Зміст

ШПОРА ФОТОЕФЕКТ

Коли енергія фотона $\hbar\omega$ перевищує енергію іонізації атома , поглинання фотона буде супроводжуватися переходом електрона з зв"язаного стану в стан неперервного спектру. Для спрощення розрахунку імовірності такого переходу в одиницю часу, будемо вважати, що вільний електрон, який утвориться, буде слабо взаємодіяти з атомом. А це означає те, що його стан можна буде описати плоскою хвилею.

$\varphi_q = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(i\vec{q}\vec{r}), \vec{q} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$ нормованою на об'єм V системи. Таке наближення буде виконуватись коли кінетична енергія вільних електронів велика порівняно з енергією іонізації атома. У випадку коли електрон знаходиться у початковому 1s-стані в атомі, він описувався хвильовою функцією вигляду

$\psi_o = (\pi a^3)^{-1/2} e^{-\frac{r}{a}}; a = \frac{h^2}{\mu e^2 Z}$. Отже, оскільки зміна стану системи відбулася в наслідок гармонічного збурення ел.-маг. Хвилі, для визначення імовірності такого переходу в одиницю часу можна використати формулу вигляду:

$$P_{oq} = \frac{W_{oq}}{t} = \frac{4\pi^2 e^2 I}{\mu^2 h^2 c\omega^2} | B_{oq} |^2 \delta(\omega_{oq} + \omega)$$

де Boq :

$B_{oq} = \int \psi^*{}_o e^{i\vec{k}\vec{r}} (\vec{e}_k \vec{p}) \psi_q dv$. Далі йде якась муть про розподіл по кутам, конкретніше можна подивитись наприклад в Давидові, сторінка 473.

---

6 Довести тотожність для будь-яких операторів A і B :

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}\hat{B}] + \frac{1}{2}\left[\hat{A}[\hat{A}\hat{B}]\right] + \dots \qquad e^{\hat{A}} = 1 + \hat{A} + \frac{\hat{A}\hat{A}}{2!} + \dots$$

$$e^{-\hat{A}} = 1 - \hat{A} + \frac{\hat{A}\hat{A}}{2!} - \dots \qquad \hat{B}\left(1 - \hat{A} + \frac{\hat{A}\hat{A}}{2} - \dots\right) = \hat{B} - \hat{B}\hat{A} + \frac{\hat{B}\hat{A}\hat{A}}{2}$$,

$\left(1 + \hat{A} + \frac{\hat{A}\hat{A}}{2!}\right)\left(\hat{B} - \hat{B}\hat{A} + \frac{\hat{B}\hat{A}\hat{A}}{2}\right) =$ Розкриваємо дужки, Записуємо з отриманого результату $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \left[\hat{A}\hat{B}\right]$ та $\hat{A}\hat{A}\hat{B} - \hat{A}\hat{B}\hat{A} = \left[\hat{A}\left[\hat{A}\hat{B}\right]\right]$, що відповідає шуканому виразу.

---

7 Для будь-якого оператора А довести що $< A^2 > \geq 0$. Розв:

$$\int \psi^* \hat{A}\hat{A}\psi dV = \int \psi^* \hat{A}\left(\hat{A}\psi\right) dV =$$

$$\int \left(\hat{A}\psi\right)\hat{A}^*\psi^* dV = \int \left(\hat{A}\psi\right)\left(\hat{A}\psi\right)^* dV = \int \left|\hat{A}\psi\right|^2 dV \geq 0$$

.

---

8 Показати якщо $\hat{A}$ і $\hat{B}$ - ермітові то $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ - також ермітові. Розв:

$$\int \psi^* \left(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\right)\psi dV = \int \psi^* \hat{A}\hat{B}\psi dV + \int \psi^* \hat{B}\hat{A}\psi dV =$$

$$\int \psi^* \hat{A}(\hat{B}\psi) dV + \int \psi^* \hat{B}(\hat{A}\psi) dV = \int \hat{B}\psi \hat{A}^* \psi^* dV + \int \hat{A}\psi \hat{B}^* \psi^* dV = *$$

$$\int \hat{A}^* \psi^* \hat{B}\psi dV + \int \hat{B}^* \psi^* \hat{A}\psi dV = \int \psi \hat{B}^* \hat{A}^* \psi^* dV + \int \psi \hat{A}^* \hat{B}^* \psi^* dV = \int \psi (\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})^* \psi^* dV$$

.

---

9 Показати, що сер. значення ермітового оператора $\hat{L}^* * \hat{L}$ невід'ємні.

Розв. $\int \psi^* \hat{L} + \hat{L}\psi dx = \int \psi^* \hat{L} + \phi dx = \int \phi \hat{L}\psi^* dx = \int \left(\hat{L}\phi\right)\left(\hat{L}\psi\right)^* dx = \int \left|\hat{L}\psi\right|^2 dx \geq 0$

---

10 Електрон знаходиться в атомі водню в основному стані Визначити середній радіус і сер R^2

Розв: $\Psi_1(r) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$;

$$\bar{r}_1 = \int \psi^* r \psi d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \int e^{-r/a} r d\tau = \left| r^2 \sin\theta d\theta dr d\phi = d\tau \right| = < r_1 > = \frac{2\pi}{\pi a^3} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\infty e^{-2r/a} r^3 dr$$

$$= \frac{2\pi}{\pi a^3} r \frac{3!}{\left(\frac{2}{a}\right)^2} = \frac{4\pi}{\pi} \frac{6a^4}{16} = \frac{3}{2} a$$

---

11 Довести що $[\hat{L}_x, \hat{P}_z] = -i\hbar \hat{P}_y$

Розв: $[\hat{L}_x, \hat{P}_z] = \left(\hat{y}\hat{P}_z - \hat{z}\hat{P}_y\right)\hat{P}_z - \hat{P}_z\left(\hat{y}\hat{P}_z - \hat{z}\hat{P}_y\right) = y\left(\hat{P}_z\right)^2 - \hat{z}\hat{P}_y \hat{P}_z - \hat{P}_z \hat{y}\hat{P}_z + \hat{P}_z \hat{z}\hat{P}_y =$

$$= y\left(\hat{P}_z\right)^2 - y\left(\hat{P}_z\right)^2 - \hat{z}\hat{P}_z \hat{P}_y + \hat{P}_z \hat{z}\hat{P}_y = [\hat{P}_z, z]\hat{P}_y = -i\hbar \hat{P}_y$$

---

12 Знайти власні функ-ції і власні значення оператора $\hat{L}_z^2 = -\hbar^2 \frac{d^2}{d\phi^2}$

Розв: $\vec{L} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$; $\hat{L}^2{}_z = -\hbar^2\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^2 = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$; $-\frac{\hbar^2\partial^2\psi}{\partial\phi^2} = \lambda\psi$; $\psi'' + \frac{\lambda}{\hbar^2}\psi = 0$; $\psi = Ce^{k\phi}$

; $\psi(\phi) = \psi(\phi + 2\pi)$; $k^2 + \frac{\lambda}{\hbar^2}\psi = 0$; $\Psi = C_1 e^{-\frac{\sqrt{-\lambda}}{\hbar}\phi} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{-\lambda}}{\hbar}\phi}$; $k = \pm\frac{\sqrt{-\lambda}}{\hbar}$;

$e^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{\hbar}(2\pi+\phi)} = e^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{\hbar}\phi} e^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{\hbar}2\pi} = e^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{\hbar}\phi} = \psi(\phi)$; $e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{\hbar}2\pi} = 1$; $\frac{\sqrt{-\lambda}}{\hbar} = im$; $|\lambda| = m^2\hbar^2, \lambda > 0$;

---

13 Знайти серед. значення $\vec{p}^2{}_x$ в состоянии $\psi = C_1\psi_1 + C_2\psi_2$, де $\psi_1(x)$ ta $\psi_2(x)$. Основне та перше збуджений стан част. в ∞ глибокій прямокутній ямі, шириною a. $\psi_n = A_n \sin\frac{\pi n U}{a}$

Розв: $\psi = C_1\psi_1 + C_2\psi_2$; $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$; $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$; $\Psi = \sqrt{\frac{2}{a}}\left(C_1\sin\frac{\pi x}{a} + C_2\sin\frac{2\pi x}{a}\right)$;

$< p^2 > = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi dx =$ ψ^* - дійсна тому $\psi^* = \psi$ $= \int_{-\infty}^{\infty} -\hbar^2\psi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi\right)dx$

$\frac{\partial}{\partial x}\psi = \sqrt{\frac{2}{a}}\left(C_1\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a} + \frac{2\pi}{a}\cos\frac{2\pi x}{a}\right)$ $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = -\sqrt{\frac{2}{a}}\left(C_1\frac{\pi^2}{a^2}\sin\frac{\pi x}{a} + \frac{4\pi^2}{a^2}C_2\sin\frac{2\pi x}{a}\right) =$

$= -\sqrt{\frac{2}{a}}\frac{\pi^2}{a^2}\left(C_1\sin\frac{\pi x}{a} + C_2\sin\frac{2\pi x}{a} + 3C_2\sin\frac{2\pi x}{a}\right)$ $= -\psi\frac{\pi^2}{a^2} - \sqrt{\frac{2}{a}}3C_2\sin\frac{2\pi x}{a}\frac{\pi^2}{a^2}$;

$< p^2 > = +\hbar^2\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left(\frac{\pi^2}{a^2}\psi + \pi^2\sqrt{\frac{2}{a}}3C_2\frac{\sin 2\pi x}{a}\right)dx =$ $= \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2 d\psi}_{=1} + \frac{\pi^2 3\hbar^2}{a^2}\sqrt{\frac{2}{a}}C_2\int_{-\infty}^{\infty}\sin\frac{2\pi x}{a}\psi dx$

$\int_0^a C_1C_2\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi x}{a} + C_2^2\underbrace{\sin^2\frac{2\pi x}{a}}_{=\frac{C_2^2}{2}\left(1-\cos\frac{4\pi x}{a}\right)}dx$ бо Ψ *замежамиями* $= 0$ $\frac{\tilde{N}_1\tilde{N}_2}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right)$ $\Rightarrow \frac{C_2^2}{2}a$

Отже $< p^2 > = \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2} + \frac{C_2^2}{2}a3\frac{\hbar^2\pi^2}{a^2}\frac{2}{a} = \frac{\pi^2\hbar 2}{a^2}\left(1 + 3C_2^2\right)$

14Нескінченно глибока потенціальна яма (0,a) збурення

$V(x) = V_0 xos^2\frac{\pi x}{a}$

0) $E^{(0)}_n = \frac{\pi^2 h^2}{2ma^2} n^2 \quad \psi_n = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \sin\left(\frac{\pi n}{a}\right) x$ 1) $V\psi_n + H_0\psi^{(1)}_n = E^{(0)}_n \psi^{(0)}_n + E^{(1)}_n \psi_n$

$$V\psi_n + H_0\psi^{(1)}_n = E^{(0)}_n \psi^{(0)}_n + E^{(1)}_n \psi_n$$

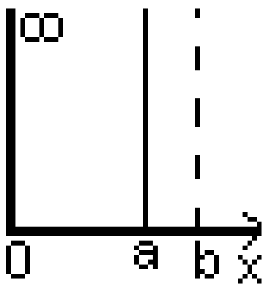
$$V_{nn} = \int_0^a \psi_n V \psi_n * dx = \frac{2}{a} V_0 \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx =$$

$$= \frac{V_0}{2a} \int_0^a \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right)\right)\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right) dx = \ldots = \frac{V_0}{2a} - \frac{\delta_{n1} V_0}{4}$$

да да, це символи Кронекера вродє. $E^{(1)}_n = 1/2 V_0 \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{n1}\right) \quad V_{nn} = \frac{V_0}{2}\left(1 - \frac{\delta_{n1}}{2}\right)$ n=m $E = E^{(0)} + E^{(1)}$

---

15 Частинка в основному стані у ∞ глибокій ямі ширино. a. В певний момент часу права стінка ями зсунулась в точку b. Знайти ймовірність переходу частинки в різні стаціонарні стани.



1) $\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}$ **;** $\psi_n(x,t) = \psi_1(x) e^{\frac{-i}{\hbar} t E_1}$ **.**

2)Для розширеної ями: $\tilde{\psi}_n = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{\pi n x}{b}$,

$$\tilde{\psi}_n(x,t) = \tilde{\psi}_n(x) e^{\frac{-i}{\hbar} t E_1}$$.

3) $\psi(x,t) = \sum_n a_{ik} \tilde{\psi}_k(x,t)$, $\psi_1(x) - e^{-\frac{i}{\hbar} t E_1} = \sum_k a_{ik} \tilde{\psi}_k(x) = \quad e^{-\frac{i}{\hbar} t E_1} \Big| \psi_n(x)$

$$\Rightarrow e^{-\frac{i}{\hbar} t E_1} \int_0^a \psi_1(x) \tilde{\psi}_n(x) dx = \sum_n a_{ik} e^{-\frac{i}{\hbar} t E} \underbrace{\int_0^b \tilde{\psi}_k(x) \tilde{\psi}_n(x) dx}_{\delta_{nk}}$$.

$$a_{1n} = e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1 - E_n) t} \underbrace{\int_0^a \psi_1(x) \tilde{\psi}_n(x) dx}_{Integral}$$.

$$\text{integral} = \int_0^a \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi n x}{b} dx = \quad \frac{2}{2\sqrt{ab}} \int_0^a \left\{ \cos\pi x(\frac{1}{a} - \frac{n}{b}) - \cos\pi x(\frac{1}{a} + \frac{n}{b}) \right\}$$

$$= -\frac{1}{\pi\sqrt{ab}} \left(\frac{ab}{b-an} \sin\frac{\pi x(b-an)}{ab} - \frac{ab}{b+an} \sin\frac{\pi x(b+an)}{ab} \right)\Bigg|_0^a = \quad \text{....} = \frac{2b\sqrt{ab}}{\pi(b^2-a^2n^2)} \sin\frac{\pi an}{b} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1 - E_n)t} \; .$$

Ймовірність $W_{1\to k} = |a_{1k}|^2 = a_{1k} \cdot a_{1k}{}^* = \dfrac{4ab^3 \sin^2(\frac{\pi an}{b})}{\hbar^2(b^2 - a^2n^2)}[....]$.

---

16 Знайти середнє значення потенціальноїенергії для атома водню.

$\psi = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi a^3}} (1 - r/2a) \cdot e^{-r/2a}$ - волнова фун-я атома фодню.

Розв: 1) Для атома водню $U = -e^2/r$;

$$\Rightarrow <U> = \int_0^\infty \psi^*(r) U \psi(r) r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr = -\frac{4\pi e^2}{8\pi a^3} \int_0^\infty (1 - r/2a)^2 e^{-r/a} \cdot \frac{r^2}{r} dr =$$

$$= -\frac{e^2}{2a^3} \int_0^\infty \left(r - \frac{r^2}{a} + \frac{r^3}{4a^2} \right) e^{-r/a} dr = \text{...âèêîðèñòàºìî} \left| \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \right|$$

---

17 Знайти власні значення та власні функції оператора $s_x = \dfrac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Розв: $\widehat{A}\psi = A\psi$; $\hat{S}_x \psi(\sigma_x) = S_x \psi(\sigma_x)$, $\dfrac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = S_x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \dfrac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = S_x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} \frac{\hbar}{2} b = S_x a \\ \frac{\hbar}{2} a = S_x b \end{cases} = \begin{cases} \frac{\hbar}{2} - S_x = 0 \\ -S_x + \frac{\hbar}{2} a = 0 \end{cases} \quad \Delta = 0 = \begin{vmatrix} \frac{\hbar}{2} & -S_x \\ -S_x & \frac{\hbar}{2} \end{vmatrix} = \quad \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 - S_x = 0 \Rightarrow \quad S_x = \pm\frac{\hbar}{2}$$ - влісні

значення. Розглянемо ці 2 випадки: 1) $S_x = \dfrac{\hbar}{2} \Rightarrow$ і. Умова нормування:

$$\sum_{\sigma_x} \chi_{m_s}{}^+(\sigma_x) \chi_{m'_s}(\sigma_x) = \delta_{m_s m'_s} \Rightarrow (a^* \quad b^*) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \quad a^*a + b^*b = 1 \Rightarrow |a|^2 + |b|^2 = 1$$. З

умови нормування слідує $a = b = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Тоді $\Psi(\sigma_x) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ влісна функція при

$S_x = \frac{\hbar}{2}$; 2) $S_x = -\frac{\hbar}{2} \Rightarrow \frac{\hbar}{2}b + \frac{\hbar}{2}a = 0 \Rightarrow$ $b = -a = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow$ $\Psi(\sigma_x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ влісна функція при $S_x = -\frac{\hbar}{2}$

---

18 Знайти рівні енергії ш аласні функції 3-вимірного гармонічного осцилятораз пот. енергією $V(x,y,z) = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2y^2 + \frac{1}{2}k_3z^2$.

Запишем для осциллятора уравнение Шредингера:

$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + \left(\frac{k_1x^2}{2} + \frac{k_2y^2}{2} + \frac{k_3z^2}{2}\right) = E\Psi$. В данном случае мы можем использовать разделение переменных, то есть переписать волновую функцию в след виде:

$\Psi(x,y,z) = \Psi_1(x)\Psi_2(y)\Psi_3(z)$. Подставим ее в уравнение Шредингера и поделим на нее же. Получаем:

$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}\frac{1}{\Psi_1} + \frac{\partial\Psi_2}{\partial y}\frac{1}{\Psi_2} + \frac{\partial\Psi_3}{\partial z}\frac{1}{\Psi_3}\right) + \left(\frac{k_1x^2}{2} + \frac{k_2y^2}{2} + \frac{k_3z^2}{2}\right) = E$. Ахуенно. Теперь введем некоторые обозначения: $\omega^2 = \frac{k}{m}$ и подставим его во вторую часть уравнения Шредингера. После небольшой перегруппировки членов получаем:

$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}\frac{1}{\Psi_1} + \frac{k_1x^2}{2}\right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\Psi_2}{\partial y}\frac{1}{\Psi_2} + \frac{k_2y^2}{2}\right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\Psi_3}{\partial z}\frac{1}{\Psi_3} + \frac{k_3z^2}{2}\right) = E$. А теперь сделаем ход ФЕРЗЕМ! Запишем нашу энергию так: $E = E_1 + E_2 + E_3$ типа как для 3-х одномерных осцилляторов. Очевидно, что мы имеем полное право промутить такую фичу. Теперь нам осталось решить все это и записать энергии и волновые функции. $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\Psi_1}{\partial x} + \frac{k_1x^2}{2}\Psi_1 = E\Psi_1$. Для упрощения вида и следовательно геморроя при решении, введем следующие обозначения:

$\xi_1 = \sqrt{\frac{m\omega_1}{\hbar}}; \xi_2 = \sqrt{\frac{m\omega_2}{\hbar}}; \xi_3 = \sqrt{\frac{m\omega_3}{\hbar}}$.

Известно, что (кому неизвестно – втыкайте в 94 страницу Ландау), что для одномерного осциллятора, решение будет в следующем виде: $\Psi = Ce^{-\frac{\xi_1}{2}}H_n(\xi_1)$, где H_n - полиномы Эрмита. Учитывая все вышесказанное, для волновой функции 3-х мерного осциллятора, получаем $\Psi_{n_1n_2n_3} = Ce^{-\frac{\xi_1+\xi_2+\xi_3}{2}}H_{n_1}(\xi_1)H_{n_2}(\xi_2)H_{n_3}(\xi_3)$, а для энергий имеем следующую парафию: $E_{n_1 n_2 n_3} = \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_1 + \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_2 + \left(n_3 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_3$.

Где $\frac{\hbar\omega}{2}$ - минимальное значение, а n – условие квантования. Для того, чтобы узнать коэффициент С используем условие нормировки волновой функции.

Полином Эрмита можно записать в след форме: $H_n = (-1)^1 e^{\xi^2} \frac{d^n e^{\xi^2}}{d\xi^n}$,

подставим это в условие нормировки: $\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_1}} C_n^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \frac{d^n H_n}{d\xi^n} d\xi = 1$. Откуда-то

известно, что $\frac{d^n H_n}{d\xi^n} = 2^n n!$, то есть $C_n^2 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_n}} \frac{1}{2^n n!}$, то есть после всей этой

еботни получаем решение: $\Psi(x,y,z) = \frac{\sqrt[4]{m^3\omega_1\omega_2\omega_3}\, e^{-\frac{\xi_1+\xi_2+\xi_3}{2}} H_{n_1}(\xi) H_{n_2}(\xi) H_{n_3}(\xi)}{(\hbar\pi)^{\frac{3}{4}} \sqrt{2^{n_1+n_2+3} n_1! n_2! n_3!}}$. Вот

в принципе и все. Ну что, мой дорогой и прыщавый дружок, правда ведь, что очко уже меньше рипит, и мона идти пиздеть с Высочким, зная, что у тя в билете написана задача.. ☺ Карочо УДАЧИ при ответе.

---

19 Найти нормированные собственные функции и собственные значения

оператора $\hat{A} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi} + a\sin\varphi$ (φ-азимутальный угол)

Решение: Собственные функции и значения находятся из

$(\hat{A} - A)\psi = 0 \Leftrightarrow \hat{A}\psi = A\psi$ подставляя явный вид оператора:

$-i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \psi(a\sin\varphi - A)$ Разделяем переменные и интегрируем $\int i\hbar \frac{\partial\psi}{\psi} = \int (a\sin\varphi - A) d\varphi$

получим

$\ln\psi = \frac{i(a\cos\varphi + A\psi)}{\hbar} + c$ отсюда $\psi(\varphi) = c\exp(\frac{i(a\cos\varphi + A\varphi)}{\hbar})$. Для выполнения условий однозначности

$$\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$$

Далее путем несложных мат. преобразований используя, что

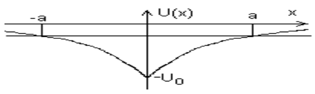
$\exp(i\varphi) = \exp(i(\varphi + 2\pi m))$ при $m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ (целое) находим

$A = \hbar m$ - это и есть собственные значения оператора. Не нормированные собственные функции: $\psi(\varphi) = c\exp(\frac{i(a\cos\varphi + \hbar m\varphi)}{\hbar})$ Нормировка находится из $\int_0^{2\pi} \psi_m{}^* \psi_m d\varphi = 1$ отсюда $c = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$ Тогда нормированные собственные функции:

$$\psi(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \exp(i(\frac{a\cos\varphi}{\hbar} + m\varphi))$$

---

20 Определить квазиклассическое выражение для уровней энергии частицы в потенциале вида: $U(x) = -U_0 \exp(-|x|/a)$

Решение. График имеет вид 

показанный на рисунке. Стационарные уровни энергии в квазиклассическом приближении находятся из правил квантования Бора-Зомерфельда: $\oint p\,dx = 2\pi\hbar(n + 1/2)$ где p – импульс, n – квант. число

$p = \sqrt{2m(E - U(x))}$ пересечение U(x) и E например при x=a, x=-a тогда $E = -U_0/\exp(1)$

Задача сводится к нахождению интеграла

$$\oint p\,dx = 2\int_{-a}^{a} \sqrt{2m(-(U_0/e) + U_0\exp(-|x|/a))}\,dx =$$

$$= 4\sqrt{2mU_0/e}\int_0^a \sqrt{\exp(1-(x/a)) - 1}$$

$$\int_0^a \sqrt{\exp(1-(x/a)) - 1} = \left|\sqrt{\exp(1-(x/a)) - 1} = t\right| = -2\int_{\sqrt{e-1}}^{0} \frac{t^2 dt}{t^2 + 1}$$

Прибавим и отнимем 1 в числителе, тогда $2\int_{1.3}^{0} dt - 2\int_{1.3}^{0} \frac{dt}{t^2+1} = 2t - 2arctg(t)|_{1.3}^{0} = 0.78$ следовательно

$$\oint p\,dx = 0.78\sqrt{2mU_0/e} = 0.78\sqrt{2mE} = 2\pi\hbar(n + 1/2)$$

Отсюда $E = \frac{4\pi^2\hbar^2(n+1/2)^2}{(0.78)^2 2m}$ стационарные уровни

---

21 Найти среднее значение потенциальной энергии в 2s состоянии атома водорода: $\psi_{200} = (8\pi a^3)^{-1/2}(1 - \frac{r}{2a})\exp(-\frac{r}{2a})$

для кулоновской потенциальной энергии $U(r) = -\dfrac{e^2}{r}$

Решение: Среднее значение ищем по общему правилу $<U> = \int \psi^* \hat{U}(r) \psi\, dr$ **(2)** оператор же потенциальной энергии равняется самой потенциальной энергии. Для атома водорода $\hat{U}(r) = U(r) = -\dfrac{e^2}{r}$ **(3)**. Задача сводится к нахождению интеграла (2) подставляя в него (3) и явный вид волновой ф-и из условия. **Б.Т.У**

---

22 Визначити енергію основного стану атома водню за допомогою варіаційного метода використовуючі пробну функцію $\psi = Ce^{-\alpha r}$ $\hat{H} = -\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{d}{dr}\right) - \dfrac{ql}{r}$
параметри обраної функції визначаються таким чином щоб обчисленний на цій функції середній гамільтоніан мав мінімум при умові нормування псі.

$$\int|\psi|^2 d\tau = \left[d\tau = r^2 \sin\Theta d\Theta d\varphi\right] = \quad 4\pi C^2 \int_0^{oo} r^2 e^{-2\alpha r} dr = \left[\int_0^{oo} r^2 e^{-2\alpha r} dr = \frac{n!}{2^{n+1}}\right] = \quad 4\pi C^2 \frac{2}{(2\alpha)^3} = 1$$

$C = \sqrt{\dfrac{\alpha^3}{\pi}}$ Знайдемо сер. Гам. $<H> = \int_0^{oo} \psi^* \hat{H} \psi d\tau = 4\pi C^2 \int e^{-\alpha r} \hat{H} e^{-\alpha r} r^2 dr = \ldots$ далі іде застосування гамільтоніана до ф-ції. Для взяття інт. Все акуратно виписуємо (нічого складного). Отримуємо $<H> = \dfrac{-11}{2}\dfrac{h^2\alpha^2}{\mu} - 4ql\alpha$ тпере від цього виразу беремо похідну по альфа, прирівнюємо нулю і отримуємо

$$\alpha_0 = -\frac{4\mu q l}{11\hbar^2} \quad <H>(\alpha_0) = \frac{88}{121}\frac{\mu q^2 l^2}{h^2}$$

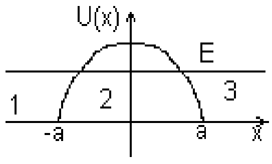
---

23 Вычислить в квазиклассическом приближении коэффициент прозрачности параболического барьера

$$U(x) = \begin{cases} U_0(1 - x^2/a^2), & |x| < a \\ 0 & , |x| > a \end{cases}$$

Найти критерий применимости результата.

Решение: Будем считать что частица с определенной энергией и импульсом $p = \hbar k_0$ движется из 1 в 3.



Тога в 1 волновая ф-я это суперпозиция 2-х волн :

$$\psi_1 = A\exp(ik_0x) + B\exp(-ik_0x)$$

Где A – амплитуда ‘падающей’ волновой ф-и, B – амплитуда волновой ф-и 'отраженных’ частиц. В области 3 по условию могут быть только уходящие частицы. $\psi_3(x) = c\exp(ik_0x)$ Эти равенства можно найти решая уравнение Шредингера $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + U\psi = E\psi$ (в данном случаи U=0) учитывая что $E = p^2/2m$

Аналогично для области 2 надо решить дифур: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (U_0(1 - x^2/a^2) - E)\psi = 0$
в общем случае его решение это:

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{\beta(x)}}(F\exp(\int_0^x \beta(y)dy) + E\exp(-\int_0^x \beta(y)dy)$$

, где $\beta = \sqrt{\frac{2m(U(x) - E)}{\hbar^2}}$. Из условий непрерывности

$$\psi_1(-a) = \psi_2(-a), \quad \psi_2(a) = \psi_3(a) \quad \psi_1'(-a) = \psi_2'(-a) \qquad \psi_2'(a) = \psi_3'(a)$$

можно найти четыре соотношения между коэффициентами A,B, C, F, E . В квазиклассическом приближении $\beta(x)$ является плавной ф-ей от x, поэтому в производной можно учитывать зависимость $\beta(x)$ только в exp. Коэффициент прохождения D потенциального барьера $D = |\frac{C}{A}|^2$ и в принципе можно пользоваться и готовой формулой $D \approx \exp(-\frac{2}{\hbar}\int_{-a}^{a}\sqrt{2\mu[U(x) - E]}dx)$ (Считать по этой формуле)
Критерием применимости результата как уже говорилось плавности ф-и от x (в данном случае выполняется) и достаточная ширина барьера $\bar{\beta}a >> 1$ (при этом F<<E и им можно пренебречь при нахождении D)

---

24 Тривимірний випадок гармонічного осцилятора.

$-\frac{h^2}{2m}\Delta\psi + \frac{m}{2}\omega(x^2 + y^2 + z^2)\psi = E\psi$; $-\frac{h^2}{2m}\Delta\psi + \frac{m}{2}(\omega_x{}^2x^2 + \omega_y^2y^2 + \omega_z^2z^2)\psi = E\psi$;

$-\frac{h^2}{2m}\psi_{xx} + \frac{m\omega_x^2}{2}x^2\psi = \lambda_x\psi \Rightarrow \quad \lambda_x = h\omega_x(n_x + 1/2)$;

$$E_{n_x n_y n_z} = h\omega_x(n_x + 1/2) + h\omega_y(n_y + 1/2) + h\omega_z(n_z + 1/2);$$

$\omega_x = \omega_y = \omega_z; \quad E_{n_x n_y n_z} = h\omega(n_x + n_y + n_z + 3/2)$ Отже енергія основного стану рівна: $E_n = \frac{3}{2} h\omega$. $\psi_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)\psi_{n_z}(z)$ Функція основного стану рівна($n_x = n_y = n_z = 0$) :

$$\psi_{ooo} = \sqrt[n]{\frac{m\omega}{\pi h}}\left(\frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{m\omega}{2h}x^2} H_n \sqrt{\frac{m\omega}{h}} x\right) = | n = 0; H_o = 1 | = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi h}} e^{-\frac{m\omega}{2h}x^2}$$

. Отже ми маємо: $\psi_{ooo} = \left(\frac{m\omega}{\pi h}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\omega}{2h}(x^2 + y^2 + z^2)}$ Для даного осцилятора енергетичні рівні будуть вироджені. $E_{n_x n_y} = h\omega(n_x + n_y + 1)$

<u>25 Задача.</u> Маємо такий потенціал: $V(x) = \sum_{n=-oo}^{oo} V_o \delta(x - na); \delta -$ гребінка Дірака.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{2m}{h^2} V(x)\psi = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{h^2}\left(i - \sum_{-oo}^{oo} V_o \delta(x - na)\right)\psi = 0; \quad \psi_1 = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$$

;

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(\frac{2m}{h^2} E\right)\psi_2 = 0; \quad \psi_2 = f\left(Ae^{ik(x-a)} + Be^{-ik(x-a)}\right)$$

$$| f | = 1; \psi_1(a) = \psi_2(a); \quad \psi_1'(a) - \psi_2'(a) = \frac{2m}{h^2}\psi_2(a)V_o;$$

Підставляємо і отримуємо: $Ae^{ika} + Be^{-ika} = f(A + B) = fA + fB;$

$$Aike^{ika} - Bike^{-ika} - fAik + fBik = \frac{2m}{h^2}(fA + fB)V_o$$

; $A(e^{ika} - f) + B(e^{ika} - f) = 0;$

$$A\left(fik - ike^{ika} - \frac{2m}{h^2} fV_o\right) = 0; \quad A\left(f - e^{ika} + \frac{i2m}{kh^2} fV_o\right) + B\left(e^{-ika} - f + \frac{i2m}{h^2} fV_o\right) = 0;$$

$$1 - \quad A(f - e^{-ka} + igf) + B(e^{-ika} - f + igf) = 0; \quad (e^{ika} - f)(e^{-ika} - f + igt) - (e^{-ika} - f)(fe^{ika} + igt) = 0;$$

$$1 - fe^{ika} + igfe^{ika} - fe^{-ik_o} + f^2 - igf^2 + e^{ika} f + f^2 - fe^{ika} + git^2 = 0;$$

$1 - fe^{ika} + igfe^{ika} - fe^{-ika} + f^2 - fe^{-ika} + 1 - igfe^{-ika} + f^2 - fe^{-ika}$ вообщем піздец.

---

26 Частинка знаходиться в пот. ямі $U = -\alpha\delta(x)$ Потенціал раптово переходить у точку хо. Знайти ймовірність, що частинка залишиться в потенціалі.

$(\frac{-h^2}{2m}\nabla + U(x))\psi = E\psi(x)$; $-\frac{h^2}{2m}\nabla\psi + (U - E)\psi = 0;$ $\frac{d^2\psi}{dx^2} + (E - U)\frac{2m}{h^2}\psi = 0; k^2 = \frac{2Em}{h^2}$

; Для зони(1), що лівіше дельта функції: $\psi_1 = A_1 e^{kx}$. Для зони (2) :

$\psi_2 = B_2 e^{-kx}$; $A_1 = B_2; (kA_1 + kB_2) = \frac{2m\alpha}{h^2} A_1; \Rightarrow k = \frac{m\alpha}{h^2}$; $\frac{\sqrt{2mE}}{h} = \frac{m\alpha}{h^2}$;

$E = \frac{m\alpha^2}{2h^2}$. $\psi_0 = \sqrt{n} e^{-kx}; \tilde{\psi}_o = \sqrt{k} e^{-k(x - x_o)}$; $\Psi_o = \sqrt{k} e^{-kx} e^{-\frac{iE_o}{h}t}; \tilde{\Psi}_o = \sqrt{k} e^{-k(x - x_o)} e^{i\frac{E_o}{h}t}$

; $a_{oo} = k\int_{-oo}^{oo} e^{-kx} e^{-k(x - x_o)} dx = k\int_{-oo}^{oo} e^{-kx(1 - |1 - \frac{x_o}{x}|)} dx = k\int_{-oo}^{oo} e^{kx} e^{k(x - x_o)} dx + k\int_0^{x_o} e^{-kx} e^{k(x - x_o)} dx + \int_{x_o}^{oo} e^{-kx} e^{-k(x - x_o)} dx =$

$$k[e^{-kx_o}\int_{-oo}^0 e^{2kx} dx + e^{-kx_o}\int_0^{x_o} dx + e^{kx_o}\int_{x_o}^{oo} e^{-2kx} dx] =$$

$$k(e^{-kx_o}\frac{1}{2k} + e^{-kx_o} x_o + e^{-kx_o}\frac{1}{2k}) = \quad = e^{-kx_o} + x_o e^{-kx_o} = e^{-kx_o}(1 + x_o k);$$

$$W = e^{-2k^2 x_o^2}(1 + x_o k)^2 = a_{oo};$$

---

27 Знайти варіаційним методом енергію основного рівня частинки в потенціалі U=Fx x>0; U=infinity x<0

Використовуючи пробну ф-цію $\psi = Axe^{\frac{-\alpha x^2}{2}}$. Умова нормування:

$A^2\int_0^{oo} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = 1$ $A^2 \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = 1$ $A = 2\sqrt[4]{\frac{\alpha^3}{\pi}}$ Середня потенціальна енергія

$$<V>=\frac{m\omega^2}{2}FA^2\int_0^{oo}x^3e^{-\alpha x^2}dx=\frac{m\omega^2F}{4}A^2\int_0^{oo}ye^{-\alpha y}dy=$$

$$\frac{m\omega^2}{4\alpha^2}FA^2=\frac{m\omega^2F}{4\alpha^2}\frac{4\alpha^{3/2}}{\sqrt{\pi}}=\frac{m\omega^2F}{\sqrt{\alpha\pi}}$$ Середня кінетична енергія

$$<T>=\frac{\hbar^2A^2}{2m}\int_0^{oo}\left[\frac{\partial}{\partial x}xe^{\frac{-\alpha x^2}{2}}\right]^2dx=...=\frac{3}{4}\frac{\hbar^2\alpha}{m} \qquad I(\alpha)=\frac{m\omega^2F}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{3}{4}\frac{\hbar^2}{m}\alpha$$ Беремо

похідну по альфа=0 маємо $\alpha_0=\left(\frac{m^2\omega^2F}{3\hbar^2\sqrt{\pi}}\right)^{2/3}$ $E_0=I(\alpha_0)=\frac{15\hbar^2}{4m}\left(\frac{m^2\omega^2F}{3\hbar^2\sqrt{\pi}}\right)^{2/3}$

---

28. Частинка знаходиться в потенціальному полі . Довести співвідношення

$$\frac{dx^2}{dt}=\frac{p_xx+xp_x}{m}$$

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}\psi$$; $$\dot{\bar{f}}=\dot{\bar{f}}=\frac{d}{dt}\int\psi^*\hat{f}\psi dq= \quad =\int\psi^*\frac{\partial^2\hat{f}}{\partial t^2}\psi dq+\int\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2}\hat{f}\psi dq+\int\psi^*\hat{f}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}dq;$$

$$\bar{f}=\int\psi^*\frac{\partial\hat{f}}{\partial t}\psi dq+\frac{i}{h}\int(\hat{H}^*\psi^*)\hat{f}\psi dq-\frac{i}{h}\int\psi^*\hat{f}(\hat{H}^*\psi)dq;$$ Врахуємо таку

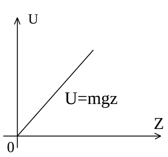
властивість: $\int(\hat{H}^*\psi^*)(\hat{f}\psi)dq=\int\psi^*\hat{H}\hat{f}\psi dq;$ $\dot{\bar{f}}=\int\psi^*(\frac{\partial\hat{f}}{\partial t}+\frac{i}{h}\hat{H}\hat{f}-\frac{i}{h}\hat{f}\hat{H})\psi dq$

$$\dot{\hat{f}}=\frac{\partial\hat{f}}{\partial t}+\frac{i}{h}(\hat{H}\hat{f}-\hat{f}\hat{H}) \qquad \frac{d\hat{f}}{dt}=\frac{1}{2m}(\hat{p}_x\nabla\hat{f}+\nabla\hat{f}\hat{p}_x)$$ **=>**

$$\frac{dx^2}{dt}=\frac{1}{2m}(\hat{p}_x\frac{\partial x^2}{\partial x}+\frac{\partial x^2}{\partial x}\hat{p}_x)=\frac{\hat{p}_x\hat{x}+\hat{x}\hat{p}_x}{m}$$

---

29 Використовуючи умови квантування Бора-Зомерфельда. Знайти спектр рівнянь енергії частинки масою m в гравітаціонному полі Землі по відношенню до площини z=0 .



В квазікласичному випадку стан частинки в гравітаційному полі Землі відповідає умові квантування Бора Зоммерфельда $\oint p\,dx=2\pi\hbar(n+\frac{3}{4})$ (p – це імпульс частинки).

$\int_0^a p\,dx = \int_0^a \sqrt{2m(E-mgz)}\,dz$ (Максимальна координата,буде тоді, коли вся енергія перетвориться в потенціальну тобто E=mga звідси і шукатимемо a – межу інтегрування). $\int_0^a p\,dx = \int_0^a \sqrt{2m(E-mgz)}\,dz = \int_0^a m\sqrt{2g}\,\sqrt{a-z}\,dz = \left|\sqrt{a-z} = t^2, -\frac{1}{2t^2}dz = 2tdt, dz = -4t^3dt\right| =$

$$= \int_0^a m\sqrt{2g}\,-4t^5dt = m\sqrt{2g}\,4t^6 \Big|_0^{\sqrt[4]{a}} = \frac{2}{3}m\sqrt{2g}\,a^{3/2}$$

Відповідь $E_m = \sqrt[3]{\frac{mg^2}{2}\left(\frac{3}{2}\pi\hbar\right)^2}\left(n+\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$

---

30 *Отримати наближене значення енергії основного стану частинки у нескінченно глибокій двовимірній ямі*

$$U(x) = \begin{cases} 0, \rho \le R \\ \infty, \rho > R \end{cases}$$

варіаційним методом, використовуючи пробну функцію $\psi_0(\rho) = A(R-\rho)$ *при* $\rho < R$ *.*

Розв'язок:

$$\int_\rho^R \psi_0^2 d\rho = 1 = A^2\int_0^R (R-\rho)^2\rho d\rho = \int_0^R (R^2\rho + \rho^2 + 2R\rho^2)d\rho = R^2\frac{R^2}{2} + \frac{R^4}{4} + \frac{2}{3}R^4 = \frac{3}{4}R^2 - \frac{2}{3}R^2 =$$

$$= \frac{1}{9}R^2A^2 = 1 \Rightarrow \quad A = \frac{3}{R}, \quad \Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right);$$

$$E = A^2\int_0^R -\frac{\hbar^2}{2m}(\rho - R)\Delta(\rho - R)\rho d\rho = -\frac{A^2\hbar^2}{2m}\int_0^R(\rho^2 - R\rho)d\rho = -\frac{\hbar^2A^2}{2m}\left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^2}{2}\right) = \frac{A^2\hbar^2}{2m}\frac{R^3}{6} =$$

$$= \frac{9}{R^2}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{R^3}{6} = \frac{3}{4}\frac{\hbar^2R}{2m}.$$

---

31 *Отримати наближене значення енергії основного стану у нескінченно глибокій двовимірній ямі*

$$U(x) = \begin{cases} 0, x \in (0,l) \\ \infty, x \notin (0,l) \end{cases}$$

варіаційним методом використовуючи пробну ф-цію $\psi_0(x) = A\sin^2(\frac{\pi x}{l})$

Розв'язок:

$$A^2\int_0^l \sin^4\frac{\pi x}{l}dx = A^2\int_0^l\left(\frac{1+\cos\frac{2\pi x}{l}}{2}\right) = A^2\frac{1}{4}l = 1 \Rightarrow A = \frac{2}{\sqrt{l}}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x}\psi = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1+\cos\frac{2\pi x}{l}}{2}\right) = \frac{\hbar^2}{4m}\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2\cos\frac{2\pi x}{l}$$

$$E = A^2\int_0^l \psi\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi dx = \ldots$$

---

32 *Довести* $\left[\hat{A}\hat{B}^3\right] = 3\hat{B}^2$, $AB - BA = 1$

Розв'язок:

$$(BBAB - BBBA)\psi = B^2\psi,$$

$$AB^3 - B^3A = ABBB - BBBA = AB^3 - B^2AB + B^2 = ABB^2 - B^2AB + B^2 =$$

$$= ABB^2 - BAB^2 + BAB^2 - B^2AB + B^2 =$$

$$(AB - BA)B^2 + B(AB^2 - BAB) + B^2 =$$

$$= 2B^2 + B(AB - BA)B = 3B^2$$

---

33 *Знайти* $\left[\hat{p}_x, \hat{x}^n\right]$

Розв'язок:

$$\left[\hat{p}_x, \hat{x}^n\right] = \hat{p}_x\hat{x}^n - \hat{x}^n\hat{p}_x, \qquad \hat{p}_x\hat{x}^n\psi = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}(\hat{x}^n\psi) = \frac{\hbar}{i}(n\hat{x}^{n-1}\psi + \hat{x}^n\frac{\partial\psi}{\partial x}),$$

$$\hat{x}^n\hat{p}_x\psi = \frac{\hbar}{i}\hat{x}^n\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad \left[\hat{p}_x, \hat{x}^n\right] = \frac{\hbar}{i}(n\hat{x}^{n-1}\psi) \Rightarrow \left[\hat{p}_x, \hat{x}^n\right] = -i\hbar n\hat{x}^{n-1},$$

---

34 *Знайти середню кінетичну енергію* $\left\langle \Delta E^2 \right\rangle$ *в основному стані частинки:*

Розв'язок:

$$\psi_1(x) = \sqrt{2/a}\sin\frac{\pi}{a}, \quad \bar{E} = \int\psi_1\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\int\left(\sqrt{2/a}\right)^2\sin\frac{\pi x}{a}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin(\frac{\pi}{a}x)dx =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\int|\psi_1|^2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 dx = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = \bar{E}, \quad \sqrt{\overline{(E-\bar{E})}^2} = \sqrt{\bar{E}^2 - (\bar{E})^2},$$

$$\Rightarrow \bar{E}^2 = \int\left(\sqrt{2/a}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right)^2 dx = \ldots$$

35 *Для частинки в полі знайти спектр в імпульсному представлені:*

<u>Розв'язок:</u>

$$\hat{V} = A\hat{x} = Ai\hbar \frac{\partial}{\partial p}$$

$$\frac{p^2}{2m\psi} + i\hbar A \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = E\psi$$ - р-ня для власних ф-цій оператора енергії.

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \frac{E - p^2/2m}{i\hbar A} dp \Rightarrow \quad \varphi = C \exp\left(-\frac{p^2}{2m} - Ep\right)$$, знайдемо сталу C:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_E(p)\varphi_{E`}(p)dp = \delta(E - E`) = C^2 \int_{-}^{+} \exp\left(\frac{(E - E`)p}{\hbar A}\right) dp \quad , \quad \left(\delta(E - E`) = \frac{1}{2\pi}\int \exp(i(E - E`)y)dy\right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar A}}$$

36 *Відомо* $[A,C],[B,C]$*, виразити* $[AB,C]$

<u>Розв'язок:</u>

$$\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right] = ABC - CAB + ACB - ACB + ACB - ACB = \quad A[B,C] + [A,C]B$$

37 *Як змінюється спектр при збурені?*

<u>Розв'язок:</u>

$$\begin{cases} \psi = \sqrt{2/a}\,\sin\left(\dfrac{\pi n}{a}x\right) \\ E_n = \dfrac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2\mu a^2} \end{cases}$$ - для стаціонарної задачі