

**Оглавление**

Білет №1 .....	2
Білет №2 .....	2
Білет№3 .....	5
Білет №4 .....	5
Білет №5 .....	7
Білет №7 .....	12
Білет №8 .....	13
Білет №9 .....	16
Білет 10 .....	19
Білет11 .....	21
Билет 12 .....	27
Билет №14 .....	33
Билет №15 .....	33
Билет 16 .....	36
Билет 17 .....	38
Билет № 18 .....	38
Билет19 .....	39
Билет20 .....	39
Билет 21 .....	40

## Білет №1

1) M1.13.1, M1. B5

2) M1.3.1

3) M2.1

## Білет №2

1) Як можна розуміти основний та збуджений стан ансамблю квантових частинок (бозонів і ферміонів)?

Однако, прежде чем приступить к вычислениям, мы кратко перечислим те причины, в силу которых нам приходится использовать два различных типа квантовой статистики. Все известные к настоящему времени фундаментальные частицы делятся на два класса, определяемые собственным моментом количества движения, или спином, частицы. Спин квантуется, и его всегда можно представить в форме  $s\hbar$ , где  $s$  — спиновое квантовое число. Частицы, для которых  $s$  — нечетное полуцелое число, описываются антисимметричными полными волновыми функциями, а частицы с целым или равным нулю спиновым числом  $s$  описываются симметричными полными волновыми функциями. Симметрия, о которой здесь идет речь, касается обмена двух частиц в системе, состоящей из совокупности одинаковых частиц. В силу идентичности частиц, обмен пары частиц не меняет наблюдаемых физических параметров системы. Однако тип симметрии волновых функций определяет фундаментальную характеристику системы, а именно число частиц, которые могут заполнить одно и то же квантовое состояние.

В качестве примера рассмотрим систему, состоящую лишь из двух одинаковых частиц. Предположим, что частица 1 занимает состояние, описываемое нормированной волновой функцией  $\psi_a$ , а волновая функция для частицы 2 есть  $\psi_b$ . Индексы  $a$  и  $b$  отвечают полному набору квантовых чисел, необходимых для описания одночастичного квантового состояния. При отсутствии взаимодействия между частицами систему можно описать с помощью произведения  $\psi_a(1)\psi_b(2)$ . С другой стороны, поскольку перестановка частиц не изменяет свойств системы, для ее описания можно использовать также произведение  $\psi_a(2)\psi_b(1)$ . Поэтому полная волновая функция является линейной комбинацией этих двух произведений. Таким образом, мы имеем

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_a(1)\psi_b(2) + \psi_a(2)\psi_b(1) \} \text{ (симметричная функция),}$$

или

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_a(1)\psi_b(2) - \psi_a(2)\psi_b(1) \} \text{ (антисимметричная функция).}$$

Наоборот, симметричная волновая функция не обращается в нуль при заполнении обеими частицами одного и того же состояния. Это означает, что частицы с целым и равным нулю спиновым числом не подчиняются принципу Паули. Тогда в одном и том же состоянии может находиться любое число частиц. Системы такого типа подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна, а входящие в них частицы называются бозонами. Атом  $\text{He}^4$  состоит из шести фермионов, но они связаны таким образом, что результирующий спин равен нулю; следовательно, атом  $\text{He}^4$  является бозоном. С другой стороны, атом  $\text{He}^3$  содержит пять фермионов, при любой комбинации которых полный спин будет полуцелым, поэтому атом  $\text{He}^3$  представляет собой фермион. У этих двух типов атомов  $\text{He}$  ядра отличаются лишь на один нейтрон, но этого достаточно, чтобы они подчинялись различным статистикам, что в свою очередь обуславливает различие их свойств в жидкой фазе.

Вернемся теперь к модельной системе — идеальному бозе-газу, состоящему из макроскопического числа  $N$  атомов  $\text{He}^4$ , содержащихся в ящике объемом  $V$ . При тепловом равновесии при абсолютной температуре  $T$  среднее число атомов с энергией  $\varepsilon_i$  определяется функцией распределения Бозе — Эйнштейна

$$\langle n(\varepsilon_i, T) \rangle = \frac{1}{\exp \{(\varepsilon_i - \mu)/k_B T\} - 1}, \quad (1.27)$$

$$\sum_i \langle n(\varepsilon_i, T) \rangle = N.$$

Отметим, что число частиц на наинизшем энергетическом уровне  $\langle n(0, T) \rangle$  может иметь такой же порядок, как и  $N$ , если только отношение  $(-\mu/k_B T)$  достаточно мало.

Максимальное число частиц в возбужденном состоянии равно поэтому

$$N'_m(T) = 2,612 V \left( \frac{m_4 k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2}. \quad (1.39)$$

Для системы с заданными  $N$  и  $V$  при достаточно высоких температурах значение  $N'_m(T)$  достаточно велико для того, чтобы все частицы оказались на возбужденных уровнях. Однако при понижении температуры может быть достигнута критическая точка  $T_B$ , ниже которой число  $N'_m(T)$  становится меньше  $N$ . Другими словами, ниже температуры  $T_B$  частицы начинают заполнять наинизший энергетический уровень; этот процесс усиливается при дальнейшем понижении температуры. Критическая температура  $T_B$  определяется из равенства  $N'_m(T_B) = N$ , что дает

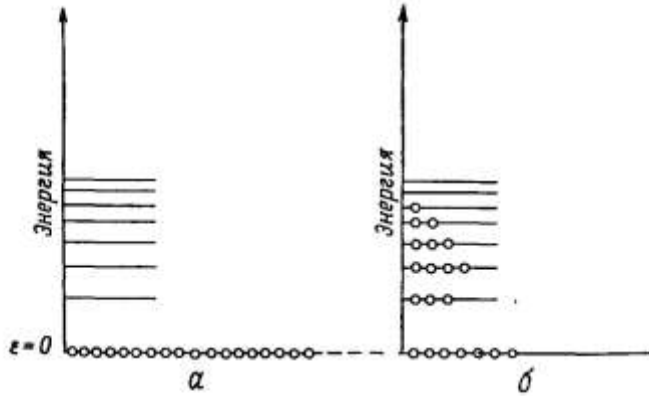
$$T_B = \frac{2\pi \hbar^2}{m_4 k_B} \left( \frac{N}{2,612 V} \right)^{2/3}. \quad (1.40)$$

Комбинируя два последних выражения, видим, что число частиц, находящихся в возбужденном состоянии, равно

$$\frac{N'(T)}{N} = \left( \frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \quad (T \leq T_B). \quad (1.41)$$

Остальные частицы находятся на уровне с наинизшей энергией, причем из (1.33) имеем

$$\frac{N_0(T)}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \quad (T \leq T_B). \quad (1.42)$$



Фиг. 26. Заполнение энергетических уровней в идеальном газе Бозе — Эйнштейна (схематически).

а — температура  $T = 0$ , все частицы находятся на наинизшем энергетическом уровне;  
б — температура лежит в интервале  $0 < T < T_B$ , некоторые возбужденные состояния заполнены, но значительная часть частиц остается на наинизшем уровне (в конденсате).

Фактически при  $T > T_B$  небольшая часть частиц остается на наинизшем уровне, но их количество пренебрежимо мало.

На фиг. 26 представлены результаты, найденные выше для идеального газа. При абсолютном нуле все частицы занимают наинизший энергетический уровень; при температурах выше  $T_B$  почти все частицы находятся в возбужденном состоянии. Между абсолютным нулем и  $T_B$  частицы разделяются на две группы —

одни остаются на наинизшем уровне, а другие переходят в возбужденное состояние. В системе макроскопического размера наинизший уровень остается заполненным макроскопически большим числом частиц вплоть до некоторой отличной от нуля температуры. Это явление известно под названием конденсации Бозе — Эйнштейна, причем частицы, находящиеся на наинизшем уровне, образуют так называемый *конденсат*. Однако эта конденсация существенно отличается от явления, происходящего, например, при ожигении газа. В последнем случае частицы образуют две фазы, разделенные четкой границей в пространстве координат, т. е. в «обычном» пространстве. В противоположность этому конденсацию Бозе — Эйнштейна можно рассматривать как разделение в пространстве импульсов, т. е. физической границы между конденсатом и возбужденными частицами не существует<sup>1)</sup>. Тем не менее частицы «упорядочены» по импульсам. С этой точки зрения конденсация Бозе — Эйнштейна представляет собой пример перехода типа порядок — беспорядок.

Это самое полное объяснение по бозе-газу. При ответе всё писать не обязательно..

Теперь про ферми-газ....

Самая низкая энергия классического газа (или газа Бозе — Эйнштейна) при  $T = 0$  равна 0. То есть при нулевой температуре все частицы падают в самое низкое состояние и теряют всю свою кинетическую энергию. Однако, для газа Ферми это **невозможно**. Принцип исключения Паули позволяет находиться в одном состоянии только **одной ферми-частице** с полуцелым спином.

Самую низкую энергию газа  $W_0$  с  $N$  частиц можно получить путем размещения по одной частице в каждом из  $N$  квантовых состояний с наименьшей энергией. Поэтому **энергия**  $W_0$  такого газа при  $T = 0$  будет **отличной от нуля**.

Величину  $W_0$  несложно вычислить. Обозначим через  $\mu_0$  энергию электрона в самом высоком квантовом состоянии, которое ещё заполнено при  $T = 0$ . При нулевой температуре все квантовые состояния с энергией ниже  $\mu_0$  заняты, а все квантовые состояния с энергией выше  $\mu_0$  — свободны.

Эта максимальная энергия  $\mu_0$ , которая называется энергией Ферми, будет равна:

$$\mu_0 = \frac{p_0^2}{2m} = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3\rho}{4\pi g} \right)^{2/3}$$

$g$  — число внутренних квантовых состояний.

Повышение температуры лишь незначительно изменяет такое распределение ферми частиц по уровням: малая доля фермионов, находящихся на уровнях, близких к уровню Ферми, переходит на пустые уровни с большей энергией, освобождая таким образом уровни ниже фермиевского, с которых был совершен переход.

При ненулевой температуре ферми-газ не будет являться вырожденным, и населённость уровней будет плавно уменьшаться от нижних уровней к верхним.

**2) М1.6.2 , Билет 15.2**

**3) М2.2**

### Білет №3

**1) М1.14.1**

**2) М1.4.1 , М1.3.2**

**3) М2.3**

### Білет №4

**1) 4.1 Чому вважали, що нижче  $\lambda$ -точки рідкий гелій стає надтеплопровідним? Що зумовлювало таку уяву та що насправді є причиною цього явища?**

**Лямбда-точка** - температура (близько 2,17 K), нижче якої рідкий гелій (гелій I), переходить в стан надплинності (гелій II). Якщо бути більш точним, існують нижня лямбда-точка (при 2.172 K і 0.0497 атм) і верхня лямбда-точка (при 1.76 K і 29.8 атм).

**Кeesом Віллем Хендрік** (Keesom) (1876-1956), нідерландський фізик. Фундаментальні праці з фізики низьких температур. Отримав твердий гелій (1926). Відкрив фазовий перехід гелій I - гелій II (1932), «надтеплопровідність» гелія II (1935). Зі своєю дочкою Ганною провели серію дослідів з вимірювання теплопровідності He II. Але вона несподівано виявилася настільки великою, що приладами, якими вони мали у своєму розпорядженні, її виміряти не вдалося. Було тільки очевидно, що теплопровідність неймовірно велика. Точні цифри були встановлені пізніше в Кембриджі; **виявилось, що теплопровідність He II більше, ніж у найбільш теплопровідних металів (міді та срібла)**

**в мільйони разів!** За аналогією з електричною надпровідністю Кеєзом назвав це явище надтеплопровідністю. В умовах вкрай низьких температур має існувати також явище надтеплопроводності. Наприклад, в деяких над електропровідних металах зі зменшенням температури відзначається сильне зростання коефіцієнта теплопровідності. Дуже різке збільшення теплопровідності спостерігається в рідкому гелії II по порівнянні з гелієм I. Теплопровідність гелію II в мільйони разів перевершує теплопровідність гелію I. Властивість надпровідності є універсальним. Тому, воно повинно виявлятися по відношенню до всіх зарядам мікроансамблей, проникаючих і поширюючих в макроскопічних тілах. Зараз виявлено лише невелика кількість явищ надпровідності. Частина з них пов'язана з поширенням у тілах електронів-частинок. Мова йде про наделектропроводності, надмагнітопроводності, надтеплопроводності. Але електрон-частинці притаманна велика кількість різноманітних форм руху. Тому мають існувати багато інших невідкриті поки ефекти надпровідності. Наприклад, **загальна теорія передбачає існування в тілах, пронизаних електрон-частинками, ефекта надпровідності, які пов'язані з усіма формами руху, представленими у рівнянні.** Зокрема це стосується провідностей по відношенню до хвильового, імпульсного, спінового, гравітаційного та інших зарядів. Відповідно до принципів проникності і відторгнення все численне сімейство мікрочастинок здатне в більшій чи меншій мірі проникати в макротіла і, отже, давати відповідні ефекти надпровідності. Наприклад, фотони, поширюючись в тілі, повинні поблизу абсолютного нуля потенціалів служити причиною появи ефектів надтеплопроводності, хвильової надпровідності.

## **2) 4.2 Симетричні й антисиметричні хвильові функції. Які бувають розподіли квантових частинок при $T=0$ і при $T>0$ ?**

Одним з важливих уявлень квантової механіки є концепція тотожності частинок. Розглянемо, наприклад, з точки зору класичної квантової механіки дві елементарні частинки одного й того ж типу, що належать до деякої системи. Якщо ми здійснимо обмін частинок, то одержимо стан, еквівалентний первісному. Згідно з квантовою механікою ці обидва стани не тільки еквівалентні, але й тотожні, бо описуються однією і тією хвильовою функцією  $\psi$ , квадрат модуля якої  $|\psi|^2$  визначає вірогідність знаходження тієї або іншої елементарної частинки у деякій заданій точці простору. Якщо провести обмін координат двох тотожних частинок, то  $|\psi|^2$  не зміниться, однак сама функція  $\psi$  може залишитися незмінною, якщо частинки є бозонами, або змінити знак на протилежний, якщо мова йде про ферміони. За відсутності взаємодії між частинками систему можна описати за допомогою добутку  $\psi_a^{(1)} \psi_b^{(2)}$  де індекси  $a$  і  $b$  відповідають повному набору квантових чисел, що необхідні для опису квантового стану. З іншого боку, добуток  $\psi_a^{(2)} \psi_b^{(1)}$  також описує систему, бо перестановка частинок не змінює властивостей системи. Таким чином, повна хвильова функція є лінійною комбінацією цих двох добутків, тому **симетрична функція** буде:

$$\psi_c = 2^{-0,5} (\psi_a^{(1)} \psi_b^{(2)} + \psi_a^{(2)} \psi_b^{(1)}) \quad (1)$$

**а антисиметрична:**

$$\Psi_{ac} = 2^{-0,5} (\psi_a^{(1)} \psi_b^{(2)} - \psi_a^{(2)} \psi_b^{(1)}) \quad (1)$$

Нехай обидві частинки посідають один і той же стан, тобто  $a=b$ . 3

(1) постає, що симетрична хвильова функція дорівнює :

$$\Psi_c = 2^{-0,5} \psi_a^{(1)} \psi_b^{(2)} \quad (3)$$

А антисиметрична хвильова функція  $\Psi_{ac} = 0$ . Це означає, що ферміони не можуть займати стани, що заповнені іншими такими ж самими ферміонами (**ферміони – ‘індивідуалісти’**). **Ферміони характеризуються тим, що їхні хвильові функції антисиметричні щодо перестановки ідентичних частинок.** Ця обставина і є суттю принципу Паулі. Зрозуміло, що міркування, що торкаються обмінної симетрії, можливо узагальнити і на системи, що складаються з будь-якої кількості частинок. Зразком можуть бути електрони провідності у нормальному металі.

Згідно з (3) симетрична хвильова функція не обертається до нуля, якщо заповнити обома частинками один і той же стан.

Це свідчить, що бозони не підпорядковані принципу Паулі: в одному і тому ж стані може знаходитись будь-яка кількість бозонів (**бозони – ‘колективісти’**). **Бозон – частинка з цілим значенням спіна.** Так як атом  $^4\text{He}$  складається з 6 ферміонів (2 протона, 2 нейтрона, 2 електрона) і вони пов’язані таким чином, що результуючий спін дорівнює нулю, то атом  $^4\text{He}$  – бозон. Система, що складається з макроскопічної кількості  $N$  атомів -  $^4\text{He}$  підпорядкована статистиці Бозе-Ейнштейна. Отже, в умовах теплової рівноваги при абсолютній температурі  $T$  середня кількість атомів з енергією  $\varepsilon$ , визначається функцією розподілу:

$$\langle n(\varepsilon, T) \rangle = \frac{1}{\exp\{(\varepsilon_1 - \mu)/k_b T\} - 1} \quad (4)$$

У формулі (4)  $\mu$  - хімічний потенціал, який являє собою термодинамічний параметр, що грає роль аналогічну до температури. Якщо різниця  $\Delta T$  між температурами обумовлює виникненню потоку енергії, то різниця хімічних потенціалів обумовлює виникнення потоку частинок. Будемо урахувувати, що рівню, на якому сконденсовані бозони з найнижчою енергією відповідає  $\varepsilon_{111}=0$ . Як можна побачити з рівняння (4)  $\mu$  не може бути додатним, бо у протилежному випадку деякі з чисел, заповнення  $n$  з’явиться від’ємним. Якщо кількість частинок у системі зберігається, їх розподіл при усіх температурах підпорядкований правилу сум:

$$\sum \langle n(\varepsilon_1, T) \rangle = N \quad (5)$$

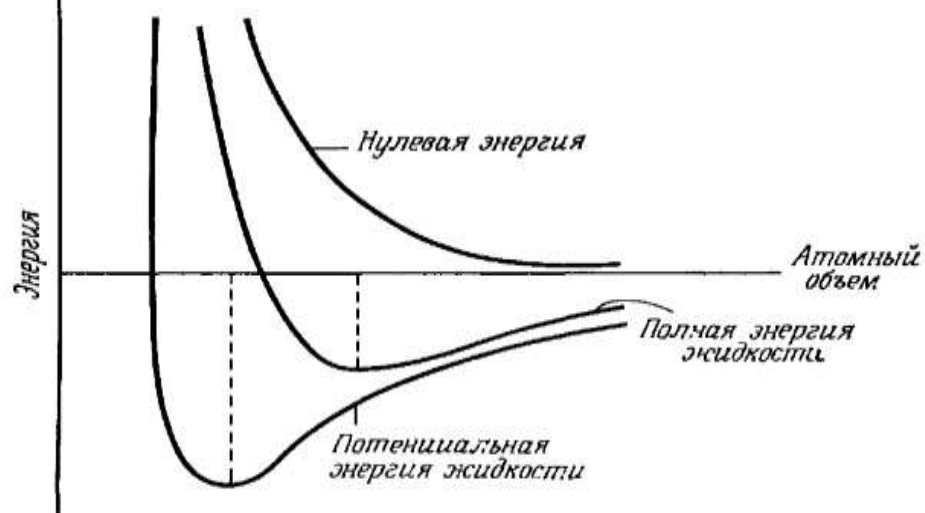
Якщо відношення  $-\mu/k_b T$  достатньо мале, то кількість частинок на найнижчому енергетичному рівні  $\langle n(0, T) \rangle$  може (принаймні за порядком) дорівнювати  $N$

### 3) М2.4

#### Білет №5

1) М1.4.2

2)



Фиг. 3. Энергия жидкого гелия.\*

Полная энергия равна сумме потенциальной и нулевой энергий.



у гелії квантові ефекти виявляються при температурі 1-2К, за якою рідкий гелій стає єдиною "справжньою" квантовою рідиною. Таким чином, квантовою рідиною зветься система міцно взаємодіючих атомів, що не має просторової періодичності при достатньо низьких температурах, коли квантові ефекти стають суттєвими.

Виключність гелію обумовлена двома його особливостями: малою масою атомів та слабкістю їх взаємодії. Одноатомна молекула гелію є найбільш легкою серед інших, окрім молекули водню. Мала маса атомів забезпечує велику нульову енергію. Квантовомеханічні співвідношення невизначеності дозволяють нам оцінити енергію нульових коливань атомів гелію: при  $T = 0$ , його густина  $\rho = 0,145 \text{ г/см}^3$ , атомна маса  $m=4$ . Отже, на один атом гелію припадає об'єм:  $V_a = m / \rho N_a \approx 4 \cdot 10^{-23} \text{ см}^3$  ( $N_a = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$  - число Авогадро). Звідси, діаметр простору, що обіймає атом  $d = (6V_a / \pi)^{1/3} \approx 4,5 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ . Оскільки  $\Delta p \cdot d \approx \hbar$  то енергія нульових коливань атомів гелію має величину за порядком

$$E_0 = \frac{(\Delta p)^2}{2m_4} \approx \frac{\hbar^2}{2m_4 d^2} \approx 1,4 \cdot 10^{-22} \text{ Дж.} \quad (1.6)$$

Цій енергії на шкалі температур відповідає 10К. Друга особливість гелію - слабкість взаємодії поміж атомами, що пояснюється простотою та симетричністю атома  $^4\text{He}$  з його замкненою електронною оболонкою, що утримує два електрона.

### 3). M2.5

Білет№6

#### 1) M1.17.1

2)

У твердому тілі кожен атом локалізований біля визначеного вузла кристалічної ґратки. Можливість локалізації атома біля положення рівноваги залежить від величини відношення енергії нульових коливань до потенційної енергії

$$\Lambda \approx \hbar / d \sqrt{mU} \quad (1.13)$$

Безрозмірний параметр  $\Lambda$  - це квантовий параметр де Бура (1948 р.). Для інертних газів значення  $\Lambda$  наведені у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Елемент	$^3\text{He}$	$^4\text{He}$	Ne	Ar	Kr	Xe
$\Lambda$	3,08	2,68	0,593	0,186	0,102	0,063

Одним з наслідків великих значень  $\Lambda$  у ізотопів гелію є їх рідкий стан поблизу  $T=0$  при тисках  $P < 3 \cdot 10^6$  Па у разі  $^3\text{He}$  та  $2,5 \cdot 10^6$  Па у разі  $^4\text{He}$ . Якщо  $\Lambda \ll 1$ , то атоми локалізовані. Це має місце в усіх молекулярних кристалах, і, частково у кристалах інертних газів (Ne, Ar, Kr, Xe). Якщо  $\Lambda > 1$ , локалізація неможлива і така речовина не перетворюється у твердий стан навіть при  $T=0\text{K}$ . Врешті, перший випадок означає, що невелике змінення параметрів (наприклад, за допомогою докладання зовнішнього тиску) може призвести до кристалізації або плавлення такої речовини. Тільки у гелії спостерігається така поведінка із-за малих мас атомів та слабкості міжатомної взаємодії (мала глибина потенційної ями  $U$ ). Більш мала маса атома тільки у водню: атомна маса молекули  $\text{H}_2$  дорівнює 2. Оскільки, однак, молекула водню поляризується значно легше ніж поодинокий атом He, ван-дер-ваальсові сили між двома молекулами  $\text{H}_2$  у 12 разів більші, ніж між двома атомами гелію. тому у водню енергія взаємодії значно перевищує нульову енергію і при  $T=0$  тверда фаза стійка. Усі інші речовини важчі ніж гелій і в них ван-дер-ваальсова взаємодія ще сильніша. Тому гелій єдиний елемент що перебуває в рідкому стані при як завгодно низьких температурах.

3).

### Питання 6

**СВЕРХНИЗКИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ** - температуры ниже 1К, получаемые методами адиабатического размагничивания, кристаллизации гелия под давлением, испарения смеси жидких изотопов гелия  $^4\text{He}$  и  $^3\text{He}$ .

Получение сверхнизких температур

При низких температурах прекращается почти всякое движение атомов – поступательное, вращательное. Однако даже при температурах, меньших 1 К, спины атомов продолжают вести себя как атомы идеального газа – они обмениваются энергией (хотя и слабо), и их положение в пространстве может изменяться почти свободно. В таких элементах, как редкоземельные, электроны заполняют внутренние оболочки атомов, и их спины почти не чувствуют других электронов. Следовательно, и магнитные моменты ведут себя, как свободные. На этом свойстве электронов основан *метод получения сверхнизких температур – магнитное охлаждение*. Он был предложен в 1926 году Джиоком в США и независимо (даже несколькими неделями раньше) Дебаем в Германии. Этим методом были достигнуты температуры примерно 0,003 К. Более низких температур получить таким способом не удастся, так как спины перестают двигаться свободно, их упорядоченность, возникающая из за взаимодействия между ними, не разрушается слабым тепловым движением атомов. Можно спуститься по температурной шкале еще ниже, если использовать большие магнитные поля – в несколько тесла. В таких полях можно ориентировать магнитные моменты ядер и повторять все описанные операции уже не с электронами, а с ядрами. В 1956 году Симон достиг таким способом температуру в 0,000016 К. К сожалению, этот рекорд не вполне реален, так как здесь охлаждается не кусок вещества, а иллюзорная система спинов. Всем известно, что растворение соли понижает температуру раствора. Этот простой эффект помог физикам. Оказалось, что если растворять газ гелий с атомной массой 3 в обычном жидком гелии, то температура раствора понижается. Так получают температуру до 0,001 К. Есть еще более хитроумный способ, придуманный И. Я. Померанчуком. Способ этот тоже связан с  $^3\text{He}$ , и с его помощью достигается температура около 0,001 К. При 0,002 К жидкий  $^3\text{He}$  становится, подобно  $^4\text{He}$ , сверхтекучим, и в этой области сейчас открылся необычайно сложный и интересный мир физических явлений. Физика низких температур вступила сейчас в новую эпоху. Область милликельвинов (тысячных долей кельвина) сулит еще много сюрпризов.

### **Эффект Померанчука**

Эффект Померанчука — аномальный характер фазового перехода «жидкость — кристалл» лёгкого изотопа гелия  $^3\text{He}$ , выражающийся в выделении тепла при плавлении (и поглощении тепла при образовании твёрдой фазы). Причина такого аномального поведения состоит в том, что при низких температурах термодинамические свойства конденсированного  $^3\text{He}$  определяются не столь фононными, сколько спиновыми свойствами: поскольку ядра  $^3\text{He}$  обладают спином  $1/2$ , то жидкий  $^3\text{He}$ , с одной стороны,



должен подчиняться статистике Ферми — Дирака, и его энтропия, подобно энтропии электронного газа в металлах, должна быть пропорциональна температуре; с другой стороны, энтропия твёрдого  $^3\text{He}$  при температурах выше температуры магнитного упорядочивания спинов ядер (но ниже дебаевской) должна быть, т. е. не должна зависеть от температуры.

Результатом является то, что при температурах ниже 0,3 К энтропия жидкого  $^3\text{He}$  меньше, чем твёрдого. Вследствие этого согласно уравнению Клапейрона — Клаузиуса зависимость температуры плавления от давления при этом также аномальна: с увеличением давления она понижается.

### ***Рефрижератор растворения:***

В процессе охлаждения используется смесь двух изотопов гелия:  $^3\text{He}$  и  $^4\text{He}$ . При охлаждении ниже 700 мК, смесь испытывает самопроизвольное разделение фаз, образуя фазы богатую  $^3\text{He}$  и богатую  $^4\text{He}$ . Смесь  $^3\text{He} / ^4\text{He}$  оживает в конденсаторе, который подсоединен через дроссель к области богатой  $^3\text{He}$  смесительной камеры. Атомы  $^3\text{He}$ , проходя через границу раздела фаз, отбирают энергию у системы. Рефрижераторы растворения с непрерывным циклом обычно используются в низкотемпературных физических экспериментах.

### ***Лазерное охлаждение***

Первые опыты по лазерному охлаждению были проведены с ионами в ионных ловушках, ионы удерживались в пространстве ловушки с помощью электрического поля и/или магнитного поля. Эти ионы освещались лазерным пучком, и благодаря неупругому взаимодействию с фотонами теряли энергию после каждого соударения. Этот эффект используется для достижения сверхнизких температур.

В дальнейшем, в процессе совершенствования лазеров, нашли и другие методы, такие как антистоксово охлаждение твёрдых тел — наиболее практичный метод лазерного охлаждения на сегодня. Этот метод основан на том, что возбуждается атом не с основного электронного состояния, а с колебательных уровней этого состояния (с чуть большей энергией чем энергия основного состояния) на колебательные уровни возбуждённого состояния (с энергией чуть меньше чем энергия этого возбуждённого состояния). Далее атом безызлучательным образом переходит на возбуждённый уровень (поглощая фононы) и испускает фотон при переходе с возбуждённого электронного уровня на основной (этот фотон обладает большей энергией чем фотон накачки). Атом поглощает фонон и цикл повторяется.

Уже существуют системы, способные охлаждать кристалл от азотных до гелиевых температур. Этот метод охлаждения идеален для космических аппаратов, где нет возможности ставить традиционную систему охлаждения.

1. Довести, що ентропія надплинного гелію дорівнює нулеві. Розповісти, що воно має означати.

**Энтропия.** Согласно второму закону термодинамики для всякой термодинамической системы существует функция — энтропия, которая наряду с  $p$ ,  $v$  и  $T$  может рассматриваться в качестве одного из параметров состояния. Аналитическое выражение энтропии  $ds \geq \frac{dQ}{T}$ . Энтропия — это тепловая функция, которая полностью характеризует изменение теплового состояния тела, тогда как ни теплота  $Q$ , ни температура  $T$  в отдельности не могут характеризовать его. При увеличении температуры тела (сообщении тепла) энтропия возрастает, при уменьшении — падает (при  $p = \text{const}$  или  $v = \text{const}$ ). Энтропия является наиболее общим параметром, характеризующим тепловое состояние тел.

Сверхтекучий  $\text{He4}$  при  $T < 0,5$  К имеет почти нулевую энтропию, поскольку в состоянии сверхтекучести атомы гелия прибывают в некоем новом состоянии. Так как Теловой закон Нернста гласит что при  $T \rightarrow 0$  К. Прирост энтропии равен нулю. А Планк утверждал, что при  $T = 0$  К.  $S = 0$  К. Энтропия такого вещества как сверхтекучий гелий и подавно будет нулевой. Так как вся жидкость ведет себя, как нечто единое и квантовые эффекты сильны.

2) М1.3.1

3) М2.7 , М2.19, М2.8

Білет №8

1)

**Температура Бозе-конденсації, і як її вирахувати для ідеального Бозе-газу.**

Замедление атомов с использованием охлаждающей аппаратуры позволяет получить сингулярное квантовое состояние, известное как **конденсат Бозе**, или **Бозе — Эйнштейна**.

**Конденсат Бозе — Эйнштейна** — агрегатное состояние материи, основу которой составляют бозоны, охлажденные до температур, близких к абсолютному нулю. В таком сильно охлажденном состоянии достаточно большое число атомов оказывается в своих минимально возможных квантовых состояниях и квантовые эффекты начинают проявляться на макроскопическом уровне.

Это явление было предсказано в 1925 году А. Эйнштейном, как результат обобщения работы Ш. Бозе, где строилась статистическая механика для частиц, начиная от безмассовых фотонов до обладающих массой атомов. Результатом усилий Бозе и Эйнштейна стала концепция **Бозегаза**, подчиняющегося статистике Бозе — Эйнштейна, которая описывает статистическое распределение тождественных частиц с целым спином, называемых **бозонами**. **Бозоны**, которыми являются, например, и отдельные элементарные частицы — фотоны, и целые атомы, могут находиться друг с другом в одинаковых квантовых состояниях. Эйнштейн предположил, что охлаждение атомов — **бозонов** до очень низких температур заставит их перейти (или, по-другому, сконденсироваться) в наинизшее возможное квантовое состояние. Результатом такой конденсации станет возникновение новой формы вещества.

Этот переход возникает ниже **критической температуры ( $T_B$ )**, которая для однородного трёхмерного газа, состоящего из невзаимодействующих частиц без каких-либо внутренних степеней свободы, определяется формулой

где  $T_B$  — критическая температура,  $N$  — концентрация частиц,  $m$  — масса,  $h$  — постоянная Планка,  $k_B$  — постоянная Больцмана.

Критическая температура  $T_B$  определяется из равенства

$$N'_m(T_B) = N$$

где

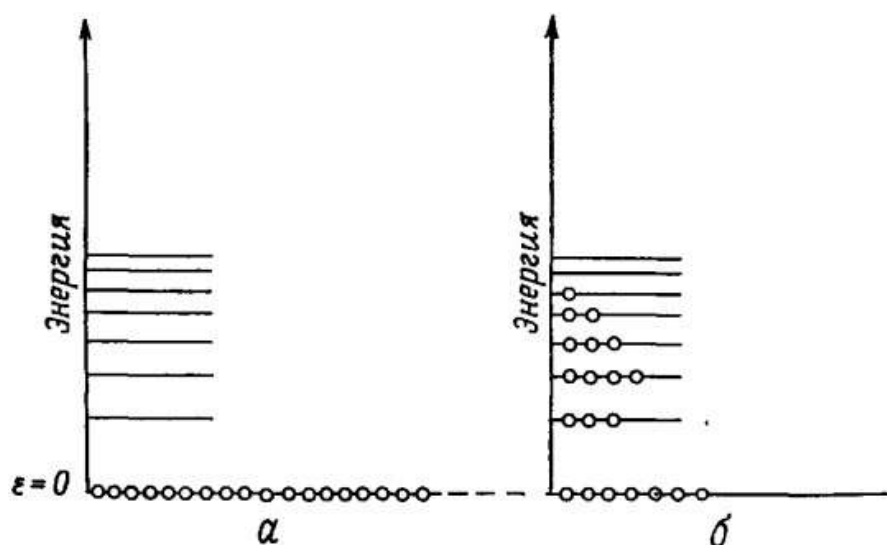
$$T_B = \frac{2\pi\hbar^2}{m k_B} \left( \frac{N}{2,612 V} \right)^{2/3}$$

— максимальное число частиц в возбужденном состоянии.

При абсолютном нуле все частицы занимают наинизший энергетический уровень. При температурах выше  $T_B$  почти все частицы находятся в возбужденном состоянии. Между абсолютным нулем и  $T_B$  частицы

разделяются на две группы —  $N'_m(T) = 2,612 V \left( \frac{m k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}$  — одни остаются на наинизшем уровне, а другие переходят в

возбужденное состояние. В системе макроскопического размера наинизший уровень остается заполненным макроскопически большим числом частиц вплоть до некоторой отличной от нуля температуры. Это явление известно под названием **конденсации Бозе — Эйнштейна**, причем частицы, находящиеся на наинизшем уровне, образуют так называемый конденсат.



Заполнение энергетических уровней в идеальном газе Бозе-Энштейна (схематически).

а – температура  $T=0$ , все частицы находятся на наинизшем энергетическом уровне

б – температура лежит в интервале  $0 < T < T_B$ , некоторые возбужденные состояния заполнены, но значительная часть частиц остается на низшем уровне (в конденсате).

Относительное количество сконденсированных \ несконденсированных сосотояний при темп.  $T$ :

$$\frac{N_0(T)}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \quad (T \leq T_B).$$

2) M1.3.1

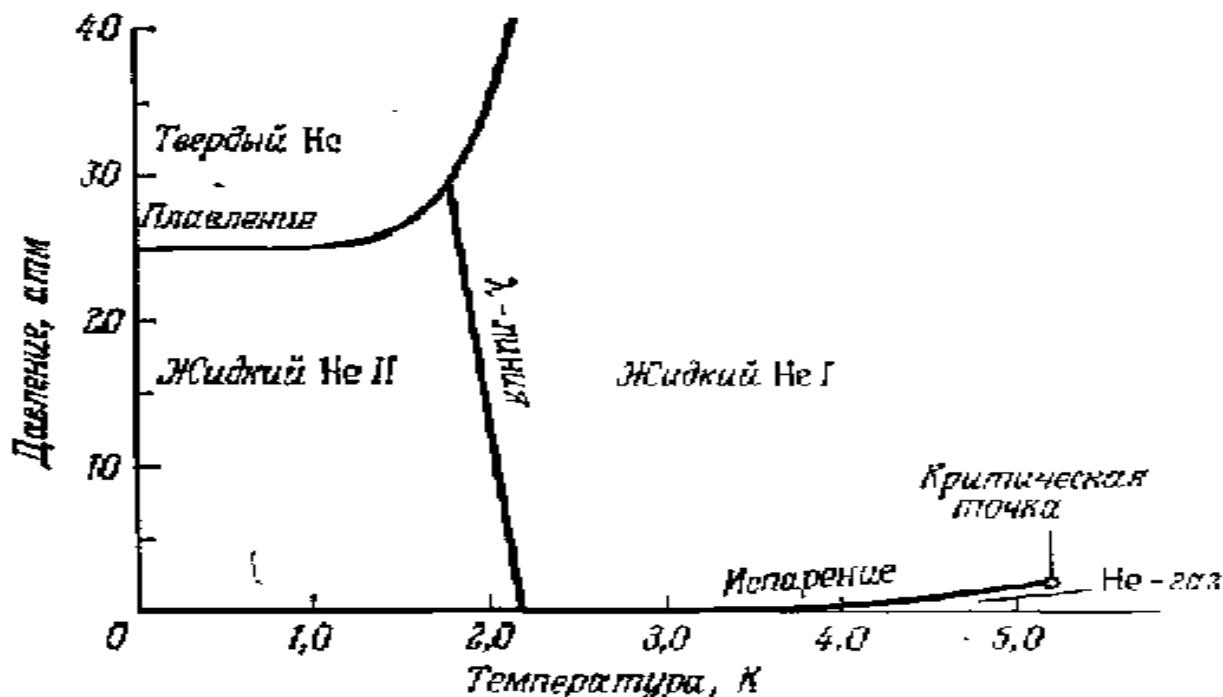
3) M2.8, M2.19

## Білет №9

1) М1.2.1

2) 2. Чим гелій-3 суттєво відрізняється від гелію-4, до чого ця різниця приводить?

З усіх відомих речовин 2 ізотопи He мають найнижчі точки кипіння (для He-4 це 4.21K, а для He-3 це 3.19K). При подальшому зниженні температури вони залишаються в рідкому стані майже до температури абс. нуля. Наведемо фазові діаграми He-4 та He-3 :



Фиг. 1. Фазовая диаграмма He<sup>4</sup> [31].



Фиг. 2. Фазовая диаграмма He<sup>3</sup> [21].

Заштрихована область с отрицательным коэффициентом расширения.



Але, безпосередньо після нижче точок кипіння  $\text{He-3}$  та  $\text{He-4}$  поводять себе по-різному, при  $2.17\text{K}$  в рідкому  $\text{He-4}$  відбувається перехід, який відсутній в  $\text{He-3}$ . Температура цього переходу назив.  $T_\lambda$ . Вище цієї температури  $\text{He}$  поводить себе як звичайна рідина при кипінні (утворюються бульбашки пару, піднімаються на поверхню і випаровуються), але як тільки температра досягає  $T_\lambda$ , то  $\text{He}$  стає абсолютно нерухомим, бульбашки зникають. Значна частина  $\text{He-4}$  стає надплинною. Отже, **основною відмінністю  $\text{He-3}$  та  $\text{He-4}$  є те**, що  $\text{He-3}$  має іншу атомну будову ядра (3 нуклони), тому він не може бути надплинним. В  $\text{He-3}$  ці 3 нуклони мають напівцілі спіни ( $1/2, 3/2, \dots$ ), отже хвильові ф-ції які описують даний об'єкт є антисиметричними. Такі молекули підкорюються теорії Фермі-Дірака, вони є ферміонами: в одному квантовому стані може знаходитися не більше однієї частинки.  $\text{He-4}$  ж в свою чергу підкорюється статистиці Бозе-Ейнштейна. Бозони можуть конденсуватись одночасно на самому нижньому енергетичному стані, а отже можуть бути надплинними.

### **3. Розкажіть про холодильні газові машини для радіоелектронних пристроїв. Більш детально дайте опис теплового насоса Джиффорда – МакМагона. Наведіть приклади застосування.**

Холодильно-газовые машины установки для получения низкотемпературного холода (главным образом в интервале температур от  $12$  до  $150\text{ K}$ ) путём расширения сжатого газа. Характерная особенность Х.-г. м. заключается в том, что применяемое рабочее тело (гелий, водород, неон, азот или воздух) совершает весь холодильный цикл, оставаясь неизменно в газовой фазе. Как правило, Х.-г. м. представляет собой совокупность нескольких агрегатов.

Х.-г. м. применяются для охлаждения приёмников излучения, квантовых усилителей (мазеров) и т.д., а также для сжижения газов (увага Gifford=Гиффорд=Джиффорд)

Машина была предложена в  $1959$  г. А построена в  $1960$  г. несколько измененная с газовым приводом поршня-вытеснителя. Такие машины проще, чем машины Стирлинга, но термодинамически менее эффективны, так как холодопроизводящим процессом является процесс выхлопа. Работает следующим образом. После открытия впускного клапана рабочее тело с температурой  $T_0$  заполняет теплую полость А цилиндра 4, происходит впуск, и температура газа в теплой полости цилиндра повышается в общем случае от  $T_n$  до  $T_k$  (процесс  $1'-2'$  – рис. 6.53, в)  $T_k$

определяется

формулой

$$T_k = \frac{k T_0 T_n p_1 / p_2}{T_n (p_1 / p_2 - 1) + k T_0}$$

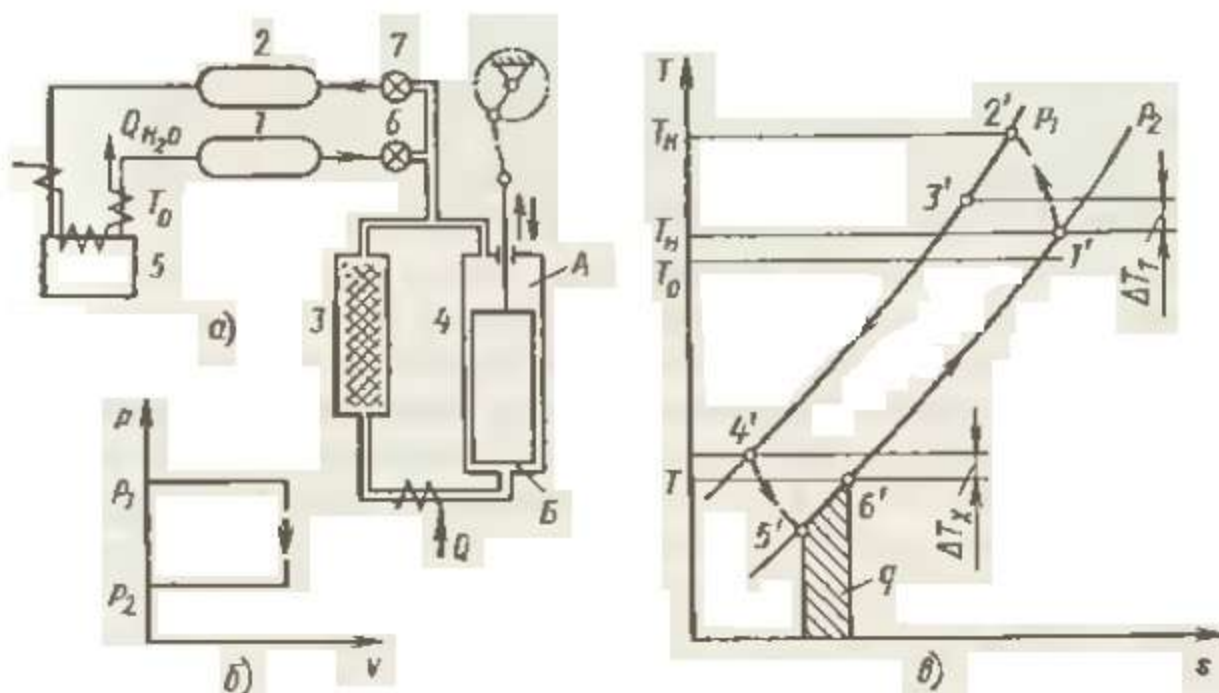


Рис. 6.53. Криогенератор Гиффорда—Мак-Магона:

а — схема; б, в — диаграммы  $p-v$  и  $T-s$ ; 1, 2 — ресиверы; 3 — регенератор; 4 — рабочий цилиндр с вытеснителем; 5 — компрессор; 6 и 7 — клапаны соответственно впускной и выпускной; А и Б — соответственно теплая и холодная полости цилиндра

Затем при открытом впускном клапане поршень-вытеснитель поднимается, и газ перемещается в холодную полость Б цилиндра 4, где температура близка  $T$  (процесс  $2^1-4^1$ ). Одновременно в связи с тем, что в регенераторе газ охлаждается и его объем уменьшается, через впускной клапан в регенератор поступает дополнительное количество газа

$$\Delta G = V_{\text{ц}} p_1 (1/T - 1/T_k) / R,$$

где  $V_{\text{ц}}$  — объем цилиндра 4.

Очевидно, что температура газа на входе в регенератор (точка  $3^1$ ) является температурой смещения потока от компрессора ( $\Delta G$ ) с температурой  $T_0$  и потока из теплой полости цилиндра с температурой  $T_n$  (процесс  $2^1-3^1$ ).

Когда вытеснитель достигает верхней мертвой точки, впускной клапан закрывается, и вслед за этим открывается выпускной клапан. Происходит выхлоп — очень быстрое расширение газа в процесс свободного выпуска из цилиндра, и температура газа падает (процесс  $4^1-5^1$ ). Затем при открытом выпускном клапане поршень-вытеснитель опускается, и газ из холодной полости цилиндра проталкивается через генератор (процесс  $6^1-1^1$ ). К холодной полости цилиндра или регенератора подводится теплота  $q$  (полезная холодопроизводительность). Выходя на теплой стороне из регенератора, газ частично направляется в компрессор и там сжимается;

другая часть газа заполняет теплую полость А цилиндра 4. Когда поршень-вытеснитель достигает нижней мертвой точки, выпускной клапан 7 закрывается, вслед за этим снова открывается впускной клапан 6, и цикл повторяется.

Применяют для генерации небольших количеств холода на уровне 35K. Криогенератор Джиффорда – Мак-Магона применяют для охлаждения и термостатирования, а также для ожижения газов при очень малой производительности. Реальные конструкции таких машин отличаются высокой надежностью благодаря исключительной простоте конструкции.

## Білет 10

1) М1.9.1, М1.5.1

2) М1.5.2

3) .

3. Холодильная газовая машина из зворотним циклом Стирлінга. Устрій та його особливості, принципи роботи, термодинамічний цикл, переваги та недоліки  
В замкнутом цикле Стирлинга рабочее тело участвует в круговом процессе, состоящем из 4 этапов (две изохоры и две изотермы).

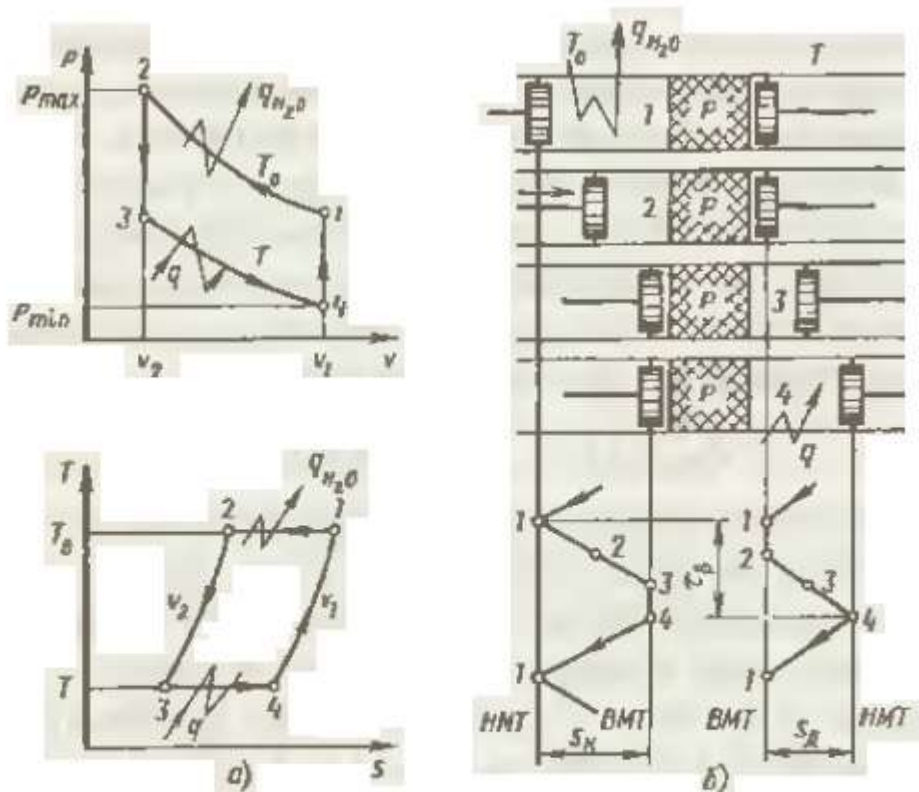


Рис. 6.47. Обратный (холодильный) цикл Стирлинга:

$a$  — диаграммы  $p-v$  и  $T-s$ ;  $b$  — схема реализации в поршневой машине с двумя поршнями, регенератором  $R$ , холодильником и охладителем ( $q_{H_2O}$  — теплота, отводимая в холодильнике в окружающую среду;  $q$  — теплота, подводимая в охладителе и передаваемая в полость расширения)

Теплота отводится из цикла в окружающую среду при температуре  $T_0$  в процессе сжатия, а теплота от охлаждаемого тела передается в цикл при температуре  $T$  в процессе расширения. Регенерация теплоты в цикле осуществляется теоретически в процессе  $V = \text{const}$ .

Количество теплоты (в скобках коэффициент **b** надо упустить, тогда совпадет с формулами из лекции Пана)

отведенной в окружающую среду

сообщено рабочему телу в процессе расширения

$$q_{H_2O} = RT \ln [(v_1 - b)/(v_2 - b)]$$

Холодильный коэффициент цикла

Стирлинга, как и цикла Карно

$$\epsilon_{\text{Ст}} = q/l_2 = T/(T_0 - T) = \epsilon_C$$

Принципиальный способ реализации

обратного цикла Стирлинга в поршневой машине иллюстрирует рис 6.47.

Два поршня движутся в цилиндре прерывисто с углом сдвига по фазе  $\beta$ . В рабочем пространстве между поршнями размещен регенератор  $P$ , который делит рабочую полость на две части – теплую и холодную. Иногда их условно называют полостями сжатия и расширения. В теплой полости поддерживается постоянная температура  $T_0$  за счет отвода теплоты  $q_{H_2O}$  в холодильник. В холодильной полости температура  $T$  постоянная (за счет подвода теплоты  $q$  через охладитель). В действительности цикл чаще всего реализуют в машине с гармоническим движением поршней, причем существует несколько конструктивных схем подобной машины.

Преимущества цикла : высокое значение холодильного коэффициента, широкий диапазон использования в области умеренного холода (от 0 до -80 °C) и экологическая чистота рабочих тел (гелий, водород, азот, воздух). Принципиальными особенностями цикла Стирлинга являются:

- цикл характеризуется нестационарными во времени параметрами потоков рабочего тела в каждой точке системы. Области применения таких машин – малые и средние мощности;
- цикл предназначен только для работы с газообразным рабочим телом. Чтобы размеры машин при заданной мощности были приемлемы, а внешний и внутренний теплообмен рабочего тела в этих условиях проходил достаточно эффективно, давление в машине должно быть существенно выше атмосферного. По тем же причинам рабочее тело должно иметь малую вязкость, возможно большую теплопроводность и теплоемкость, мало зависящую от давления (иначе возникнут большие собственные потери в регенераторе вследствие различных тепловых эквивалентов теплообменивающихся потоков);
- в цикле регенерация тепла позволяет работать в большом интервале температур (верхняя и нижняя температуры цикла) при относительно малых отношениях давлений сжатия и расширения;
- для реализации цикла в качестве рабочих тел могут быть использованы водород, гелий, азот, воздух и другие газообразные вещества. Использование в качестве рабочего тела газов с высоким значением газовой постоянной ( $R$ ), например водорода или гелия, позволяет получать в машинах Стирлинга эксергетический к.п.д. свыше 50%;

- универсальность цикла, на его основе возможно создание как преобразователей прямого цикла, так и обратного цикла.

## Білет11

### **Що таке «макроскопічне квантування», поясніть.**

При последовательных измерениях любых процессов вследствие флуктуаций получают последовательность дискретных величин. Форма соответствующих гистограмм сходна в каждый данный момент для процессов разной природы и изменяется с высокой вероятностью одновременно в разных процессах и при больших расстояниях между лабораториями. В ряду последовательных гистограмм данная гистограмма с высокой вероятностью сходна с ближайшими соседями и повторяется с периодом в 24 часа, 27 суток и 365 суток. Все это свидетельствует о весьма общей космофизической (космогонической) причине феномена.

«Макроскопическое квантование» характерно для процессов принципиально разной природы. Данный феномен не противоречит каким-либо «основам науки». В частности, нет сомнений во вполне случайном во времени характере радиоактивного распада и его подчинении статистике Пуассона. Само по себе наличие узких пиков и впадин («полиэкстремальность» соответствующих гистограмм), по-видимому, обусловлено чисто арифметическими причинами – алгоритмами взаимодействия «реагентов» в изучаемых процессах.

При любых последовательных во времени измерениях процессов любой природы вследствие флуктуаций получают последовательность дискретных величин. Некоторые из этих величин встречаются существенно чаще других – наблюдаются «разрешенные» и «запрещенные» состояния макроскопических объектов. На соответствующих гистограммах видны экстремум – «пики» и «впадины». Форма спектра разрешенных и запрещенных состояний – относительные величины расстояний между уровнями и степень их заселенности – сходна в каждый данный момент для процессов разной природы и изменяется с высокой вероятностью одновременно в разных процессах. Сходство тонкой структуры гистограмм при независимых измерениях процессов разной природы не объяснимо чисто математическими закономерностями и является проявлением фундаментальных физических свойств нашего мира.

### **Наиболее ярким примером макроскопического квантового эффекта в физике низких температур являются эффекты Джозефсона.**

Явление сверхпроводимости в целом невозможно описать без привлечения квантовой механики. Движение сверхпроводящих электронов является существенно квантовым, и фаза сверхпроводящей волновой функции явно проявляется в различных интерференционных эффектах. Хотя в большинстве случаев изменение фазы во времени может быть достаточно точно описано классической механикой. Главной особенностью

квазиклассического приближения, справедливого для макроскопических объектов с огромным числом степеней свободы, является то, что канонически сопряженные переменные могут иметь одновременно точные значения. Однако существуют условия, при которых фаза параметра порядка становится настоящей квантовомеханической переменной. Это приводит к макроскопическим квантовым эффектам. Для перехода к квантовому пределу в джозефсоновском случае к нулю должна стремиться емкость Стунельного контакта, играющая роль массы. Квантовые флуктуации становятся значительными при приближении электрической («кулоновской») энергии перехода:

$$E_c = e^2 / 2C$$

К джозефсоновской энергии:

$$E_J = \hbar I_c / 2e = \Phi_0 I_c / 2\pi$$

Для экспериментального наблюдения квантовых эффектов важно, чтобы тепловые флуктуации были малы, т.е. выполнялось неравенство:  $k_B T < E_c, E_J$ .

## 2). М1.4.1

### 3).

Низкие температуры, криогенные температуры, обычно температуры, лежащие ниже точки кипения жидкого воздуха (около 80 К).

Для получения и поддержания низких температур обычно используют сжиженные газы.

Для получения температур порядка нескольких мК теперь широко пользуются удобным методом — растворением жидкого  $^3\text{He}$  в жидком  $^4\text{He}$ . Применяемая для этой цели установка называется рефрижератором растворения, впервые предложенная Хаенцем Лондоном. Действие рефрижераторов растворения основано на том, что  $^3\text{He}$  сохраняет конечную растворимость (около 6%) в жидком  $^4\text{He}$  вплоть до абсолютного нуля температуры. Поэтому при соприкосновении почти чистого жидкого  $^3\text{He}$  с разбавленным раствором  $^3\text{He}$  в  $^4\text{He}$  атомы  $^3\text{He}$  будут переходить в раствор.

$^3\text{He}$  и  $^4\text{He}$  подчиняются разным статистикам, поскольку  $^3\text{He}$  фермион, а  $^4\text{He}$  бозон. Поэтому температура фазового перехода понижается при разбавлении бозе-жидкости ферми-жидкостью.

Из-за меньшей массы  $^3\text{He}$  имеет большую энергию нулевых колебаний, значит плотность жидкости вблизи атома  $^3\text{He}$  меньше, чем около атома  $^4\text{He}$ , значит атому  $^3\text{He}$  будет выгодно разметиться ближе к  $^3\text{He}$ , чтобы меньше энергии потратить на расталкивание соседних атомов. Благодаря притяжению между атомами  $^3\text{He}$  энергия связи между  $^3\text{He}$  и  $^4\text{He}$  должна увеличиваться с ростом концентрации  $^3\text{He}$ . Но не стоит забывать, что  $^3\text{He}$  фермион, значит «новый» атом  $^3\text{He}$  должен перейти на высший энергетический уровень. Значит энергия связи  $^3\text{He}$  будет уменьшаться. В конце концов при дальнейшем увеличении концентрации  $^3\text{He}$  в растворе





### Принцип работы:

Газообразный  $\text{He}^3$  высокой концентрации ( $x \approx 100\%$ ) с помощью диффузионного вакуум-насоса 1 и ротационного 2 откачивается и нагнетается при давлении 50–60 мм рт. ст. в линию прямого потока. Проходя ванну 3 с жидким азотом и ванну 4 с жидким  $\text{He}^4$  при  $T \approx 1,6^\circ \text{K}$ ,  $\text{He}^3$  охлаждается, конденсируется и идет по капилляру 5, где его давление резко падает. Затем жидкий  $\text{He}^3$  охлаждается в испарительной ванне 6, теплообменнике 7 и поступает в верхнюю часть ванны 8. В нижней части ванны 8 находится богатая  $\text{He}^4$  фаза; поток  $\text{He}^3$  растворяется в  $\text{He}^4$ . Переход  $\text{He}^3$  в нижнюю фазу сопровождается поглощением тепла, при этом происходит охлаждение. Из ванны 8  $\text{He}^3$  путем диффузии направляется по капилляру 7 в испарительную ванну 6, где испаряется при давлении порядка  $5 \cdot 10^{-3}$  мм рт. ст. и откачивается вакуум-насосами, замыкая цикл. При испарении жидкости в ванне 6 образующиеся пары состоят почти из чистого  $\text{He}^3$  вследствие высокой упругости его паров по сравнению с  $\text{He}^4$ . Процесс разделения фаз, приводящий к образованию концентрированного  $\text{He}^3$  и его слабого раствора в  $\text{He}^4$ , начинается в ванне 8 при достижении температуры  $\sim 0,8^\circ \text{K}$ . В нижней фазе концентрация  $\text{He}^3$  составляет  $\sim 5\%$ . Переход атомов  $\text{He}^3$  из верхней жидкой фазы в нижнюю аналогичен испарению, поэтому теплота процесса при изотермическом переходе может быть вычислена по формуле

$$q = T(s_1 - s_2), \quad (147)$$

где  $s_1$  — энтропия  $\text{He}^3$  в растворенной фазе;

$s_2$  — энтропия жидкого  $\text{He}^3$ , поступающего на растворение.

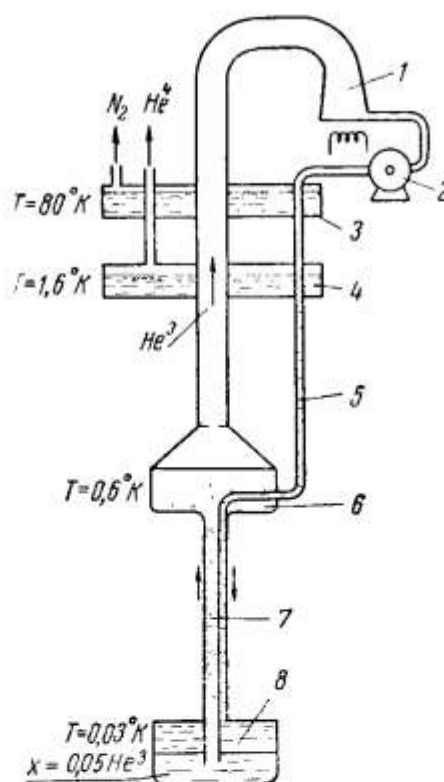


Рис. 91. Схема процесса охлаждения методом растворения жидкого  $\text{He}^3$  в  $\text{He}^4$ :

1, 2 — вакуум-насосы; 3 — ванна с жидким азотом; 4 — ванна с жидким гелием; 5 — капилляр; 6 — испарительная ванна; 7 — теплообменник; 8 — растворительная ванна



Согласно В. Пешкову могут быть приняты следующие значения энтропии: для чистого жидкого  $\text{He}^3$  (при  $T < 0,1^\circ \text{K}$ ) энтропия  $s_2 = 24T \text{ дж}/(\text{моль} \cdot \text{град})$ ; для 5 %-ного раствора  $\text{He}^3$  ( $T < 0,04^\circ \text{K}$ ) энтропия  $s_1 = 124T \text{ дж}/(\text{моль} \cdot \text{град})$ . Тогда по формуле (147) теплота перехода

$$q = 100T^2 \text{ дж}/\text{моль}.$$

Холодопроизводительность установки без учета потерь

$$Q = qV \text{ вт},$$

где  $V \text{ моль}/\text{сек}$  — количество  $\text{He}^3$ , циркулирующего в системе.

В реальных условиях необходимо учесть потери от недорекуперации и от теплопритоков. Большую трудность представляет расчет нижнего теплообменника 7, поскольку в нем процесс происходит в слабо изученной области вырождения свойств раствора  $\text{He}^3\text{—He}^4$ . Приближенный метод расчета этого теплообменника дан в работе В. Пешкова. Существующие в настоящее время установки такого типа позволяют получать низкие температуры вплоть до  $0,008^\circ \text{K}$ . Данный метод перспективен и в принципе позволяет применять сверхнизкие температуры для технических целей.

**Другое объяснение физики процесса (необязательно писать , для понимания):**

В 1951 г. Г. Лондон высказал предположение, что процесс растворения жидкого  $\text{He}^3$  и  $\text{He}^4$  должен сопровождаться эффектом охлаждения. Эта идея получила дальнейшее развитие; в настоящее время ряд криогенных лабораторий располагает рефрижераторами такого типа. Данный метод привлекает своей относительной простотой, возможностью обеспечить непрерывный процесс охлаждения в течение длительного времени и высокой холодопроизводительностью по сравнению с адиабатным размагничиванием. Эффект охлаждения при растворении  $\text{He}^3$  и  $\text{He}^4$  возникает из-за значительного различия молярных теплоемкостей и энтропий жидкого  $\text{He}^3$  и его слабого раствора в  $\text{He}^4$ .

Чистый жидкий  $\text{He}^3$  имеет упорядоченную структуру и малую энтропию, тогда как свойства раствора  $\text{He}^3\text{—He}^4$  иные. Особенностью жидкого  $\text{He}^4$  является то, что вследствие сверхтекучести и почти нулевой энтропии при  $T < 0,5^\circ \text{K}$  он гидродинамически и термически почти инертен и ведет себя в растворе  $\text{He}^3\text{—He}^4$  лишь как «поддерживающая» среда для атомов  $\text{He}^3$ . Слабый раствор  $\text{He}^3$  в  $\text{He}^4$  можно рассматривать как идеальный газ, состоящий из атомов  $\text{He}^3$ , которые между собой не взаимодействуют; теплоемкость идеального газа  $3/2R$ , также велика и его энтропия. Таким образом, растворение  $\text{He}^3$  в  $\text{He}^4$  приводит к изменению состояния упорядоченности системы. Этот процесс аналогичен обычному испарению жидкости и сопровождается поглощением теплоты перехода из фазы почти чистого жидкого  $\text{He}^3$  в фазу с его слабой концентрацией. Эта теплота перехода велика и используется для охлаждения в области сверхнизких температур. Фаза, богатая  $\text{He}^3$ , играет роль жидкости, а фаза богатая  $\text{He}^4$  — роль пара; осмотическое давление раствора эквивалентного давлению пара.

Если растворять  $\text{He}^3$  в  $\text{He}^4$  в адиабатных условиях, то этот процесс будет сопровождаться понижением температуры. Переход атомов гелия из одной жидкой фазы в другую может быть осуществлен через полупроницаемую перегородку, однако более эффективным является использование естественного — спонтанного процесса фазовой сепарации. Установлено, что при  $T < 0,8^\circ \text{K}$  имеет место самопроизвольное разделение фаз в смеси жидких  $\text{He}^3$  и  $\text{He}^4$ ; фаза, богатая  $\text{He}^3$ , располагается сверху, а богатая

$\text{He}^4$  — внизу. Переход атомов  $\text{He}^3$  через границу раздела этих двух фаз и сопровождается поглощением теплоты процесса растворения. Принципиальная схема такой установки, иллюстрирующая возможность осуществления непрерывного процесса охлаждения, дана на рис. 91.

## Билет 12

1)М1.17.2

2).

**Розкажіть про спектри «Бозе-конденсату» при  $T=0$  і при  $T > T_B$** 

Для ідеального газу при температурі  $T$  частинки починають заповнювати найнижчі енергетичні рівні, цей процес посилюється при подальшому пониженні температури. Критична температура  $T_B$  визначається з рівності  $N'_m(T_B) = N$  що дає

$$T_B = \frac{2\pi\hbar^2}{m k_B} \left( \frac{N}{2,612 V} \right)^{2/3}.$$

Кількість частинок що знаходяться в збудженому стані рівна

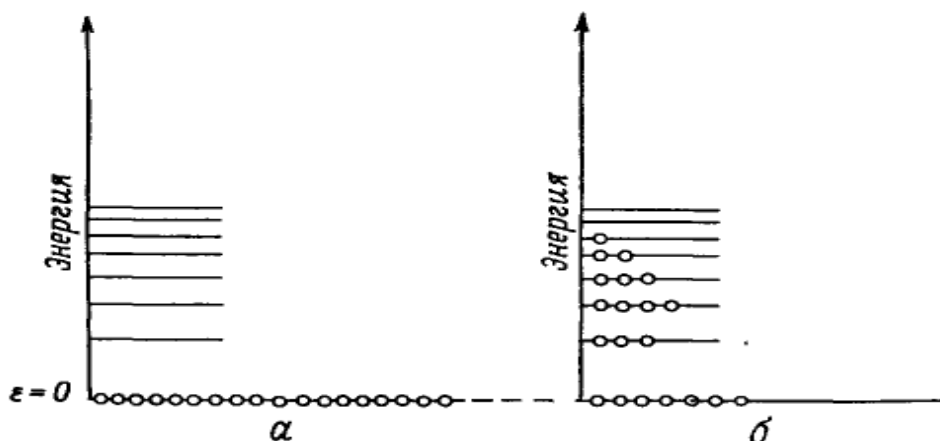
$$\frac{N'(T)}{N} = \left( \frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \quad (T \leq T_B).$$

Інші частинки знаходяться на рівні з найнижчою енергією

$$\frac{N_0(T)}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \quad (T \leq T_B).$$

З останньої формули слідує, що  $N_0(T_B) = 0$ , але це не зовсім точно в силу наближеності природи обрахунків, з допомогою який отримано вираз для  $T_B$ . Фактично при  $T > T_B$  невелика к-ть частинок залишаються на найнижчому рівні, але їх к-ть можна знехтувати.

На малюнку нижче представлені результати знайдені вище для ідеального газу.



**Фиг. 26. Заполнение энергетических уровней в идеальном газе Бозе — Эйнштейна (схематически).**

**а** — температура  $T = 0$ , все частицы находятся на наинизшем энергетическом уровне;  
**б** — температура лежит в интервале  $0 < T < T_B$ , некоторые возбужденные состояния заполнены, но значительная часть частиц остается на наинизшем уровне (в конденсате).

При абсолютному нулі всі частинки займають найнижчий енергетичний рівень, при температурах вище  $T_B$  майже всі частинки знаходяться в збудженому стані. Між абсолютним нулем і  $T_B$  частинки поділяються на дві групи: одні залишаються на найнижчому рівні, а інші переходять в

збуджений стан. **В си-мі макроскопічного розміру найвищий рівень залишається заповненим макроскопічно великим числом частинок, аж до деякої відмінної від нуля температури. Це явище відоме під назвою конденсація Бозе – Ейнштейна, причому частинки, які знаходяться на найнижчому рівні створюють так званий конденсат.**

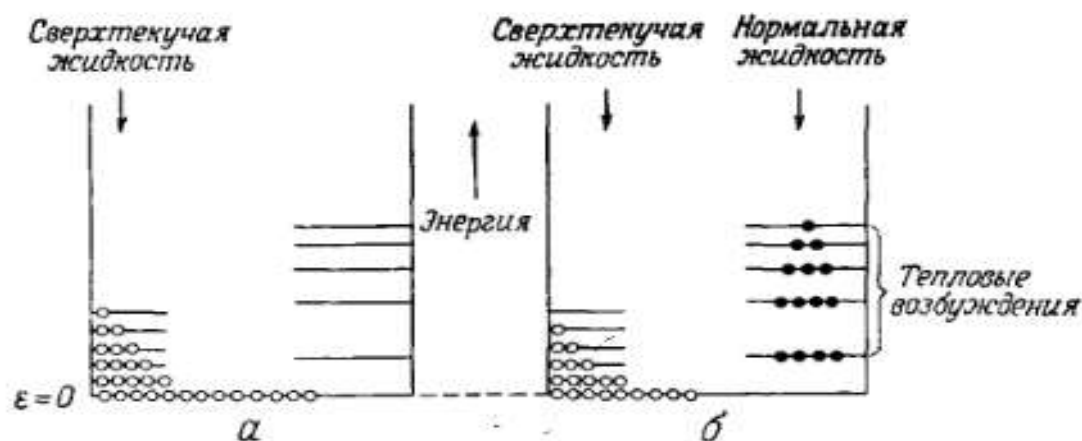
Але ця конденсація суттєво відрізняється від явища, наприклад, що проходить під час зрідження газу. В останньому випадку частинки створюють дві фази, розділені чіткою границею в просторі координат тобто в «звичайному» просторі. В протиположність цьому конденсацію Б-Е можна розглядати як розділ в просторі імпульсів, тобто фізичної границі між конденсатом і збудженими частинками не існує. Але частинки «впорядковані » по імпульсам. З цієї точки зору конденсація Б-Е представляє собою приклад переходу типу порядок-безпорядок.

Щоб порівняти нашу ідеальну си-му з гелієм, оцінимо температуру конденсації для газоподібного  $\text{He}^4$ . Якщо в виразі для  $T_v$  використовувати густину частинок  $N/V$ , яка відповідає насиченим парам при нормальній точці кипіння, отримаємо  $T_v = 0,5\text{K}$ . Так як точка кипіння рівна  $4,2\text{K}$  конденсація Б-Е в газі не спостерігається. Але якщо взяти густину рідкого гелію  $\text{He}^4$ , то отримаємо  $T_v = 3,1\text{K}$ . Це достатньо близько до температури  $\lambda$ -переходу ( $2,17\text{K}$ ) і дозволяє припустити, що  $T_\lambda$  є температура, при якій починається конденсація Б-Е в рідкому  $\text{He}^4$ . З іншої сторони аномалії питомої теплоємності в цих двох випадках абсолютно різні. В ідеальному газі на кривій залежності  $C_v$  від  $T$  мається ізлом, а в рідкому  $\text{He}^4$  розрив типу  $\lambda$ -точки.

Той факт, що модель ідеального газу не дає точного опису  $\lambda$ -переходу, не може визвати подиву, так як рідкий гелій представляє собою си-му, в якій переважливу роль грають сили притягання між атомами. Так як задовольняюча мікроскопічна теорія відсутня, ми зробим деякі загальні твердження про взаємодію бозе-систем, спираючись головним чином на те, що такий підхід дозволяє збудувати задовільну картину поведінки  $\text{HeII}$ .

В порівнянні з ідеальним газом взаємодія проявляється подвійним чином: по-перше, зменшується число частинок, які конденсуються на найнижчому енергетичному рівні, по-друге міняється природа збуджених станів си-ми. Так при абсолютному нулі не всі частинки будуть на найнижчому енергетичному рівні – деякі попадають на рівні з дещо більшою енергією. (фиг, 2, а). Ми говоримо, що конденсат «виснажується» в результаті взаємодії. Вирішальною є та обставина що кінцеве число частинок так як і раніше заповнює найнижчий рівень, і таке положення

зберігається аж до деякої відмінної від нуля температури конденсації.



Фиг. 27. Заполнение энергетических уровней во взаимодействующем бозе-газе и в He II (схематически).

$\alpha$  — температура  $T = 0$ , в результате взаимодействия некоторые частицы оказываются в виртуальных состояниях  $\epsilon > 0$ , такую ситуацию называют «истощением» конденсата;  $\beta$  — температура лежит в интервале  $0 < T < T_B$  (или  $T_\lambda$ ), некоторые возбужденные состояния заполнены, причем в силу наличия взаимодействий эти состояния не являются одночастичными. Значительная часть частиц остается на наименьшем энергетическом уровне, который истощен в связи с наличием взаимодействия.

Звичайно при всіх температурах вище абсолютного нуля термічно збудженні рівні си-ми в тій чи іншій степені заповнені (фиг 27,б). вони вже відповідають не одночастинним станам, а елементарним збудженням всієї си-ми, які для початку розглядаються як не взаємодіючі квазічастинки.

Ми можемо зв'язати це описання взаємодіючих бозе-системи з дворідинною моделлю. Згідно експериментальним даним HeII при абсолютному нулі повністю надплинний. Отже, надплинна компонента містить і конденсат і частинки, які заповнюють рівні, відповідаючи за виснажування конденсата при  $T=0$ . В той же час нормальну компоненту рідини ми зв'язуємо з тепловим збудженням.

### 3). СМ Билет 11.3

#### ALARM

Термин реф-ор испарения в лит-ре обнаружен не был, поэтому на этот вопрос лучше детально описать принципы реф-ра растворения. Возможно под реф-ом испарения подразумевается машина, охлаждение в которой происходит за счет перехода из жидкого сос-я в газообразное, тем самым поглощая энергию, т.е. физ. Основы у этих рефрижераторов будут одинаковы., только He 4 заменяется на пары He3

1)

### **Принцип Паулі та його наслідки для квантових конденсованих систем**

Всі частинки діляться на два класи. Ці два класи частинок розрізняються різним спіном. Спін може бути цілим або напівцілим. Частинки із цілим спіном звуться бозонами і підкоряються статистиці Бозе-Ейнштейна, а частинки із напівцілим спіном – ферміони і для них статистика Фермі-Дірака.

Ферміони підкоряються принципу Паулі, який стверджує, що в системі ймовірність знаходження 2 ферміонів в один момент часу з однаковими 4 квантовими числами дорівнює 0. В  $He_4$  частинки взаємодіють між собою. Це веде до двох наслідків: зменшується кількість частинок в основному стані, тобто не збудженому та міняється природа збуджених станів системи. Ця взаємодія веде до того, що в  $He_4$  є 6 ферміонів, разом вони складають цілий спін, тому  $He_4$  підкоряється статистиці Бозе-Ейнштейна.

Ферміони описуються антисиметричною хвильовою функцією, а бозони симетричною. Виходячи з принципу нерозрізненості частинок хвильова функція для системи 2 ферміонів рівна 0, а тому для них принцип Паулі виконується, тому що квадрат хвильової функції – це і є ймовірність.

$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_a(1) \psi_b(2) \pm \psi_b(2) \psi_a(1))$ , де  $a$  і  $b$  – набори квантових чисел, 1 і 2 – номери частинок. Для симетричної функції знак «-», тому 0.

Запишемо кількість бозонів, що мають енергію  $E_k$ , тобто статистику Бозе-Ейнштейна:

$$\langle n(E_k, T) \rangle = 1/(\exp\{E_k - \mu/kT\} - 1)$$

Якщо просумувати по всіх енергіях, то ми будемо мати повну кількість частинок  $N$ . Але серед цих частинок є такі, що знаходяться в збудженому і незбудженому стані. Кількість частинок, що знаходяться в збудженому стані рівна:

$$N(T) = \int_0^\infty D(E) \langle n(E, T) \rangle dE, \text{ де } D(E) - \text{заселеність рівнів, що}$$

$$D(E) = \frac{V}{4\pi^2} \left( \frac{2m_4}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2}$$

Максимальне значення рівня:

$$N_{\max}(T) = 2.612V \left( \frac{m_4 k T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2}$$

Але при пониженні температури ця кількість падає і коли вона стає рівна кількості всіх частинок, тобто  $N$ , то температуру при якій це стається називають температурою виродження або температурою Бозе-конденсації. Вироджений стан – це такий стан в якому може знаходитися багато частинок на одному рівні енергії.

$$T_f = \frac{2\pi \hbar^2}{m_4 k T} \left( \frac{N}{2.612V} \right)^{2/3} - \text{температура конденсації.}$$

При  $T = 0$  внаслідок взаємодії не всі частинки знаходяться в основному стані. При підвищенні температури з'являються теплові збудження.

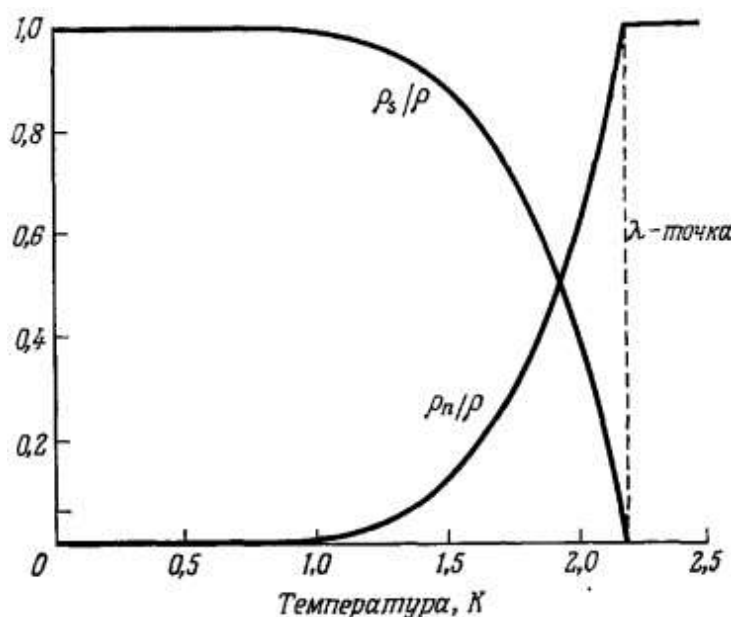
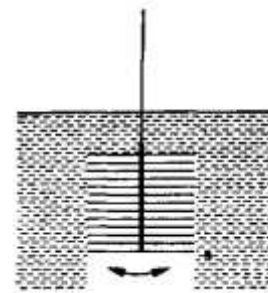
2).

## 2. Вимірювання в'язкості гелію ІІ віскозиметрами різного типу.

Вязкость измеряется в Пуазах или Па·с.

### - Эксперимент Андроникашвили.

В его экспериментах стопка расположенных на равных расстояниях друг от друга металлических дисков подвешивалась на крутильной нити таким образом, чтобы они могли осциллировать в жидком гелии. Расстояние между дисками было достаточно малым для того, чтобы выше  $T_\lambda$  вся

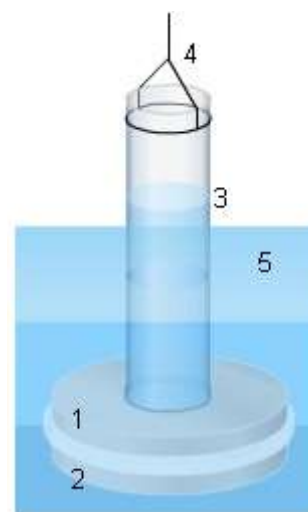


жидкость между дисками увлекалась вместе с ними. Однако ниже  $T_\lambda$  период осцилляций резко падал. Это указывало на то, что не вся жидкость в промежутках между дисками увлекается ими. Такой результат подтвердил предположение, что сверхтекучая часть жидкости не должна оказывать влияния на крутильный маятник. Эксперимент **Андроникашвили** дает возможность непосредственно измерять изменение  $\rho_n/\rho$  с температурой, а следовательно, определять  $\rho_s/\rho$ .

Мы видим, что ниже 1 К в **He II** доминирует сверхтекучая компонента.

### - Опыт Капицы

Для измерения вязкости жидкого **He-II** Капица сконструировал специальный прибор (см. рис), состоящий из двух тщательно отшлифованных кварцевых дисков (1, 2), зазор между которыми регулировался с помощью прокладок из слюды. В верхнем диске имеется отверстие, в которое вставлена кварцевая трубка-резервуар (3). С помощью нити (4) прибор подвешивался в жидком гелии и мог подниматься и опускаться – так можно было, меняя количество гелия в резервуаре, регулировать давление гелия и измерять скорость, с которой он вытекал из капилляра. На рисунке цифрой 5 указан уровень гелия в дьюаре.



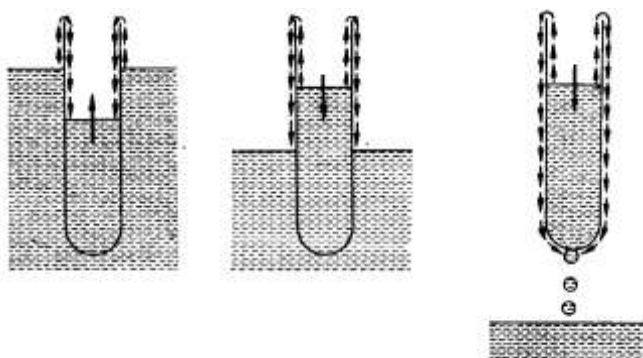
Измерения показали, что у **He-II** вязкость по крайней мере в 1500 раз меньше, чем у **He-I** (при температурах выше  $\lambda$ -точки), и в 10000 раз меньше, чем у газообразного водорода при самой низкой температуре. Вязкость оказалась настолько малой, что даже при зазоре между дисками в 0,5

микрона движение могло быть вихревым и значит истинная вязкость могла оказаться еще во много раз меньшей. Поэтому **П. Л. Капица** сделал заключение, что у **He-II** вообще отсутствует вязкость, и по аналогии со сверхпроводимостью он назвал это явление сверхтекучестью

- **Эксперименты Репли и Депати (1964)**

В эксперименте **Репли и Депати** сосуд имеющий форму тора, заполнили пористым материалом с очень тонкими каналами, пропускающими жидкость. Тор вращали вокруг его оси симметрии, а затем останавливали, после чего течение **He-II** продолжалось без снижения угловой скорости в течении 12 часов, что указывает на способность **He-II** течь без диссипации. Скорость потока в узких каналах шириной от 0.1 до 4 мкм почти не зависит от градиента давления вдоль канала. Это позволяет предположить что **вязкость He-II равна нулю.**

- **Другой эксперимент (?Джексона и Граймса походу?)**



Благодаря наличию пленки на стенках пустая пробирка, опущенная в ванну **He II**, начинает наполняться жидкостью, даже если ее верхний край расположен высоко над поверхностью **He II**. Наполнение сосуда продолжается до тех пор, пока внутренний уровень не достигнет уровня ванны. Если затем пробирку поднять, она опустошается, а если ее приподнять над уровнем гелиевой ванны, то видны капли, падающие на пробирку. Мы приходим к выводу, что сверхтекучая часть гелия течет вдоль пленки всегда, когда существует разность уровней между двумя объемами жидкости. Пленка работает как сифон, причем движущую силу для сверхтекучей части жидкости создает разность гравитационного потенциала между концами пленки. Наблюдая за скоростью изменения уровня жидкости в пробирке, можно определить скорость **сверхтекучей компоненты**. Типичное ее значение составляет **20 см/с. Нормальная часть** жидкости, в силу своей вязкости, остается в пленке почти **неподвижной**.



## Билет №14

1) M2.B5

2) M2.B6

Детандеры - M2.16

3) M1.2.1

## Билет №15

1)

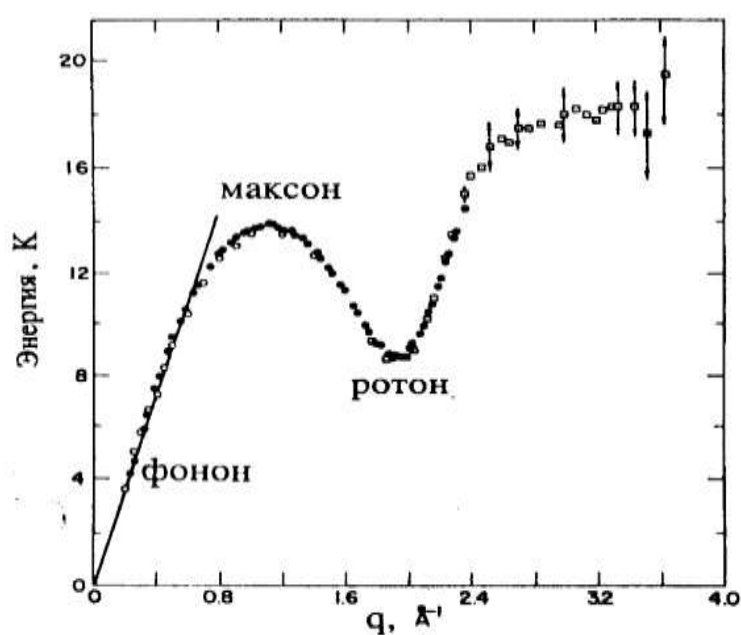


Рис.1. Кривая дисперсии сверхтекучего  $^4\text{He}$  при температуре  $1.1\text{ K}$  [7]

Нейтронні дослідження рідкого  $^4\text{He}$  пов'язані з можливостями вивчення як колективних, так і індивідуальних рухів атомів. Тому представляє інтерес дослідження з допомогою нейтронів спектра збуджень в сверхтекучій і нормальній фазах рідкого  $^4\text{He}$ , а також вивчення явища бозе-конденсації. З'єднуючи результати нейтронних досліджень з багатим матеріалом по вивченню сверхтекучості  $^4\text{He}$ , можна встановити кореляції між явищами сверхтекучості і бозе-конденсації. Особливе місце в цих кореляціях займає спектр збуджень, форма якого, з однієї сторони, визначає умову сверхтекучості Ландау, а з іншої — пов'язана з наявністю бозе-конденсату.

В 1961 г. Хеншоу і Вудс [6] методом неупругого розсіяння нейтронів виміряли дисперсійну криву збуджень в сверхтекучому  $^4\text{He}$ , яка збігалася за формою з передбаченням Ландау. В подальшому в нейтронних дослідженнях  $^4\text{He}$  уточнювалися параметри кривої дисперсії в залежності від температури і тиску при різних значеннях хвильового вектора  $q$  [7—10]. На рис.1 показана крива дисперсії з роботи [7], на якій позначені фононна, максонна і ротонна області. На двохкомпонентний характер спектра неупругого розсіяння нейтронів в сверхтекучому  $^4\text{He}$  в області максонов і ротонов було звернуто увагу в 1978 г. Вудсом і Свенссоном [11]. В сутності, вони передбачали, що нейтрони розсіюються на нормальній і сверхтекучій компонентах незалежно і по-різному. Єстественно, були зроблені спроби знайти теоретичне обґрунтування результатам цього експерименту, однак знайти його не вдалося.

## 2)

Вирішальний експеримент, що був здійснений Капіцею у 1941р під час досліджень гідротермічних ефектів, дозволив термомеханічні і механокалоричні ефекти і отримати ї кількісний опис.

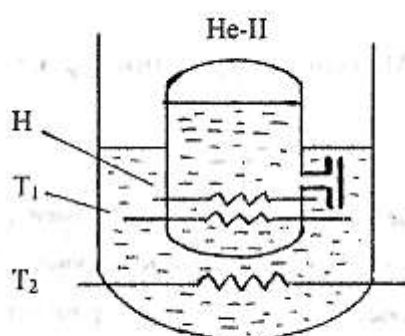
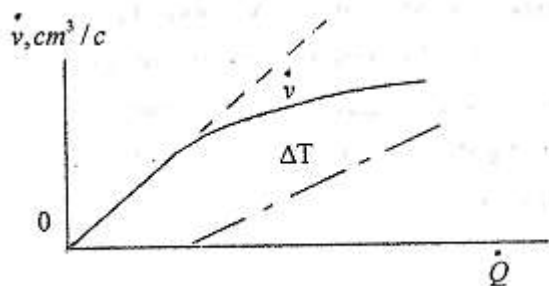


Рис.2.11. Схема прилада Капіці: Н - нагрівач;

$T_1$  і  $T_2$  - термометри електроопору.

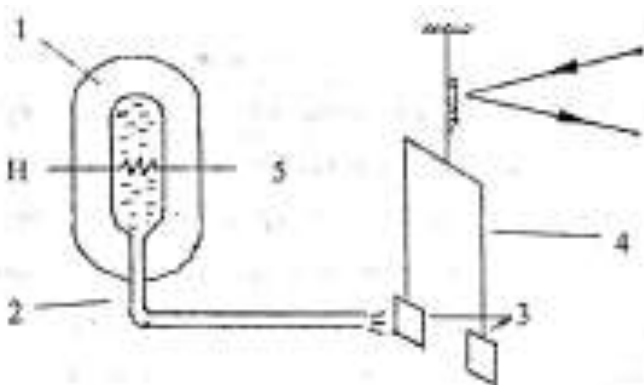
Прилад складався з джарівської посудини, яка була зв'язана з гелієвою ванною за допомогою вузької щілини, яка уявляла собою проміжок між двома полірованими скляними платівками. Ширину щілини можна було регулювати і при найбільшому стисненні вона складала 0.13 мкм. Ширина щілини дозволяла вважати, що через неї

потече тільки надплинний гелій. Усередині і ззовні Дюару були розташовані термометри електроопору. Усередині дюару також розташований електричним нагрівач. У результаті виділення тепла усередині дюара надплинна компонента перетікала до нього з ванни крізь щілину. Кількість рідини, що перетікла усередину визначалась безпосередньо рівнем рідини усередині дюару. Аж до певної критичної потужності нагрівача при перетіканні рідини усередину не спостерігалось виникнення різниці температури між дюаром та ванною. Це означає, що виділена нагрівачем енергія компенсує різницю тепловмісту поміж гелієм II у ванні та гелієм, що втікає крізь надщілину.



Як бачимо, температура у дюарі не зростала у разі, коли швидкості були менші за певне критичне значення  $V_c$ . Однак при більших швидкостях, з'являється різниця у температурах. Отже, при певній критичній швидкості течії надплинність порушується.

**Дослід Капіци доводить, що гелій II який рухається крізь вузьку щілину знаходиться у надплинному стані, що відрізняється від стану решти гелію.**



Посудина 1 та з'єднаний з нею капіляр 2 утворюють маленьку дюарівську посудину. Усередині посудини знаходиться нагрівач Н. Попереду відкритого кінця капіляру висить легке крильце 3 на балансірі 4, що розташований на кварцовій нитці з дзеркальцем.

Було знайдено, що у разі коли посудина заповнена He-11 і нагрівач увімкнутий, крильце відхиляється. Це безпосередньо доводить зв'язок процесу теплопередавання у Н-11 з виникненням у ньому руху. Але цей рух має вельми парадоксальний характер: з капіляра 2 вирує струмінь рідини, який відхиляє крильце 3, і в той же час кількість He-11 у посудині не змінюється, він залишається повним. Таким чином, необхідно було припустити що одночасно з струменем що витікає має місце якийсь протиток рідини.

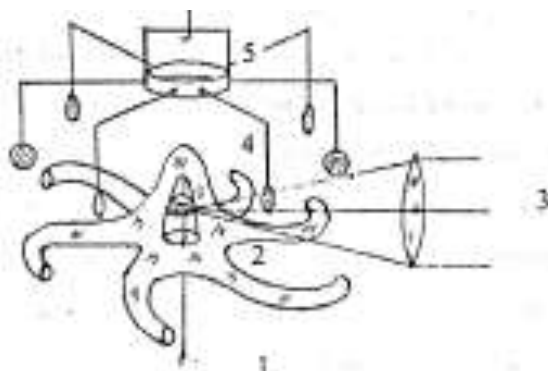


Рис. 2.15. "Павучок" Капіци.

На вістрі голки 1 розташована маленька двостінна скляна посудина 2, перегорнута донцем вгору. Міжстінний простір сполучається з зовнішнім гелієм шляхом шістьох зогнутих капілярів подібно до сегнерова колеса. Нагрівання гелію усередині цього павучка здійснюється світлом точкового ліхтарика, за допомогою конденсатору 3. Внутрішні стіни були зачорнені тому потужність що поглинається була порівняно великою. Після того, як точковий ліхтарик був увімкнений павучок починав обертатись з кутовою швидкістю 120 об/хв. Швидкість обертання за інших однакових умов збільшувалась при зниженні температури. Шляхом одягання на павучок за допомогою петлі 5 та 4, що складаються з двох кілець з припаяними до них крильцями, можна було загальмувати обертання павучка. До того ж кожне з крилець розміщувалось на відстані 1-2 мм біля відповідного капілярного сопла. Таким чином обертання павучка обумовлено реактивною дією струміню. Це свідчить, що у гелію спостерігався динамічний тиск у відсутності загального переносу мас.

Експерименти Капіци зіграли вирішальну роль у створенні теорії надплинності Ландау. З експериментів Капіци ясно що  $He - 4$  складається з двох компонентів: надплинного та нормального, що підтверджує дворідну модель.

## Билет 16

1)

### **Чому надплинність зветь макроскопічним квантовим явищем?**

Поведение конденсата определяется одной волновой функцией с когерентной фазой. В случае когда амплитуда, и фаза могут меняться в пространстве и во времени:

$$\psi(r,t) = \psi_0(r,t) \exp[iS(r,t)] \quad (1)$$

Предположим, что  $\psi(r,t)$  есть решение уравнения Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi + \bar{V}(r) \psi; \quad (2)$$

В элементарных задачах квантовой механики с рассмотрением только одной частицы величину  $\psi^*(r,t)\psi(r,t)$  интерпретируют как относительную

вероятность обнаружения частицы в точке  $(r, t)$ . Однако когда  $\psi$  является макроскопической волновой функцией, произведение  $\psi^*\psi$  имеет уже другой смысл. Все частицы невзаимодействующего бозе-газа при абсолютном нуле должны конденсироваться на наинизшем энергетическом уровне, но при наличии взаимодействия конденсат должен «истощаться». Из экспериментов Андроникашвили следует, что при всех температурах ниже 1K относительная величина плотности сверхтекучей компоненты очень близка к единице. Мы предполагаем что сверхтекучая часть связана не только с конденсатом но и с частицами, импульс которых отличен от нуля при  $T=0$ . Частицы, покинувшие конденсат в результате взаимодействия, все же следуют за движением конденсата. Вследствие этого, нормируя  $\psi(r, t)$  таким образом, чтобы произведение  $\psi^*\psi$  было равно средней концентрации сверхтекучих атомов, получаем :

$$\psi^*(r, t)\psi(r, t) = \psi_0^2(r, t) = \rho_s / m_4 \quad (3)$$

При стремящейся к нулю температуре  $\rho_s \rightarrow \rho$ , т.е. плоскость сверхтекучей компоненты становится равной полной плоскости жидкости. При конечных температурах ниже  $T_\lambda$  отношение  $\rho_s / \rho < 1$  а при  $T_\lambda$  и выше  $\rho_s / \rho = 0$ . Использование выражений (1) и (3) основано на предположении, что можно определить одновременно и плотность  $\rho_s$ , и фазу  $S$ . Это обстоятельство очень важно и нетривиально. Обычно в квантовой системе невозможно одновременно определить и плотность и фазу. Например в простом гармоническом осциляторе состояние с  $N$  квантами может иметь любую фазу  $S$ , но если мы точно фиксируем  $N$  то уже не можем указать  $S$ . Если мы выбираем  $S$ , то не можем однозначно определить  $N$ . При больших  $N$  мы можем фиксировать и  $N$ , и  $S$  если только неопределенность каждой из этих величин удовлетворяет соотношению:

$$\delta N \delta S \sim 1 \quad (4)$$

Таким образом  $S$  может иметь неопределенность  $\delta S \sim N^{-1/2}$ , а относительную неопределенность  $\delta N / N \sim N^{-1/2}$ . По аналогии заключаем что при использовании выражений (1) и (3) полное число частиц, участвующих в сверхтекучести, должно быть велико, как это и имеет место в действительности.

Если исключать из рассмотрения области вблизи твердой стенки или сердцевины вихря, плотность сверхтекучей части жидкости является медленно меняющейся функцией координат. Следовательно, объем, в котором плотность  $\rho_s$  однородна, имеет макроскопические размеры. А сверхтекучесть является макроскопическим квантовым явлением.

Поскольку атомы гелия являются бозонами, квантовая механика допускает нахождение в одном состоянии произвольного числа частиц. Вблизи абсолютного нуля температур все атомы гелия оказываются в основном энергетическом состоянии. Поскольку энергия состояний дискретна, атом может получить не любую энергию, а только такую, которая равна энергетическому зазору между уровнями энергии. Но при низкой температуре энергия столкновений может оказаться меньше этой величины, в результате чего рассеяния энергии попросту не будет происходить. Жидкость будет течь без трения.

2). М1.4.2

**Билет 17**

1)

Як і будь-яка квантова система, рідина характеризується певним основним станом: при  $T = 0$  - це нерухома рідина з мінімальною енергією  $E_0$  і може переходити у збуджений стан, що характеризується енергією  $E > E_0$ . Енергію збудження  $\Delta E = E - E_0$  можна зобразити у вигляді суми елементарних збуджень (квазічастинок) - квантів збудження з енергією  $\varepsilon(p)$  і імпульсом  $\vec{p}$ :

$$\Delta E = \sum \varepsilon_i(p) \quad \text{та} \quad \vec{p} = \sum \vec{p}_i$$

+ Билет 2.1

2). М1.18.1

**Билет № 18**

1). М1.16.2

2) М1.2.1 +

Критерій Ландау (2.14) зв'язує присутність або відсутність надплинності у тій чи іншій системі з особливостями її енергетичного спектру. Поперед відмітимо, що енергетичний спектр He-II буде розглянутий у наступному розділі. Для надплинної рідини  $(\varepsilon(p)/p)_{\min} = 0$ . У разі коли мінімум відношення  $\varepsilon(p)/p$  дорівнює нулю  $v_{cs} = 0$  і рідина не є надплинною, бо для будь-якої  $v \neq 0$  виконується умова (2.14). Зокрема, у випадку квадратичного закону дисперсії

$$\varepsilon = p^2 / 2m \quad (2.15)$$

який є характерним у разі ідеального газу, надплинність неможлива. Дійсно, у цьому випадку

$$\varepsilon / p = p / 2m$$

Мінімальне значення цього відношення дорівнює нулю (це досягається при  $p = 0$ )

## Билет19

- 1) М1.13.1
- 2) М1.18.2

## Билет20

- 1) М2.20

**2) Чи може виникати надплинність у системі не взаємодіючих частинок, з точки зору критерію Ландау.**

**Критерій Ландау сверхтекучести** — соотношение между энергиями и импульсами элементарных возбуждений системы (фононов), обуславливающее возможность её нахождения в сверхтекучем состоянии.

**Квантовая жидкость может находиться в сверхтекучем состоянии, если для энергетического спектра её элементарных возбуждений  $\varepsilon(p)$  минимальное значение отношения энергии квазичастицы к её импульсу  $\varepsilon(p)/p$  больше нуля.**

Рассмотрим жидкость, движущуюся по капилляру со скоростью  $v = \text{const}$ . При наличии вязкости будет происходить диссипация кинетической энергии внутри самой жидкости и в месте её соприкосновения с капилляром и, как следствие, замедление скорости потока. Диссипация происходит за счёт возникновения элементарных возбуждений.

Перейдём в систему координат, в которой жидкость покоится, а капилляр движется со скоростью  $-v$ . Рассмотрим одно элементарное возбуждение с импульсом  $p$  и энергией  $\varepsilon(p)$ . Тогда энергия  $E_0$

жидкости (в системе координат, в которой она изначально покоилась), станет равна энергии этого возбуждения  $\varepsilon$ , а её импульс  $P_0$  — импульсу  $p$ . Перейдём теперь обратно в систему координат, в которой покоится капилляр. Согласно законам преобразования энергии и импульса при переходе от одной инерциальной системы отсчёта в другую (в нерелятивистском случае), новые значения энергии и импульса имеют вид:

$$E = E_0 + P_0 v + \frac{Mv^2}{2},$$

$$P = P_0 + Mv,$$

где  $M$  — масса жидкости. Подставляем сюда известные значения  $E_0$  и  $P_0$ , получаем:

$$E = \varepsilon + pv + \frac{Mv^2}{2}.$$

Выражение  $\varepsilon + pv$  есть изменение энергии жидкости благодаря появлению возбуждения. Это изменение должно быть отрицательным, поскольку действуют диссипативные силы. Отсюда получаем выражение для скорости потока при наличии трения

$$v > \frac{\varepsilon}{p}.$$

Это неравенство должно выполняться хотя бы для некоторых значений импульса  $p$  элементарного возбуждения. Соответственно, при отсутствии трения, т. е. при наблюдении сверхтекучести, при любых значениях импульса элементарных возбуждений  $p$ , должно выполняться неравенство

$$v \leq \frac{\varepsilon}{p}.$$

Это условие соответствует невозможности образования квазичастицы и, следовательно, невозможности диссипации. Таким образом, для возможности наблюдения сверхтекучести в такой системе достаточно, чтобы минимальное значение отношения  $\varepsilon(p)/p$  было больше нуля.

Энтропию можно понимать как показатель относительной беспорядочности, для системы не взаимодействующих частиц энтропия будет достаточно велика. Потому достичь сверхтекучести такая система не сможет без некоего нового порядка, для которого требуется взаимодействие, то есть систему надо либо сжать, для возникновения каких-то сил. Потому система не взаимодействующих частиц не достигнет сверхтекучести.

## Билет 21

### М2.19