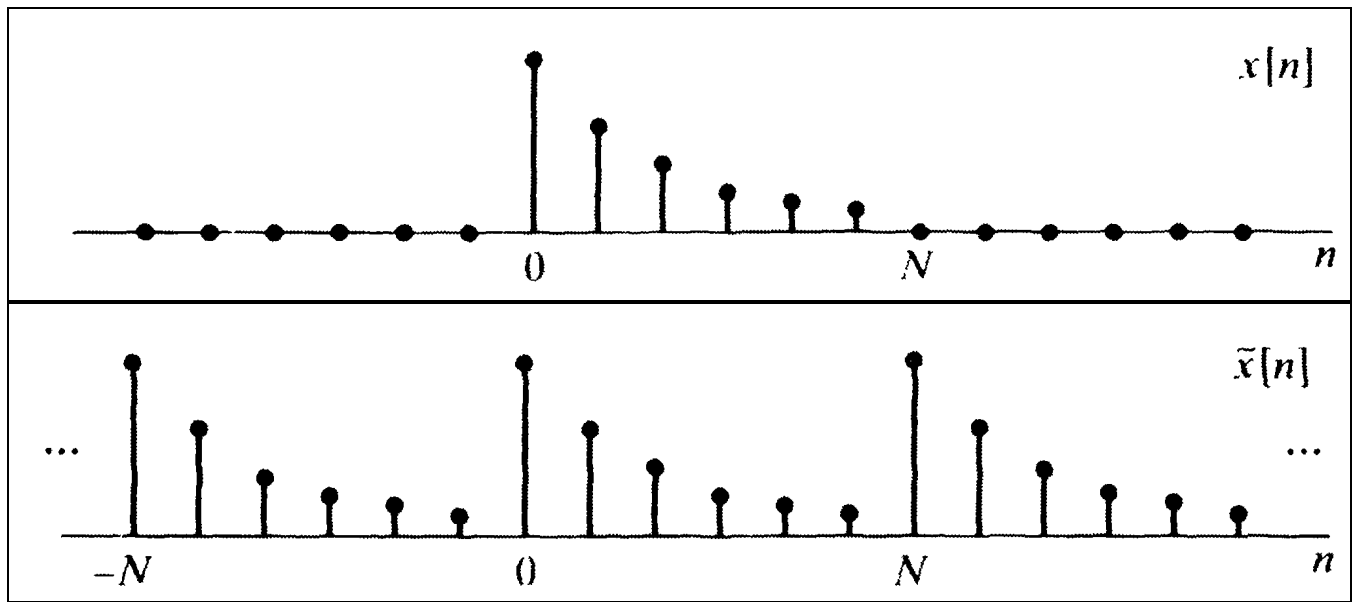
де ε належить інтервалу $(0; 2\pi)$. Нагадаємо, що при обчисленні зворотного перетворення Фур'є інтегрувати можна по будь-якому відрізку довжини 2π , оскільки підінтегральна функція $\tilde{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$ 2π -періодична. Область інтегрування починається трохи раніше 0 і стільки ж не доходить до 2π . Вказані межі узяті з тих міркувань, щоб в область інтегрування потрапив імпульс в нулі, а імпульс $\omega = 2\pi$ ніяк не впливав на інтеграл. Міняючи місцями операції інтеграції і підсумовування, знаходимо

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \tilde{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}[k] \int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}$$

Розглянемо згортку кінцевого сигналу $x[n]$, ненульові відліки якого розташовані на відрізку $[0; N-1]$, з періодичним ланцюжком імпульсів $\tilde{p}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN]$

$$\tilde{x}[n] = x[n] * \tilde{p}[n] = x[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN]$$

Ця згортка дає періодичне продовження кінцевого сигналу:



Для $\tilde{p}[n] - \tilde{P}[k] = 1, \forall k$, отже ДДПФ $\tilde{P}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$.

Якщо Фур'є-образ послідовності $x[n]$ позначити через $X(e^{j\omega})$, то ДДПФ її періодичного продовження $\tilde{x}[n]$ обчислюється як добуток

$$\begin{aligned} \tilde{X}(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega}) \tilde{P}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} X(e^{j(2\pi/N)k}) \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right). \end{aligned}$$

Таким чином:

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j(2\pi/N)k}) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=(2\pi/N)k}$$

Іншими словами, періодичну послідовність $\tilde{X}[k]$ коефіцієнтів ДРФ з рівняння аналізу можна інтерпретувати як рівномірну дискретизацію ДДПФ кінцевої послідовності, яка співпадає з одним періодом послідовності $\tilde{x}[n]$ з кроком $2\pi/N$.

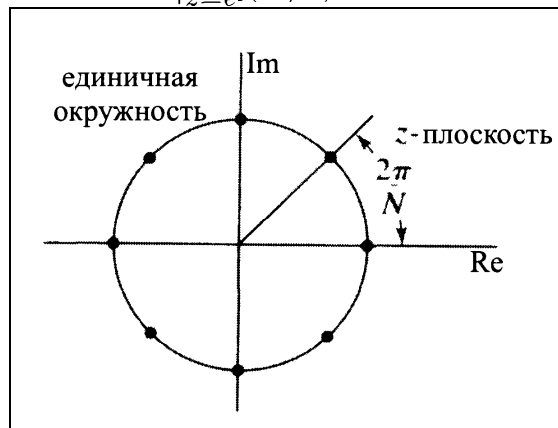
5.4. Дискретизація Фур'є-образу

Розглянемо аперіодичну послідовність $x[n]$ з Фур'є-образом $X(e^{j\omega})$ і припустимо, що послідовність $\tilde{X}[k]$ виходить в результаті дискретизації $X(e^{j\omega})$ в частотах $\omega_k = 2\pi k/N$, тобто

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=(2\pi/N)k} = X(e^{j(2\pi/N)k})$$

Оскільки Фур'є-образ – 2π – періодичну функція, то період послідовності $\tilde{X}[k]$ буде рівний N . З іншого боку, ДВПФ можна інтерпретувати як обмеження z -перетворення послідовності на одиничне коло. Отже, $\tilde{X}[k]$ виходить як обмеження z -перетворення $X(z)$ на вершини правильного N -кутника, вписаного в одиничне коло :

$$\tilde{X}[k] = X(z) \Big|_{z=e^{j(2\pi/N)k}} = X(e^{j(2\pi/N)k})$$



Послідовність відліків $\tilde{X}[k]$, як N -періодична, може виявитися послідовністю коефіцієнтів ДРФ деякої послідовності $\tilde{x}[n]$. Щоб її знайти, досить підставити послідовність $\tilde{X}[k]$, отриману в результаті дискретизації $X(z)$, у формулу ДРФ синтезу. В результаті маємо

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j(2\pi/N)km} \right] W_N^{-kn}$$

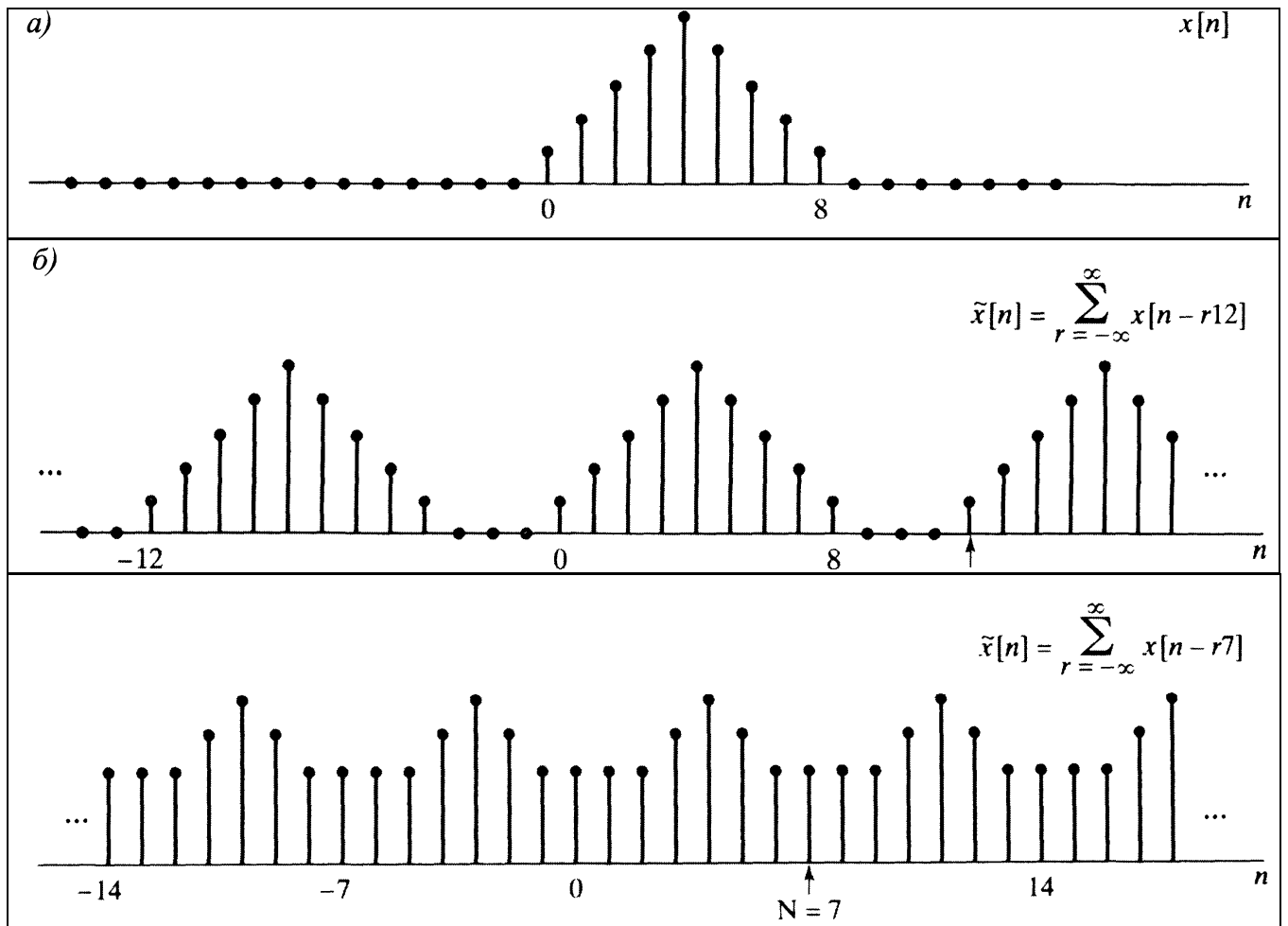
Після зміни порядку підсумування отримуємо:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-k(n-m)} \right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \tilde{p}[n-m]$$

Отже

$$\tilde{x}[n] = x[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-rN] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]$$

Таким чином, періодична послідовність, що відповідає $\tilde{X}[k]$ -дискретизації функції $X(e^{j\omega})$, виходить як нескінченна сума зсунутих копій $x[n]$. При цьому зсув здійснюється на усі кратні числа N - періоду послідовності $\tilde{X}[k]$.



5.5. Представлення Фур'є кінцевих послідовностей : дискретне перетворення Фур'є

З кожною N -членною послідовністю можна зв'язати періодичну послідовність

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN].$$

Введемо інший запис цієї формули $\tilde{x}[n] = x[n \pmod{N}]$, або скорочено

$$\tilde{x}[n] = x[(n)_N]$$

Послідовність $\tilde{X}[k]$ коефіцієнтів ДРФ послідовності $x[n]$ сама являється N - періодичною. Для збереження двоїстості між тимчасовою і частотною областями, ми виберемо лише кінцеве число коефіцієнтів ряду Фур'є, асоційованого з кінцевою послідовністю, що відповідають одному періоду $\tilde{X}[k]$. Отриману при цьому кінцеву послідовність $X[k]$ називатимемо ДПФ. Таким чином, ДПФ $X[k]$ пов'язано з коефіцієнтами ДРФ $\tilde{X}[k]$ за формулами:

$$X[k] = \begin{cases} \tilde{X}[k], & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\tilde{X}[k] = X[k \pmod{N}] = X[(k)_N].$$

З іншого боку

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn},$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}$$

Оскільки підсумовування відбувається по відрітку $[0; N-1]$, то маємо співвідношення:

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

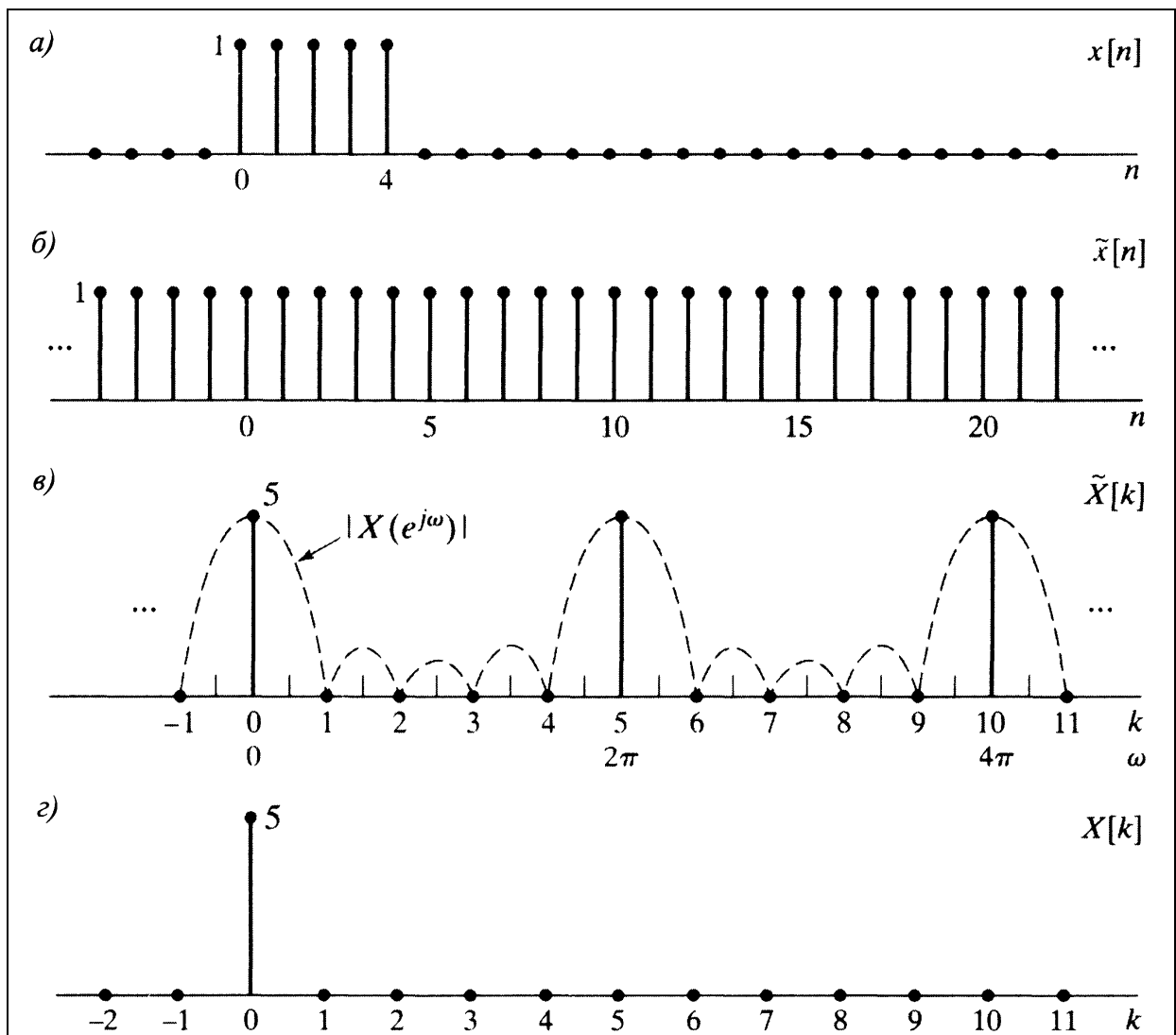
$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким чином формули аналізу та синтезу ДПФ мають наступний вигляд:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn},$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}.$$

Та позначаються як $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X[k]$.



5.6. Властивості дискретного перетворення Фур'є

Лінійність

Якщо $x_1[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X_1[k]$, $x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X_2[k]$, то

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X_3[k] = aX_1[k] + bX_2[k]$$

Циклічний зсув послідовності

Нехай $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X[k]$ та $x_1[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X_1[k] = e^{-j(2\pi k/N)m} X[k]$.

$$\text{Тоді } x_1[n] = \begin{cases} \tilde{x}_1[n] = x[((n-m))_N], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{інше} \end{cases}$$

Двоїстість

Нехай $\tilde{x}[n] = x[((n))_N]$, $\tilde{X}[k] = X[((k))_N]$. тоді якщо $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X[k]$

$$\text{То } X[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} Nx[((-k))_N], \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

Циклічна згортка

Розглянемо кінцеві послідовності $x_1[n]$ та $x_2[n]$ довжини N з ДПФ $X_1[k]$ та $X_2[k]$ відповідно і спробуємо підібрати послідовність $x_3[n]$, чиє ДПФ має вигляд добутку $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$. Найшвидше це один період послідовності

$$\tilde{x}_3[n]. \text{ Тобто } x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m], \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

що можна переписати у вигляді

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[((m))_N]x_2[((n-m))_N], \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Оскільки при $0 \leq m \leq N-1 - ((m))_N = m$, то рівняння можна переписати як

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N], \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Зазначена операція називається циклічною згорткою. Або більш точно – N –

точковою згорткою. Вона позначається символом \bigcircled{N} .

Циклічна згортка не залежить від порядку послідовностей:

$$x_3[n] = x_2[n] \bigcircled{N} x_1[n] = x_1[n] \bigcircled{N} x_2[n]$$

N -членная последовательность	N -точечное ДПФ
1. $x[n]$	$X[k]$
2. $x_1[n], x_2[n]$	$X_1[k], X_2[k]$
3. $ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1[k] + bX_2[k]$
4. $X[n]$	$Nx[((-k))_N]$
5. $x[((n-m))_N]$	$W_N^{km} X[k]$
6. $W_N^{-\ell n} x[n]$	$X[((k-\ell))_N]$
7. $\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N]$	$X_1[k]X_2[k]$
8. $x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} X_1[\ell]X_2[((k-\ell))_N]$
9. $x^*[n]$	$X^*[((-k))_N]$
10. $x^*[((-n))_N]$	$X^*[k]$
11. $\operatorname{Re}\{x[n]\}$	$X_{\text{ep}}[k] = \frac{1}{2}(X[((k))_N] + X^*[((-k))_N])$
12. $j \operatorname{Im}\{x[n]\}$	$X_{\text{op}}[k] = \frac{1}{2}(X[((k))_N] - X^*[((-k))_N])$
13. $x_{\text{ep}}[k] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[((-n))_N])$	$\operatorname{Re}\{X[k]\}$
14. $x_{\text{op}}[k] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[((-n))_N])$	$j \operatorname{Im}\{X[k]\}$
свойства 15–17 справедливы лишь для вещественных $x[n]$	
15. свойства симметрии	$\left\{ \begin{array}{l} X[k] = X^*[((-k))_N] \\ \operatorname{Re}\{X[k]\} = \operatorname{Re}\{X[((-k))_N]\} \\ \operatorname{Im}\{X[k]\} = -\operatorname{Im}\{X[((-k))_N]\} \\ X[k] = X[((-k))_N] \\ \angle X[k] = -\angle X[((-k))_N] \end{array} \right.$
16. $x_{\text{ep}}[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[((-n))_N])$	$\operatorname{Re}\{X[k]\}$
17. $x_{\text{op}}[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[((-n))_N])$	$j \operatorname{Im}\{X[k]\}$

Тема 6. ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ГІЛЬБЕРТА

Лекція №9

Для повного опису Фур'є-образу загальної послідовності потрібно вказати як дійсну, так і уявну частину його значень на напівінтервалі $-\pi < \omega \leq \pi$ або їх модуль та фазу. Проте в деяких ситуаціях значення Фур'є-образу пов'язані деяким співвідношенням.

Було доведено, що Фур'є-образ дійснозначної послідовності $x[n]$ зв'язано-симетричний, тобто $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$. Отже, значення Фур'є-образу дійснозначної послідовності на відрізьку частот $[0; \pi]$ повністю визначають його значення на проміжку $[-\pi; 0]$. Крім того, в припущеннях про мінімальність фази модуль і фаза Фур'є-образу залежать одне від одного: фаза в цьому випадку визначає модуль Фур'є-образу з точністю до скалярного множника, і навпаки. Нарешті, було доведено, що відліки Фур'є-образу $X(e^{j\omega})$ N -членної послідовності, вчислені в N рівномірно розподілених частотах, визначають цю функцію на усьому періоді.

Умова детермінованості послідовності приводе до однозначного співвідношення між дійсною і уявною частинами її Фур'є-образа. Зв'язок між дійсною і уявною частинами комплексно-значної функції такого типу з'являється не лише в контексті обробки сигналів, в зв'язку з чим воно має загальну назву: співвідношення перетворення Гільберта.

Крім того, ми досліджуємо близькі співвідношення для ДПФ і послідовностей з одностороннім перетворенням Фур'є. Покажемо, як співвідношення між модулем і фазою мінімально – фазової послідовності можна інтерпретувати в термінах перетворення Гільберта.

Співвідношення перетворення Гільберта можна акуратно вивести з властивостей аналітичних функцій. Практично усі функції комплексного змінного, що виникають в рамках математичного представлення дискретних сигналів і систем, відносяться до дуже хорошого і великого класу функцій. За невеликим винятком, z -перетворення, мають коректно визначені області, в яких ступеневий ряд, що їх представляє, – абсолютно сходиться. За визначенням, аналітичною функцією називається така функція, яка співпадає зі своїм рядом Тейлора, що рівномірно сходиться, усередині його ОЗ. Таким чином, z -перетворення є аналітичною функцією усередині своєї ОЗ. Як одну з простих властивостей аналітичних функцій отримуємо, що z -перетворення що нескінченно диференціюється усередині своєї ОЗ.

Властивості аналітичних функцій накладають деякі досить сильні обмеження на поведінку z -перетворення усередині ОЗ. З іншого боку, оскільки перетворення Фур'є можна розглядати як обмеження z -перетворення на одиничне коло, то аналітичне z -перетворення диктує певні умови і на Фур'є-образ. Одне з цих обмежень полягає в умовах Коші-Рімана, які зв'язують

часткові похідні дійсної і уявної частин аналітичної функції. Інше обмеження виникає виходячи з інтегральної теореми Коші, згідно якої значення комплексної аналітичної функції усередині замкнутого контура, що повністю лежить усередині ОЗ, повністю визначаються значеннями цієї функції на межі контура.

Грунтуючись на цих властивостях аналітичних функцій, після деяких додаткових припущень можна вивести явне інтегральне співвідношення між дійсною і уявною частинами z -перетворення, обмеженого на замкнутий контур (наприклад, одиничне коло), що лежить усередині ОЗ. У математичній літературі згадане співвідношення часто називають **формулою Пуассона**, а в контексті теорії систем його називають **співвідношенням перетворення Гільберта**.

Виведення співвідношення перетворення Гільберта, можна ґрунтувати на тому, що дійсна і уявна частини обмеження z -перетворення детермінованої послідовності на одиничне коло співпадають з перетвореннями парною і непарною частинами послідовності відповідно. З факту, що детермінована послідовність повністю визначається своєю парною частиною, витікає, що обмеження z -перетворення послідовності на одиничне коло повністю визначається своєю дійсною частиною. Крім того, використовуючи цю властивість z -перетворення детермінованої послідовності, можна показати, що в деяких додаткових припущеннях z -перетворення послідовності визначається своїм модулем на одиничному колі.

Поняття аналітичного сигналу є однією з найважливіших концепцій обробки безперервних сигналів. Аналітичним сигналом називають (аналитическую) функцію комплексного часу, чий Фур'є-образ перетворюється на нуль при негативних частотах. Комплексну послідовність ні в якому смислі не можна розглядати як аналітичну, оскільки вона залежить від цілочисельної змінної. Проте можливо зв'язати речову і уявну частини комплексної послідовності, що має нульовий спектр на одиничній окружності при $-\pi < \omega < 0$. Аналогічний підхід беруть на озброєння при виведенні співвідношення між речовою і уявною частинами ДПФ періодичної або кінцевої послідовності. В цьому випадку умова "детермінованої" означає, що періодична послідовність повинна мати нульові відліки на другій половині кожного періоду.

Отже, детермінованість використовується для співвідношення парної і непарної компонент функції або, що те ж саме, дійсної і уявної частин її перетворення. Ця ідея буде використана в чотирьох ситуаціях:

1) Знаходження співвідношення між речовою і вважаймій частинами Фур'є-образу $X(e^{j\omega})$ послідовності $x[n]$, що має нульові відліки при $n < 0$.

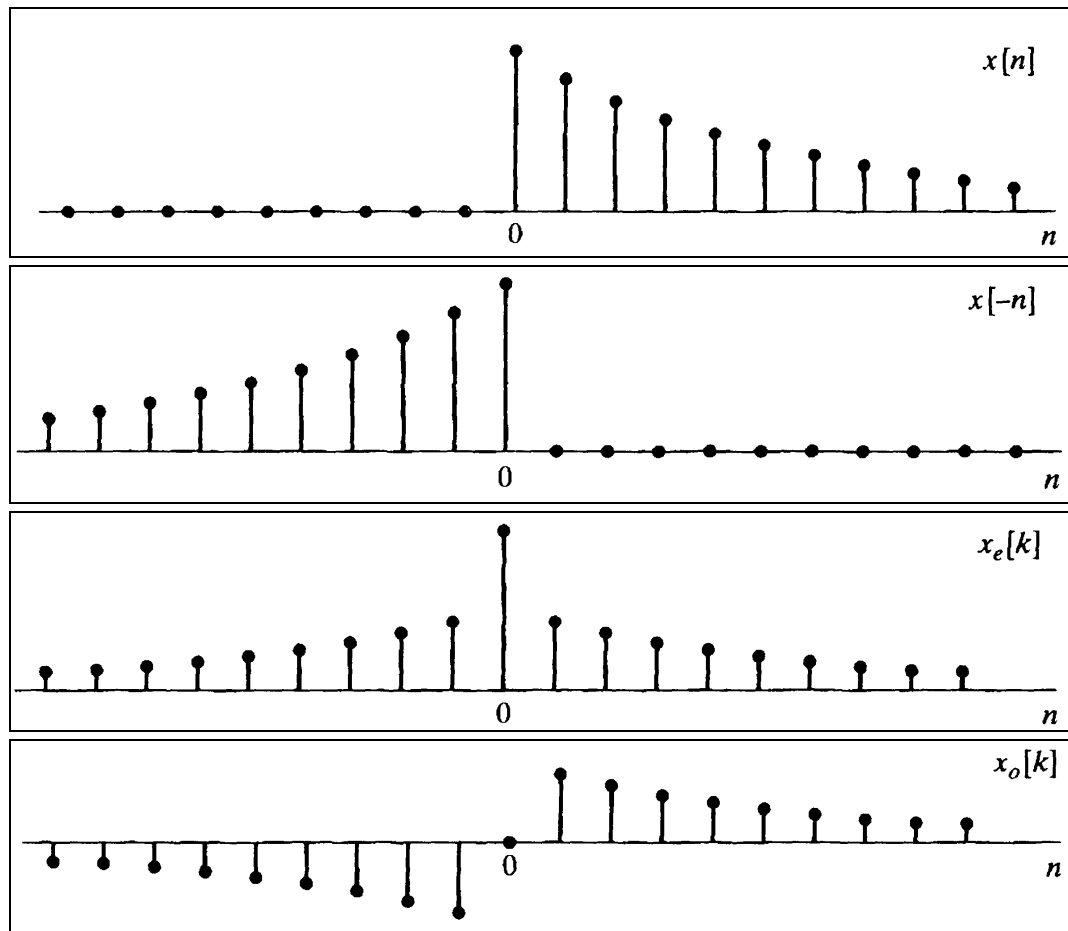
2) Виведення аналогічного співвідношення для дійсної і уявної частин ДПФ періодичної послідовності, яку можна вважати кінцевою послідовністю довжини N , з умовою: останні її $N/2 - 1$ відліки дорівнюють нулю.

3) Отримання співвідношення між дійсною та уявною частинами логарифма перетворення Фур'є в припущенні про те, що зворотне перетворення від логарифма перетворюється на нуль при $n < 0$. Формула, що зв'язує дійсну та уявну частини логарифма перетворення Фур'є, відповідає співвідношенню між логарифмом модуля і фазою функції $X(e^{j\omega})$.

4) Отримання формули, що зв'язує дійсну і уявну частини комплексної послідовності, чий Фур'є-образ розглянутий як періодична функція, перетворюється на нуль на другій половині свого періоду.

6.1. Дійсна і уявна частини Фур'є-образу детермінованої послідовності

Будь-яка послідовність $x[n]$ представляється у вигляді суми своєю парною $x_e[n]$ і непарною $x_o[n]$ частин: $x[n] = x_e[n] + x_o[n]$, де $x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n])$ та $x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n])$. Ці формули справедливі для будь-якої послідовності, незалежно від її детермінованості і дійснозначності. Проте якщо $x[n]$ – детермінована, тобто $x[n] = 0$ при $n < 0$, то усі її відліки можна відновити по $x_e[n]$ чи усі, окрім $x[0]$ по $x_o[n]$. Розглянемо, наприклад, детерміновану послідовність $x[n]$ і її парну та непарну частини.



Отже, ненульові ділянки послідовностей $x[n]$ та $x[-n]$ не перекриваються, за виключенням $x[0]$. Таким чином маємо співвідношення:

$$x[n] = 2x_e[n]u[n] - x_e[n]\delta[n]$$

$$x[n] = 2x_o[n]u[n] + x_e[n]\delta[n]$$

Припустимо, що $x[n]$ стійка, тобто абсолютно підсумована. Тоді існує її Фур'є-образ:

$$X(e^{j\omega}) = X_{\text{Re}}(e^{j\omega}) + jX_{\text{Im}}(e^{j\omega})$$

де $X_{\text{Re}}(e^{j\omega})$ – дійсна, а $X_{\text{Im}}(e^{j\omega})$ – уявна частини. У випадку дійснозначної послідовності $x[n]$ $X_{\text{Re}}(e^{j\omega})$ – Фур'є-образ $x_e[n]$, а $jX_{\text{Im}}(e^{j\omega})$ – Фур'є-образ $x_o[n]$. Отже, речова частина Фур'є-образу $X_{\text{Re}}(e^{j\omega})$ дійснозначної детермінованої стійкої послідовності повністю визначає $X(e^{j\omega})$, оскільки ми можемо вичислити цю функцію за наступною схемою:

- 1) знайти $x_e[n]$, застосувавши зворотне перетворення Фур'є до функції $X_{\text{Re}}(e^{j\omega})$;
- 2) відновити $x[n]$ за формулою $x[n] = 2x_e[n]u[n] - x_e[n]\delta[n]$;
- 3) вичислити $X(e^{j\omega})$ як перетворення Фур'є послідовності $x[n]$.

Звідси, витікає, що уявна частина Фур'є-образу такої послідовності відновлюється за його дійсною частиною.

Зазначену процедуру, можна узагальнити, і аналітично виразити уявну частину $X_{\text{Im}}(e^{j\omega})$ через дійсну $X_{\text{Re}}(e^{j\omega})$. З формули $x[n] = 2x_e[n]u[n] - x_e[n]\delta[n]$, теореми про згортку і того факту, що $x_e[0] = x[0]$, витікає співвідношення:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_{\text{Re}}(e^{j\theta}) U(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta - x[0]$$

де $U(e^{j\omega})$ – Фур'є-образ послідовності одиничного стрибка $u[n]$. Як відомо, одиничний стрибок не відноситься ні до абсолютно підсумовуваних, ні до підсумовуваних з квадратом послідовностей, але перетворення Фур'є від нього можна вичислити. Воно дорівнює

$$U(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}$$

або, оскільки $\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{1}{2} - \frac{j}{2} \text{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$

$$U(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k) + \frac{1}{2} - \frac{j}{2} \text{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Таким чином

$$\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= X_{\text{Re}}(e^{j\omega}) + jX_{\text{Im}}(e^{j\omega}) = \\
&= X_{\text{Re}}(e^{j\omega}) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_{\text{Re}}(e^{j\theta}) d\theta - \frac{j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_{\text{Re}}(e^{j\theta}) \text{ctg}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) d\theta - x[0]
\end{aligned}$$

Виділяючи уявну частину і використовуючи той факт, що $x[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_{\text{Re}}(e^{j\theta}) d\theta$ отримуємо:

$$X_{\text{Im}}(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_{\text{Re}}(e^{j\theta}) \text{ctg}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) d\theta.$$

Аналогічно, можна отримати $x[n]$ та $X(e^{j\omega})$ з $X_{\text{Im}}(e^{j\omega})$ та $x[0]$. У результаті має місце наступне співвідношення:

$$X_{\text{Re}}(e^{j\omega}) = x[0] + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_{\text{Im}}(e^{j\theta}) \text{ctg}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) d\theta.$$

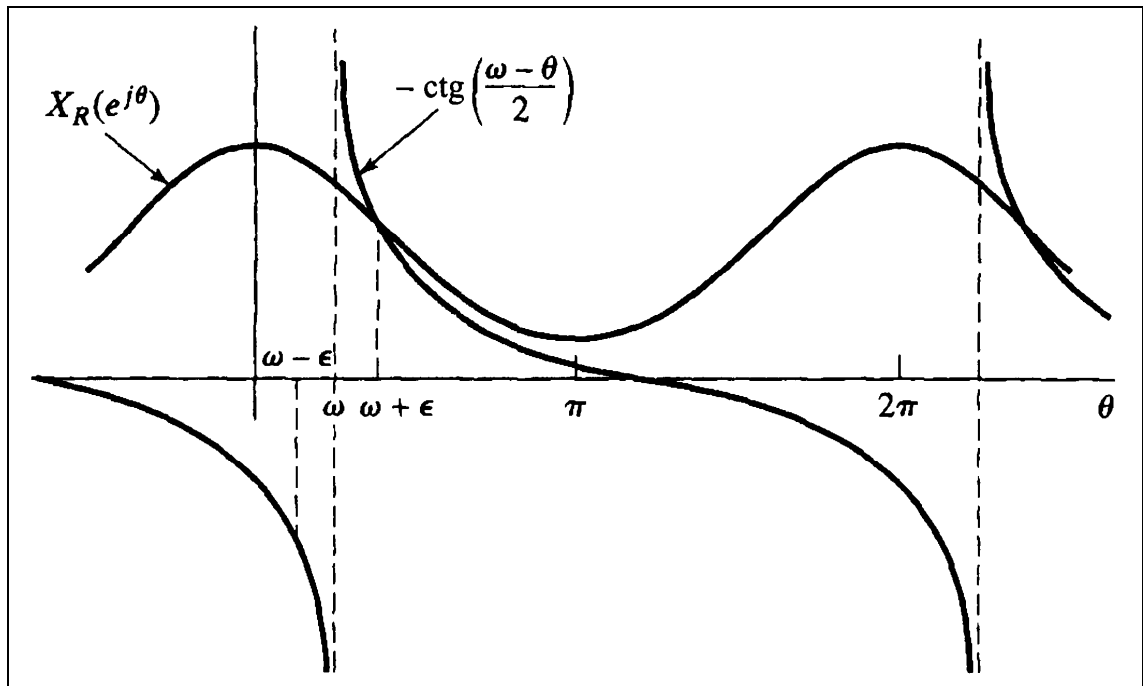
Отримані формули називаються **співвідношеннями дискретного перетворення Гільберта**. Вони мають силу для дійсної та уявної частин Фур'є-образу детермінованої стійкої дійснонозначної послідовності. Інтеграли в цих формулах є невласними інтегралами, оскільки підінтегральна функція має особливість в точці $\omega - \theta = 0$. Для їх обчислення необхідно зробити деякі додаткові зусилля. З іншого боку, ці інтеграли можна обчислювати в сенсі головного значення

$$\begin{aligned}
X_{\text{Im}}(e^{j\omega}) &= -\frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\pi}^{\pi} X_{\text{Re}}(e^{j\theta}) \text{ctg}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) d\theta \\
X_{\text{Re}}(e^{j\omega}) &= x[0] + \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\pi}^{\pi} X_{\text{Im}}(e^{j\theta}) \text{ctg}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) d\theta.
\end{aligned}$$

яке, як і невласний інтеграл, визначається через межу визначених інтегралів, але з невеликою зміною.

$$X_{\text{Im}}(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\omega+\varepsilon}^{\pi} X_{\text{Re}}(e^{j\theta}) \text{ctg}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) d\theta + \int_{-\pi}^{\omega-\varepsilon} X_{\text{Re}}(e^{j\theta}) \text{ctg}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) d\theta \right)$$

Наведені формули говорять про те, $X_{\text{Im}}(e^{j\omega})$ – це періодична згортка функцій $-\text{ctg}(\omega/2)$ і $X_{\text{Re}}(e^{j\omega})$, але з особливістю в точці $\theta = \omega$. Аналогічно, $X_{\text{Re}}(e^{j\omega})$ – це періодична згортка $\text{ctg}(\omega/2)$ і $X_{\text{Im}}(e^{j\omega})$ з точністю до аддитивної константи. Графіки функцій, що входять до згортки показані на малюнку



Існування межі у формулі пояснюється непарністю функції $\operatorname{ctg}(\omega/2)$ відносно особливої точки $\omega = \theta$ і тим, що межа береться при симетричному прямуванні параметра ϵ до особливої точки.

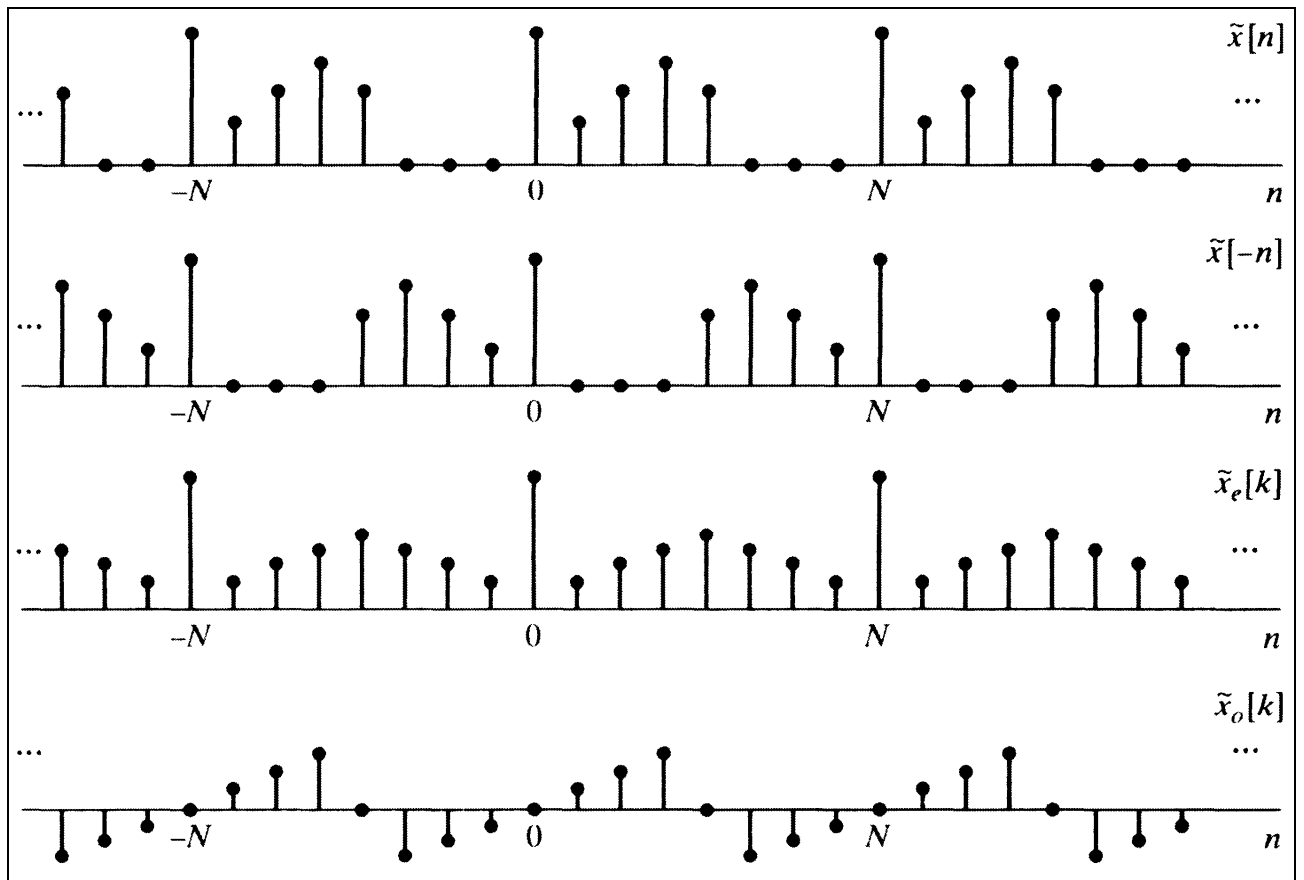
6.2. Теореми достатності для кінцевих послідовностей

Отримані результати можуть бути застосовні і до кінцевих детермінованих послідовностей, але, оскільки кінцевість послідовності більш строгі обмеження, природно чекати більш сильних властивостей від їх Фур'є-образів. Одна з можливостей скористатися кінцевістю послідовності полягає в тому, щоб представити її у вигляді ДПФ. Оскільки в обчисленні ДПФ бере участь сума, а не інтеграл, тут ми позбавлені проблем з невласним інтегралами. Крім того, ДПФ, фактично, представляє періодичну послідовність. Так що усі результати, які ми можемо отримати при дослідженні ДПФ кінцевих послідовностей, мають бути застосовні і до періодичних. З іншого боку, важливо пам'ятати про природну періодичність ДПФ при виведенні співвідношень перетворення Гільберта для кінцевих послідовностей. У зв'язку з цим спочатку розглянемо випадок періодичних послідовностей, а потім застосуємо зроблені дослідження до кінцевих.

Розглянемо N – періодичну послідовність $\tilde{x}[n]$, пов'язану з N – членною кінцевою послідовністю $x[n]$ співвідношенням: $\tilde{x}[n] = x\left[\left((n)\right)_N\right]$. Її можна представити у вигляді суми парної і непарної періодичних послідовностей: $\tilde{x}[n] = \tilde{x}_e[n] + \tilde{x}_o[n]$, $0 \leq n \leq N-1$, де $\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] + \tilde{x}[-n])$, та $\tilde{x}_o[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] - \tilde{x}[-n])$.

Будемо вважати, що N -періодична послідовність $\tilde{x}[n]$ є періодично детермінованою, якщо $\tilde{x}[n] = 0$ при $N/2 < n < N$, тобто. її відліки дорівнюють нулю на другій половині періоду, а N – парне число.

Ілюстрація періодично детермінованою послідовності разом з парною і непарною частинами при $N = 8$ наведена на малюнку нижче.



Визначивши при парному N періодичну послідовність

$$\tilde{u}_N[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, N/2, \\ 2, & 1 \leq n \leq N/2 - 1, \\ 0, & N/2 + 1 \leq n \leq N - 1 \end{cases}$$

$\tilde{x}[n]$ можна записати як $\tilde{x}[n] = \tilde{x}_e[n] \tilde{u}_N[n]$ та

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}_o[n] \tilde{u}_N[n] + x[0] \tilde{\delta}[n] + x[N/2] \tilde{\delta}[n - N/2]$$

де $\tilde{\delta}[n]$ - періодично продовжений одиничний імпульс з періодом N . Таким чином, послідовність $\tilde{x}[n]$ може бути повністю відновлена по відлікам $\tilde{x}_e[n]$. З іншого боку, члени послідовності $\tilde{x}_o[n]$ з номерами 0 і $N/2$ завжди мають дорівнювати нулю, у зв'язку з чим усі відліки $\tilde{x}[n]$, окрім нульового і $N/2$ -го, відновлюються по $\tilde{x}_o[n]$.

Якщо $\tilde{X}[k]$ - коефіцієнти ДРФ дійснозначної періодичної послідовності $\tilde{x}[n]$, то $\tilde{X}_{\text{re}}[k]$ - дійсна частина $\tilde{X}[k]$ є послідовністю коефіцієнтів ДРФ для

$\tilde{x}_e[n]$, а $j\tilde{X}_{\text{Im}}[k]$ - послідовністю коефіцієнтів ДРФ для $\tilde{x}_e[n]$. Таким чином, усі коефіцієнти ДРФ $\tilde{X}[k]$ періодично детермінованою N -періодичною послідовністю можуть бути відновлені по своїх дійсних частинах або майже усі по уявних. Тобто $\tilde{X}_{\text{Im}}[k]$ визначається послідовністю $\tilde{X}_{\text{Re}}[k]$ і майже усі коефіцієнти $\tilde{X}_{\text{Re}}[k]$ відновлюються по $\tilde{X}_{\text{Im}}[k]$.

Алгоритм відновлення $\tilde{X}[k]$ і $\tilde{X}_{\text{Im}}[k]$ по відомій послідовності $\tilde{X}_{\text{Re}}[k]$ має наступний вигляд.

1. Вичислити $\tilde{x}_e[n]$ по формулою синтезу ДРФ

$$\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_{\text{Re}}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

2. Відновити послідовність $\tilde{x}[n]$ за формулою $\tilde{x}[n] = \tilde{x}_e[n]\tilde{u}_N[n]$

3. Знайти $\tilde{X}[k]$, використовуючи формулу аналізу ДРФ

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \tilde{X}_{\text{Re}}[k] + j\tilde{X}_{\text{Im}}[k]$$

Щоб вивести явне співвідношення, зв'язуюче $\tilde{X}_{\text{Re}}[k]$ і $\tilde{X}_{\text{Im}}[k]$, треба провести всю процедуру відновлення в загальному вигляді.

$$\tilde{X}[k] = \tilde{X}_{\text{Re}}[k] + j\tilde{X}_{\text{Im}}[k] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{X}_{\text{Re}}[m] \tilde{U}[k-m]$$

тобто $\tilde{X}[k]$ - періодична згортка коефіцієнтів ДРФ $\tilde{X}_{\text{Re}}[k]$ послідовності $\tilde{x}_e[n]$, з коефіцієнтами ДРФ $\tilde{U}_N[k]$ послідовності $\tilde{u}_N[n]$. Можна показати, що

$$\tilde{U}_N[k] = \begin{cases} N, & k=0, \\ -j2\text{ctg}\left(\frac{\pi k}{N}\right), & k \text{ не парне}, \\ 0, & k \text{ парне} \end{cases}$$

Позначимо $\tilde{V}_N[k] = \begin{cases} -j2\text{ctg}\left(\frac{\pi k}{N}\right), & k \text{ не парне}, \\ 0, & k \text{ парне} \end{cases}$, тоді

$$\tilde{X}[k] = \tilde{X}_{\text{Re}}[k] + \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{X}_{\text{Re}}[m] \tilde{V}_N[k-m], \text{ звідки}$$

$$\boxed{j\tilde{X}_{\text{Im}}[k] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{X}_{\text{Re}}[m] \tilde{V}_N[k-m]},$$

– що є шуканим співвідношенням між дійсною і уявною частинами коефіцієнтів ДРФ періодично детермінованої послідовності. Аналогічно, можна показати, що

$$\tilde{X}_{\text{Re}}[k] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} j\tilde{X}_{\text{Im}}[m]\tilde{V}_N[k-m] + \tilde{x}[0] + (-1)^k \tilde{x}[N/2]$$

Якщо $\tilde{x}[n]$ розглядати як періодичне продовження кінцевої послідовності $x[n]$, то

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Якщо $x[n]$ має "періодичну детермінованість" відносно періоду N (тобто $x[n] = 0$ при $n < 0$, та $n > N/2$), то усе попереднє міркування можна повторити у рамках ДРФ послідовності $x[n]$. Умовно кажучи, можна стерти знак "тильда" з формул, отримавши тим самим співвідношення на ДПФ:

$$\begin{aligned} jX_{\text{Im}}[k] &= \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_{\text{Re}}[m]V_N[k-m], & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases} \\ X_{\text{Re}}[k] &= \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} jX_{\text{Im}}[m]V_N[k-m] + x[0] + (-1)^k x[N/2], & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases} \end{aligned}$$

Помітимо, що послідовність $V_N[k-m]$ – N -періодична, так що нам не треба піклуватися про обчислення $((k-m))_N$ в наведених формулах, що є співвідношенням між дійсною і уявною частинами N -точечного ДПФ дійснозначної послідовності, реальна кількість членів в якій не перевищує $\frac{N}{2} + 1$ (N -парне). Ці формули є циклічними згортками, які можна вичислити наступною процедурою

1. Застосувавши ДПФ до послідовності $X[k]$, отримати послідовність

$$x_{ep}[n] = \frac{1}{2} \left(x[n] + x[((n))_N] \right), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

2. Вичислити періодичну непарну частину $x[n]$ за формулою:

$$x_{op}[n] = \begin{cases} x_{ep}[n], & 0 < n < N/2, \\ -x_{ep}[n], & N/2 < n < N-1 \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

3. Знаходячи ДПФ послідовності $x_{op}[n]$, знайти $jX_{lm}[k]$.

Варто звернути увагу, що якщо на другому кроці процедури замість непарної частини $x[n]$ вичислити послідовність

$$\bar{x}[n] = \begin{cases} x_{ep}[0], & n = 0, \\ 2x_{ep}[n], & 0 < n < N/2, \\ x_{ep}[N/2], & n = N/2, \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

то її ДПФ $X[k]$ співпаде з повним ДПФ $x[n]$.

6.3. Взаємозв'язок абсолютного значення і фази

Взагалі кажучи, фазу $\angle X(e^{j\omega})$ не можна відновити за модулем $|X(e^{j\omega})|$, оскільки може існувати нескінченне сімейство функцій $X_m(e^{j\omega})$ однакових за модулем та різних за фазою.

Співвідношення перетворення Гільберта між дійсною і уявною частинами Фур'є-образу послідовності $x[n]$ виводилося для детермінованої послідовності. Аналогічне співвідношення між модулем і фазою Фур'є-образу виходить з припущення про детермінованість послідовності $\hat{x}[n]$, що безпосередньо будується з $x[n]$, Фур'є-образ $\hat{X}(e^{j\omega})$ якої дорівнює логарифму від Фур'є-образу послідовності $x[n]$. Визначимо таку послідовність $\hat{x}[n]$, що якщо

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j \arg(X(e^{j\omega}))},$$

$$\text{то } \hat{x}[n] \xleftrightarrow{F} \hat{X}(e^{j\omega}) = \ln(X(e^{j\omega})) = \ln(|X(e^{j\omega})|) + j \arg(X(e^{j\omega}))$$

Введена вище послідовність $\hat{x}[n]$ зазвичай називається **комплексним спектром послідовності** $x[n]$. Якщо послідовність $\hat{x}[n]$ детермінована, то дійсна і уявна частини функції $\hat{X}(e^{j\omega})$, тобто $\ln(|X(e^{j\omega})|)$ та $\arg(X(e^{j\omega}))$, будуть пов'язані формулами:

$$\arg\big(X\big(e^{j\omega}\big)\big)=-\frac{1}{2\pi}v.p.\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln\big(\big|X\big(e^{j\omega}\big)\big|\big)ctg\bigg(\frac{\omega-\theta}{2}\bigg)d\theta,$$

$$\ln\big(\big|X\big(e^{j\omega}\big)\big|\big)=\hat{x}[0]+\frac{1}{2\pi}v.p.\int\limits_{-\pi}^{\pi}\arg\big(X\big(e^{j\omega}\big)\big)ctg\bigg(\frac{\omega-\theta}{2}\bigg)d\theta$$

$$\text{де } \hat{x}[0]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln\big(\big|X\big(e^{j\omega}\big)\big|\big)d\omega$$

Лекція №10

6.4. Співвідношення перетворення Гільберта для комплекснозначних послідовностей

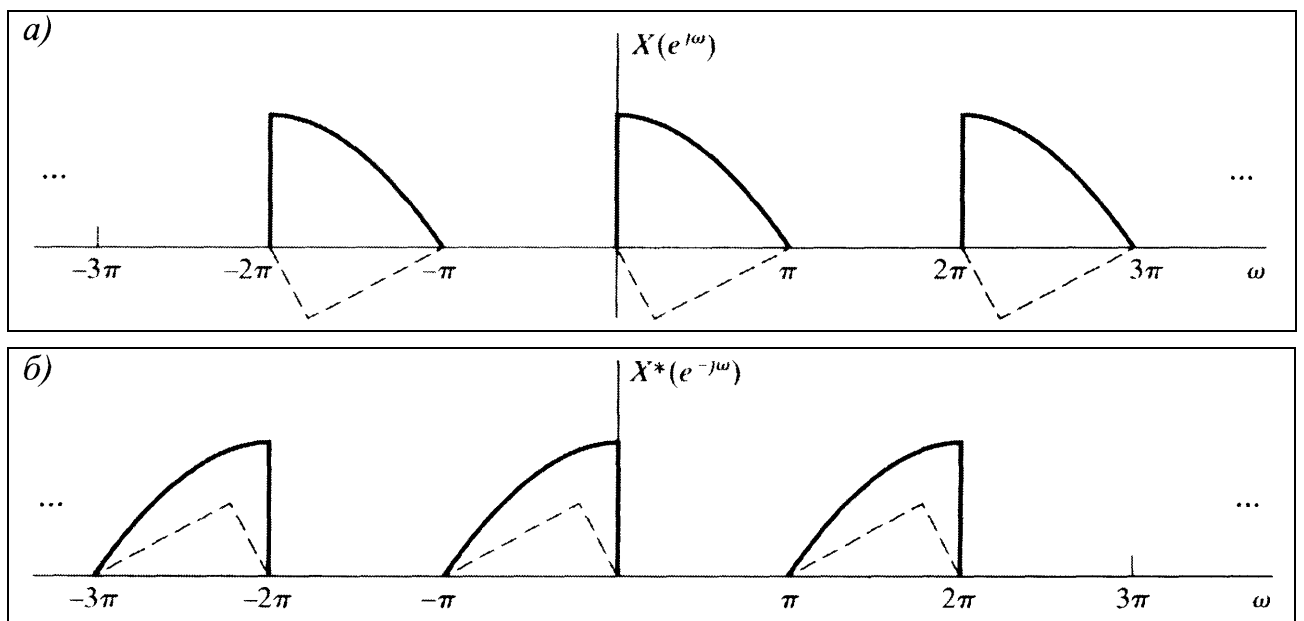
Розглянемо комплексну послідовність $x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$ де відліки $x_r[n]$ та $x_i[n]$ - дійсні числа. Аналогічний сигнал з неперервної теорії описується аналітичною функцією і носить назву аналітичного сигналу. Хоча з формальної точки зору послідовність не може бути аналітичною, ми застосовуватимемо термінологію з цієї теорії до послідовностей з одностороннім Фур'є-образом.

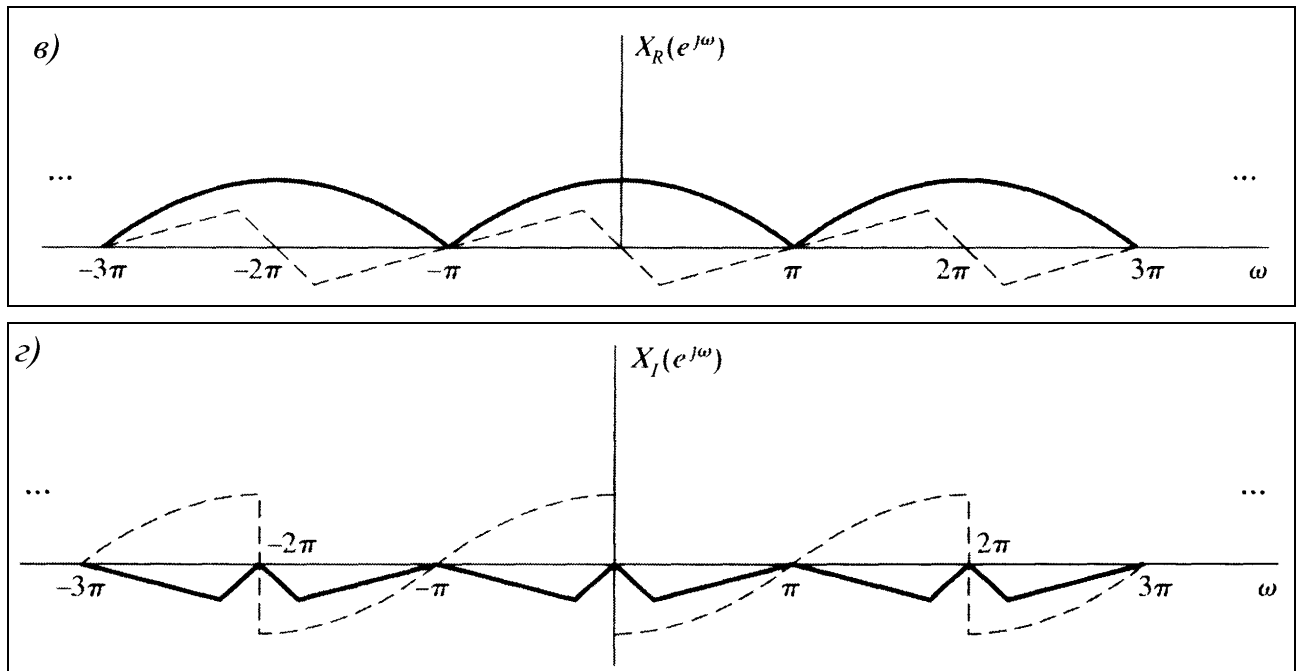
Нехай $X_{\text{Re}}(e^{j\omega})$ і $X_{\text{Im}}(e^{j\omega})$ - Фур'є - образи дійснозначних послідовностей $x_r[n]$ і $x_i[n]$ відповідно. Тоді $X(e^{j\omega}) = X_{\text{Re}}(e^{j\omega}) + jX_{\text{Im}}(e^{j\omega})$ звідки

$$X_{\text{Re}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \left(X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega}) \right)$$

$$jX_{\text{Im}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \left(X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega}) \right)$$

Комплекснозначні функції $X_{\text{Re}}(e^{j\omega})$ і $jX_{\text{Im}}(e^{j\omega})$ тут грають ту ж роль, що парна і непарна частини детермінованої послідовності в попередньому параграфі. Проте $X_{\text{Re}}(e^{j\omega})$ - сопряжено - симетрична тобто $X_{\text{Re}}(e^{j\omega}) = X_{\text{Re}}^*(e^{-j\omega})$, а $jX_{\text{Im}}(e^{j\omega})$ - сопряжено-антисиметрична: $jX_{\text{Im}}(e^{j\omega}) = -jX_{\text{Im}}^*(e^{-j\omega})$. Малюнок нижче ілюструє приклад комплекснозначного одностороннього Фур'є-образу послідовності $x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$ і відповідним перетворенням дійснозначних послідовностей $x_r[n]$ і $x_i[n]$.





Якщо $X(e^{j\omega}) = 0$ при $-\pi \leq \omega < 0$, то ділянки з ненульовими значеннями функцій $X(e^{j\omega})$ і $X^*(e^{-j\omega})$ не перетинаються, у зв'язку з чим $X(e^{j\omega})$ можна відновити по будь-якій з функцій: $X_{\text{Re}}(e^{j\omega})$ або $X_{\text{Im}}(e^{j\omega})$. Оскільки ми припускаємо, що значення $X(e^{j\omega})$ в точках $\omega = \pm\pi$ дорівнюють нулю, ця функція повністю визначається своєю уявною частиною $jX_{\text{Im}}(e^{j\omega})$. Зокрема,

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2X_{\text{Re}}(e^{j\omega}), & 0 \leq \omega < \pi \\ 0, & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases} \text{ та}$$

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2jX_{\text{Im}}(e^{j\omega}), & 0 \leq \omega < \pi \\ 0, & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases}$$

звідки зв'язок між уявною, та дійсною частинами має вигляд:

$$X_{\text{Im}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} -jX_{\text{Re}}(e^{j\omega}), & 0 < \omega < \pi \\ jX_{\text{Re}}(e^{j\omega}), & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases}$$

або $X_{\text{Im}}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X_{\text{Re}}(e^{j\omega})$ де $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega < \pi \\ j, & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases}$

Таким чином, відліки $x_i[n]$ можна відновити, обробляючи сигнал $x_r[n]$ дискретною ЛС-системою з характеристичною функцією $H(e^{j\omega})$. Оскільки модуль характеристичної функції постійний і дорівнює одиниці, а її аргумент набуває значення $-\pi/2$ над проміжком $(0; \pi)$ і $+\pi/2$ над $(-\pi; 0)$, то таку систему називають ідеальним дев'яностоградусним фазообертачем. Цю ж систему в

контексті обробки послідовностей іменують перетворювачем Гільберта. З наведених формул витікає, що

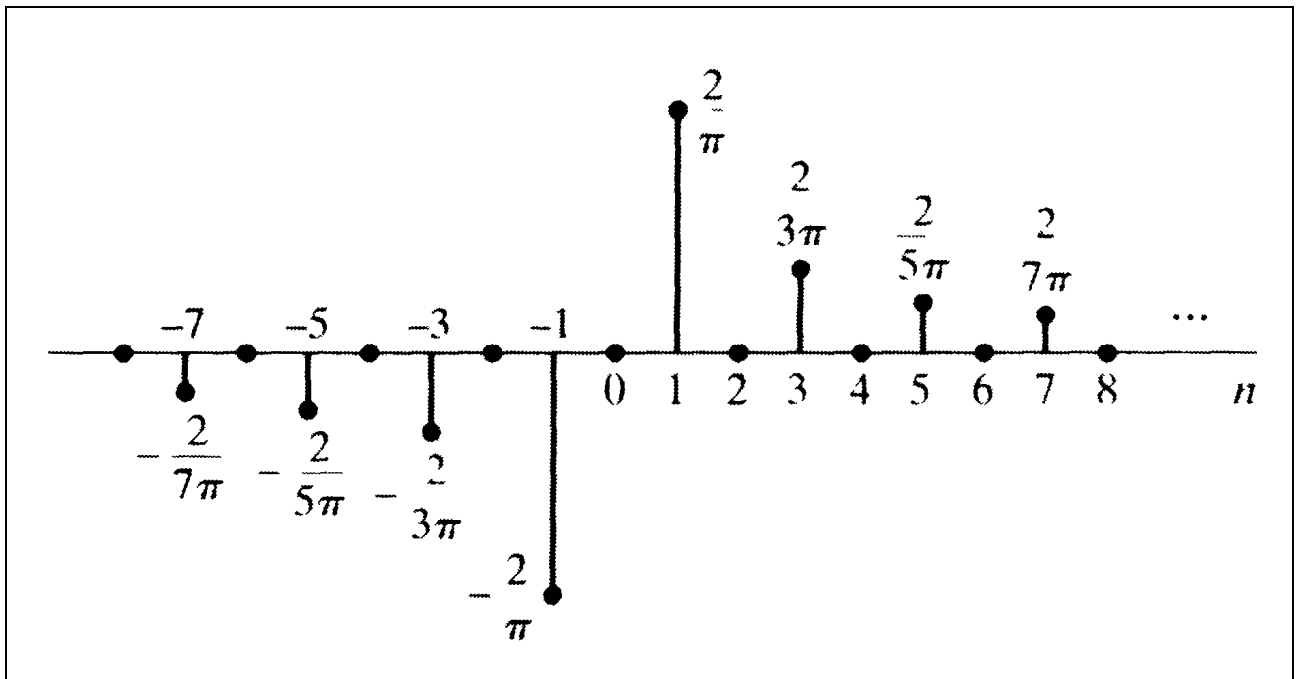
$$X_{\text{Re}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})} X_{\text{Im}}(e^{j\omega}) = -H(e^{j\omega}) X_{\text{Im}}(e^{j\omega})$$

Значить, послідовність $x_r[n]$ - теж однозначно відновлюється по $x_i[n]$ за допомогою дев'яностоградусного фазообертача. Імпульсну характеристику дев'яностоградусного фазообертача з характеристичною функцією $H(e^{j\omega})$ можна записати як

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 j e^{j\omega n} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} j e^{j\omega n} d\omega$$

$$h[n] = \begin{cases} \frac{2 \sin^2(\pi n/2)}{\pi n}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

Її графік зображено на малюнку

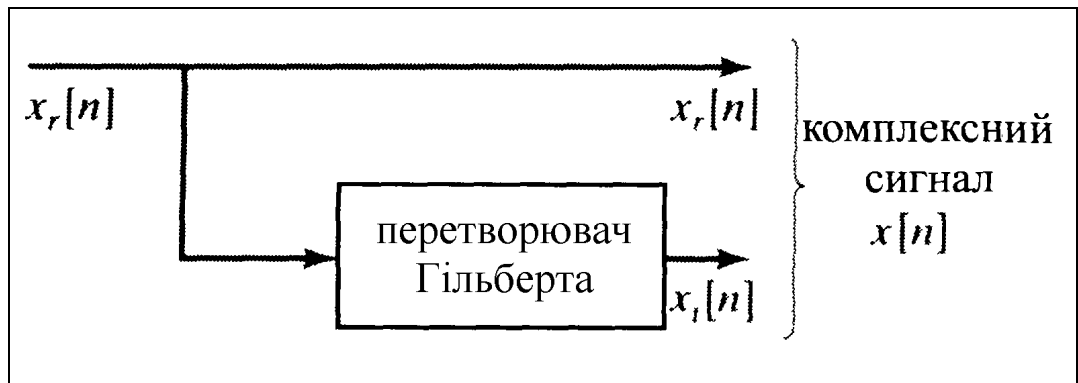


Як наслідок отримуємо шукані співвідношення перетворення Гільберта між дійсною і уявною частинами дискретного аналітичного сигналу:

$$x_i[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m] x_r[m],$$

$$x_r[n] = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m] x_i[m].$$

Малюнок нижче ілюструє блок-схему системи, що використовує перетворювач Гільберта для формування комплексного аналітичного сигналу, який є парцю дійснозначних послідовностей.



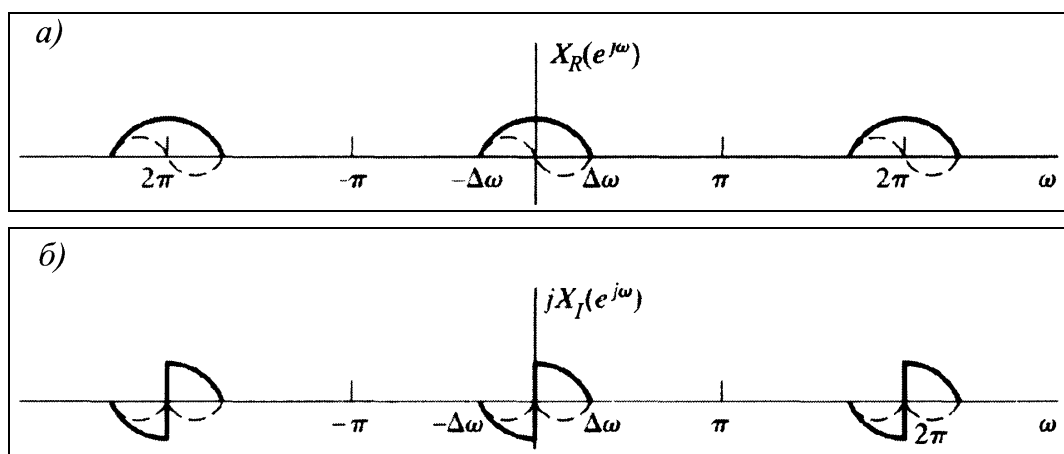
Імпульсна характеристика перетворювача Гільберта не відноситься до класу абсолютно підсумовуваних послідовностей. Тому ряд

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n},$$

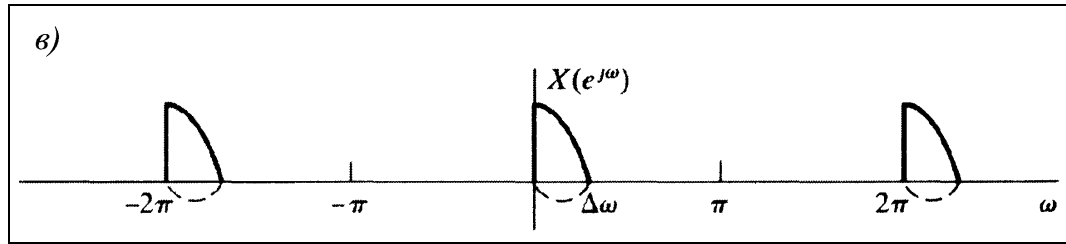
що визначає характеристичну функцію, сходиться тільки в середньоквадратичному. Таким чином, ідеальний перетворювач Гільберта, або дев'яностоградусний фазообертач, стоїть поряд з ідеальним фільтром нижніх частот як дуже корисне теоретичне поняття, що відповідає недетермінованій системі, характеристична функція якої існує лише в обмеженому сенсі. Природно, можна отримати апроксимацію ідеального перетворювача Гільберта.

6.4.1. Представлення смугових сигналів

Багато застосувань аналітичних сигналів пов'язані з вузькосмуговим зв'язком. У таких застосуваннях смуговий сигнал часто буває зручно представляти в термінах нижньочастотного. Розглянемо комплекснозначний нижньочастотний сигнал $x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$, где $x_i[n]$ – перетворення Гільберта від $x_r[n]$ и $X(e^{j\omega}) = 0$ при $-\pi \leq \omega < 0$. Відповідні Фур'є-образи $X_{\text{Re}}(e^{j\omega})$ і $X_{\text{Im}}(e^{j\omega})$ наведені на малюнках нижче.

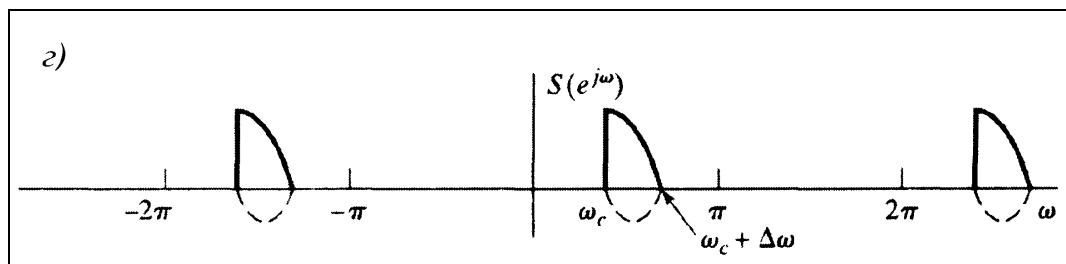


Графік функції $X(e^{j\omega}) = X_{\text{Re}}(e^{j\omega}) + jX_{\text{Im}}(e^{j\omega}) - \text{в})$.



Суцільною кривою зображено графіки дійсної частини, а пунктирною - уявної.

Розглянемо тепер послідовність $s[n] = x[n]e^{j\omega_c n} = s_r[n] + js_i[n]$, де $s_r[n]$ та $s_i[n]$ дійсні послідовності. Її Фур'є-образ $S(e^{j\omega}) = X_{\text{Re}}(e^{j(\omega-\omega_c)})$ наведено на малюнку г):

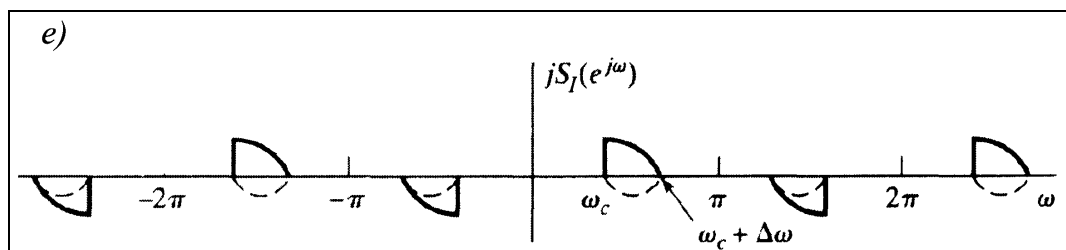
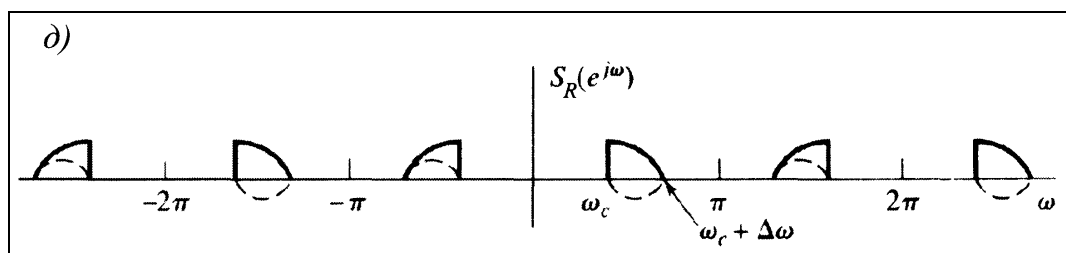


За останніми формулами отримуємо співвідношення:

$$S_{\text{Re}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \left(S(e^{j\omega}) + S^*(e^{-j\omega}) \right),$$

$$S_{\text{Im}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \left(S(e^{j\omega}) - S^*(e^{-j\omega}) \right).$$

Графікам функцій $S_{\text{Re}}(e^{j\omega})$ і $jS_{\text{Im}}(e^{j\omega})$ відведено місце на мал. д, е).



Легко показати, що якщо $X_{\text{Re}}(e^{j\omega}) = 0$ при $\Delta\omega < |\omega| \leq \pi$, а $(\omega_c + \Delta\omega) < \pi$, то $S(e^{j\omega})$ буде одностороннім смуговим сигналом, усі значення якого дорівнюють нулю, за винятком значень на проміжку $\omega_c < \omega < \omega_c + \Delta\omega$. Як видно з малюнка

$S_{\text{Im}}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})S_{\text{Re}}(e^{j\omega})$, тобто $s_i[n]$ і $s_r[n]$ пов'язані перетворенням Гільберта. Комплексний сигнал представляється також через модуль і фазу :

$$x[n] = A[n]e^{j\varphi[n]}, \text{ де } A[n] = (x_r^2[n] + x_i^2[n])^{1/2}, \varphi[n] = \arctg\left(\frac{x_i[n]}{x_r[n]}\right).$$

Отже, приходимо до рівності:

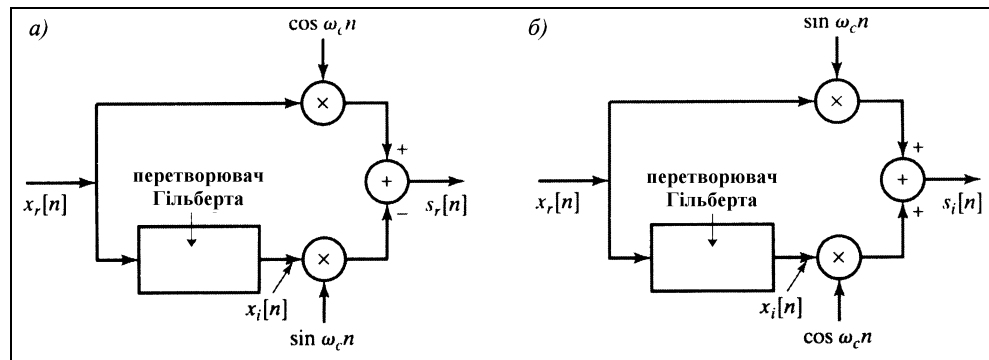
$$s[n] = (x_r[n] + jx_i[n])e^{j\omega_c n} = A[n]e^{j(\omega_c n + \varphi[n])}.$$

Таким чином отримуємо вирази:

$$s_r[n] = x_r[n]\cos(\omega_c n) - x_i[n]\sin(\omega_c n) = A[n]\cos(\omega_c n + \varphi[n]),$$

$$s_i[n] = x_r[n]\sin(\omega_c n) + x_i[n]\cos(\omega_c n) = A[n]\sin(\omega_c n + \varphi[n]).$$

Формули реалізовані блок-схемами на малюнку нижче.



Діаграми ілюструють, як комплексний смуговий сигнал (з однією бічною смугою) може бути отриманий з дійсного нижньочастотного сигналу. Узяті разом, формули дають бажане представлення у часовій області загального комплекснозначного смугового сигналу $s[n]$ у термінах дійсною і уявною частин комплексного нижньочастотного сигналу $x[n]$ і є зручним механізмом представлення дійсних смугових сигналів. Співвідношення $s_r[n] = x_r[n]\cos(\omega_c n) - x_i[n]\sin(\omega_c n)$, наприклад, виражає дійснозначний смуговий сигнал через "синфазну складову" $x_r[n]$ і "квадратурну складову" $x_i[n]$. Дійсно, як показано на мал ця формула допускає представлення дійснозначних смугових сигналів (або імпульсних характеристик фільтрів), Фур'є-образ яких не являється спряжено-симетричним відносно центру смуги пропускання (як, наприклад, для сигналів виду $x_r[n]\cos(\omega_c n)$).

$$s_r[n] = x_r[n]\cos(\omega_c n) - x_i[n]\sin(\omega_c n) = A[n]\cos(\omega_c n + \varphi[n]),$$

З формул
$$s_i[n] = x_r[n]\sin(\omega_c n) + x_i[n]\cos(\omega_c n) = A[n]\sin(\omega_c n + \varphi[n]).$$

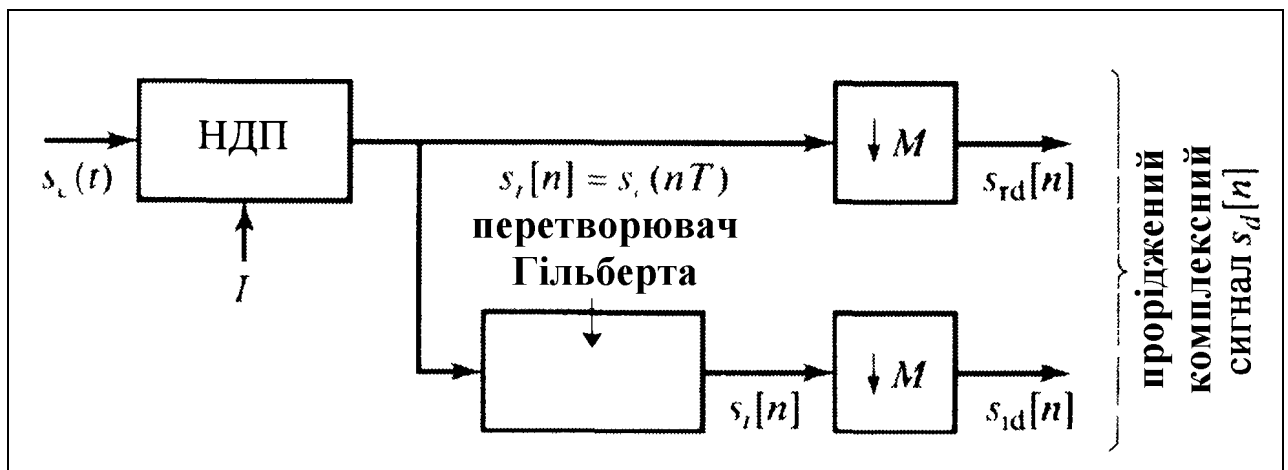
і блок-схем стає зрозумілим, що загальний смуговий сигнал має форму синусоїди з модульованими амплітудою і фазою. Нагадаємо, що послідовність

$A[n]$ називається огибаючою, а $\varphi[n]$ – фазою. Це вузькосмугове представлення сигналу можна використати для різноманітних систем, з модуляцією амплітуди і фази. Приклад, наведений на блок-схемах, ілюструє модуляцію з однією бічною смугою. Блок-схемна реалізація системи, що здійснює цю модуляцію, з нижньочастотним дійсним вхідним сигналом $x_r[n]$ і вихідним $s_r[n]$ показана блок-схемою а). Системи модуляції з однією бічною смугою дуже корисні при розділенні частот в мультиплексній передачі, оскільки вони можуть представляти дійснозначні смугові сигнали з мінімальною смугою частот.

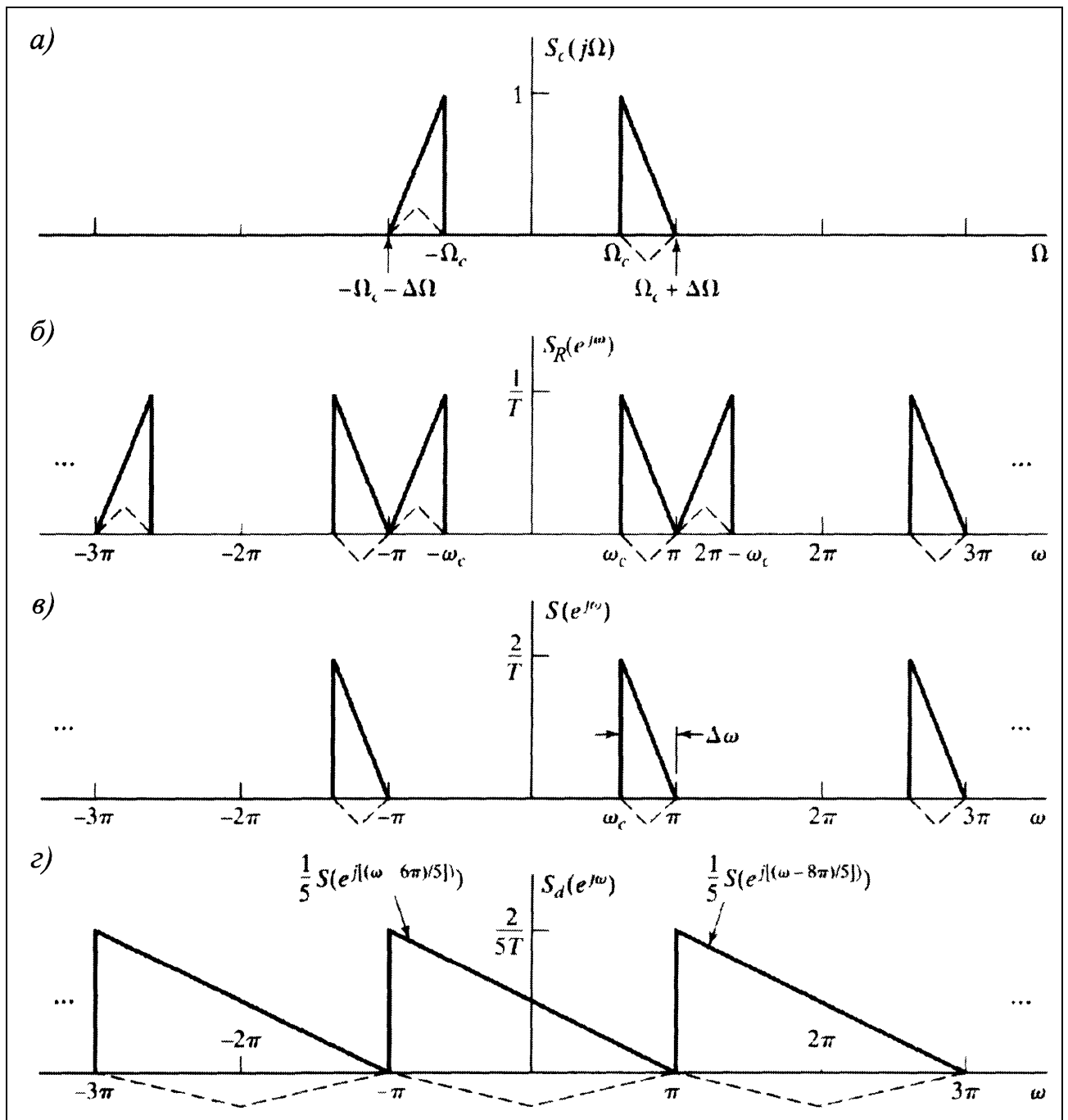
6.4.2. Смугова дискретизація

Інше важливе застосування аналітичних сигналів лежить в області дискретизації смугових сигналів. В загальній ситуації неперервний сигнал з вузькосмуговим Фур'є-образом ($S_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| \geq \Omega_N$) точно представляється своїми відліками, якщо частота дискретизації задовольняє умові $2\pi/T \geq 2\Omega_N$. Ключем до доказу цього результату служить попередження перекриття копій функції $S_c(j\Omega)$, що формують Фур'є-образ послідовності відліків. Фур'є-образ смугового неперервного сигналу має властивість $S_c(j\Omega) = 0$ при $0 \leq |\Omega| \leq \Omega_c$ і $|\Omega| \geq \Omega_c + \Delta\Omega$. Таким чином, ширина його смуги частот, або носія, дійсно складає тільки $2\Delta\Omega$, а не $2(\Omega_c + \Delta\Omega)$, і при відповідній стратегії дискретизації проміжок $-\Omega_c \leq \Omega \leq \Omega_c$ може бути заповнена образами ненульової частини функції $S_c(j\Omega)$ без перекриття. Це зазвичай полегшується використанням комплексного представлення смугових сигналів.

Як ілюстрацію розглянемо блок-схему



і сигнал, зображений на малюнку а) нижче.



Максимальна частота вхідного сигналу дорівнює $\Omega_c + \Delta\Omega$. Якщо цей сигнал дискретизується з частотою Найквіста $2\pi/T = 2(\Omega_c + \Delta\Omega)$, то Фур'є-образ $S_{Re}(e^{j\omega})$ послідовності відліків s_r , що виходить $s_r[n] = s_c(nT)$ матиме вигляд, як на малюнку б). Притягаючи дискретний перетворювач Гільберта, ми можемо сформувати комплексну послідовність $s[n] = s_r[n] + js_i[n]$. Її Фур'є-образ $S(e^{j\omega})$ наведений на мал. в). Ширина смуги, над якою значення $S(e^{j\omega})$ відмінні від нуля, дорівнює $\Delta\omega = \Delta\Omega \cdot T$. Визначаючи M як найбільше ціле число, що не перевершує $2\pi/\Delta\omega$, ми бачимо, що M копій графіка функції $S(e^{j\omega})$ заповнять інтервал $-\pi < \omega < \pi$. (мал. в) $2\pi/\Delta\omega = 5$.) Таким чином, частота дискретизація послідовності $s[n]$ може бути зменшена

проріджуванням. У результаті вийде послідовність $s_d[n] = s_{rd}[n] + js_{id}[n]$, Фур'є-образ якої дорівнює

$$S_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} S\left(e^{j\frac{(\omega-2\pi k)}{M}}\right)$$

На малюнку г) зображений графік $S_d(e^{j\omega})$ з параметром M , рівним 5. Графік $S(e^{j\omega})$ і дві його копії представлені на малюнку в). З малюнків витікає, що накладення спектрів не відбувається, а уся інформація, необхідна для відновлення початкового дискретизованого дійснозначного полосового сигналу, тепер міститься в проміжку $(-\pi; \pi]$ дискретної частоти ω . Далі сигнал можна обробляти різними фільтрами або закодувати його для передачі або запису. Ці процеси відбуваються при низькій частоті дискретизації, що мотивує її зменшення. Первинний вещественнозначний сигнал $s_r[n]$ можна відновити наступним чином:

1. Сформувати послідовність

$$s_e = \begin{cases} s_{rd}[n/M] + js_{rd}[n/M], & n = 0, \pm M, \pm 2M, \dots, \\ 0, & n \neq 0, \pm M, \pm 2M, \dots, \end{cases}$$

2. Профільтрувати сигнал $s_e[n]$ ідеальним комплексним смуговим фільтром з імпульсною характеристикою $h_i[n]$ і характеристичною функцією

$$H_i(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & -\pi < \omega < \omega_c, \\ M, & \omega_c < \omega < \omega_c + \Delta\omega, \\ 0, & \omega_c + \Delta\omega < \omega < \pi, \end{cases}$$

3. Отримати $s_r[n] = \text{Re}(s_r[n] * h_i[n])$.

Тема 7. АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ СТАЦІОНАРНИХ СИСТЕМ

Лекція №11

В часовій області ЛС-системи повністю характеризуються своєю імпульсною характеристикою $h[n]$, згортка якої з вхідним сигналом $x[n]$ дає реакцію

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

З іншого боку, оскільки КЧХ пов'язана з імпульсною характеристикою преутворенням Фур'є, то вона, якщо існує (тобто відповідний ряд сходиться), теж дає повний опис ЛС-системи. Нагадаємо, що в главі 3 ЛС-системи характеризувалися характеристичною функцією $H(z)$, тобто z -перетворенням імпульсної характеристики, узагальнювальним перетворенням Фур'є. При цьому z - перетворенням вхідного сигналу $X(z)$, реакції на нього системи $Y(z)$ і її імпульсної характеристики $H(z)$ задовольняють співвідношенню:

$$Y(z) = H(z)X(z),$$

виконаному в перетині областей збіжності (ОЗ) z -перетворень відповідних членів. Оскільки послідовність і її z -перетворення утворюють єдину пару, тобто z -перетворення взаємно однозначне, то будь-яка ЛС-система повністю описується своєю характеристичною функцією (необхідно припускати збіжність). Як КЧХ, так і характеристична функція надзвичайно корисні при аналізі ЛС-систем, оскільки вони дозволяють без особливих зусиль отримати багато властивостей відгуку системи.

7.1. Комплексна частотна характеристика ЛС-систем

КЧХ ЛС-системи була визначена як комплексний коефіцієнт (власне значення), на який система домножає експоненціальний вхідний сигнал (власну функцію) $e^{j\omega n}$. Більше того, було показано, що, оскільки Фур'є-образ послідовності представляється у вигляді лінійної комбінації комплексних експонент, Фур'є-образи сигналу $X(e^{j\omega})$ і відгуку на нього $Y(e^{j\omega})$, системи пов'язані співвідношенням:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}).$$

У полярній системі координат ця формула набирає вигляду:

$$\begin{aligned} |Y(e^{j\omega})| &= |H(e^{j\omega})| \cdot |X(e^{j\omega})|, \\ \angle Y(e^{j\omega}) &= \angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega}). \end{aligned}$$

Ненегативна вещественнозначная функція $|H(e^{j\omega})|$ називається амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ) системи, а $\angle H(e^{j\omega})$ –

фазово-частотною характеристикою (ФЧХ) системи. Дія системи на вхідний сигнал, представлена наведеними у формулах, може бути бажаною, якщо воно веде до корисного перетворення сигналу, або небажаною в іншому випадку. Небажана дія системи на сигнал, описана цими формулами, називається амплітудним і фазовим спотворенням відповідно.

7.1.1. Ідеальні частотно-вибіркові фільтри

Важливим наслідком формули являється той факт, що частотні компоненти вхідного сигналу, при яких АЧХ $|H(e^{j\omega})|$ системи досить мала, придушуються на виході. Чи потрібне нам це придушення або не потрібне, залежить від конкретної задачі. Загальне поняття частотно-вибіркових фільтрів формалізується з допомога визначення конкретних ідеальних КЧХ. Наприклад, ідеальний фільтр нижніх частот (ФНЧ) вводиться як дискретна ЛС-система з 2π - періодичною КЧХ:

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$

завдяки якій ідеальний ФНЧ пропускає низькочастотні компоненти сигналу і зрізує високочастотні. Імпульсна характеристика ФНЧ має вигляд:

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty.$$

Аналогічно, ідеальний фільтр верхніх частот (ФВЧ) визначається як ЛС-система з КЧХ

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_c, \\ 1, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

Оскільки $H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega})$, його імпульсна характеристика описується співвідношенням:

$$h_{hp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n] = \delta[n] - \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}.$$

Ідеальний ФНЧ пропускає сигнал неспотвореним в смузі частот $|\omega| < \omega_c$ і зрізує його при усіх частотах вище ω_c . Інші частотно-виборчі фільтри визначалися в прикладі 2.19. Ідеальні ФНЧ відносяться до недетермінованих систем, і їх імпульсна характеристика тягнеться від $-\infty$ до $+\infty$. Таким чином, вихідний сигнал ідеальних ФНЧ і ФВЧ неможливо вичислити як рекурсивним, так і нерекурсивним способом, тобто ці фільтри не відносяться до систем, що обчислювально реалізуються. До іншої важливої властивості ідеального ФНЧ відноситься тривіальність його ФЧХ. Якби вона була ненульовою, в смузі пропускання фільтру з'явилось фазово

спотворення, що порушило б його ідеальність. Однак детерміновані апроксимації ідеальних частотно-вибіркових фільтрів мають ненульові ФЧХ.

7.1.2. Фазове спотворення і затримка

Розглянемо ідеальну систему затримки. Її 2π - періодична імпульсна характеристика має вигляд:

$$h_{id}[n] = \delta[n - n_d],$$

а КЧХ описується формулою

$$H_{id}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}$$

або

$$\begin{aligned} |H_{id}(e^{j\omega})| &= 1, \\ \angle H_{id}(e^{j\omega}) &= -\omega n_d, \quad |\omega| < \pi. \end{aligned}$$

Тут і далі вважатимемо, що n_d - ціле число. Спотворення, що вносяться затримкою, у багатьох застосуваннях вважаються досить помірною формою спотворення фази, оскільки при цьому відбувається усього лише зміщення послідовності в часі. Часто таким спотворенням можна просто нехтувати або компенсувати його, вводячи затримуючі підсистеми у велику систему. Таким чином, при проектуванні апроксимацій ідеальних фільтрів і інших ЛС-систем зупиняються на лінійній ФЧХ, оскільки нульова, властива ідеалізованій ситуації, - недосяжна. Наприклад, ідеальний ФНЧ з лінійною фазою визначається як система з КЧХ

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_d}, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

Його імпульсна характеристика дорівнює

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin \omega_c(n - n_d)}{\pi(n - n_d)}, \quad -\infty < n < \infty.$$

Аналогічно можна визначити інші ідеальні частотно-вибіркові фільтри з лінійною фазою. Ці фільтри могли б робити бажаний вплив на конкретну смугу частот вхідного сигналу і затримувати його n_d відліків. Помітимо, проте, що незалежно від величини затримки n_d ідеальні ФНЧ завжди будуть недетермінованими. Відхилення ФЧХ від лінійної зручно досліджувати за допомогою групової затримки, основна концепція якої відноситься до дії системи на фазу вузькосмугового сигналу. Розглянемо реакцію системи з КЧХ $H(e^{j\omega})$ на вузькосмуговий сигнал виду $x[n] = s[n]\cos(\omega_0 n)$. Оскільки ми

припускаємо, що функція $X(e^{j\omega n})$ відмінна від нуля тільки поблизу частоти ω_0 , ФЧХ системи в околиці точки ω_0 можна описати наближеною рівністю:

$$\angle H(e^{j\omega}) \approx -\varphi_0 - \omega n_d.$$

Враховуючи цю апроксимацію, можна показати (див. завдання 5.57), що реакція системи на сигнал $x[n] = s[n] \cos(\omega_0 n)$ приблизно дорівнює

$$y[n] \approx |H(e^{j\omega_0})| s[n - n_d] \cos(\omega_0 n - \varphi_0 - \omega_0 n_d).$$

Отже, тимчасова затримка огинаючої $s[n]$ вузькосмугового сигналу $x[n]$ з Фур'є-перетворенням, зосередженим в точці ω_0 , задається негативним нахилом фази в $\omega = \omega_0$. Апроксимуючи ФЧХ $\angle H(e^{j\omega})$ в околиці точки ω_0 , необхідно розглядати цю характеристику як неперервну функцію від ω . У зв'язку з цим будемо позначати ФЧХ як $\arg[H(e^{j\omega})]$ і називати неперервною фазою функції $H(e^{j\omega})$. При такій точці зору на ФЧХ групова затримка системи визначається за формулою

$$\tau(\omega) = \text{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega} (\arg[H(e^{j\omega})]).$$

тому відхилення групової затримки від константи показує міру нелінійності фази.

7.2. Характеристичні функції систем, що описуються лінійними різницевиими рівняннями з постійними коефіцієнтами

Незважаючи на те що ідеальні частотно-виборчі фільтри дуже корисні з теоретичної точки зору, на практиці реалізувати їх неможливо. Тому цікаво розглянути клас систем, які, з одного боку, можна реалізувати в "залізі" або на програмному рівні, а з іншої - служать апроксимацією ідеальних фільтрів. Існують системи, пара сигнал - відгук яких задовольняє лінійному різницевому рівнянню з постійними коефіцієнтами виду

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k].$$

Було показано, що за допомогою цього рівняння відгук детермінованої системи можна вичислити рекурсивно. Якщо додатково обумовлений стан спокою в початковому положенні, то система виявляється детермінованою нелінійною і стаціонарною. Властивості і характеристики ЛС-систем, пара сигнал - відгук яких задовольняє лінійним різницевиим рівнянням з постійними коефіцієнтами, краще всього вивчати на мові z-перетворення.

Застосовуючи z-перетворення до обох частин рівняння і враховуючи властивості лінійності і тимчасового зрушення z-перетворення отримуємо

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$$

або, в рівносильному записі,

$$\left(\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \right) Y(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) X(z).$$

З наведених формул витікає, що характеристична функція систем, що описуються різницеvim рівнянням, має вигляд:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}.$$

Таким чином, оскільки обидві частини формули є ksysqyj. Комбінацією зсунутих відліків, а характеристична функція являється відношенням многочленів від z^{-1} . Звичайно, її можна було б переписати і як раціональну функцію від змінної z , але, як правило, цього не роблять. Часто виявляється корисним розкладання многочленів чисельника і знаменника на множники:

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}.$$

Кожен із співмножників $(1 - c_k z^{-1})$ чисельника відповідає простому нулю характеристичній функції в точці $z = c_k$ і простому полюсу в точці $z = 0$. Аналогічно, множник знаменника $(1 - d_k z^{-1})$ відповідає за полюс в точці $z = d_k$ і нуль в $z = 0$. Існує тісний взаємозв'язок між виразами алгебри разностного рівняння і характеристичної функції. Точніше, многочлен чисельника дробу має ті ж коефіцієнти і структуру алгебри, що і права частина рівняння (члени виду $b^{\wedge}z^{-k}$ виходять із доданків $b_k x[n - \text{до}]$), тоді як многочлен знаменника копіює ліву частину різницевого рівняння (члени виду $a^{\wedge}z^{-h}$ відповідають доданкам $a_i u[p - \text{до}]$). Отже, маючи характеристичну функцію виду Е.20), легко отримати різницеве рівняння, і, навпаки, по рівнянню без зусиль можна виписати характеристичну функцію.

7.2.1. Стійкість і детермінованість

При виведенні попередніх формул припускалося, що наша система лінійна і стаціонарна, але ніяких припущень про стійкість і детермінованість не робили. Як наслідок, з різницевого рівняння ми можна отримати вираження алгебри характеристической функції, але нічого не можна сказати про ОЗ того, що відповідає z -перетворенню (нагадаємо, що ми називаємо ОЗ функції, ОЗ суми її ряду). Дійсно, для визначення ОЗ функції $H(z)$, для відповідного різницевого рівняння достатньо існування перетину ОЗ функцій $X(z)$ і $Y(z)$. Цей факт узгоджується з тим, що, імпульсна характеристика ЛС-системи різницеvim рівнянням визначається неоднозначно. Взагалі кажучи існує декілька можливостей для того, що має в розпорядженні ОЗ характеристичної функції. При фіксованому відношенні многочленів будь-якої з можливих виборів ОЗ веде до своєї, відмінної від других імпульсної характеристики, хоча усі вони відповідають одному і тому ж різницевому рівнянню. Проте, припустивши, що система детермінована, ми отримаємо, що імпульсна характеристика $h[n]$ має бути правосторонньою і, отже, ОЗ характеристичної функції $H(z)$ повинна представляти собою зовнішність кола з максимально віддаленим від центру полюсом на його межі. З іншого боку, допустившись стійкість системи, ми можемо скористуватися висновком, згідно з яким імпульсна характеристика стійкої системи має бути абсолютно підсумовуваною, тобто.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty.$$

Умова абсолютної суммируемости рівносильна наступному утвердженню:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]z^{-n}| < \infty \quad \text{при } |z| = 1.$$

Отже, стійкість системи еквівалентна тому, що ОЗ характеристичної функції містить одиничне коло. Таким чином, детермінованість і стійкість не обов'язково повинні бути притаманні ЛС-системі одночасно. Щоб ЛС-система, яка описується різницеvim рівнянням, була одночасно і детермінованою, і стійкою, ОЗ характеристичної функції повинна, з одного боку, розташовуватися даліше від нуля, ніж полюс з максимальним модулем, а з іншої - містити одиничне коло.

7.2.2. Зворотні системи

Нехай дана ЛС-система з характеристичною функцією $H(z)$. Зворотною до неї називається система з характеристичною функцією $H_i(z)$, яка при послідовательном з'єднанні з даною дає систему з одиничною характеристичною функцією, тобто

$$G(z) = H(z)H_i(z) = 1.$$

Звідси витікає, що

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)}.$$

Рівносильна умова на імпульсні характеристики взаємно-зворотних систем має вигляд

$$g[n] = h[n] * h_i[n] = \delta[n].$$

З останньої формули витікає зв'язок КЧХ (за умови їх існування) :

$$H_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})},$$

т. є. $H_i(e^{j\omega})$ і $H(e^{j\omega})$ - взаємно зворотні величини. Отже, логарифми АЧХ, ФЧХ і групові затримки взаємно-зворотних систем протилежні по знаку. Далеко не усі системи мають зворотну. Наприклад, у ідеального ФНЧ такої немає, оскільки немає принципової можливості відновити компоненти частот, що перевищують частоту відсічення, які обнуляються цим фільтром. З іншого боку, багато систем мають зворотну, і клас систем з раціональною характеристичною функцією - дуже корисний і цікавий приклад таких систем. Розглянемо функцію

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

з нулями в точках c_k , полюсами d_k і можливими нулями і полюсами в 0 і ∞ . Тоді

$$H_i(z) = \left(\frac{a_0}{b_0} \right) \frac{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})},$$

тобто полюси функції $H_i(z)$ - це нулі $H(z)$, і навпаки. Цікаве питання про ОЗ функції $H_i(z)$. Відповідь виходить з теореми про згортку. Формула згортки обернених ЛС буде вірна тільки у тому випадку, коли ОЗ функцій $H_i(z)$ і $H(z)$ перекриватимуться. Наприклад, ОЗ характеристичною функції детермінованої системи описується нерівністю:

$$|z| > \max_k |d_k|.$$

Тому будь-яка множина, що має точки, які задовольняють цій нерівності, годиться для ОЗ функції $H_i(z)$. Таким чином якщо $H(z)$ -характеристична функція детермінованої системи з нулями в точках c_k , де $k=1, \dots, M$, то зворотна система буде детермінована тоді і тільки тоді, коли ОЗ функції $H_i(z)$ задовольняє нерівності

$$|z| > \max_k |c_k|.$$

А якщо при цьому $\max_k |c_k| < 1$, то зворотна система буде до того ж і стійкою. Інакше кажучи, для стійкості зворотної системи необхідно, щоб усі нулі функції $H(z)$ потрапляли в середину одиничного кола. Отже, ЛС-система стійка, детермінована і має стійку детерміновану зворотну систему тоді і тільки тоді, коли полюси і нулі її характеристичної функції потрапляють всередину одиничного кола. Такі системи називають минимально-фазовими.

7.2.3. Імпульсна характеристика систем з раціональною характеристичною функцією

Метод розкладання дробу в суму простих при обчисленні зворотного z -перетворення, можна примінити до раціональної характеристичної функції $H(z)$ і отримати загальну формулу для відповідної імпульсної характеристики. Нагадаємо, що будь-яку раціональну функцію від z^{-1} з простими полюсами можна записати у вигляді

$$H(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}},$$

де перший доданок правої частини можна вичислити діленням в стовпчик чисельника дробу на знаменник. Ясно, що воно відмінне від нуля, тільки якщо $M \geq N$.

Якщо у функції $H(z)$ є кратний полюс, її розкладання в суму простих дробів матиме вигляд

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^s \frac{C_m}{(1 - d_i z^{-1})^m}.$$

ОЗ детермінованої системи повинна розташовуватися далі від нуля, ніж будь-який полюс її характеристичної функції, тобто далі за будь-яку з точок d_k . Отже, імпульсна характеристика такої системи дорівнює

$$h[n] = \sum_{r=0}^{M-N} B_r \delta[n-r] + \sum_{k=1}^N A_k d_k^n u[n],$$

причому перший доданок відмінний від нуля тільки при $M \geq N$.

При вивченні ЛС-систем їх зручно розбити на два великі класи. До першого з них відносяться системи з такою $H(z)$, у якої хоча б один ненульовий полюс не скорочується з нулем. В цьому випадку у виразі для імпульсної характеристики обов'язково є присутнім член виду $A_k (d_k)^n u[n]$ і $h[n]$ матиме нескінченно багато ненульових відліків. Системи такого типу називають системами з безскінченною імпульсною характеристикою (БІХ-системами).

До другого класу відносяться системи, чиї характеристичні функції не мають полюсів ніде, окрім точки $z=0$, тобто для таких систем $N=0$, і характеристична функція виявляється просто многочленом від z^{-1}

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}.$$

Без обмеження спільності можна вважати, що $a_0=1$. Використовуючи таблиці z -перетворення, можна легко відновити імпульсну характеристику:

$$h[n] = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k] = \begin{cases} b_n, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{інаше.} \end{cases}$$

В цьому випадку імпульсна характеристика - кінцева послідовність, тобто усі її відліки, за винятком кінцевого числа, дорівнюють нулю, завдяки чому системи з такою імпульсною характеристикою називають системами з кінцевою імпульсною характеристикою (КІХ-системами). Помітимо, що різницеве рівняння, що характеризує КІХ-системи, має вигляд згортки :

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k].$$

7.3. КЧХ систем з раціональною характеристичною функцією

Якщо характеристична функція стійкої ЛС-системи раціональна (тобто її пара сигнал - відгук задовольняє різницевого рівнянню, то комплексная частотна характеристика (КЧХ) цієї системи, визначена на одиничному колі, має вигляд:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}}.$$

Іншими словами, $H(e^{j\omega})$ - відношення многочленів від змінної $e^{j\omega}$. Для обчислення АЧХ, ФЧХ і групової затримки цієї системи слід виразити $H(e^{j\omega})$ через полюси і нулі функції $H(z)$. Таке вираження виходить в результаті підстановки $z = e^{j\omega}$.

$$H(e^{j\omega}) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k e^{-j\omega})}.$$

З останньої формули витікає співвідношення

$$|H(e^{j\omega})| = \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \frac{\prod_{k=1}^M |1 - c_k e^{-j\omega}|}{\prod_{k=1}^N |1 - d_k e^{-j\omega}|}.$$

Іноді буває зручно розглядати не сам модуль характеристичної функції, а його квадрат:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}),$$

де зірочкою, як завжди, позначається комплексне сполучення. Обчислюючи цей квадрат для функції $H(e^{j\omega})$ знаходимо

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k e^{-j\omega})(1 - c_k^* e^{j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k e^{-j\omega})(1 - d_k^* e^{j\omega})}.$$

З формули видно, що АЧХ $|H(e^{j\omega})|$ дорівнює добутку модулів усіх множників чисельника функції $H(z)$, вчислених на одиничному колі,

діленому на добуток усіх множників знаменника, вчислених там же. Зазвичай цей добуток переписують у вигляді суми логарифмів.

$$20 \lg |H(e^{j\omega})| = 20 \lg \left| \frac{b_0}{a_0} \right| + \sum_{k=1}^M 20 \lg |1 - c_k e^{-j\omega}| - \sum_{k=1}^N 20 \lg |1 - d_k e^{-j\omega}|.$$

Функцію $20 \lg |H(e^{j\omega})|$ називають логарифмом АЧХ системи і вимірюють в децибелах (дБ). Іноді цю величину називають коефіцієнтом посилення в дБ:

$$\text{коефіцієнт посилення в дБ} = 20 \lg |H(e^{j\omega})|.$$

Таким чином, коефіцієнт загтухання позитивний, коли АЧХ менше одиниці. Ще одна перевага запису АЧХ в децибелах витікає з формули:

$$20 \lg |Y(e^{j\omega})| = 20 \lg |H(e^{j\omega})| + 20 \lg |X(e^{j\omega})|,$$

так що АЧХ, виражена в децибелах, будучи складеною з логарифмом модуля Фур'є-образу вхідного сигналу, дає логарифм модуля перетворення Фур'є відгуку системи. ФЧХ систем з раціональною характеристичною функцією має вигляд:

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle \left(\frac{b_0}{a_0} \right) + \sum_{k=1}^M \angle (1 - c_k e^{-j\omega}) - \sum_{k=1}^N \angle (1 - d_k e^{-j\omega}).$$

Множники чисельника тут дають вклад зі знаком "+" а знаменника - зі знаком "-". Відповідна груповая затримка рівна

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=1}^N \frac{d}{d\omega} (\arg[1 - d_k e^{-j\omega}]) - \sum_{k=1}^M \frac{d}{d\omega} (\arg[1 - c_k e^{-j\omega}]),$$

де символ $\arg[]$ закріплений за безперервною фазою. Цю формулу можна переписати як

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=1}^N \frac{|d_k|^2 - \text{Re}\{d_k e^{-j\omega}\}}{1 + |d_k|^2 - 2\text{Re}\{d_k e^{-j\omega}\}} - \sum_{k=1}^M \frac{|c_k|^2 - \text{Re}\{c_k e^{-j\omega}\}}{1 + |c_k|^2 - 2\text{Re}\{c_k e^{-j\omega}\}}.$$

Фаза кожного члена у формулі визначена неоднозначно. Дійсно, якщо у будь-якому доданку її правої частини частоту із замінити на $\omega + 2\pi k$ з цілим k , то значення суми, тобто і ФЧХ не зміниться. З іншого боку, обчислюючи групову затримку, ми повинні диференціювати безперервні функції. При пошуку аргументу комплексного числа за допомогою комп'ютерних програм виходить його головне значення. Головним значенням фази (аргументу) числа $H(e^{j\omega})$ називається величина, $\text{ARG}[H(e^{j\omega})]$, яка задовольняє нерівності:

$$-\pi < \text{ARG}[H(e^{j\omega})] \leq \pi.$$

Будь-який інший кут, що дає те ж саме комплексне значення функції виражається через головне значення:

$$\angle H(e^{j\omega}) = \text{ARG} [H(e^{j\omega})] + 2\pi r(\omega),$$

де $r(\omega)$ - ціле число, залежне від ω . Якщо нічого не обумовлено особливо, будемо вважати, що кожен доданок формули – це головне значення аргументу. У загальному випадку функція $\text{ARG}[H(e^{j\omega})]$ кусочно безперервна. Розриви першого роду в ній з'являються в точках підскоку головного значення аргументу на 2π радіан. Приклад такої функції показаний на мал. 1, де зображені графіки безперервною ФЧХ $\arg[H(e^{j\omega})]$ і її головного значення $\text{ARG}[H(e^{j\omega})]$ на проміжку $0 \leq \omega \leq \pi$. Графік безперервної функції з мал. 1 а) виходить за межі напівінтервалу $(-\pi; \pi]$. Головне значення, графік якого розміщений на мал. 1 б), має скачки в 2π радіан із-за цілих кратних числа 2π , які треба відняти від значень фази, щоб її графік помістився в напівінтервал $(-\pi; \pi]$. Ці цілі, кратні $r(\omega)$, представлені на мал. 1 в). Розглянемо формулу, в якій для обчислення вкладу у фазу кожного доданку використовується головне значення. Ясно, що

$$\begin{aligned} \text{ARG} [H(e^{j\omega})] = \text{ARG} \left[\frac{b_0}{a_0} \right] + \sum_{k=1}^M \text{ARG} [1 - c_k e^{-j\omega}] - \\ - \sum_{k=1}^N \text{ARG} [1 - d_k e^{-j\omega}] + 2\pi r(\omega), \end{aligned}$$

Де $r(\omega)$ - цілі числа, залежні від ω . Останній член $2\pi r$ потрібний тому, що сума головних значень аргументу не зобов'язана потрапляти в напівінтервал $(-\pi; \pi]$, тобто бути головним значенням. Головне значення ФЧХ можна обчислювати і через арктангенс відношення дійсної і уявної частин функції $H(e^{j\omega})$:

$$\text{ARG} [H(e^{j\omega})] = \text{arctg} \left[\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} \right].$$

Проте при вичисленні групової затримки за цією формулою доводиться брати похідну безперервної фазової функції, тобто диференціювати функцію $\arg[H(e^{j\omega})]$

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega} \{ \arg[H(e^{j\omega})] \}.$$

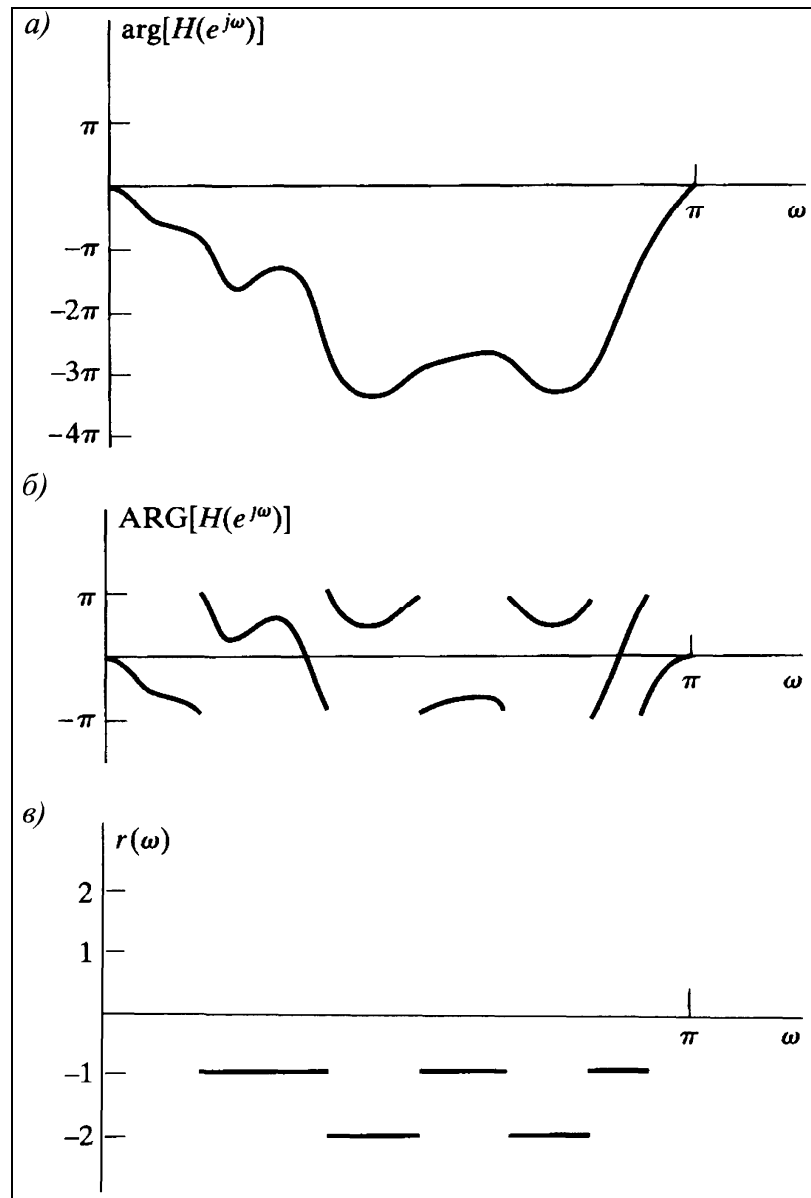
Ясно, що усюди, за винятком точок розриву, має місце рівність:

$$\frac{d}{d\omega} \{ \arg[H(e^{j\omega})] \} = \frac{d}{d\omega} \{ \text{ARG}[H(e^{j\omega})] \}.$$

Таким чином, групову затримку можна знаходити, диференціюючи і головне значення, пам'ятаючи лише про кінцеве число точок розриву. Групову затримку можна записати і через неоднозначну фазу як

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega} \{ \angle H(e^{j\omega}) \},$$

ігноруючи точки розриву функції $\angle H(e^{j\omega})$



а) графік безперервного аргументу характеристичної функції, обмеженою на одиничне коло; б) головне значення функції з частини (а) малюнка; в) цілі кратні 2π , рівні різниці функцій $\arg[H(e^{j\omega})]$ та $\text{ARG}[H(e^{j\omega})]$

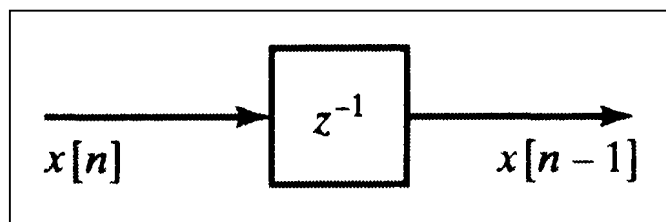
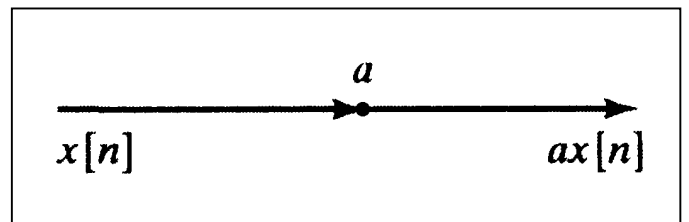
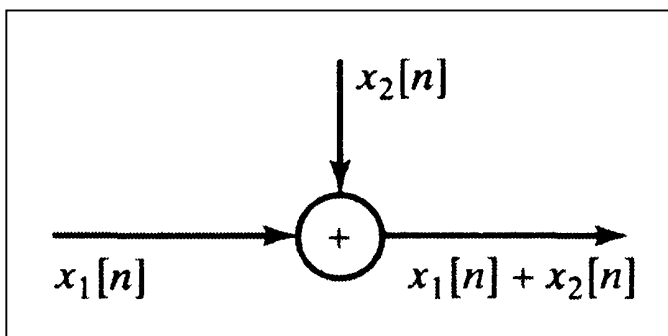
Тема 8. СТРУКТУРИ ДЛЯ ДИСКРЕТ-НИХ СИСТЕМ

Лекція №12

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]. \quad H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

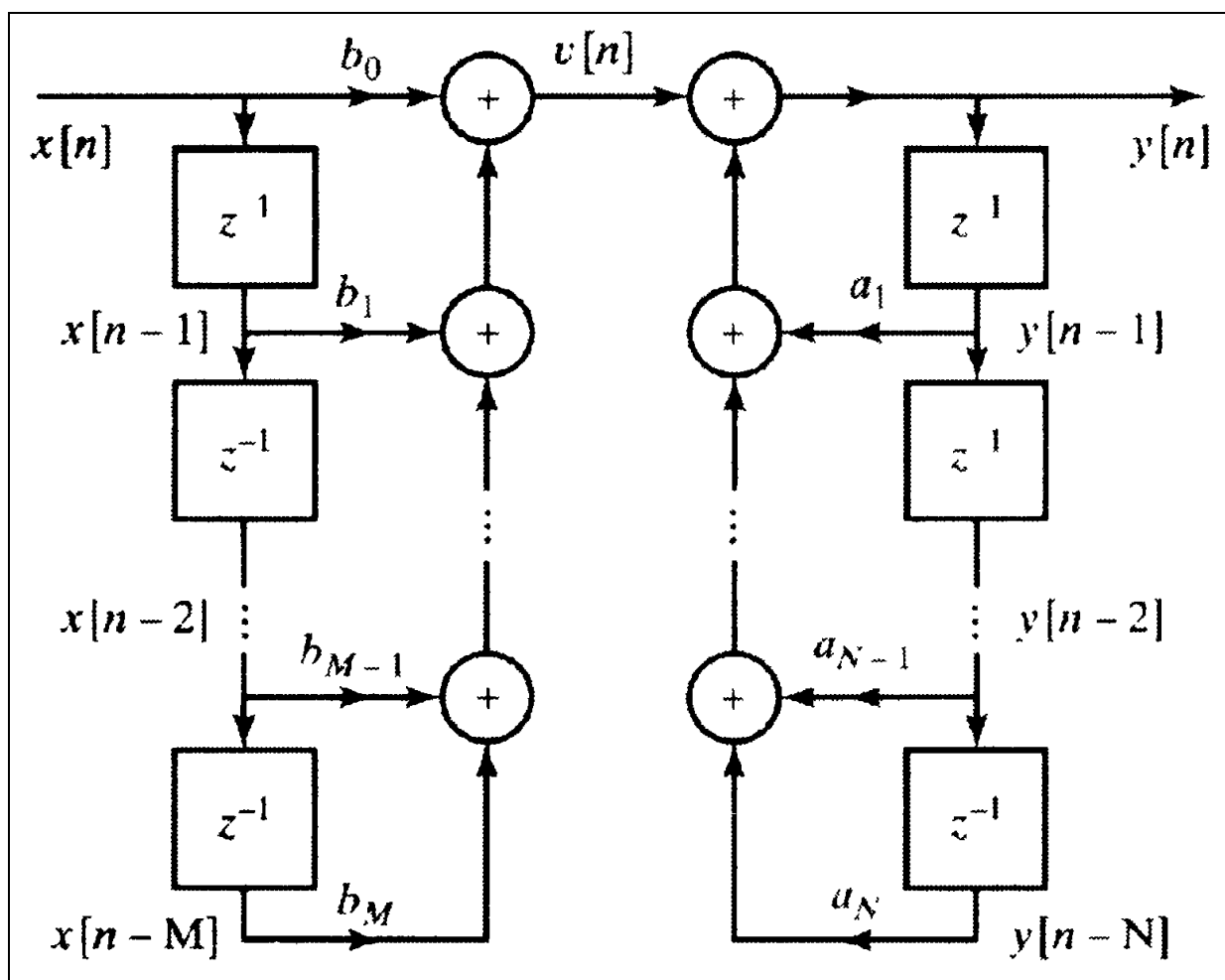
$$y[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}.$$

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k].$$



$$v[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + v[n].$$

Пряма форма I



$$H(z) = H_2(z)H_1(z) = \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right) \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right)$$

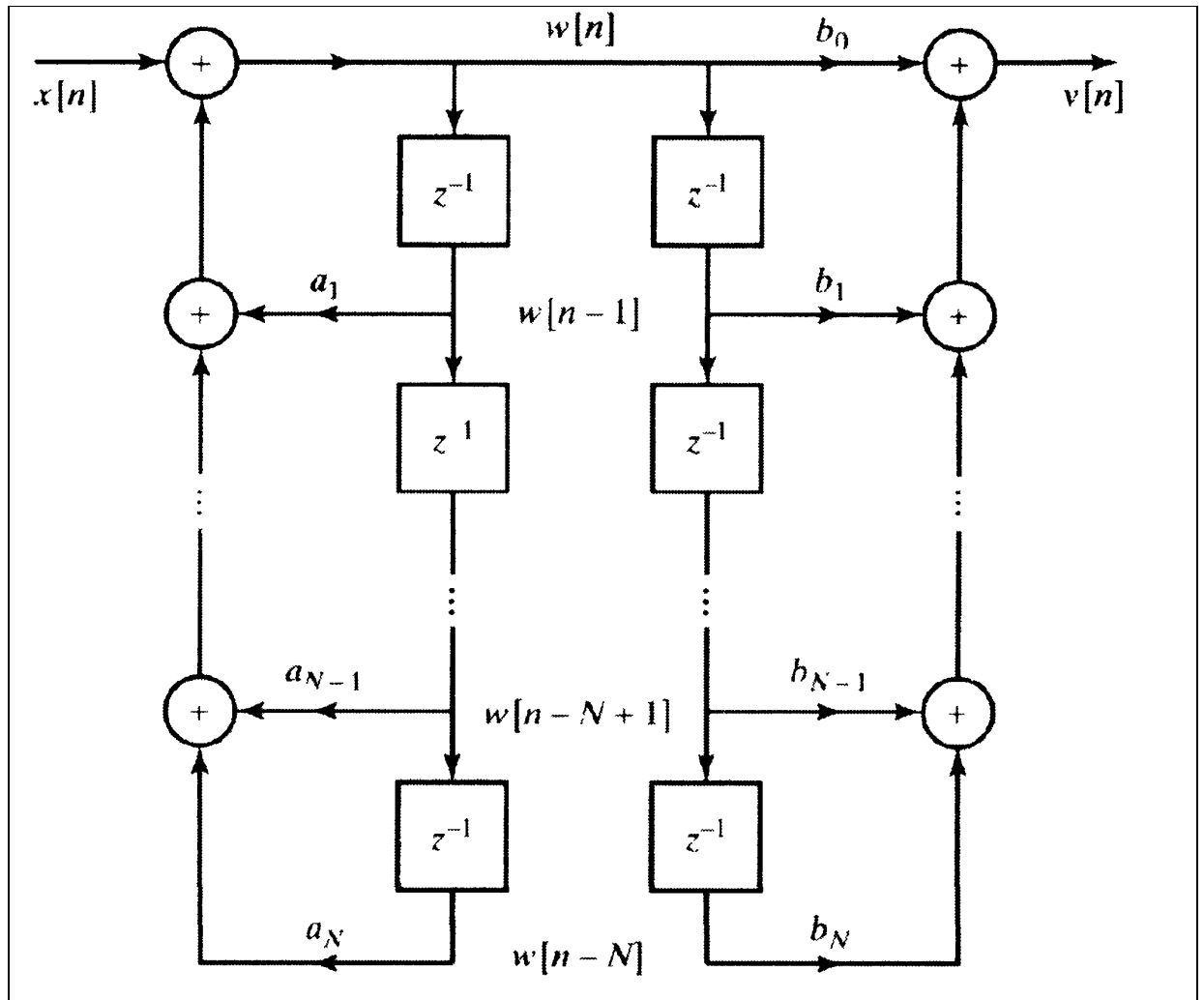
$$V(z) = H_1(z)X(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) X(z),$$

$$Y(z) = H_2(z)V(z) = \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right) V(z).$$

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right)$$

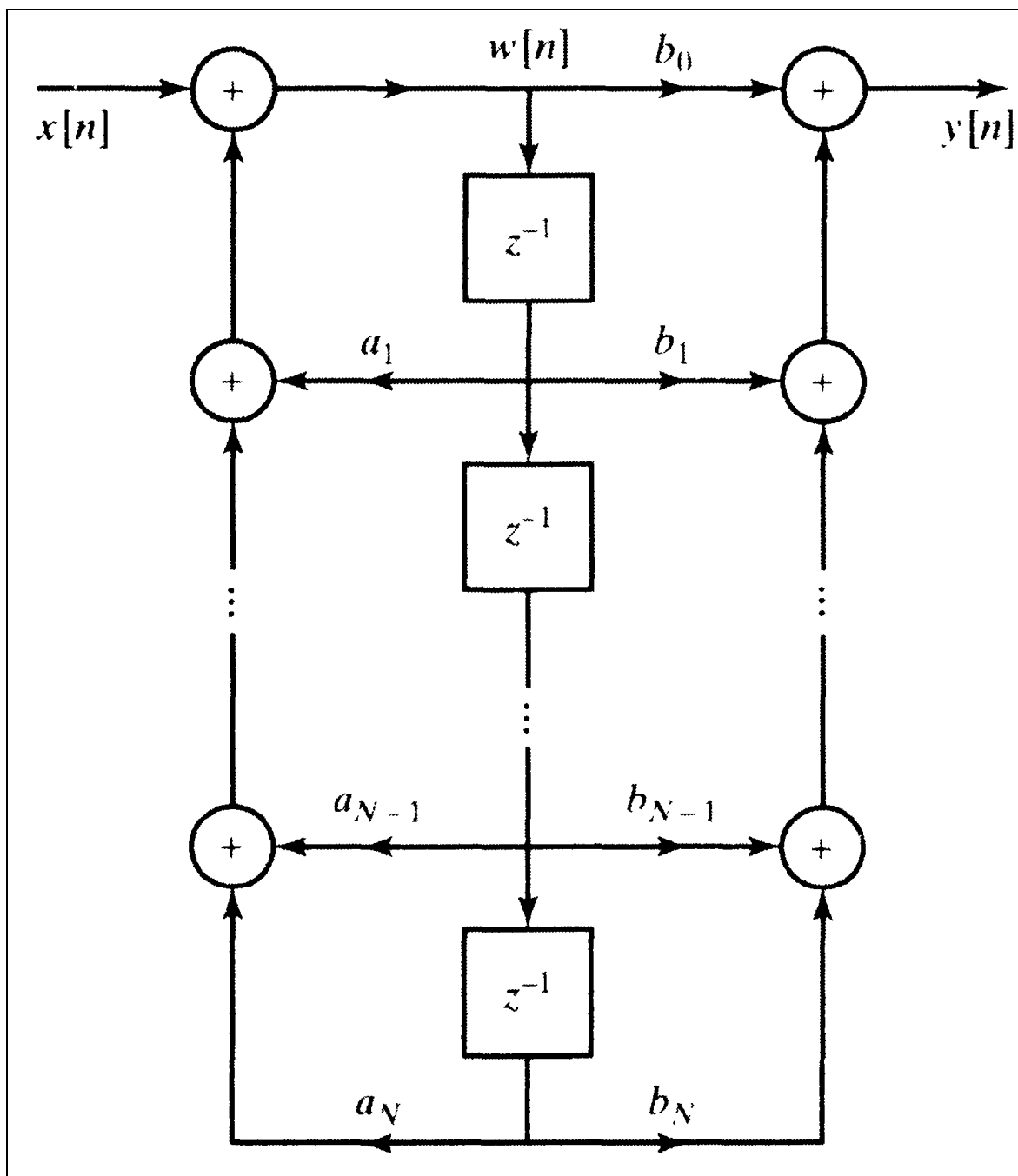
$$W(z) = H_2(z)X(z) = \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right) X(z)$$

$$Y(z) = H_1(z)W(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) W(z).$$

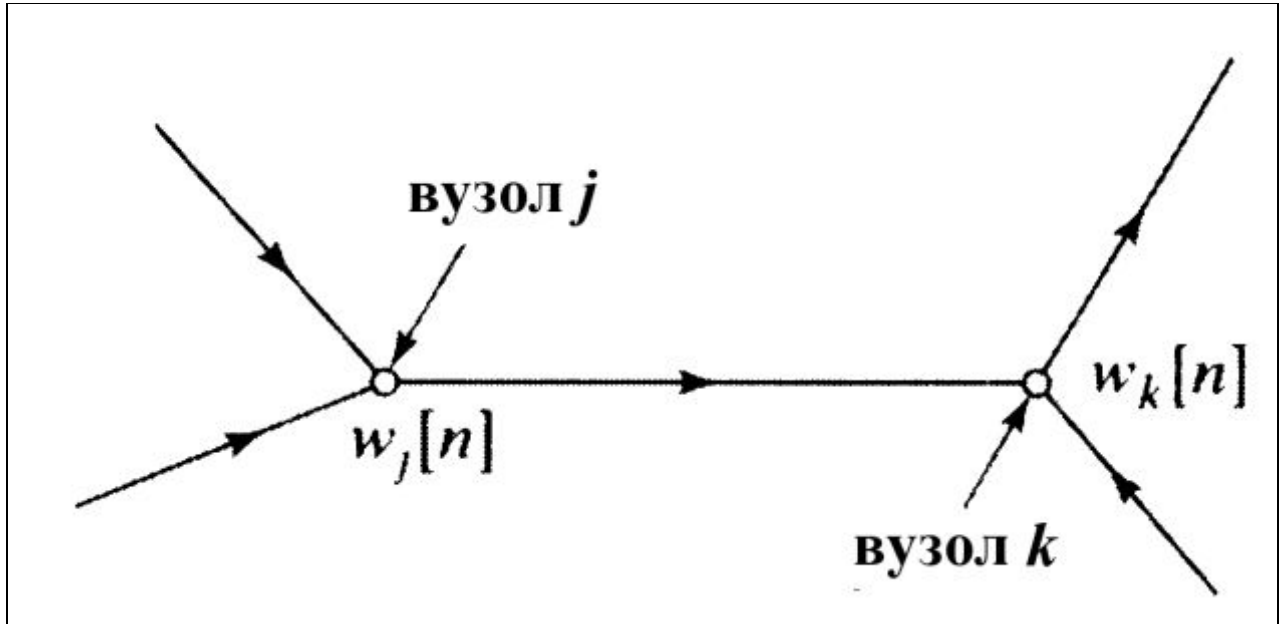


$$w[n] = \sum_{k=1}^N a_k w[n-k] + x[n], \quad y[n] = \sum_{k=0}^M b_k w[n-k].$$

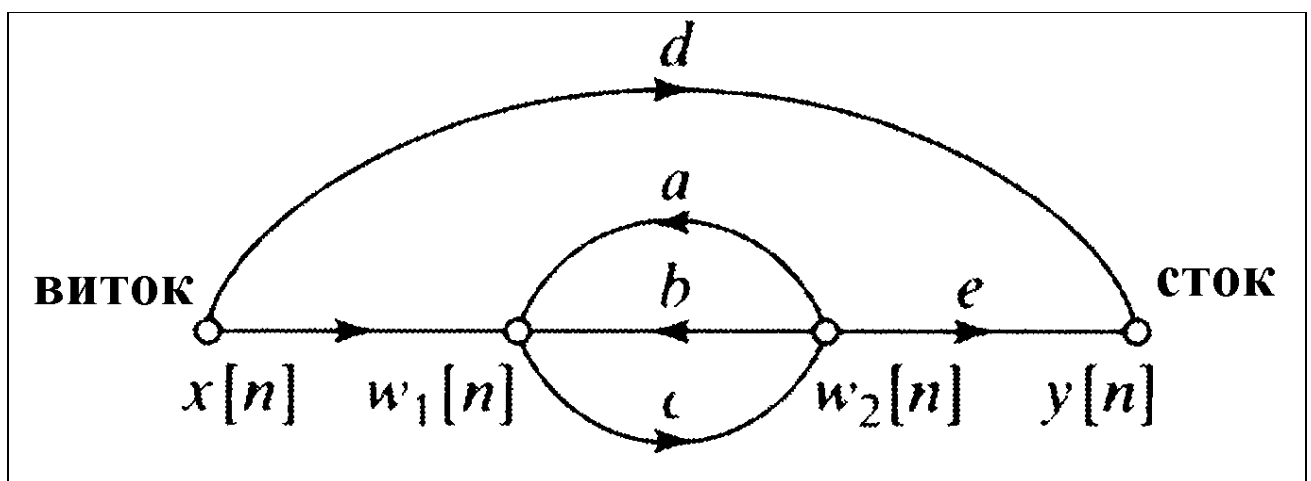
Канонічна форма



СИГНАЛЬНИЙ ПОТОКОВИЙ ГРАФ ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ



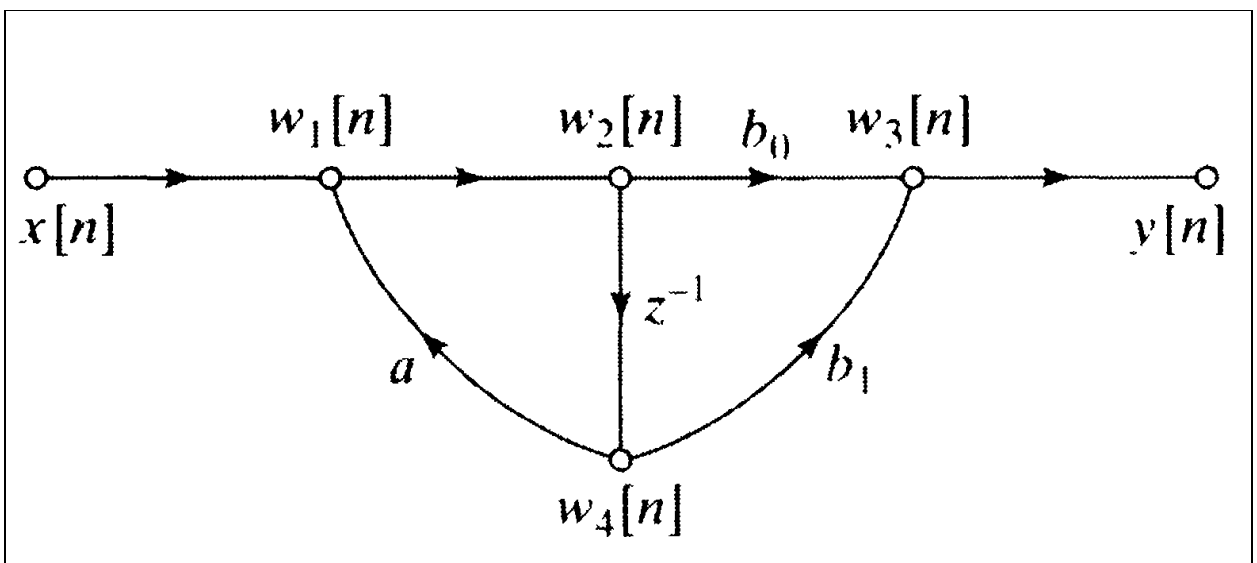
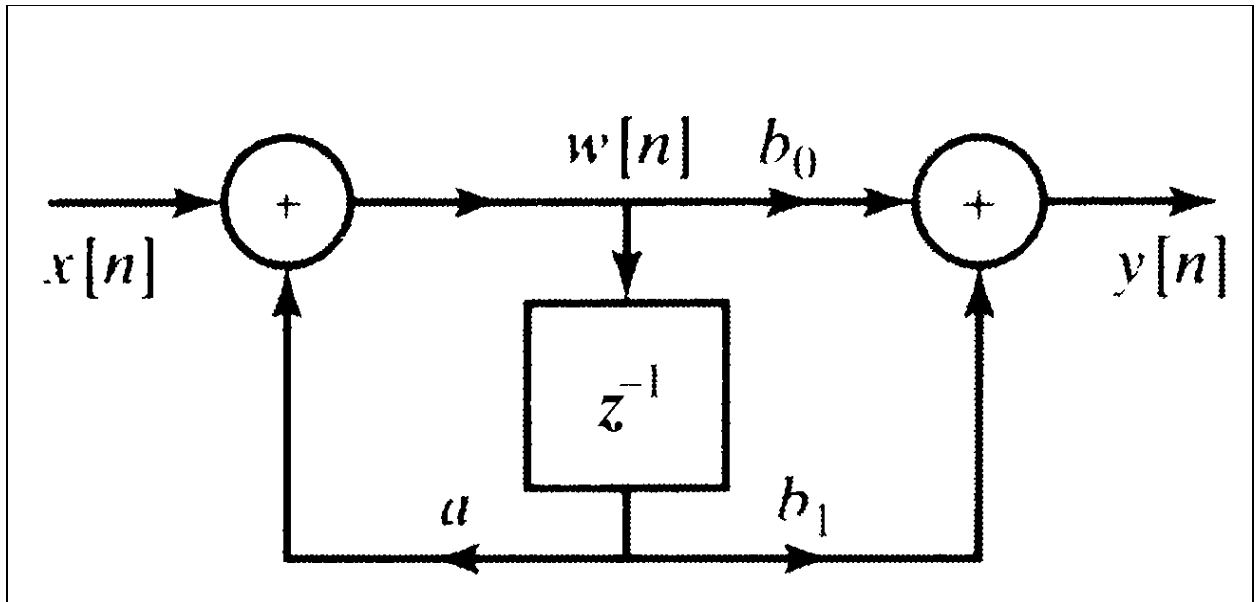
(j, k) – гілка графа $w_j[n]$ – вузол графа



$$w_1[n] = x[n] + aw_2[n] + bw_2[n], \quad w_2[n] = cw_1[n],$$

$$y[n] = dx[n] + ew_2[n].$$

$$\begin{aligned}
 w_1[n] &= aw_4[n] + x[n], & w_2[n] &= w_1[n], \\
 w_3[n] &= b_0w_2[n] + b_1w_4[n], & w_4[n] &= w_2[n-1], \\
 y[n] &= w_3[n].
 \end{aligned}$$



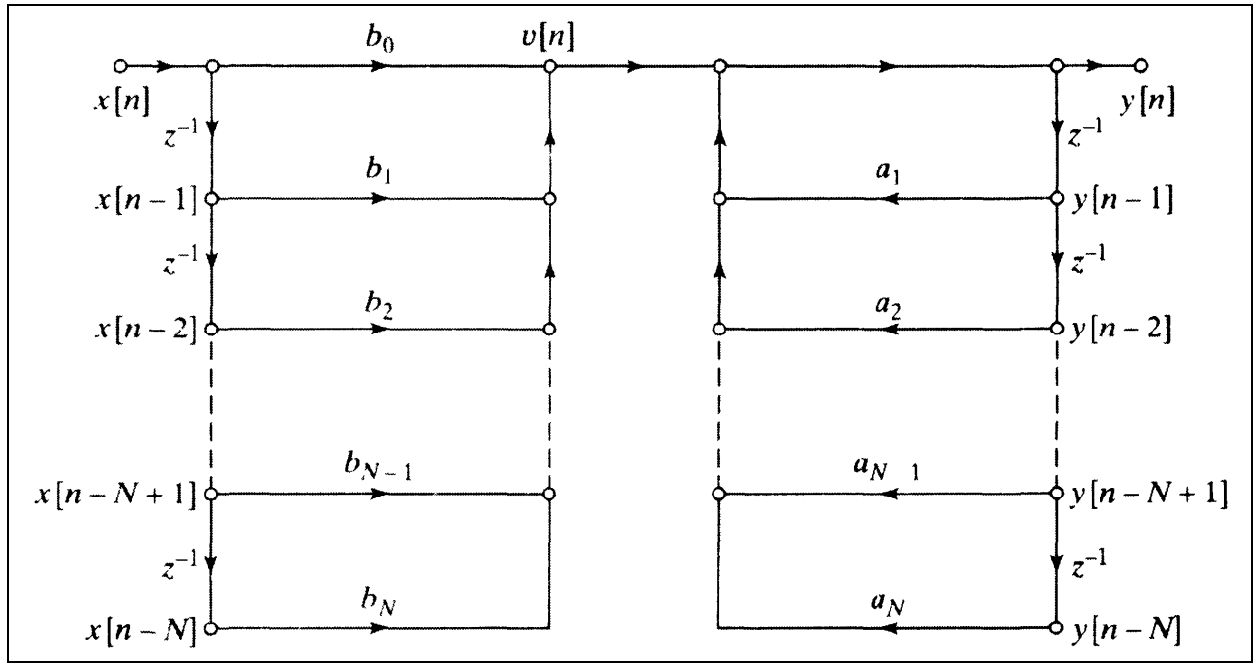
$$w_2[-1] = 0 \quad a \neq 0 \quad w_4[0] = 0.$$

$$\begin{aligned}
 w_2[n] &= aw_2[n-1] + x[n], \\
 y[n] &= b_0w_2[n] + b_1w_2[n-1],
 \end{aligned}$$

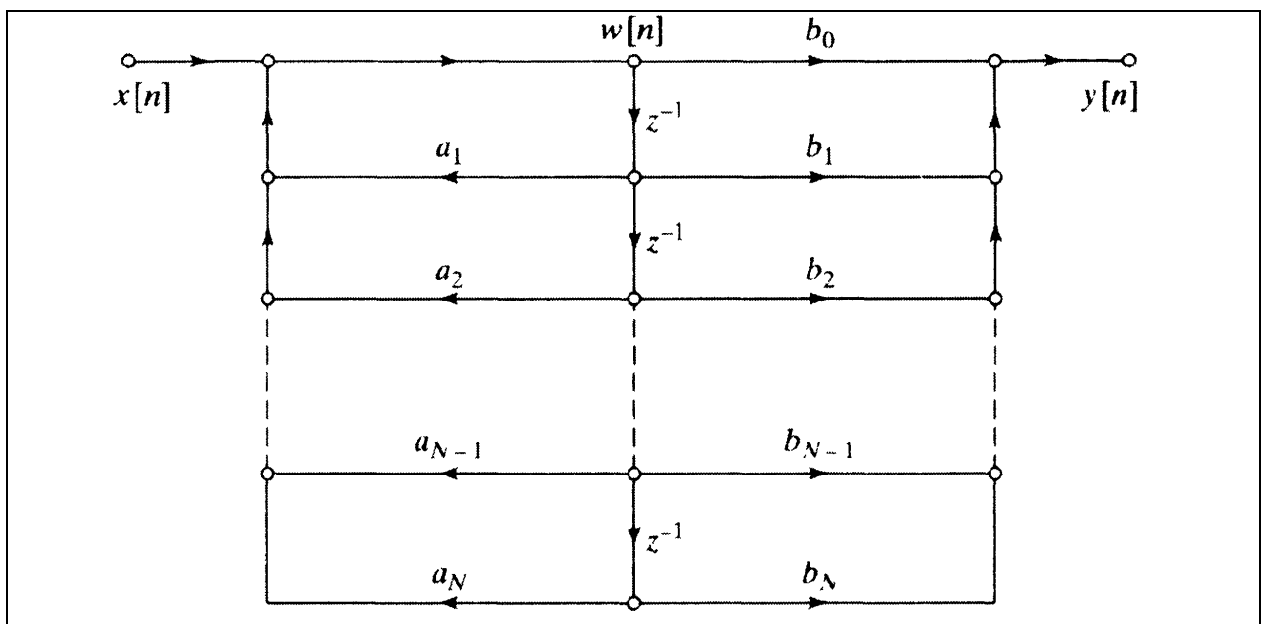
Лекція №13

ОСНОВНІ СТРУКТУРИ БІХ-СИСТЕМ

Пряма форма I



Пряма форма II



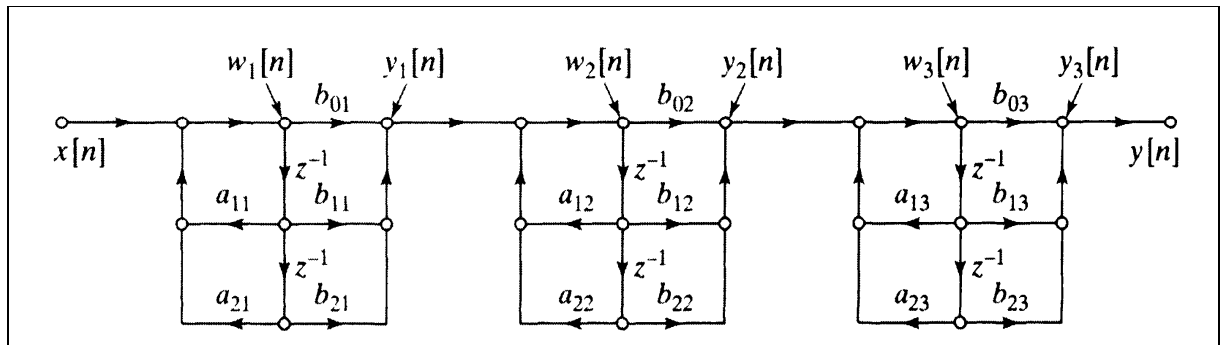
КАСКАДНІ ФОРМИ

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - f_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - g_k z^{-1})(1 - g_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})},$$

де $M = M_1 + 2M_2$ і $N = N_1 + 2N_2$.

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_s} \frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}},$$

де $N_s = (N + 1)/2$ – ціла частина дробу $(N + 1)/2$



$$y_0[n] = x[n],$$

$$w_k[n] = a_{1k} w_k[n-1] + a_{2k} w_k[n-2] + y_{k-1}[n], \quad k = 1, 2, \dots, N_s,$$

$$y_k[n] = b_{0k} w_k[n] + b_{1k} w_k[n-1] + b_{2k} w_k[n-2], \quad k = 1, 2, \dots, N_s,$$

$$y[n] = y_{N_s}[n].$$

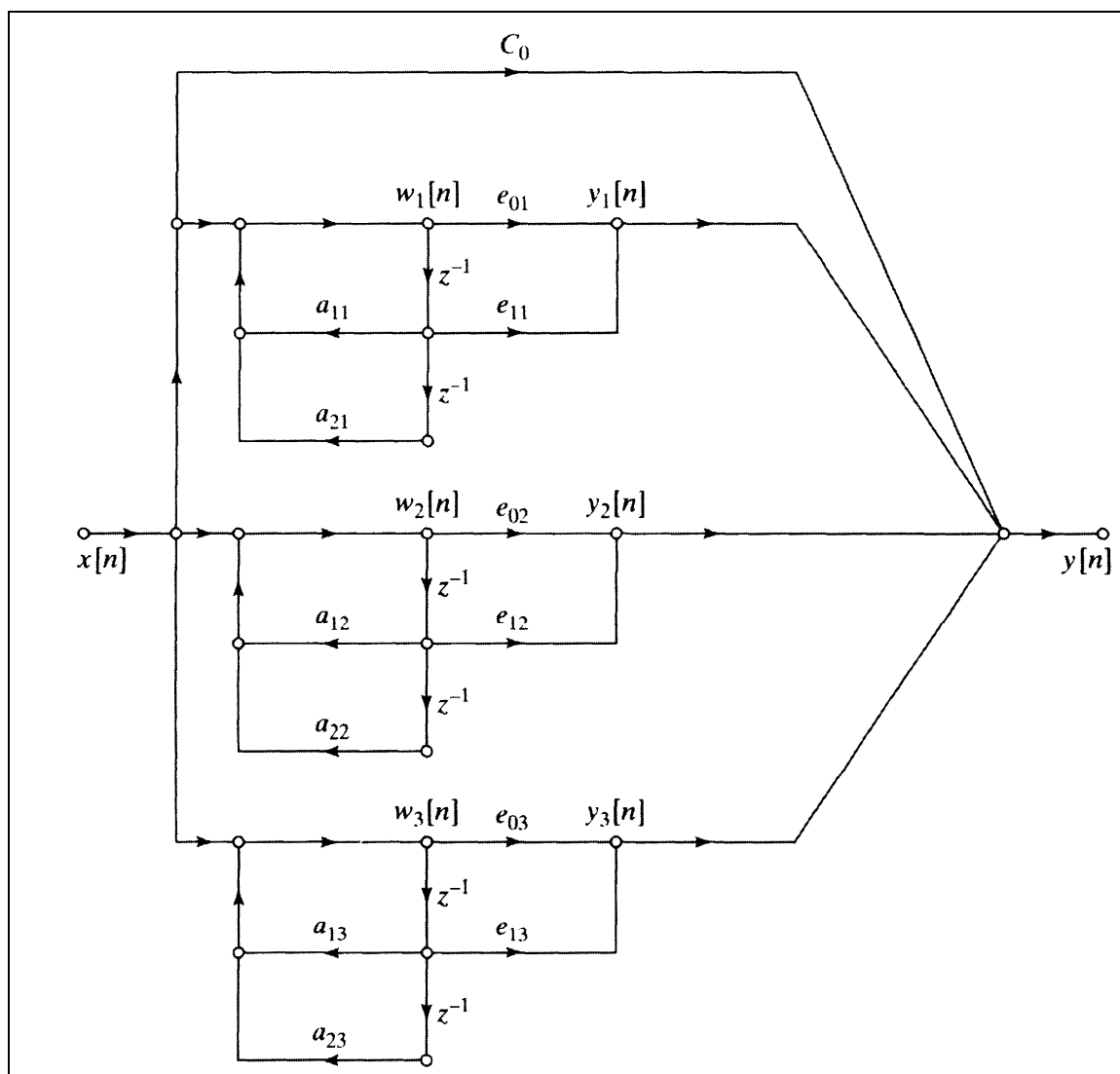
Існує $N_s!$ комбінацій парування нулів та полюсів,
тобто $(N_s!)^2$ каскадних реалізацій

ПАРАЛЕЛЬНІ ФОРМИ

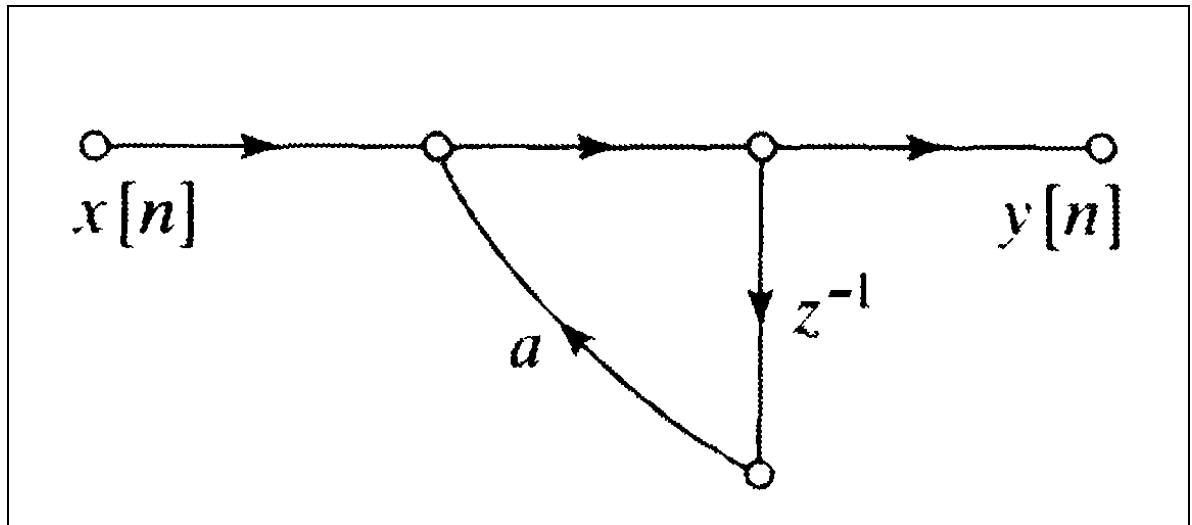
$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k (1 - e_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})},$$

де $N = N_1 + 2N_2$. Якщо $M \geq N$, то $N_p = M - N$

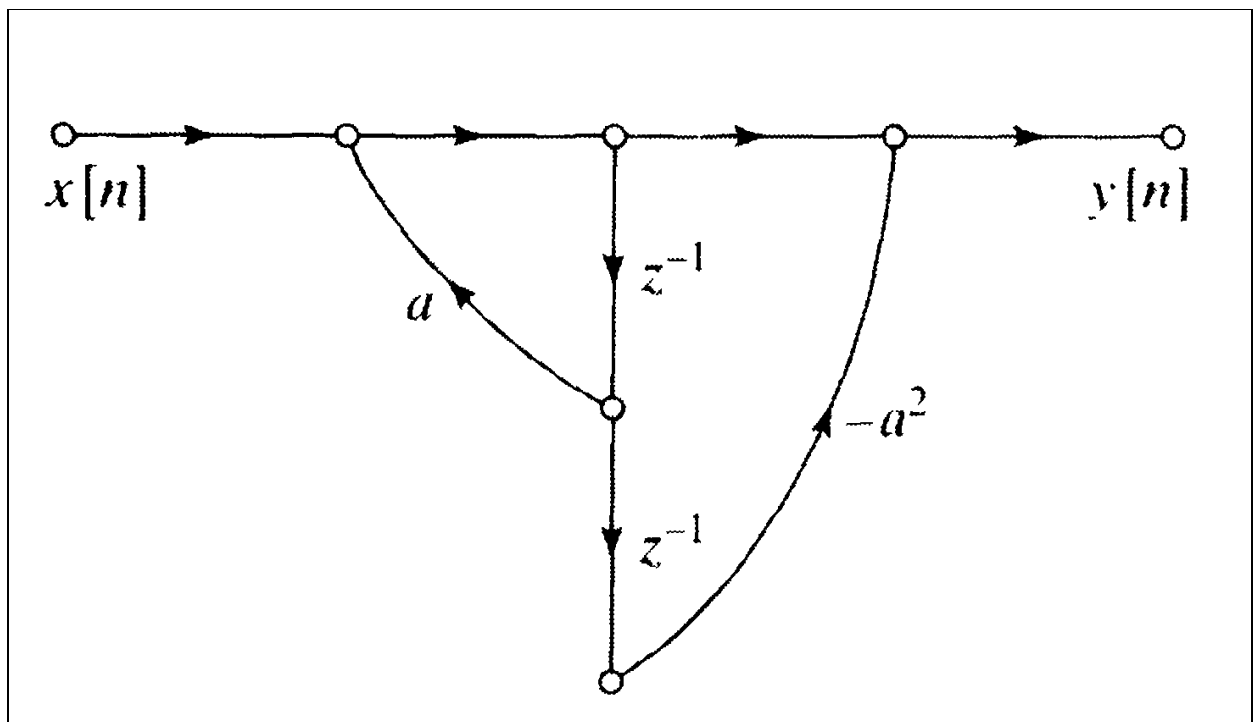
$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{e_{0k} + e_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}.$$



ЗВОРОТНИЙ ЗВ'ЯЗОК У БИХ-СИСТЕМАХ

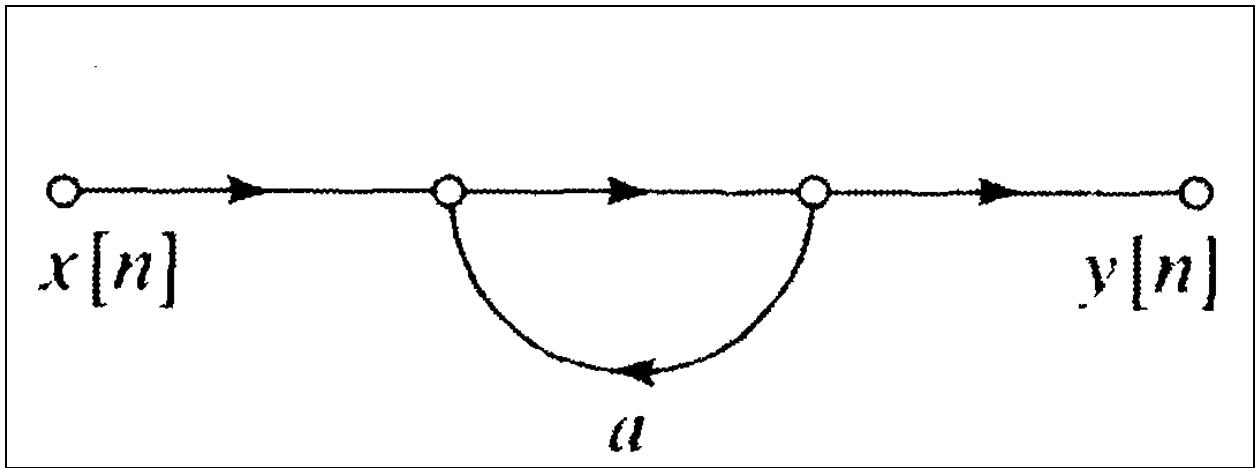


$$h[n] = a^n u[n].$$



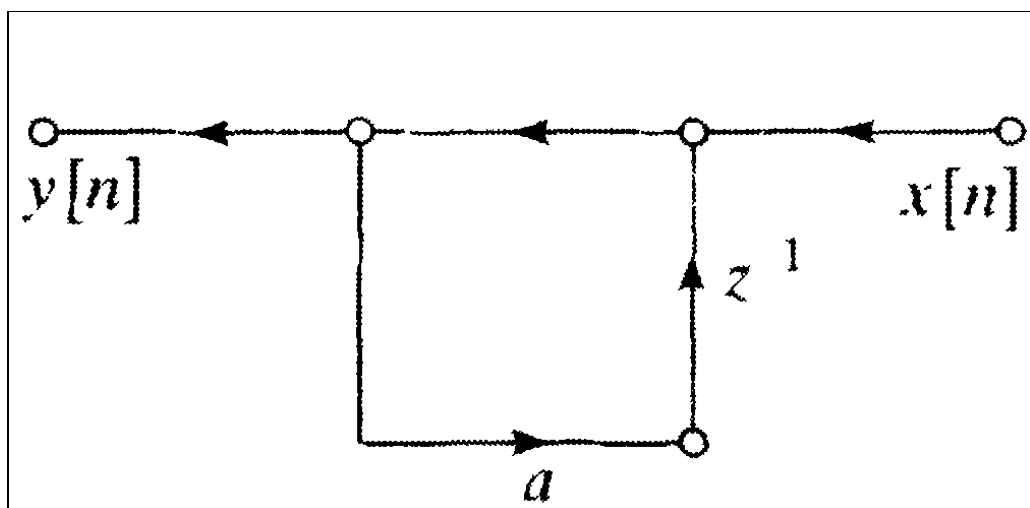
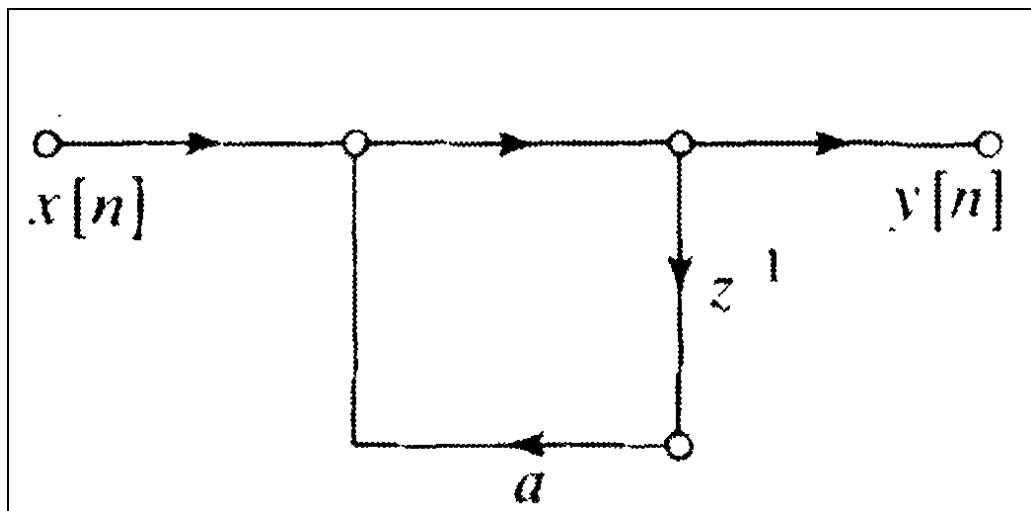
$$H(z) = \frac{1 - a^2 z^{-2}}{1 - az^{-1}} = \frac{(1 - az^{-1})(1 + az^{-1})}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1}.$$

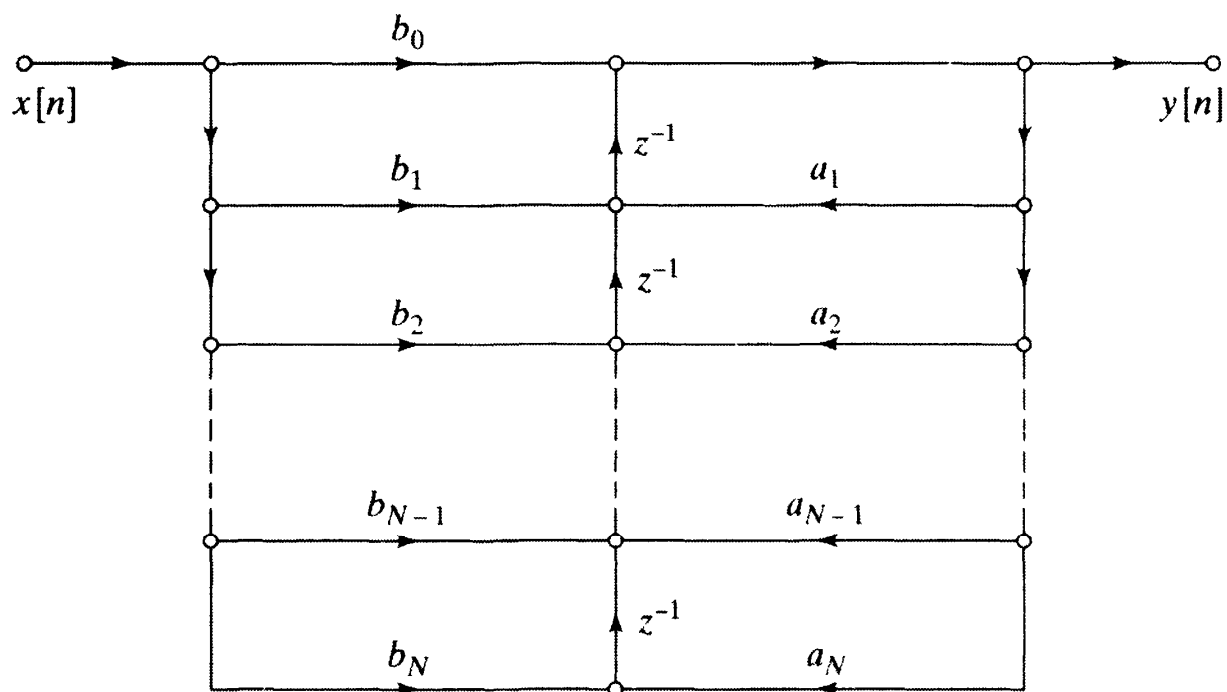
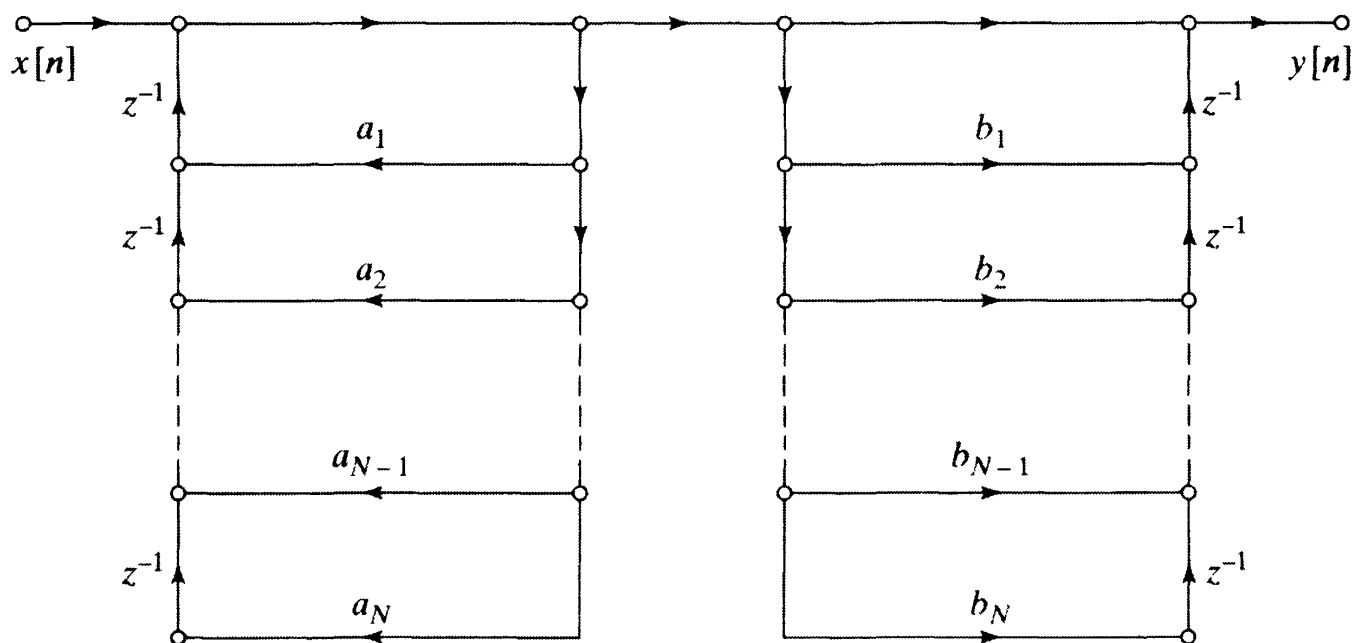
$$h[n] = \delta[n] + a\delta[n - 1]$$



$$y[n] = ay[n] + x[n]. \quad y[n] = x[n]/(1 - a).$$

ТРАНСПОНОВАНІ ФОРМИ

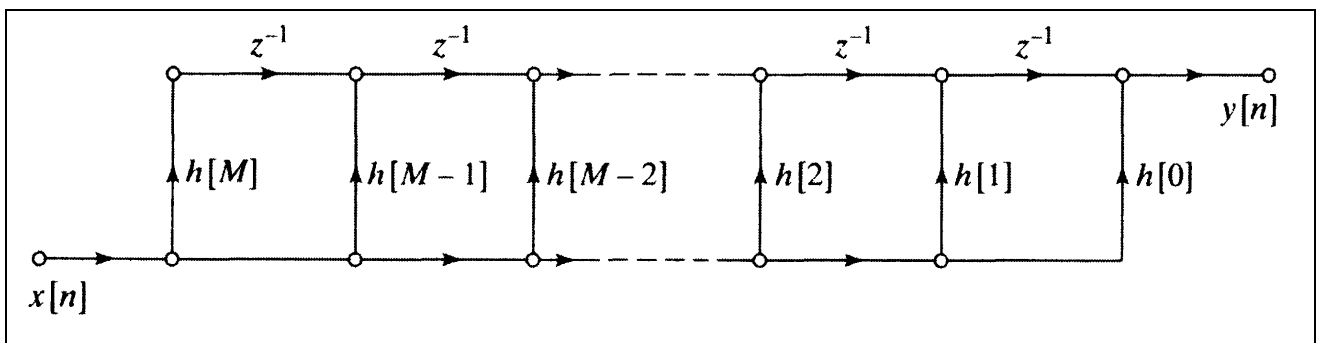
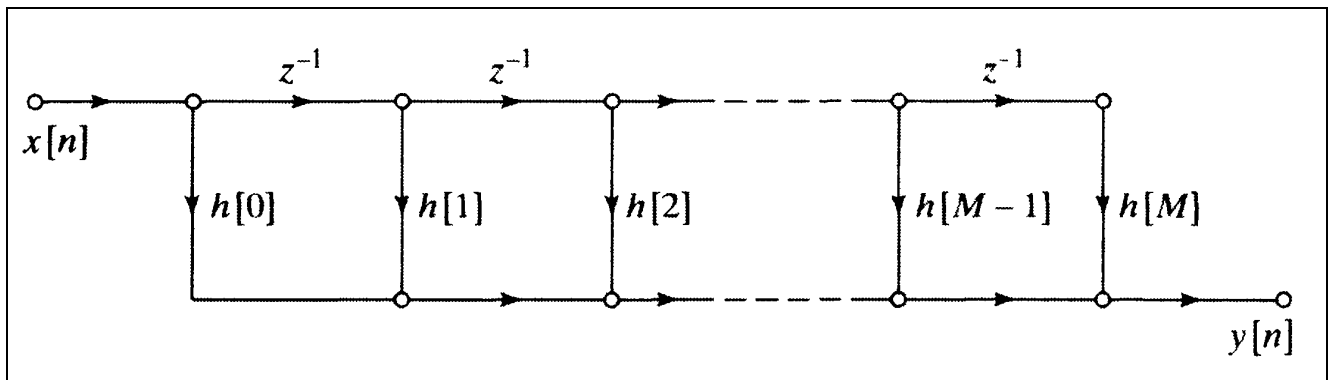




ОСНОВНІ МЕРЕЖЕВІ СТРУКТУРИ КИХ-СИСТЕМ

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k],$$

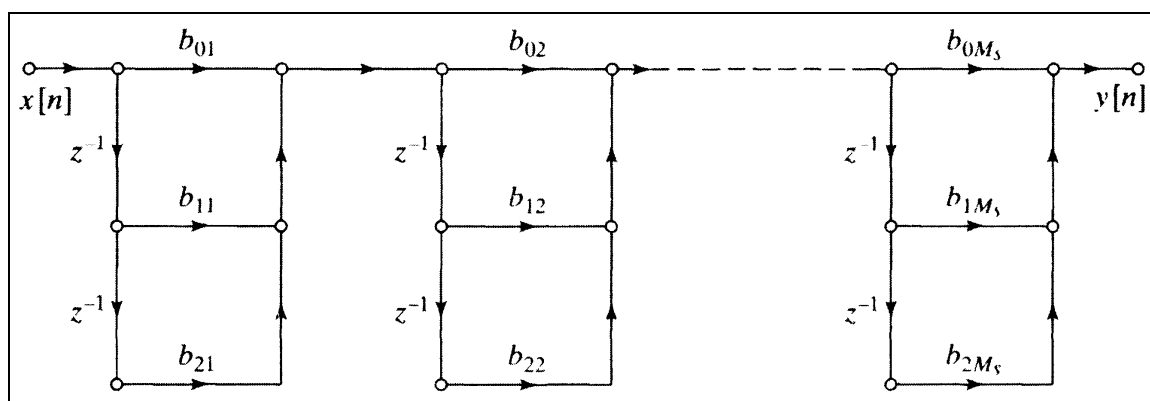
$$h[n] = \begin{cases} b_n, & n = 0, 1, \dots, M, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$



КАСКАДНА ФОРМА

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n} = \prod_{k=1}^{M_s} (b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}),$$

де $M_s = (M + 1)/2$ — ціла частина дробу $(M + 1)/2$



СТРУКТУРИ КИХ-СИСТЕМ З ЛІНІЙНОЮ ФАЗОЮ

$$H_{\text{id}}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha}, \quad |\omega| < \pi,$$

$$|H_{\text{id}}(e^{j\omega})| = 1, \quad \angle H_{\text{id}}(e^{j\omega}) = -\omega\alpha, \quad \text{grd} H_{\text{id}}(e^{j\omega}) = \alpha.$$

$$h_{\text{id}}[n] = \frac{\sin \pi(n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)}, \quad -\infty < n < \infty.$$

$$\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=0}^M h[k]x[n-k] = \\
&= \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k]x[n-k] + h[M/2]x[n-M/2] + \sum_{k=M/2+1}^M h[k]x[n-k] = \\
&= \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k]x[n-k] + h[M/2]x[n-M/2] + \sum_{k=0}^{M/2-1} h[M-k]x[n-M+k].
\end{aligned}$$

$$h[M-n] = h[n], \quad n = 0, 1, \dots, M$$

$$h[M-n] = -h[n], \quad n = 0, 1, \dots, M.$$

Для симметричних систем:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k](x[n-k] + x[n-M+k]) + h[M/2]x[n-M/2].$$

Для антисиметричних систем:

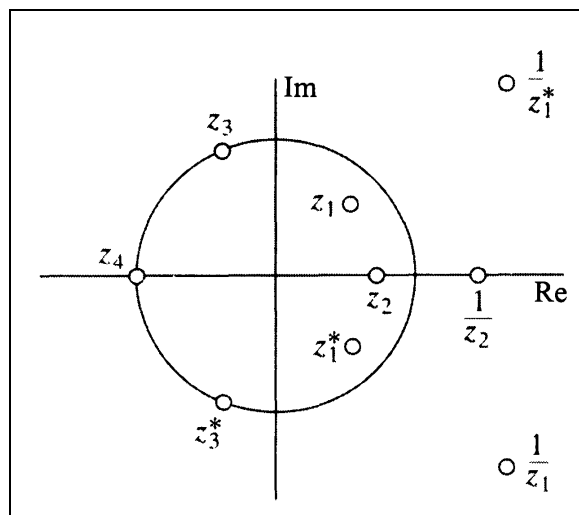
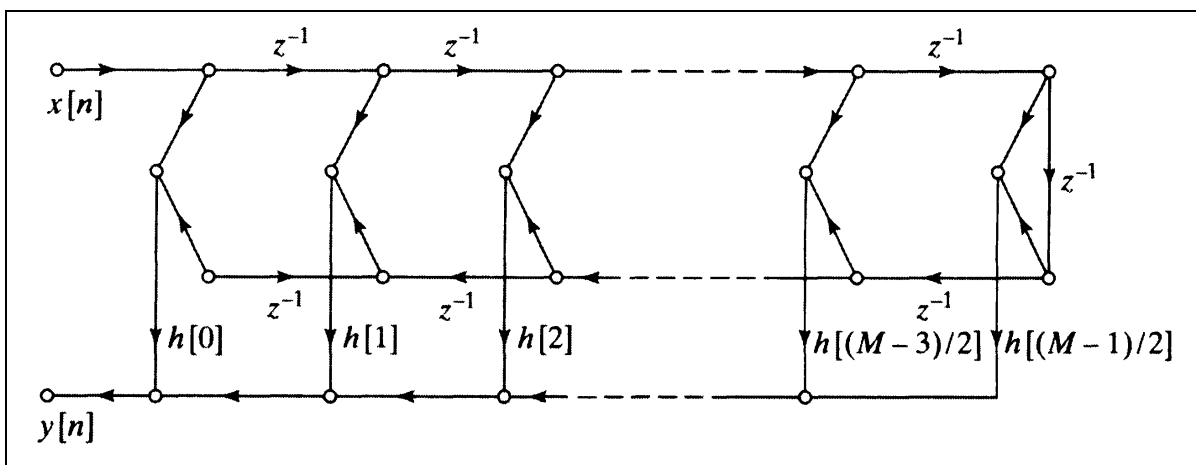
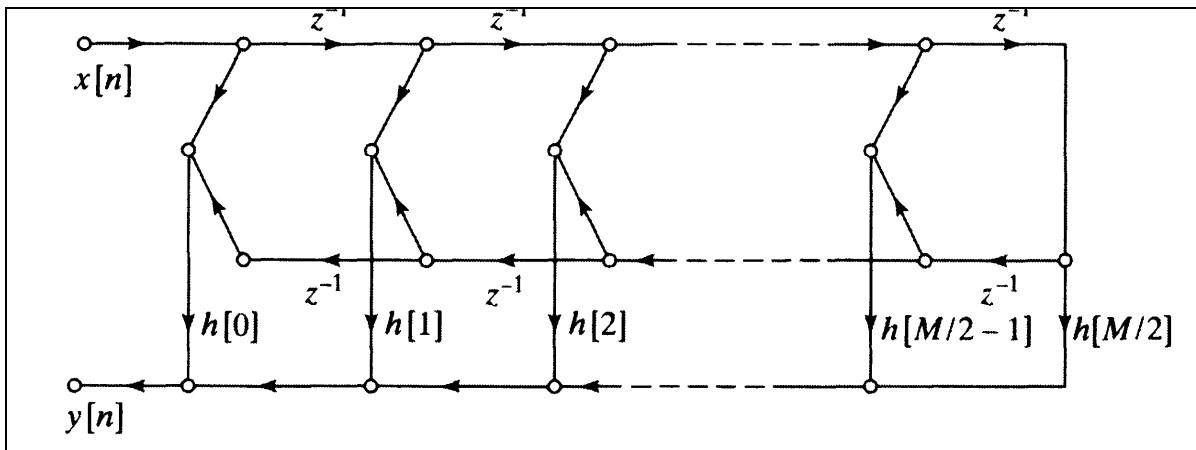
$$y[n] = \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k](x[n-k] - x[n-M+k]).$$

Для парних M :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} h[k](x[n-k] + x[n-M+k]),$$

Для непарних M :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} h[k](x[n-k] - x[n-M+k]).$$



Тема 9. БАГАТОВИМІРНІ ПОСЛІДОВНОСТІ І ЛС-СИСТЕМИ

Лекція №14

Досі розглядалися одновимірні послідовності - функції однієї дискретної (цілою) змінної. Зазвичай аргументу одновимірної послідовності приписується фізичний зміст дискретного часу. Особливість цифрової обробки сигналів полягає в тому, що вона успішно застосовується до послідовностей з аргументами довільної фізичної природи (часом, завдовжки, хвилевим числом, кутом і тому подібне), а також довільної розмірності. Тут будуть розглянуті способи опису багатовимірних послідовностей і аналіз їх дії на багатовимірні ЛС-системи на прикладі двовимірних систем і послідовностей.

Поширення отриманих висновків на загальний випадок досить елементарно. Річ у тому, що теорія двовимірних послідовностей і систем принципово відрізняється в деяких своїх рисах від одновимірної теорії; подальше ж збільшення розмірності призводить лише до кількісного ускладнення виразів. Тому в міркуваннях про багатовимірні сигнали і системи в цілях наочності фігуруватимуть, як правило, двовимірні послідовності (що найчастіше дискретизують зображення) і двовимірні дискретні системи. Двовимірна послідовність $x[n_1, n_2]$ може описувати, наприклад, яскравість (чи оптичну щільність) піктограмного чорно-білого зображення як функцію цілих координат n_1, n_2 на площині, що набуває дійсних значень. Таким чином, двовимірна послідовність описується функцією, заданою на двовимірних ґратках, утворених точками з цілими координатами. Ввівши для аргументів послідовності векторне позначення

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = (n_1, n_2)^T$$

можна записати позначення двовимірної послідовності у вигляді $x[n_1, n_2] = x[\mathbf{n}]$. Таке позначення зручне тим, що воно не містить явної вказівки на розмірність аргументу і отримувати при розгляді двовимірних послідовностей вираження можуть бути прямо узагальнені на випадок довільної розмірності - для цього досить \mathbf{n} інтерпретувати як вектор-стовпець з необхідною кількістю координат

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)^T$$

Розглянемо деякі елементарні двовимірні послідовності.

1. Двовимірна δ – послідовність

$$\delta[n_1, n_2] = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n_1 = n_2 = 0 \\ 0 & \text{в протилежному випадку} \end{cases}$$

Очевидно, двовимірний δ -послідовність може бути виражена через одновимірну δ -послідовність

$$\delta[n_1, n_2] = \delta[n_1] \cdot \delta[n_2]$$

Тут і далі ми використовуємо однакове позначення $\delta[\bullet]$ для одно- і двовимірних δ -послідовностей, сподіваючись, що це не приведе до непорозумінь, оскільки з розмірності аргументу завжди ясно, яка функція мається на увазі. Взагалі, якщо двовимірний послідовність $x[n_1, n_2]$ може бути представлена у вигляді добутку одновимірних послідовностей $x[n_1, n_2] = x_1[n_1] \cdot x_2[n_2]$ то вона називається роздільною.

Очевидно, двовимірний d -последовательность розделима; те ж справедливо і для δ -послідовності довільної розмірності N .

$$\delta[\mathbf{n}] = \prod_{i=1}^N \delta[n_i]$$

Безліч точок двовимірної ґратки, на якій деяка послідовність відмінна від нуля, називається опорною областю або носієм цієї послідовності. Очевидно, носієм δ -послідовності являється єдина точка $n = 0$.

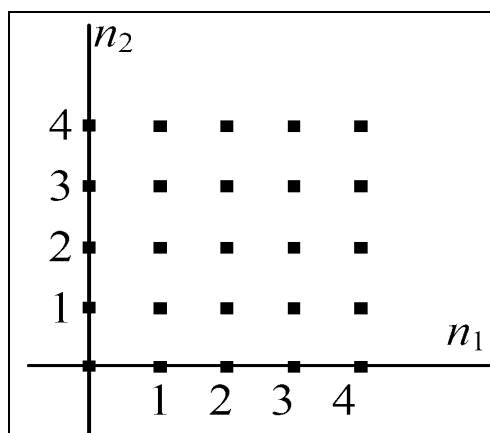
2. Двовимірний ступінчаста послідовність

$$u[n_1, n_2] = \begin{cases} 1, & n_1 \geq 0, \quad n_2 \geq 0, \\ 0, & n_1 < 0, \quad n_2 < 0 \end{cases}$$

також роздільна:

$$u[n_1, n_2] = u[n_1] \cdot u[n_2]$$

Носієм $u[n_1, n_2]$ є множина точок, яка включає початок координат, позитивні півосі і усі точки ґратки, що лежать в першому квадранті площини



Носій двовимірної ступінчастої послідовності

3. Двовимірна експоненціальна послідовність

$$e[n_1, n_2] = a^{n_1} b^{n_2}, \quad n_1, n_2 = \overline{-\infty, \infty}$$

очевидно, розделима (a і b - довільні комплексні числа). Насправді роздільність послідовностей – швидше виключення, ніж правило. Так, двовимірна експонента втрачає роздільність, якщо змінити її опорну область, наприклад, таким чином:

$$e[n_1, n_2] = \begin{cases} a^{n_1} b^{n_2}, & n_1 = \overline{-\infty, \infty}, n_2 \geq n_1, \\ 0 & \text{в протилежному випадку} \end{cases}$$

4. Періодична двовимірна послідовність.

Поняття двовимірної періодичності служить першим прикладом якісної відмінності двовимірного випадку від одновимірного. Двовимірна послідовність $\tilde{x}[n_1, n_2]$ періодична, якщо $\tilde{x}[n_1, n_2] = \tilde{x}[n_1 + N_{11}, n_2 + N_{21}]$ та $\tilde{x}[n_1, n_2] = \tilde{x}[n_1 + N_{12}, n_2 + N_{22}]$. В даному випадку зручніше записати аргументи у вигляді стовпця, тоді

$$\tilde{x} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \tilde{x} \begin{bmatrix} n_1 + N_{11} \\ n_2 + N_{21} \end{bmatrix} = \tilde{x} \begin{bmatrix} n_1 + N_{12} \\ n_2 + N_{22} \end{bmatrix}$$

або

$$\tilde{x}[\mathbf{n}] = \tilde{x}[\mathbf{n} + \mathbf{N}_1] = \tilde{x}[\mathbf{n} + \mathbf{N}_2]$$

Видно, що послідовність періодична, якщо вона співпадає з собою при зрушенні по ґратках у напрямі вектора $\mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{21} \end{pmatrix}$ чи у напрямі вектора

$$\mathbf{N}_2 = \begin{pmatrix} N_{12} \\ N_{22} \end{pmatrix}$$

Очевидно, компоненти $N_{11}, N_{12}, N_{21}, N_{22}$ зобов'язані бути цілими. Також очевидно, що $\tilde{x}[\mathbf{n}]$ співпадатиме з собою, якщо зсовувати її незалежно вздовж \mathbf{N}_1 і \mathbf{N}_2 будь-яке ціле число разів, тому можна записати

$$\tilde{x}[\mathbf{n}] = \tilde{x}[\mathbf{n} + \mathbf{N}\mathbf{r}]$$

де

$\mathbf{N} = (\mathbf{N}_1 | \mathbf{N}_2) = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}$ – матриця періодичності; $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ – вектор з довільними цілими компонентами.

На малюнку нижче представлено приклад періодичної послідовності $\tilde{x}[\mathbf{n}]$ з матрицею періодичності

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

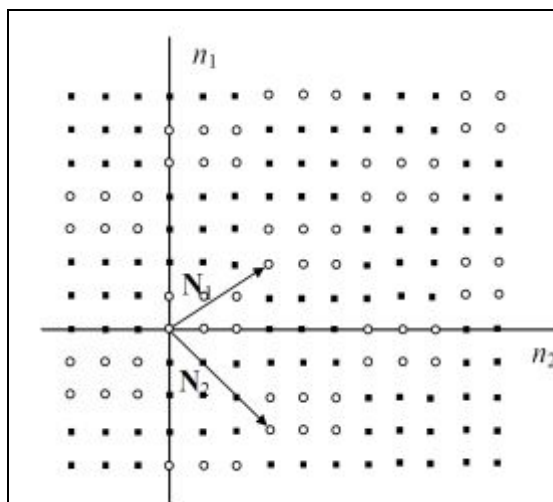
для наочності прийнято, що $\tilde{x}[\mathbf{n}]$ утворена періодичним по-вторенням фрагмента з носієм, що містить 6 точок, виділених на малюнку. Цей фрагмент, всілякими зсувами якого уздовж векторів \mathbf{N}_1 і \mathbf{N}_2 породжується уся послідовність $\tilde{x}[\mathbf{n}]$, називається фундаментальним періодом. Очевидно, що матриця періодичності не визначається однозначно, зокрема, послідовності, представлені на мал, також відповідають матриці

$$\mathbf{N}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}^{(3)} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \text{ та т.і.}$$

Неважко помітити, що у усіх цих матриць загальна характеристика - модуль визначника

$$|\det \mathbf{N}| = |\det \mathbf{N}^{(1)}| = |\det \mathbf{N}^{(2)}| = |\det \mathbf{N}^{(3)}| = 15.$$

який є кількістю точок ґратки, що складають опорну область фундаментального періоду послідовності $\tilde{x}[\mathbf{n}]$. Яким би способом не задавалися матриця періодичності і фундаментальний період для цим періодичесанням послідовності, ця послідовність на усій решетке приймаєусього $\det \mathbf{N}$ різних значень. Наведені приклади, зрозуміло, не вичерпують усіх послідовностей. Очевидно, можна побудувати нескінченну множину послідовностей, визначених на двовимірних ґратках точок з цілими координатами. Якщо визначити на цій множині операції складання послідовностей і множення послідовності на скаляр, вийде лінійний простір, удовлетворяющее відповідним аксіомам.



Приклад двовимірно-періодичної послідовності

У цьому просторі можна ввести скалярний добуток довільних послідовностей $x_1[\mathbf{n}]$ і $x_2[\mathbf{n}]$ виразом

$$(x_1, x_2) = \sum_{\mathbf{n}} x_1[\mathbf{n}] x_2^*[\mathbf{n}]$$

де при підсумовуванні \mathbf{n} пробігає усі точки нескінченної двовимірної ґратки S_2 . Можна визначити також норму послідовності $x[\mathbf{n}]$ як $\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)}$ і метрику (відстань) виразом $d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|_2$. Отриманий простір двовимірних послідовностей обмеженої норми є Гільбертовий простір (аналогічно розглянутому раніше простору одновимірних послідовностей). У такий спосіб можна побудувати простір послідовностей довільної розмірності.

Багатовимірні ЛС-системи

Багатовимірна система в загальному випадку виконує відображення простору вхідних послідовностей в простір вихідних. Обмежимося випадком вхідного і вихідного просторів, структура яких співпадає, що відповідає завданню фільтрації. Тоді система описується оператором $T\{\bullet\}$, отже

$$y[\mathbf{n}] = T\{x[\mathbf{n}]\}$$

де $x[\mathbf{n}]$ і $y[\mathbf{n}]$ - вхідна і вихідна багатовимірні послідовності. Така загальна модель, звичайно, занадто широка для отримання конкретних результатів, тому далі розглядаємо тільки лінійні системи (оператори), що задовольняють принципу суперпозиції

$$T\{\alpha x_1[\mathbf{n}] + \beta x_2[\mathbf{n}]\} = \alpha T\{x_1[\mathbf{n}]\} + \beta T\{x_2[\mathbf{n}]\}$$

Це означає, що відгук системи на зважену суму послідовностей дорівнює зваженій так само сумі відгуків. Вибравши як базис в просторі послідовностей сукупність усіх δ – послідовностей

$$\{\delta[\mathbf{n} - \mathbf{m}], \mathbf{n}, \mathbf{m} \in S_N\}$$

де S_N – N -вимірна ґратка точок з цілими координатами, – можна довільну послідовність $x[\mathbf{n}]$ записати у вигляді узагальненого ряду Фур'є відносно цього базису:

$$x[\mathbf{n}] = \sum_{\mathbf{m}} x[\mathbf{m}] \delta[\mathbf{n} - \mathbf{m}]$$

На підставі принципу суперпозиції вихідна послідовність

$$y[\mathbf{n}] = \sum_{\mathbf{m}} x[\mathbf{m}] h[\mathbf{n}, \mathbf{m}]$$

де $h[\mathbf{n}, \mathbf{m}]$ - вагова послідовність (розмірність $2N$), що має сенс відгуку в точці \mathbf{n} на δ -послідовність з носієм в точці \mathbf{m} . Припускаючи, що $h[\mathbf{n}, \mathbf{m}]$ залежить лише від різниці $\mathbf{n} - \mathbf{m}$, тобто оператор $T\{\bullet\}$ має

властивість інваріантності до зсуву, запишемо відгук багатовимірної ЛС-системи

$$y[\mathbf{n}] = \sum_{\mathbf{m}} x[\mathbf{m}]h[\mathbf{n} - \mathbf{m}]$$

Цей вираз є багатовимірною дискретною згорткою. Незважно бачити, що багатовимірна згортка, як і одновимірна, має властивість комутативності, тобто послідовності $x[\mathbf{n}]$ і $h[\mathbf{n}]$, що входять у наш вираз, – рівноправні. Це дозволяє розглядати їх як елементи єдиного простору послідовностей. Зокрема, абсолютно підсумовувані послідовності з обмеженою нормою

$$\|x\|_1 = \sum_{\mathbf{n}} |x[\mathbf{n}]| < \infty$$

утворюють нормовану алгебру з операцією багатовимірної свертки як узагальнене множення. Як і в одновимірному випадку, умова

$$\|h\|_1 = \sum_{\mathbf{n}} |h[\mathbf{n}]| < \infty$$

означає стійкість багатовимірної системи з імпульсною характеристикою $h[\mathbf{n}]$.

Утворимо N -вимірну гармонічну послідовність

$$x[\mathbf{n}] = \prod_{i=1}^N \exp(j\omega_i n_i) = \exp\left(j \sum_{i=1}^N \omega_i n_i\right) = \exp(j(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}))$$

де $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{n}$ – скалярний добуток частотного $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_N)^T$ і координатного $\mathbf{n} \in S_N$ векторів. Відгук ЛС-системи з імпульсною характеристикою $h[\mathbf{n}]$ на цю послідовність

$$\begin{aligned} y[\mathbf{n}] &= \sum_{\mathbf{m}} h[\mathbf{m}]x[\mathbf{n} - \mathbf{m}] = \sum_{\vec{m}} h[\mathbf{m}] \exp(j\boldsymbol{\omega}^T (\mathbf{n} - \mathbf{m})) = \\ &= \exp(j\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{n}) \sum_{\vec{m}} h[\mathbf{m}] \exp(-j\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{m}) = H(e^{j\boldsymbol{\omega}}) \exp(j\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{n}) \end{aligned}$$

де

$$H(e^{j\boldsymbol{\omega}}) = \sum_{\mathbf{m}} h[\mathbf{m}] \exp(-j\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{m})$$

комплексна частотна характеристика багатовимірної ЛС-системи. Отриманий вираз є багатовимірним перетворенням Фур'є абсолютно підсумовуваної послідовності $h[\mathbf{n}]$. Отже, відгук ЛС-системи на багатовимірну гармонічну послідовність дорівнює цій послідовності, помноженій на комплексний скаляр $H(e^{j\boldsymbol{\omega}})$. Перетворення Фур'є вхідної послідовності $x[\mathbf{n}]$ є її спектральною щільністю

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{\mathbf{n}} x[\mathbf{n}] \exp(-j\omega^T \mathbf{n})$$

Неважко переконатися, що функції $H(e^{j\omega})$ і $X(e^{j\omega})$ періодичні по кожній з компонент частотного вектора ω з періодом 2π . Для цього досить врахувати рівність

$$\exp(-j\omega^T \mathbf{n}) = \prod_{i=1}^N \exp(-j\omega_i n_i)$$

Розкладання періодичної функції $X(e^{j\omega})$ в N -вимірний ряд Фур'є

$$x[\mathbf{n}] = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \exp(j\omega^T \mathbf{n}) d\omega$$

є зворотне перетворення Фур'є. З іншого боку, вираження представляє послідовність $x[\mathbf{n}]$ у вигляді інтегральної ("суцільної") суми багатовимірних гармонік $\exp(-j\omega^T \mathbf{n})$ з комплексними амплітудами $X(e^{j\omega})$. З урахуванням принципу суперпозиції відгук ЛС-системи на таку "суміш" дорівнює

$$\begin{aligned} y[\mathbf{n}] &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) \exp(j\omega^T \mathbf{n}) d\omega = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega}) \exp(j\omega^T \mathbf{n}) d\omega \end{aligned}$$

звідки витікає

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$$

Таким чином, отриманий частотний опис багатовимірних послідовностей і ЛС-систем. Як багатовимірна послідовність, імпульсна характеристика ЛС-системи може бути роздільною. Легко бачити, що в цьому випадку роздільною виявляється і комплексна частотна характеристика системи. У такому разі сама система називається роздільною.

Наприклад ідеальний двовимірний фільтр нижніх частот має комплексну частотну характеристику виду

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \begin{cases} 1, & |\omega_1| < a, \quad |\omega_2| < b, \\ 0, & \text{в протилежному випадку} \end{cases}$$

де a, b – параметри, в загальному випадку різні, такі, що визначають вибіркові властивості фільтру. Імпульсна характеристика такого фільтру

$$h[n_1, n_2] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)} d\omega_1 d\omega_2 = \frac{ab}{\pi^2} \frac{\sin(an_1)}{an_1} \frac{\sin(bn_2)}{bn_2}$$

є роздільною.

Інший приклад – це ідеальний ізотропний двовимірний фільтр нижніх частот. Він має комплексну частотну характеристику виду

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \begin{cases} 1, & \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq R^2 \\ 0, & \text{в протилежному випадку} \end{cases}$$

де параметр R визначає двовимірну смугу пропускання фільтру, яка має форму кола A на частотній площині. Імпульсна характеристика такого фільтру визначається виразом

$$h[n_1, n_2] = \frac{1}{4\pi^2} \iint_A e^{j(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)} d\omega_1 d\omega_2$$

Переходячи в частотній площині до полярних координат

$$\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}, \quad \varphi = \arctg\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right),$$

Та вводячи допоміжну змінну $\theta = \arctg\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$ отримуємо імпульсну характеристику

$$\begin{aligned} h[n_1, n_2] &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \Omega e^{j\Omega \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \cos(\theta - \varphi)} d\varphi d\Omega = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^R \Omega J_0\left(\Omega \sqrt{n_1^2 + n_2^2}\right) d\Omega = \frac{R}{2\pi} \frac{J_1\left(R \sqrt{n_1^2 + n_2^2}\right)}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \end{aligned}$$

де $J_0(\bullet), J_1(\bullet)$ – функції Бесселя 1-го роду нульового і першого порядку.

Очевидно, що імпульсна характеристика такого фільтру роздільною не являється.

Ізотропність багатовимірної системи є корисною властивістю, що гарантує індіферентність системи (чи, що те ж саме, алгоритму обробки) до повороту послідовності, який частенько є випадковим і несуттєвим фактором. Прикладами таких послідовностей є аерофото–знімки земної поверхні, фотографії бактерій під мікроскопом і тому подібне. У таких випадках бажано, щоб алгоритм обробки (наприклад, двовимірний фільтр) був байдужий до випадкового повороту знімка, тобто мав ізотропну.

Роздільність систем також є корисною властивістю, оскільки роздільна багатовимірна система вимагає менших обчислювальних витрат, чим нероздільна. Насправді, якщо імпульсна характеристика системи розділима,

тобто $h[n_1, n_2] = h_1[n_1]h_2[n_2]$, то двовимірна згортка, що визначає відгук такої системи на довільну послідовність $x[n_1, n_2]$, дорівнює

$$\begin{aligned} y[n_1, n_2] &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h_1[k_1]h_2[k_2]x[n_1 - k_1, n_2 - k_2] = \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} h_1[k_1] \left(\sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h_2[k_2]x[n_1 - k_1, n_2 - k_2] \right) = \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} h_1[k_1]v[n_1 - k_1, n_2] \end{aligned}$$

де $v[n_1, n_2]$ – проміжний результат фільтрації послідовності $x[n_1, n_2]$ по координаті n_2 . Таким чином, двовимірна згортка $x[n_1, n_2]$ з роздільною імпульсною характеристикою зводиться до виконання двох одновимірних згорток. Оцінимо обчислювальні витрати на реалізацію двовимірної згортки у разі роздільної імпульсної характеристики. Нехай імпульсна характеристика має носій розмірами $M \times M$ і використовується для фільтрації двовимірної послідовності розміром $N \times N$. Обчислення одного значення вихідної послідовності вимагає виконання $M \times M$ множень (складаннями як значно менш трудомісткими і часозатратними операціями в таких випадках нехтують). Отже, в загальному випадку обчислення вихідної послідовності вимагає біля $M^2 \times N^2$ множень (для простоти нехтуємо деякою економією обчислень на краях носія послідовності). У разі розділюваної імпульсної характеристики виконання одновимірної свертки для обчислення $v[n_1, n_2]$ вимагає виконання $M \times N^2$ множень; стільки ж вимагається для виконання другої одновимірної згортки. Таким чином, усього повинно бути виконано $2M \times N^2$ множень. Оскільки ізотропна і роздільність систем являється полезними властивостями, цікаве питання, чи можливо поєднати ці властивості в одній ЛС-системі, і якщо так, то наскільки широкий клас таких систем? Нехай комплексна частотна характеристика двовимірної системи розділювана і має вигляд

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = H_1(e^{j\omega_1})H_2(e^{j\omega_2})$$

Ізотропна, у свою чергу, означає, що безліч розв'язків рівняння

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = C_1 \quad \text{є колом при будь-якому } C_1. \text{ Отже,}$$

такі рішення задовольняють умові $\omega_1^2 + \omega_2^2 = R^2$, де R – радіус кола.

Логарифмуючи це рівняння, отримуємо

$$\ln(H_1(e^{j\omega_1})) + \ln(H_2(e^{j\omega_2})) = \ln(C_1)$$

Порівняння отриманого вираження з рівнянням кола призводить до висновку, що одночасному виконанню властивостей ізотропності і роздільності

задовольняють тільки системи з КЧХ виду Гаусса $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = Ke^{-\omega_1^2/\gamma} e^{-\omega_2^2/\gamma}$ де K, γ - довільні константи. Проте слід зазначити, що в дискретному виді такі системи точно реалізувати не можна. За умови абсолютної підсумовуваності послідовності $x[\mathbf{n}]$ ряд перетворення Фур'є сходиться *рівномірно* до функції $X(e^{j\omega})$, *безперервної* по усіх компонентах вектору частоти $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)^T$. Формальна заміна $e^{j\omega_i} \rightarrow z_i$ в перетворенні Фур'є призводить до багатовимірного z - перетворення

$$X(z) = \sum_{\mathbf{n}} \left(x[\mathbf{n}] \prod_{i=1}^N z_i^{-n_i} \right)$$

що сходиться на безлічі точок N -вимірного комплексного простору (N -вимірного аналога комплексної площини), що задовольняють умові $|z_1|=1, \dots, |z_N|=1$. Ця множина аналогічно одиничному колу, але вже при $N=2$ воно є добутком двох 1-кіл в 4-мірному просторі і тому мало дає в сенсі наочності. Це одна з причин, що обмежують застосування багатовимірного z -перетворення. Інша, серйозніша причина полягає в наступному. Одновимірне z -перетворення є потужним інструментом аналізу стійкості рекурсивних систем. Нагадаємо, що для аналізу стійкості системи треба розкласти знаменник передаточної функції на прості множники (чи, що рівнозначно, знайти корені полінома-знаменника). Розташування полюсів передаточної функції відносно 1-окружності дозволяє однозначно вирішити питання про стійкість системи. На жаль, теорема про розкладання полінома на прості множники ("основна теорема алгебри") не справедлива для $N > 1$. Полюси передаточної функції багатовимірної рекурсивної системи не є ізольованими точками, а утворюють множини (гіперповерхні) в просторі відповідної розмірності.

Наприклад, передавальна функція

$$H(z_1, z_2) = \frac{1}{1 - bz_1^{-1}z_2^{-1}}$$

має "полюс" у вигляді гіперповерхні, що описується рівнянням $z_1z_2 = b$. З зазначених причин аналіз стійкості багатовимірних рекурсивних систем представляє набагато складніше завдання, ніж такий аналіз для одновимірних систем.

Багатовимірні випадкові послідовності і ЛС-систем

Багатовимірна випадкова послідовність представляється ансамблем реалізацій

$$\{x_\lambda[\mathbf{n}], \mathbf{n} \in S_N, \lambda \in \Lambda\}$$

в сукупності з розподілом вірогідності P_λ , заданим на множині Λ . При фіксованому λ виходить переріз – детермінована багатовимірна послідовність, а при фіксованому \mathbf{n} – випадкова величина, що описується функцією розподілу

$$F(x, \mathbf{n}) = P\{x_\lambda[\mathbf{n}] \leq x\}.$$

Якщо λ - неперервна змінна, то можна визначити щільність розподілу вірогідності

$$w(x, \mathbf{n}) = \frac{dF(x, \mathbf{n})}{dx}.$$

Як і для одновимірних випадкових послідовностей, очевидним чином визначаються математичне очікування

$$\bar{x}[\mathbf{n}] = \mathbf{E}\{x[\mathbf{n}]\} = \int_{-\infty}^{\infty} x[\mathbf{n}] w(x, \mathbf{n}) dx,$$

дисперсія

$$D_x[\mathbf{n}] = \mathbf{E}\{|x[\mathbf{n}] - \bar{x}[\mathbf{n}]|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x[\mathbf{n}] - \bar{x}[\mathbf{n}]|^2 w(x, \mathbf{n}) dx$$

і кореляційний момент

$$\begin{aligned} r_x[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] &= \mathbf{E}\{(x[\mathbf{n}_1] - \bar{x}[\mathbf{n}_1])(x^*[\mathbf{n}_2] - \bar{x}^*[\mathbf{n}_2])\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x[\mathbf{n}_1] - \bar{x}[\mathbf{n}_1])(x^*[\mathbf{n}_2] - \bar{x}^*[\mathbf{n}_2]) w_2(x_1, x_2, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Багатовимірна випадкова послідовність стаціонарна (у широкому сенсі), якщо $\bar{x}[\mathbf{n}] = \bar{x}$;

$D_x[\mathbf{n}] = D_x = \sigma_x^2$ а кореляційний момент $r_x[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$ залежить лише від різниці $\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2$; тоді він називається автокореляційною послідовністю:

$$r_x[\mathbf{m}] = \mathbf{E}\{(x[\mathbf{n}] - \bar{x})(x^*[\mathbf{n} + \mathbf{m}] - \bar{x})\}$$

при цьому $r_x[0] = D_x$. Стаціонарність випадкової послідовності в широкому сенсі означає однорідність її статистичних характеристик першого і другого порядків при зсуві уздовж будь-якого напрямку. На відміну від одновимірного випадку для багатовимірних випадкових послідовностей виділяють ще одне, – сильніша властивість стаціонарності.

Випадкова послідовність називається ізотропом, якщо $\bar{x}[\mathbf{n}] = \bar{x}$; $D_x[\mathbf{n}] = D_x = \sigma_x^2$ а її автокореляційна послідовність залежить тільки від модуля різниці векторів $|\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2|$. Якщо багатовимірна випадкова послідовність ізотропна, то вона і стаціонарна; зворотне в загальному випадку невірно. Умова ізотропної випадкової послідовності еквівалентно вимозі кругової (сферичною) симетрії АКП, що, очевидно, може виконуватися лише приблизно (внаслідок неізотропної ґратки S_N), проте модель ізотропної випадкової послідовності має "безсторонність" до повороту, природну для багатьох завдань ЦОС і тому досить широко використовується. Зокрема, така безсторонність являється бажаною в моделях випадкових послідовностей, використовуваних в завданнях фільтрації аерокосмічних фотознімків земної поверхні, оскільки орієнтація такого знімка визначається випадковим положенням літального апарату і несуттєва з точки зору змісту знімка. Відмітимо, що в таких випадках бажана також ізотропність алгоритмів обробки. Аналогічно автокореляційній послідовності визначається взаємна кореляційна послідовність. Аналіз проходження багатовимірних випадкових послідовностей через ЛС-системи аналогічний до одновимірного випадку. Спектральна щільність потужності випадкової послідовності пов'язана з АКП парою перетворень Фур'є (теорема Вінера–Хінчіна)

$$R_x(e^{j\omega}) = \sum_{\mathbf{m}} r_x[\mathbf{m}] e^{-j\omega^T \mathbf{m}},$$

$$r_x[\mathbf{m}] = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} R_x(e^{j\omega}) e^{j\omega^T \mathbf{m}} d\omega.$$

Спектральна щільність потужності відгуку ЛС-системи з КЧХ $H(e^{j\omega})$ на багатовимірну випадкову послідовність із спектральною щільністю потужності $R_x(e^{j\omega})$ знаходиться як

$$R_y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) H^* \left(\frac{1}{e^{-j\omega}} \right) R_x(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 R_x(e^{j\omega}).$$

Інші співвідношення, що зв'язують авто- і взаємну кореляційні послідовності входу і виходу і імпульсну характеристику системи, можуть бути записані по аналогії з одновимірним випадком.

Тема 10. ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ ЕЛЕМЕНТАМИ ПОВЕРХНІ ТА УЗАГАЛЬНЕНОГО ОБ'ЄМУ

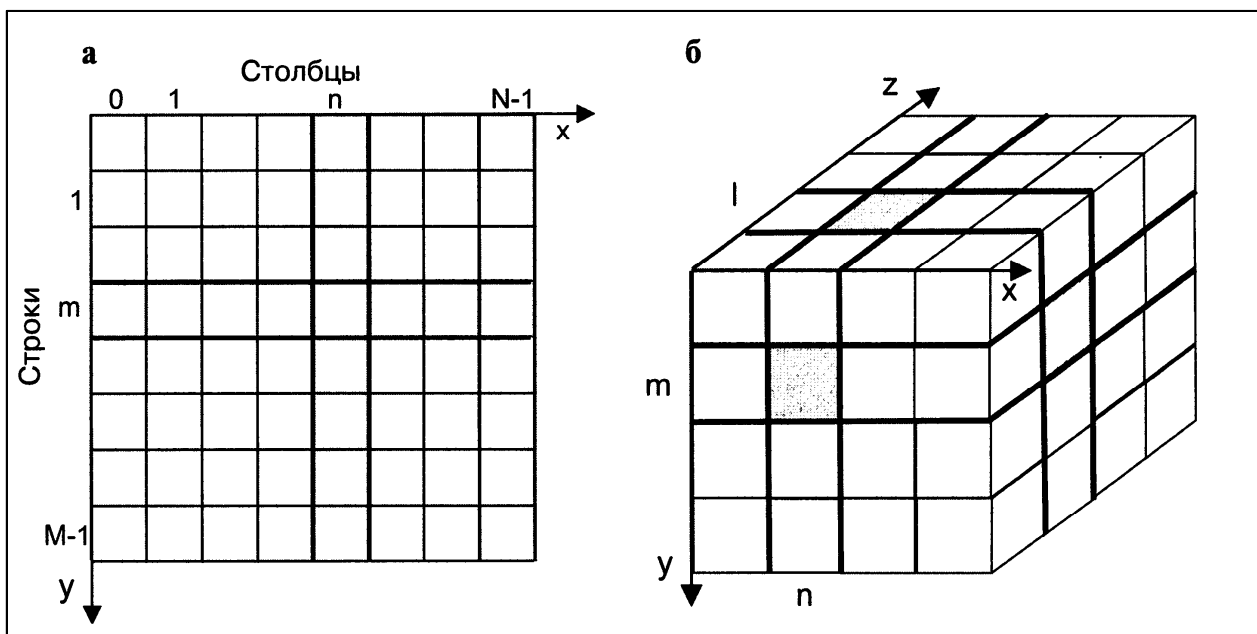
Лекція №15

Просторове представлення цифрових зображень

$$E(x_1, x_2) = E(x).$$

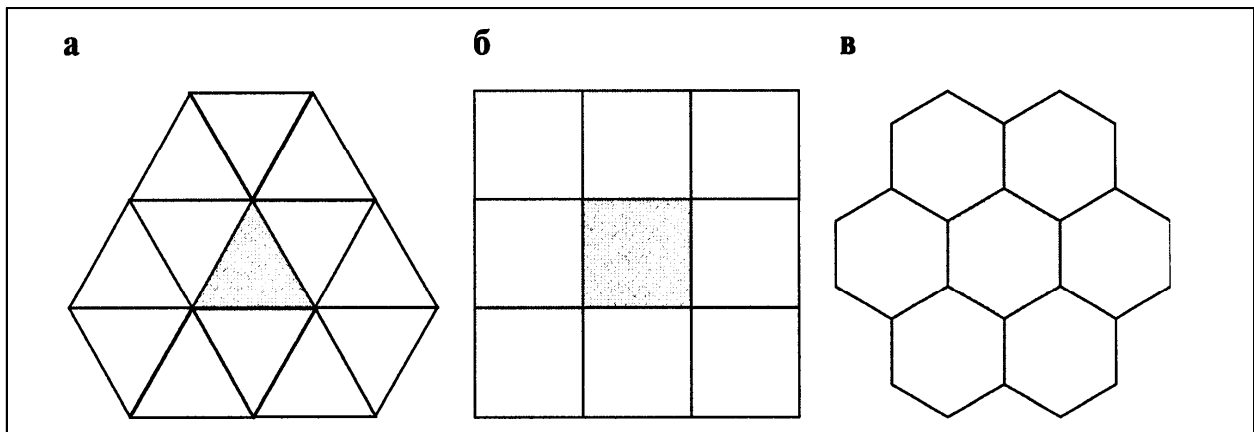
Піксель і воксель

Точка на 2-D сітці називається пікселем (pixel або pel). Ці назви є скороченнями поняття *picture element* (елемент зображення). Піксель представляє енергетичну освітленість у відповідному місці сітки.



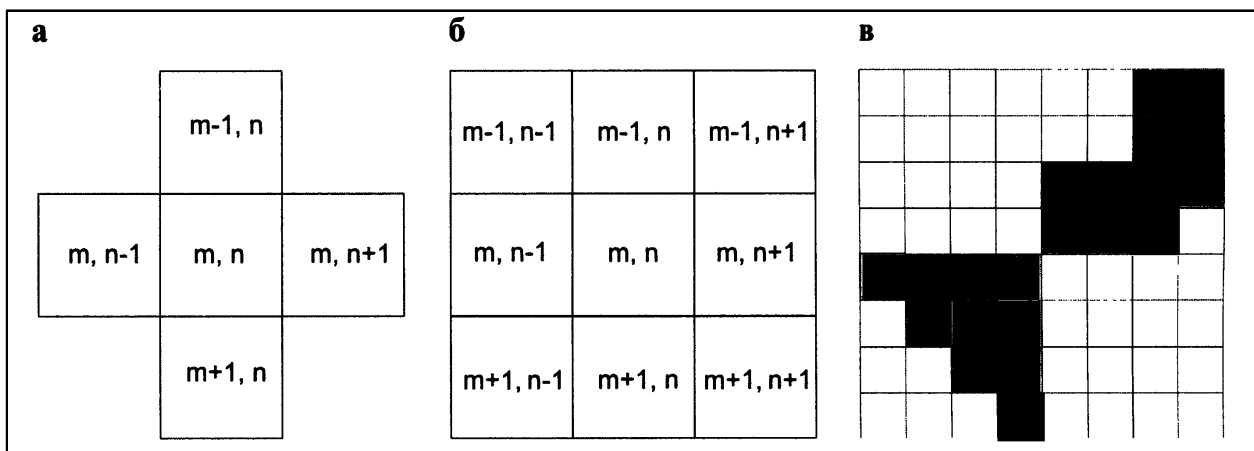
Представлення цифрових зображень через масиви дискретних точок на прямокутній сітці: а - 2 - D зображення; б - 3 - D зображення

3 - D простору (і навіть простори більш високої розмірності) також представляють інтерес в обробці зображень. У тривимірних зображеннях піксель перетворюється на воксель (voxel) - скорочення від volume element. На прямокутній сітці кожен воксель представляє середній рівень яскравості прямокутного паралелепіпеда. Положення вокселя задається трьома індексами. Перший, - l, означає глибину, m - рядок n - стовпець.

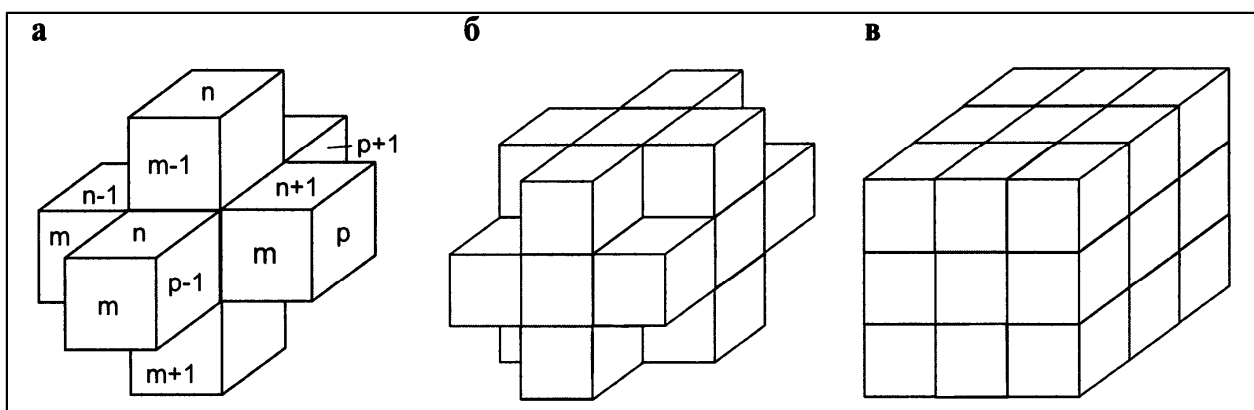


Три можливі регулярні сітки в 2 - D: а - трикутна сітка; б - квадратна сітка; в - гексагональна сітка.

Окольні співвідношення



Околиці на прямокутній сітці: а - 4-компонентна околиця; б - 8-компонентна околиця; в - темна область розглядається як один об'єкт (зв'язна область) при 8-компонентних околицях, але як два об'єкти при 4-компонентних околицях



Три види околиць на 3 - D кубічній сітці: а - 6-компонентна околиця: воксели із загальними гранями; б - 18-компонентна околиця: воксели з загальними ребрами; в - 26-компонентна околиця: воксели із загальними кутами

$$\mathbf{r}_{m,n} = \begin{bmatrix} n\Delta x \\ m\Delta y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{l,m,n} = \begin{bmatrix} n\Delta x \\ m\Delta y \\ l\Delta z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{k,l,m,n} = \begin{bmatrix} n\Delta x \\ m\Delta y \\ l\Delta z \\ k\Delta t \end{bmatrix}.$$

Евклідова відстань

$$d_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| = \left[(n - n')^2 \Delta x^2 + (m - m')^2 \Delta y^2 \right]^{1/2}$$

Відстань "міський квартал"

$$d_b(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = |n - n'| + |m - m'|$$

Відстань "шахівниця"

$$d_c(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \max(|n - n'|, |m - m'|).$$

Рух

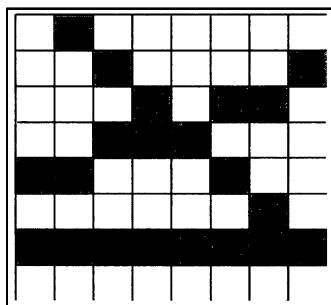
$$\mathbf{r}'_{m',n'} = \mathbf{r}_{m,n} + \mathbf{t}_{m',n'},$$

Масштабування можливо тільки для цілих чисел, кратних масштабному множнику за допомогою узяття кожного p-го пікселя на кожній q-ій лінії.

Обертання на дискретній сітці є неможливим, за виключенням декількох тривіальних кутів. Умовою є те, що усі вузли поверненої сітки повинні співпадати з вузлами сітки. На прямокутній сітці тільки повороти на кути, кратні 180° , є можливими, на квадратній сітці на кути, кратні 90° , а на гексагональній сітці на кути, кратні 60° .

Дискретна лінія добре визначається тільки в напрямках осей і діагоналей. У усіх інших напрямках лінія здається ступінчастою нерівною послідовністю пікселів

Квантування





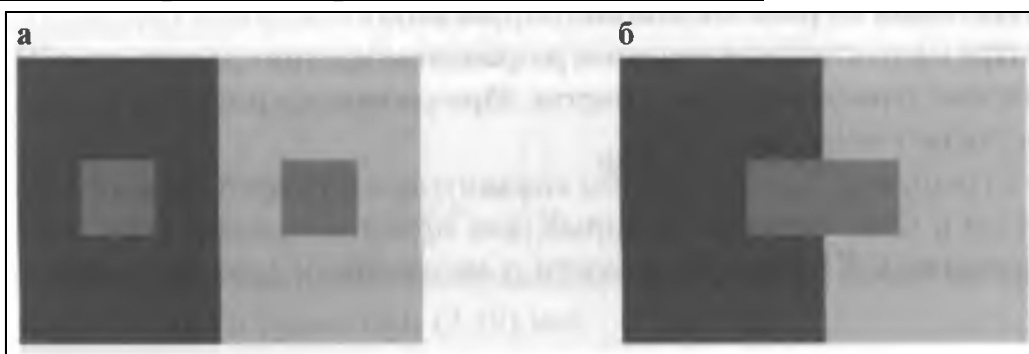
Ілюстрація квантування. Одне і те ж зображення показане з різними рівнями квантування : а-16; б- 8; в-4; г-2. Занадто мале число рівнів квантування створює неправдиві контури і призводить до часткового і повного зникнення ознак з низькою контрастністю

Представлення зображень із знаком

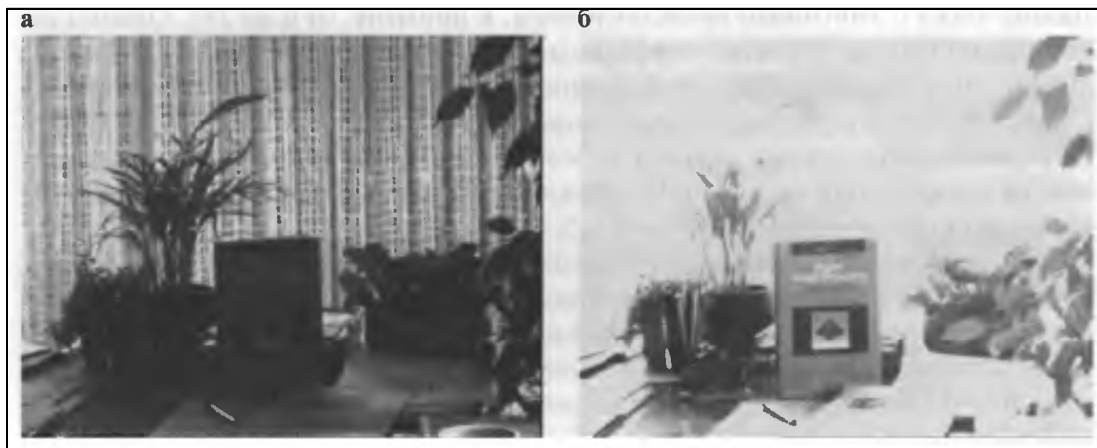
$$q' = (q - 128) \bmod 256, \quad 0 \leq q < 256.$$

$$q = (q' + 128) \bmod 256, \quad -128 \leq q < 128$$

Сприйняття яскравості зоровою системою людини



Контекст визначає, наскільки "яскравим" ми сприймаємо об'єкт. а) – Обидва квадрати мають одну і ту ж яскравість, але квадрат на темному фоні здається яскравіше, ніж квадрат на світлому фоні. б) – Обидва квадрати здаються однаково яскравими, тільки якщо вони стикаються



Висококонтрастна сцена, зафіксована за допомогою ПЗС-камери з лінійним контрастом і малою (а), та великою (б) апертурою

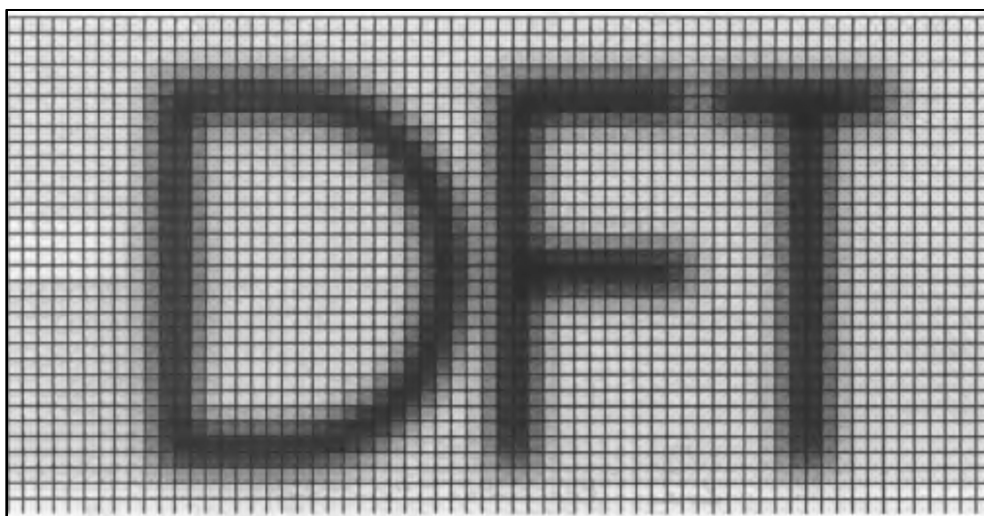
Одне з рішень, для того, щоб впоратися з великою динамікою в сценах, використовується у відеокамерах, які, як правило, перетворюють енергетичну освітленість E в рівень яскравості g не лінійно, а по експоненціальному закону:

$$g = E^\gamma$$

Експонента γ показує *гамма-значення*. Як правито, γ має значення 0,4. З допомогою такого перетворення можна наблизитися до логарифмічної характеристики зорової системи людини. Діапазон контрастності значно покращується. Якщо ми припустимо мінімальне відносне яскравісне розділення, рівне 10%, і 8-бітовий діапазон шкали сірого кольору, ми отримуємо діапазони контрастності 25 і 316 при $\gamma = 1$ і $\gamma = 0,4$ відповідно.

Для багатьох наукових застосувань, проте, істотним є те, що зберігається лінійне співвідношення між яскравістю спостережуваного об'єкту і рівнем яскравості в цифровому зображенні. Тоді гамма-значення треба покласти рівним одиниці для таких застосувань.

Простір хвильових чисел і перетворення Фур'є



Зображення можна розглядати таким, що складається з базисних зображень, в

яких тільки один піксель не дорівнює нулю.

Позначимо таке базисне зображення з одиницею, розташованою в рядку m і стовпці n , з допомогою

$${}^{m,n}P: {}^{m,n}p_{m',n'} = \begin{cases} 1 & m = m' \wedge n = n' \\ 0 & \text{інаше.} \end{cases}$$

Будь-яке довільне скалярне зображення можна тоді представити через базисні зображення як

$$G = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} g_{m,n} {}^{m,n}P,$$

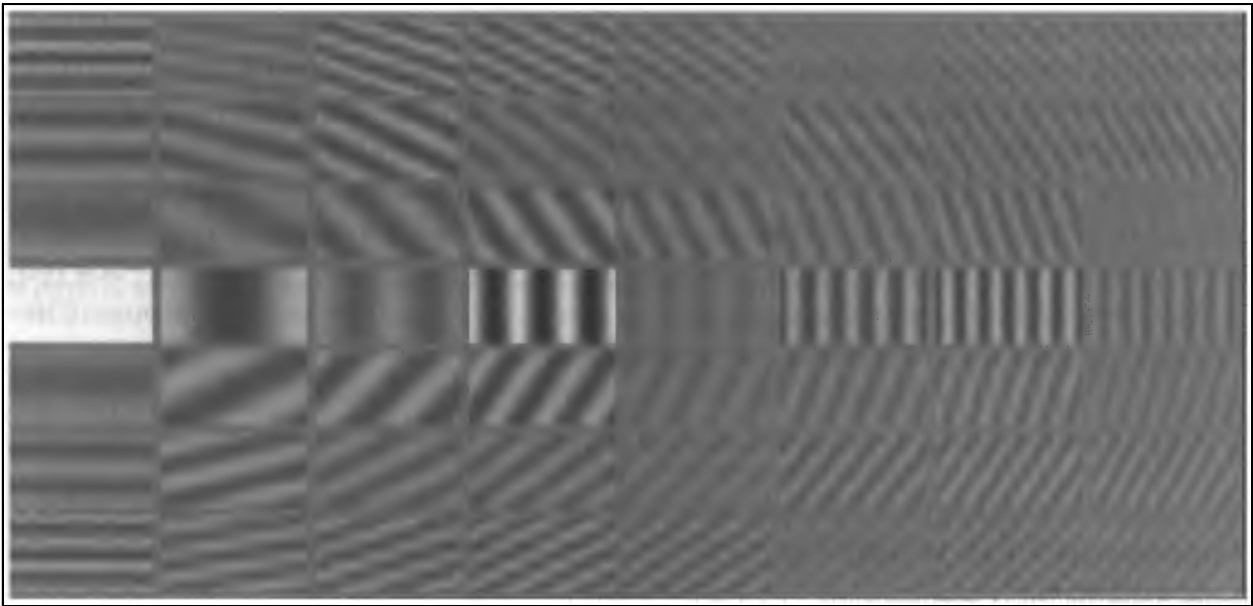
де $g_{m,n}$ означає рівень яскравості в положенні (m, n) .

Можна легко переконатися, що базисні зображення ${}^{m,n}P$ формують *ортонормований базис*, і нарешті, введемо внутрішній добуток (також відомий як скалярний добуток), який може бути визначений подібно до скалярного добутку векторів. Внутрішній добуток двох зображень G і H визначається як

$$\langle G | H \rangle = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} g_{m,n} h_{m,n} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} {}^{m,n}p_{m,n} {}^{m,n}p_{m,n} = \delta_{m'-m''} \delta_{n'-n''}$$

Зображення $M \times N$ є точкою у векторному просторі розмірністю $M \times N$. Якщо ми змінимо координатну систему, то зображення залишиться тим же, але зміняться його координати. Це означає, що ми просто розглядаємо одну і ту ж частину інформації з різних точок зору. З цього елементарного факту ми можемо прийти до наступних важливих висновків. По-перше, усі представлення еквівалентні одне одному. Кожне дає повне представлення зображення. По-друге, відповідні координатні перетворення дозволяють нам перейти від одного представлення до іншого і назад.

З усього різноманіття усіх можливих представлень, окрім просторового, тільки одне має величезне значення для обробки зображень. Його базисними зображеннями є періодичні структури, а "координатне перетворення", яке дозволяє перейти до нього, відоме як перетворення Фур'є. Одне і те ж зображення, яке було сформовано з окремих пікселів може бути складеним з періодичних структур.

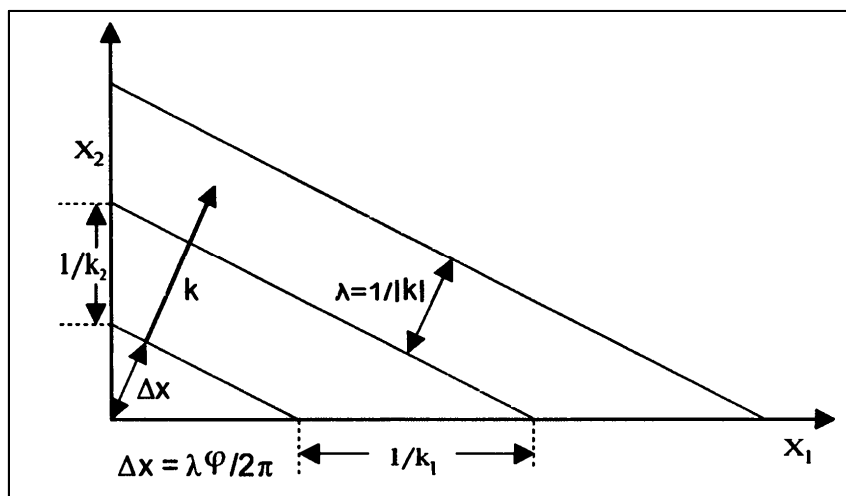


Перші 56 періодичних структур, базисних зображень перетворення Фур'є, з яких складається зображення на попередньому мал.

Періодична структура, передусім, характеризується відстанню між двома максимумами або довжиною повторення, *довжиною хвилі* λ . Напрямок структури якнайкраще описується вектором, нормальним до ліній постійних рівнів яскравості. Якщо задамо довжину цього вектору k рівною $1/\lambda$:

$$|k| = 1/\lambda$$

то довжина хвилі і напрям можуть бути виражені одним вектором, хвильовим числом k . Компоненти $k = [k_1, k_2]^T$ безпосередньо задають число довжин хвиль в одиницю довжини у відповідному напрямі. Хвильове число k може бути використано для опису періодичних структур у разі будь-якої розмірності.



Опис 2-D періодичної структури за допомогою довжини хвилі λ , хвильового числа k і фази φ

Положення задається як відстань Δx першого максимуму від початку координат. Оскільки ця відстань у більшості випадків дорівнює довжині хвилі, найкращим буде задати його як фазовий кут $\varphi = 2\pi\Delta x/\lambda = 2\pi k \cdot \Delta x$, а повний опис періодичної структури задається як

$$r \cos(2\pi k^T x - \varphi)$$

Таке визначення, математично досить складне. Для того, щоб отримати просте розкладання на періодичні структури необхідне використання комплексних чисел $\hat{g} = r \exp(-i\varphi)$ і комплексної експоненціальної функції $\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i \sin\varphi$. Дійсна частина $\hat{g} \exp(2\pi i k^T x)$ задає періодичну структуру:

$$\Re(\hat{g} \exp(2\pi i k^T x)) = r \cos(2\pi k^T x - \varphi)$$

Центральна гранична теорема.

Центральна гранична теорема, головним образом, відома завдяки своїй значущості в теорії вірогідності. Проте вона також відіграє важливу роль в обробці сигналів, оскільки є точною формулюванням прагнення каскадної свертки наблизитися до форми гауса. Оскільки перетворення Фур'є від гауссиана являється також гауссианом, це означає, що як перетворення Фур'є (передатна функція), так і маска згортки наближаються до виду гауссиана. Таким чином, теорема про центральну межу є центральною завдяки винятковій ролі функції Гауса для обробки сигналів.

Нехай задані N функцій $h_n(x)$ з нульовим середнім $\int_{-\infty}^{\infty} x h_n(x) dx$

і дисперсією $\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 h_n(x) dx$ ³ $z = x / \sigma$, $\sigma^2 = \sum_{n=1}^N \sigma_n^2$.

тоді

$$h = \lim_{N \rightarrow \infty} h_1 * h_2 * \dots * h_N \propto \exp(-z^2/2)$$

за умови

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sigma_n^2 \rightarrow \infty$$

і існує деяке число $\alpha > 2$ та кінцева постійна c , така, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^\alpha h_n(x) dx < c < \infty \quad \forall n$$

Теорема має велике практичне значення, оскільки - особливо якщо $h_n(x)$ є гладкою - вид гауссиана апроксимується досить точно навіть для таких низьких значень N , як 5.

Співвідношення невизначенностей.

Цей загальний закон взаємності знаходить ще одне кількісне вираження в класичному співвідношенні невизначенностей чи добутку тривалості і ширини смуги. Ця теорема співвідносить середньоквадратичну ширину функції і ширину її перетворення Фур'є. Середньоквадратична ширина $(\Delta x)^2$ визначається як

$$(\Delta x)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |g(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx} - \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x |g(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx} \right)^2.$$

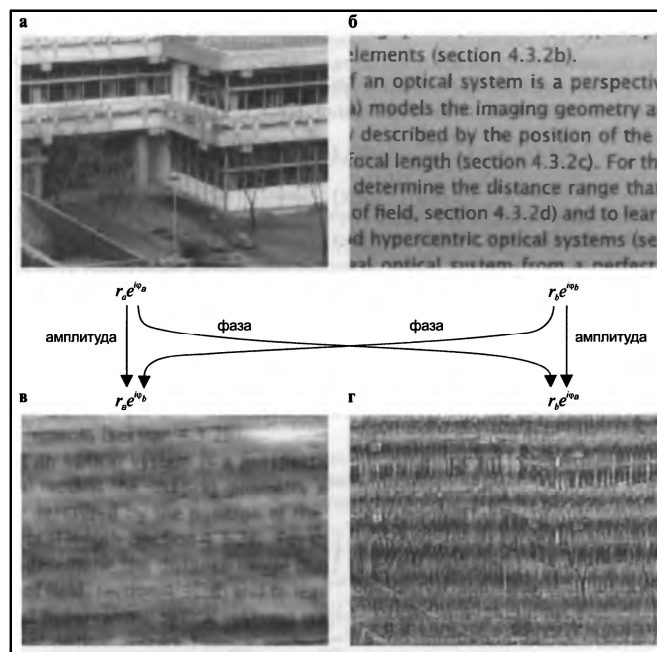
Це являється, по суті, дисперсією від $|g(x)|^2$, мірою ширини розподілу "енергії" сигналу. Співвідношення невизначенностей стверджує:

Добуток дисперсії $(\Delta x)^2$ від $|g(x)|^2$ та дисперсії $(\Delta k)^2$ від $|\hat{g}(k)|^2$, не може бути менший, ніж $1/4 \pi$.

$$\Delta x \Delta k \geq 1/(4 \pi)$$

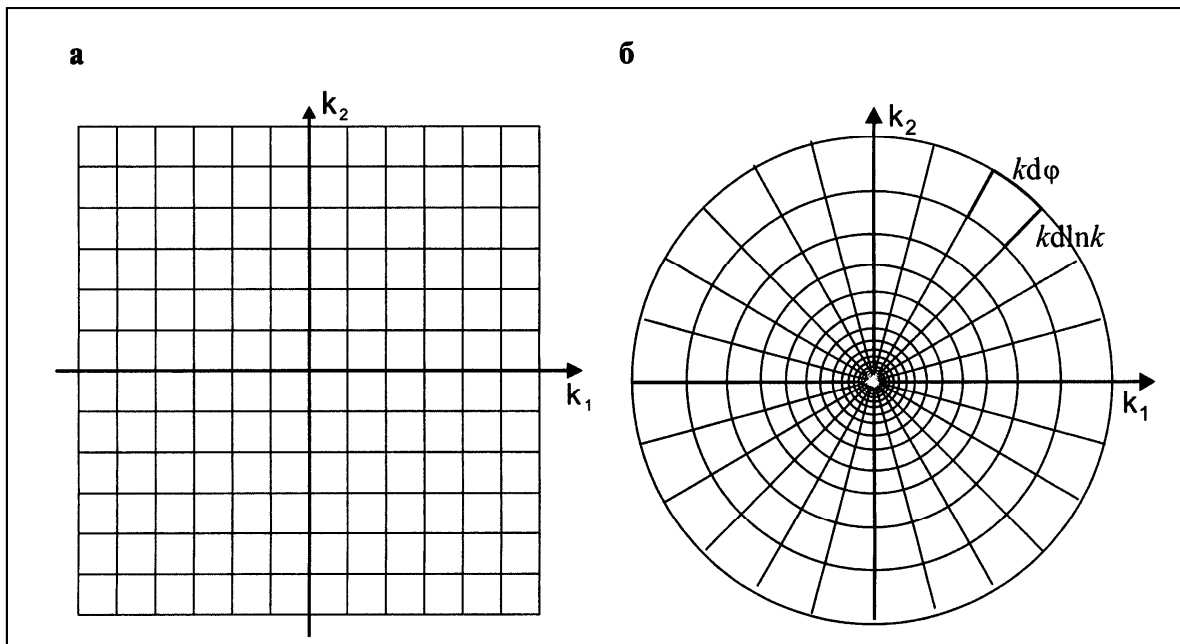
Співвідношення невизначенностей дає деякі основні правила для розробки лінійних операторів фільтрів (згортки).

Фаза і амплітуда

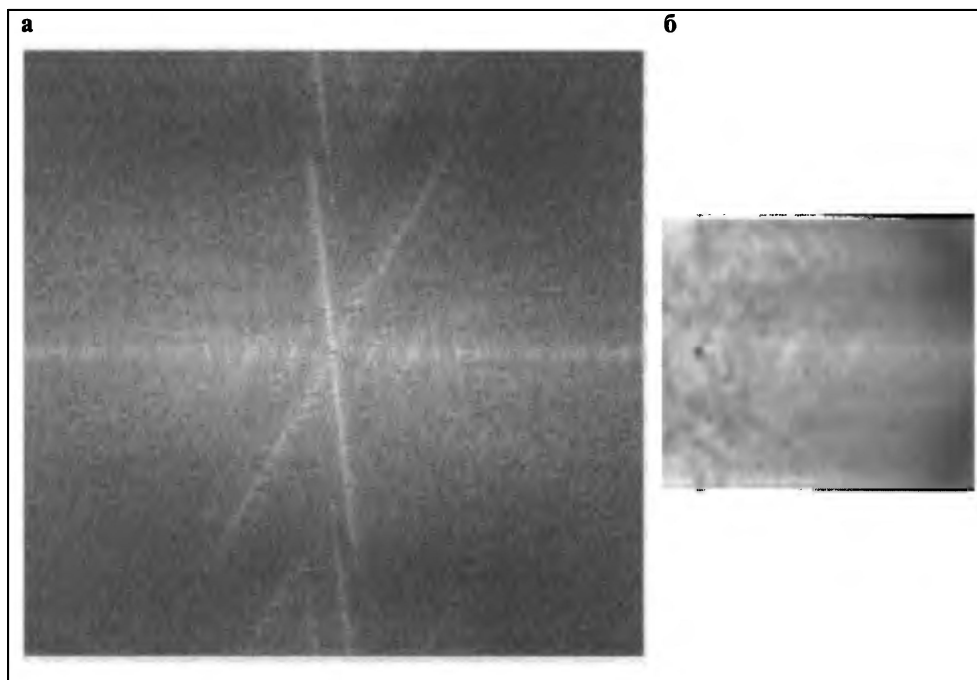


Ілюстрація значущості фази і амплітуди у Фур'є-просторі для зміст зображень : а), б) – два початкові зображення; в) – комбіноване зображення, що використовує фазу із зображення б) і амплітуду із зображення а); г) – комбіноване зображення, що використовує фазу із зображення а) і амплітуду із зображення б).

Динамічний діапазон.



Розбиття Фур'є-області на декартові (а) і логарифмічно-полярні (б) інтервали



Представлення перетвореного Фур'є-перетворенням зображення на мал. в декартових (а) і логарифмічно-полярних (б) координатах.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(k)|^2 dk_1 dk_2 = \int_{-\infty}^{\infty} k^2 |\hat{g}(k)|^2 d \ln k d \varphi.$$

Тема 11. ОПЕРАЦІЇ НАД СУСІДНІМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Лекція №16

1. Основні властивості і призначення

1.1. Розпізнавання об'єктів і операції над сусідніми елементами

Виділення простих локальних структур

(контури, кути, лінії, області постійних рівнів яскравості)

Визначення руху

Аналіз текстури

Реконструкція зображень, отриманих непрямыми методами формування

(томографія)

Відновлення зображень, що мають погану якість внаслідок дефокусування, розмитості при русі об'єкту, та інше.

Коригування порушень, викликаних небажаними змінами при отриманні зображень або передачі.

1.2. Загальні визначення

Безперервний оператор формування околиць.

Безперервний оператор формування околиць відображає багатовимірний безперервний сигнал $g(x)$ в самого себе наступною операцією:

$$g'(x) = N(\{g(x')\}, \quad \forall (x-x') \in \mathbb{Q})$$

де \mathbb{Q} – компактна область.

Область \mathbb{Q} називається маскою, вікном, областю підтримки або структурним елементом операції над сусідніми елементами. При обчисленні $g'(x)$ розмір і форма \mathbb{Q} визначають операцію над сусідніми елементами, задаючи вхідні значення g в області \mathbb{Q} , початок якої зсувається в точку x . Операція над сусідніми елементами N сама по собі тут не визначається. Вона може бути будь-якого виду. З міркувань симетрії маска часто є симетричною і має початок в центрі симетрії.

Дискретний оператор формування околиць.

Дискретний оператор формування околиць відображає матрицю розмірністю $M \times N$ саму на себе наступною операцією:

$$G'_{m,n} = N(G_{m'-m, n'-n}, \quad \forall [n', m'] \in \mathbb{N})$$

де \mathbb{N} є дискретною множиною точок.

1.3. Розмір маски і симетрія

$$(2R + 1) \times (2R + 1)$$

1.4. Запис в операторній формі

У разі використання операторів формування околиць корисним буде ввести запис в операторній формі. Таким чином, складні складені операції над сусідніми елементами стають легкими для розуміння. Усе оператори означатимемо готичними буквами, такими, як B, D, H, S . Оператор H перетворить зображення G в зображення $G' = HG$. Таке позначення використовується для безперервних і дискретних сигналів

будь-яка розмірність і дає компактне, незалежне від представлення позначення операцій обробки сигналів. Запис операторів один за іншим означає послідовне застосування. Найправіший оператор застосовується першим. Показник міри виражає послідовне застосування одного і того ж оператора :

$$\mathbf{H}\mathbf{H}\dots\mathbf{H} = \mathbf{H}^p$$

$$\text{комутативність: } \mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_2\mathbf{H}_1$$

$$\text{асоціативність : } \mathbf{H}_1(\mathbf{H}_2\mathbf{H}_3) = (\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2)\mathbf{H}_3$$

$$\text{дистрибутивність відносно складання : } (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2)\mathbf{H}_3 = \mathbf{H}_1\mathbf{H}_3 + \mathbf{H}_2\mathbf{H}_3$$

$$\text{поточечне перемноження: } (\bullet)$$

Операторне вираження $\mathbf{B}(\mathbf{D}_q \bullet \mathbf{D}_p)$, приміром, означає: застосування операторів \mathbf{D}_p і \mathbf{D}_q до одного і того ж зображення, поточкове перемноження результатів і застосування оператора \mathbf{B} до добутку зображень.

2. Лінійні інваріантні відносно зсуву фільтри

2.1. Дискретна згортка

$$\begin{aligned} g'_{mn} &= \sum_{m'=-r}^r \sum_{n'=-r}^r h_{m'n'} g_{m-m', n-n'} = \\ &= \sum_{m''=-r}^r \sum_{n''=-r}^r h_{-m'', -n''} g_{m+m'', n+n''} \end{aligned}$$

або для періодичної просторової області околиць

$$g_{-n} = g_{N-n}, \quad g_{-n, -m} = g_{N-n, M-m}$$

$$g_{m'n'} = \sum_{m'=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} h_{m'n'} g_{m-m', n-n'}$$

Обмеження суми в рівнянні відбиває той факт, що елементи матриці H рівні нулю, за винятком декількох точок маски фільтру $(2R+1) \times (2R+1)$. Таким чином, останнє представлення є набагато більше практичним і дає краще розуміння операції, що фільтрує. Наприклад, наступні маска фільтру 3×3 і матриця H розмірністю $M \times N$ – еквівалентні

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Більш компактна форма запису для багатовимірних зображень

$$g_{\mathbf{n}}' = \sum_{\mathbf{n}'=-R}^R h_{-\mathbf{n}'} g_{\mathbf{n}+\mathbf{n}'}$$

при $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \dots, n_W]$, $\mathbf{R} = [R_1, R_2, \dots, R_W]$, де $g_{\mathbf{n}}$ є елемент W -вимірного сигналу g_{n_1, n_2, \dots, n_W} . Позначення сум в цьому рівнянні є скороченим записом для

$$\sum_{\mathbf{n}'=-R}^R = \sum_{n'_1=-R_1}^{R_1} \sum_{n'_2=-R_2}^{R_2} \dots \sum_{n'_W=-R_W}^{R_W}$$

2.2. Симетрії

Що стосується симетрії, можна два класи фільтрів : парні і непарні фільтри з умовою по одному або більше напрямам:

$$h_{-m,n} = \pm h_{m,n} \text{ та } h_{m,-n} = \pm h_{m,n}$$

парна:
$$g'_{mn} = h_0 g_{mn} + \sum_{n'=1}^r h_{n'} (g_{m,n-n'} + g_{m,n+n'})$$

непарна:
$$g'_{mn} = \sum_{n'=1}^r h_{n'} (g_{m,n-n'} - g_{m,n+n'})$$

У 2-D випадку рівняння стають складнішими, оскільки тепер вимагається враховувати симетрію в кожному напрямі окремо. 2-D фільтр з парною симетрією в обох напрямках зводяться до

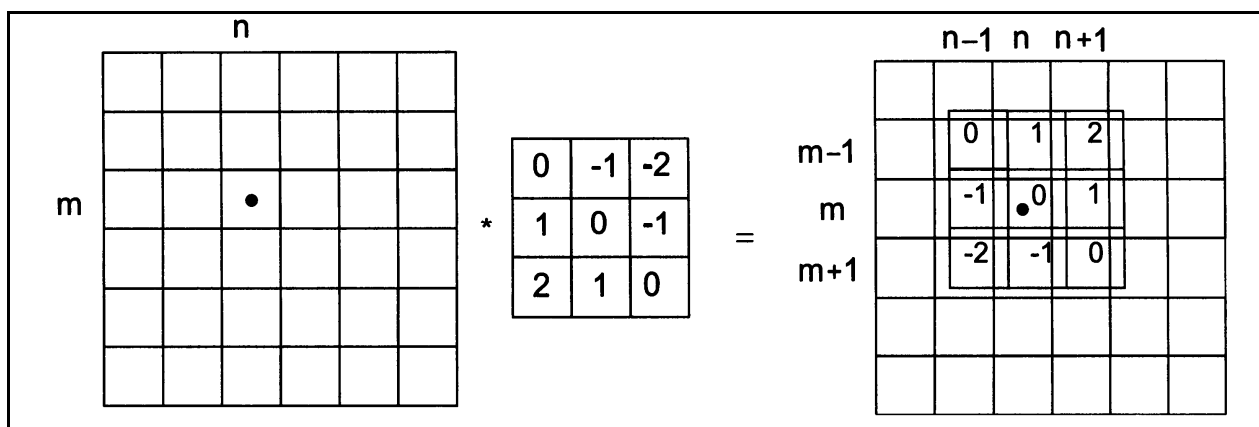
$$\begin{aligned} g'_{mn} = & h_{00} g_{mn} + \\ & + \sum_{n'=1}^r h_{0n'} (g_{m,n-n'} + g_{m,n+n'}) + \\ & + \sum_{m'=1}^r h_{m'0} (g_{m-m',n} + g_{m+m',n}) + \\ & + \sum_{m'=1}^r \sum_{n'=1}^r h_{m'n'} (g_{m-m',n-n'} - g_{m-m',n+n'}) + \\ & + \sum_{m'=1}^r \sum_{n'=1}^r h_{m'n'} (g_{m+m',n-n'} + g_{m+m',n+n'}) \end{aligned}$$

2-D фільтри можуть мати різні типи симетрії в різних напрямках. Наприклад, вони можуть бути непарними в горизонтальних напрямках і парними у вертикальних напрямках. Тоді

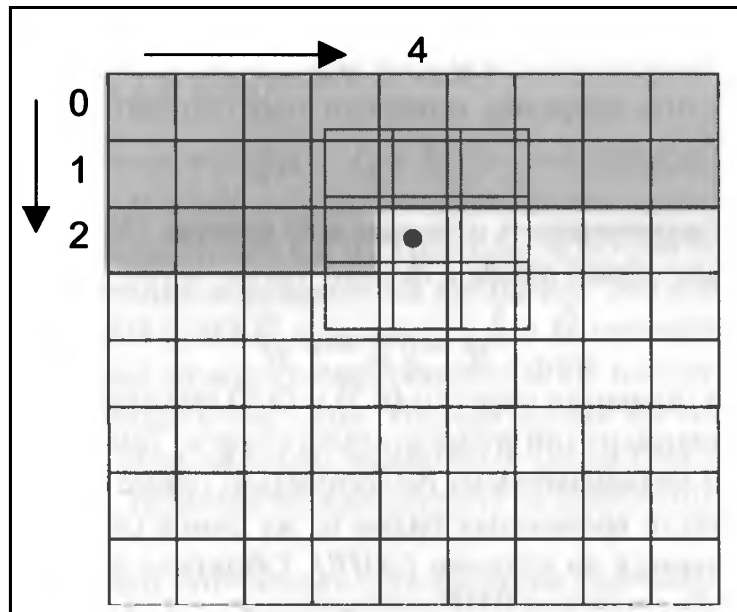
$$\begin{aligned}
 g'_{mn} = & \sum_{n'=1}^r h_{0n'} (g_{m,n-n'} - g_{m,n+n'}) + \\
 & + \sum_{m'=1}^r \sum_{n'=1}^r h_{m'n'} (g_{m-m',n-n'} - g_{m-m',n+n'}) + \\
 & + \sum_{m'=1}^r \sum_{n'=1}^r h_{m'n'} (g_{m+m',n-n'} + g_{m+m',n+n'})
 \end{aligned}$$

2.3. Обчислення згортки

Якщо ми хочемо обчислити результат згортки в точці $[m,n]^T$, то центруємо відображену маску в цій точці, виконуємо свертку і записуємо результат назад на місце $[m,n]^T$. Ця операція виконується для усіх пікселів зображення. Мова йде про циклічну згортку. Тільки цей тип зв'едується до множення у Фур'є-просторі.



Ілюстрація операції дискретної згортки з маскою фільтру 3x3



Згортка зображення за допомогою скануючого переміщення маски від лінії до лінії по зображенню. У затемнених пікселях рівень яскравості вже замінений сумою згортки. Таким чином, рівні яскравості в затемнених пікселях, які потрапляють в маску фільтру, необхідно зберігати в додатковому буфері.

Число елементів, що містяться в масці, значно зростає при збільшенні розміру і розмірності. W -вимірна маска з лінійним розміром R містить R^W елементів. Чим вище розмірність, тим швидше збільшується число елементів з ростом розміру маски. У разі високої розмірності навіть мала околиця включає сотні і тисячі елементів. Складним завданням при створенні ефективних схем обчислень є зменшення числа обчислень з $O(R^W)$ до нижчого порядку. Це означає, що число обчислень більше не пропорційне R^W , а швидше пропорційно більшій низькій мірі R . Кінцевою метою є отримання обчислювальних схем, які зростають тільки лінійно з ростом розміру маски ($O(R^1)$) чи взагалі не залежать від розміру маски ($O(R^0)$).

Лекція №17

2.4. Лінійність і інваріантність відносно зсуву

Принцип суперпозиції

Якщо G_1 і G_2 є два W -вимірних комплекснозначних сигнали, a і b - дві комплекснозначні скалярні величини, а H -оператор, то оператор є лінійним тоді і тільки тоді, коли

$$H(aG_1 + bG_2) = aHG_1 + bHG_2$$

Загальний випадок:

$$H\left(\sum_k a_k G_k\right) = \sum_k a_k HG_k$$

Інваріантність відносно зсуву (також відомим, як інваріантність трансляції або однорідність).

Визначимо оператор зсуву ${}^{mn}S$ як

$${}^{mn}S g_{m'n'} = g_{m'-m, n'-n}$$

Інваріантність відносно зсуву.

Оператор є інваріантним відносно зрушення тоді і тільки тоді, коли він комутує з оператором зсуву ${}^{mn}S$: $H {}^{mn}S = {}^{mn}S H$

З визначення операції згортки видно, що вона є як лінійною, так і інваріантною відносно зсуву. Такий клас операторів називається лінійними інваріантними відносно зрушення операторами (ЛІЗ-операторами). У контексті тимчасових рядів та ж сама властивість відома як лінійні, такі, що не змінюються в часі (ЛІЧ). Зверніть увагу, що оператор зсуву ${}^{mn}S$ сам по собі є ЛІЗ-оператором.

2.5. Функція розсіяння точки

Кожне дискретне зображення може бути розкладене на окремі базисні зображення (наприклад точки)

$$G = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} G_{mn} P$$

Відгук на точкове зображення має назву функція розсіяння точки (**ФРТ**) (у разі часових рядів часто позначається як імпульсна характеристика, відгук на імпульсне збурення). **ФРТ** згортки або **ЛІЗ**-оператора тотожна його масці

$$p'_{mn} = \sum_{m'=-r}^r \sum_{n'=-r}^r h_{-m', -n'} p_{m+m', n+n'} = h_{m,n}$$

та повністю описує оператор згортки в просторовій області. **ФРТ** пропонує інший, хоча і еквівалентний погляд на свертку. Сума згортки говорить про те, що кожен піксель стає лінійною комбінацією сусідніх пікселів. **ФРТ** вказує на те, що кожен піксель розсіюється в околиці, згідно заданої **ФРТ**.

2.6. Передатна функція

Згідно з теоремою про згортку

$$g * h \mapsto N \tilde{g} \tilde{h}, \quad G * H \mapsto M N \tilde{G} \tilde{H}$$

$$g * h \mapsto \hat{g} \hat{h}, \quad G * H \mapsto \hat{G} \hat{H}$$

Перетворення Фур'є від маски згортки або **ФРТ** відоме як передатна функція (**ПФ**) лінійного фільтру.

Передатна функція має важливе практичне значення. Для кожного хвильового числа вона задає множник, на який множиться періодична структура при використанні операції фільтрування.

$$\hat{g}'_{u,v} = \hat{h}_{u,v} \hat{g}_{u,v} = r_h e^{j\varphi_h} r_g e^{j\varphi_g} = r_h r_g e^{j(\varphi_h + \varphi_g)}$$

Симетрія масок фільтрів значно спрощує передатну функцію, бо можна об'єднати відповідні симетричні члени в перетворенні Фур'є від ФРТ:

$$\begin{aligned}\hat{h}_v &= \sum_{n'=-R}^R h_{n'} \exp\left(-\frac{2\pi i n v}{N}\right) \quad (\text{при } h_{-n'} = \pm h_{n'}) \\ &= h_0 + \sum_{n'=1}^R h_{n'} \left(\exp\left(-\frac{2\pi i n v}{N}\right) \pm \exp\left(\frac{2\pi i n v}{N}\right) \right).\end{aligned}$$

Ці рівняння можуть бути далі спрощені заміною дискретного хвильового числа масштабованим безперервним хвильовим числом

$$\tilde{k} = 2v/N, \quad \text{при } -N/2 \leq v < N/2.$$

Використовуючи співвідношення Ейлера для комплексних чисел, у випадку 1-D парних і непарних фільтрів отримане рівняння можна звести до виду:

<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 20%;">парні:</div> <div style="width: 80%;"> $\hat{h}(\tilde{k}) = h_0 + 2 \sum_{n'=1}^R h_{n'} \cos(n' \pi \tilde{k}),$ </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; margin-top: 10px;"> <div style="width: 20%;">непарні:</div> <div style="width: 80%;"> $\hat{h}(\tilde{k}) = -2i \sum_{n'=1}^R h_{n'} \sin(n' \pi \tilde{k}).$ </div> </div>

Відповідно маска $(2R+1) \times (2R+1)$ з парною горизонтальною і вертикальною симетрією призводить до передатної функції:

$$\begin{aligned}\tilde{h}(\tilde{k}) &= h_{00} \\ &+ 2 \sum_{n'=1}^R h_{0n'} \cos(n' \pi \tilde{k}_1) + 2 \sum_{m'=1}^R h_{m'0} \cos(m' \pi \tilde{k}_2) \\ &+ 4 \sum_{m'=1}^R \sum_{n'=1}^R h_{m'n'} \cos(n' \pi \tilde{k}_1) \cos(m' \pi \tilde{k}_2).\end{aligned}$$

2.7. Додаткові властивості ЛІЗ операторів

Комутативність

ЛІЗ-оператори є комутативними: $H_1 H_2 = H_2 H_1$

Асоціативність

ЛІЗ-оператори є асоціативними: $H_1 H_2 = H$

Розглянемо маску

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

З такою маскою згортки необхідно виконати 25 операцій множення і 24 операції складання для кожного пікселя. Проте можна легко показати, що якщо розкласти цю маску на горизонтальну і вертикальну маски:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

то можна буде послідовно виконати тільки 10 операцій множення і 8 операцій складання для кожного пікселя при застосуванні операції до повного зображення. Маски фільтрів, які можуть бути розкладені на одновимірні маски уздовж осей, називаються сепарабельними масками.

Познайомимо одновимірні оператори з допомогою індексу, що вказує вісь. Тоді можна записати сепарабельний оператор B у тривимірному просторі: $B = B_x B_y B_z$

Дистрибутивність відносно складання.

ЛІЗ-оператори є дистрибутивними відносно складання: $H_2 + H_1 = H$

2.8. Поширення помилки при фільтрації

Фільтри застосовуються до вимірюваних даних, які показують шум. Тому важливо знати, як статистичні властивості відфільтрованих даних можуть бути отримані з властивостей початкових даних.

Коваріаційна матриця лінійної комбінації $\mathbf{g}' = \mathbf{M}\mathbf{g}$ випадкового вектору

\mathbf{g} визначається як $\text{cov}(\mathbf{g}') = \mathbf{M} \text{cov}(\mathbf{g}) \mathbf{M}^T$

Розглянемо 1-D сигнали. Допустимо, що коваріаційна матриця сигналу однорідна, тобто залежить тільки від відстані між точками, а не від положення самого по собі. Тоді дисперсія σ^2 для усіх елементів однакова. Окрім того, значення, що знаходяться на діагоналях, також рівні, і коваріаційна матриця набуває простої форми:

$$\text{cov}(\mathbf{g}) = \begin{bmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \dots \\ \sigma_{-1} & \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 & \dots \\ \sigma_{-2} & \sigma_{-1} & \sigma_0 & \sigma_1 & \dots \\ \vdots & \sigma_{-2} & \sigma_{-1} & \sigma_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

де індекс означає відстань між точками і $\sigma_0 = \sigma^2$. Як правило, коваріація зменшується зі збільшенням піксельної відстані. Часто тільки обмежене число коваріацій σ_p відмінно від нуля. У випадку статистично некорельованих пікселів тільки $\sigma_0 = \sigma^2$ не дорівнює нулю. Для абсолютно безперервних випадкових величин із спільною щільністю імовірності

$$p_{ij} = \mathbb{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)$$

і одновимірними щільністями імовірності

$$p_{i\cdot} = \mathbb{P}(\xi = x_i) = \sum_j p_{ij} \quad p_{\cdot j} = \mathbb{P}(\eta = y_j) = \sum_i p_{ij}$$

коваріація знаходиться за формулою

$$\text{Cov}(\xi, \eta) = \sum_{ij} x_i y_j p_{ij} - \sum_i x_i p_{i\cdot} \sum_j y_j p_{\cdot j}$$

Оскільки лінійні комбінації, що описуються матрицею \mathbf{M} , мають особливу форму згортки, матриця має такий же вигляд, як однорідна коваріаційна матриця. Для фільтру з трьома коефіцієнтами матриця \mathbf{M} зводиться до

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \dots & \dots \\ h_1 & h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \dots \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_{-1} & \dots \\ \vdots & h_2 & h_1 & h_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Відкинувши граничні ефекти, матричні множення зводяться до операцій згортки. Введемо автоковаріаційний вектор $\vec{\sigma} = [\dots, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \dots]^T$

Тоді отримаємо $\boldsymbol{\sigma}' = \bar{\mathbf{h}} * \boldsymbol{\sigma} * \mathbf{h} = \boldsymbol{\sigma} * \bar{\mathbf{h}} * \mathbf{h} = \boldsymbol{\sigma} * (\mathbf{h} * \mathbf{h})$

де $\bar{\mathbf{h}}$ – відбита маска свертки: $\bar{\mathbf{h}} = \mathbf{h}^*$. На останньому кроці ми замінили згортку кореляцією. У разі некорельованих даних автоковаріаційний вектор є дельта-функцією і автоковаріаційний вектор шуму відфільтрованого вектору зводиться до $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}^2 (\mathbf{h} * \mathbf{h})$.

Для фільтру з R коефіцієнтами $2R-1$ значень автоковаріаційного вектору тепер не дорівнюють нулю. Це означає, що у відфільтрованому сигналі піксели з максимальною відстанню $R-1$ тепер корелюють один з одним. Оскільки автоковаріаційний вектор згорнутого сигналу може описуватися кореляцією, ми можемо також вчислити зміну в спектрі шуму, тобто енергетичний спектр шуму, викликаного операцією згортки.

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} * (\mathbf{h} * \mathbf{h}) \longrightarrow \hat{\sigma}'(k) = \hat{\sigma}(k) |\hat{h}(k)|^2}$$

Це означає, що спектр шуму згорнутого сигналу визначається множенням спектру шуму вхідних даних на квадрат передатної функції фільтру. Оскільки отримані результати не ґрунтувались на розмірності сигналу, а рівняння

застосовується не лише для 1-D сигналів, але і для сигналів довільної вимірності, – висновки щодо шуму не залежать від вимірності сигналу.