Варіант № 10

Для системи N незалежних частинок знайти залежність середньостатистичного значення $\langle(\Delta M)^6\rangle$ від N.

$$\langle(\Delta M)^6\rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^N \Delta\mu_i\right)\left(\sum_{j=1}^N \Delta\mu_j\right)\left(\sum_{k=1}^N \Delta\mu_k\right)\left(\sum_{l=1}^N \Delta\mu_l\right)\left(\sum_{m=1}^N \Delta\mu_m\right)\left(\sum_{n=1}^N \Delta\mu_n\right)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \Delta\mu_i \Delta\mu_j \Delta\mu_k \Delta\mu_l \Delta\mu_m \Delta\mu_n\right)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^N (\Delta\mu_i)^6\right\rangle + 6\sum_{i\neq j}(\Delta\mu_i)^4(\Delta\mu_j)^2 + 15\sum_{i\neq j\neq k}(\Delta\mu_i)^2(\Delta\mu_j)^2(\Delta\mu_k)^2 +$$

$$+ 20\sum_{i\neq j\neq k\neq l\neq m\neq n}(\Delta\mu_i)(\Delta\mu_j)(\Delta\mu_k)(\Delta\mu_l)(\Delta\mu_m)(\Delta\mu_n) + \dots$$

Так як частинки незалежні, то всі суми окрім першої будуть рівні нулю, і тоді маємо:

$$\langle(\Delta M)^6\rangle = \sum_{i=1}^N (\Delta\mu_i)^6 .$$

Якщо всі $\Delta\mu_i$ однакові і частинки однакові) : $\Delta\mu_i = a$, тоді маємо

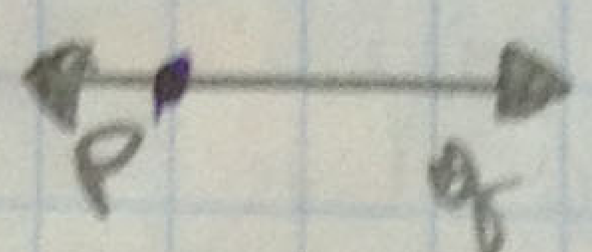
$$\langle(\Delta M)^6\rangle = \sum_{i=1}^{N} a^6 = a^6 N$$

Таким чином

Відповідь: $\langle(\Delta M)^6\rangle = a^6 N$

№ 810. Розглядається одновимірна періодична гратка з періодом a. Частинка, що в момент часу $t = 0$ знаходилась на початку координат, має ймовірність зробити стрибок вправо втричі більшу ніж вліво. Знайти ймовірність того, що через N стрибків частинка зміститься вправо на фіксовану відстань $n\alpha$. $(n << N)$.

N10 Розглядається одновимірна періодична гратка з періодом α. Частинка, що в момент часу $t=0$ знаходиться на початку координат, має ймовірність зробити стрибок вправо втричі більшу ніж вліво. Знайти ймовірність того, що через N стрибків частинка зміститься вправо на фіксовану відстань $n\alpha$. $(n \ll N)$



$$\left.\begin{array}{l} p+q=1 \\ 3p=q \end{array}\right\} \text{ – умова}$$

$p=\frac{1}{4}$ – ймовірність стрибка вліво

$q=\frac{3}{4}$ – ймовірність стрибка вправо

Використаємо біноміальний розподіл

$P_N(n)=C_N(n)\,p^n q^{N-n}$, з якого маємо

$$P_N(n)=\frac{N!}{n!(N-n)!}\,p^n q^{N-n}$$

Використаємо спрощене, дане в умові $n \ll N$:

$$\frac{N!}{(N-n)!}=(N-n+1)\cdot\ldots(N-2)(N-1)N \approx$$

$n \cdot N$,

звідси маємо $P_N(n) \cong \frac{nN}{n!} \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{N-n} =$

$$= \frac{N}{(n-1)!} \frac{3^{N-n}}{4^N}$$

$$P_N(n) = \frac{N}{(n-1)!} \frac{3^{N-n}}{4^N}$$

Контрольна робота №1
статистична фізика
група „Медична радіофізика"
Олексюк Петро

22.03.2013
В-12

1) Для системи N незалежних частинок знайти залежність середньостатистичного значення $\langle (\Delta M)^6 \rangle$ від N.

Розв'язання:

$$\langle (\Delta M)^6 \rangle = \langle M \rangle^6 - [\langle M \rangle]^6 \quad ???$$

$$= (\Delta M)^6 = \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i\right)^6 = \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N} \Delta m_j\right)\left(\sum_{k=1}^{N} \Delta m_k\right) \times$$

$$\times \left(\sum_{e=1}^{N} \Delta m_e\right)\left(\sum_{z=1}^{N} \Delta m_z\right)\left(\sum_{t=1}^{N} \Delta m_t\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{e=1}^{N}\sum_{z=1}^{N}\sum_{t=1}^{N} (\Delta m_i)(\Delta m_j)(\Delta m_k)(\Delta m_e)(\Delta m_z)(\Delta m_t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (\Delta m_i)^6 + \underbrace{\sum\sum\sum\sum\sum\sum_{i \neq j \neq k \neq e \neq z \neq t} \Delta m_i \cdot \Delta m_j \cdot \Delta m_k \cdot \Delta m_e \cdot \Delta m_z \cdot \Delta m_t}_{=0} = \quad ???$$

$= 0$ (бо розглядали на лекції $\sum_{i}\sum_{j,\, i \neq j} = 0$)

$=$ {нехай Δa відхилення для Δm_i} $=$

$= N \cdot (\Delta a)^6$

Відповідь: $\langle (\Delta M)^6 \rangle = N \cdot (\Delta a)^6$, де Δa якесь відхилення M.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА Варіант ~~№8~~ 12

1. Для системи N незалежних частинок знайти залежність середньостатистичного значення $\langle(\Delta M)^6\rangle$ від N .

24. Знайти величину $\left\langle (\Delta u)^2 \right\rangle$ для розподілу $\rho(u) = C_0\theta\left[b-(u-u_0)^2\right]$, якщо $-\infty < u < +\infty$, функція «сходинки» $\theta[x>0]=1$ і $\theta[x<0]=0$.

№24. Знайти величину $\langle (\Delta u)^2 \rangle$ для розподілу $\rho(u) = c_0 \theta [b - (u - u_0)^2]$, якщо $-\infty < u < +\infty$, функція "сходинки" $\theta[x>0] = 1$ і $\theta[x<0] = 0$

Розв'язання:

$$\langle (\Delta u)^2 \rangle = \langle (u - \bar{u})^2 \rangle = \langle (u^2) \rangle - (\langle u \rangle)^2$$

$$\langle u^2 \rangle = \int u^2 \rho(u)\, du =$$

$$= \int u^2 c_0 \theta [b - (u-u_0)^2]\, du =$$

$$= c_0 \theta \int_{-\infty}^{+\infty} [u^2 b - u^2 (u-u_0)^2]\, du =$$

$$= c_0 \theta \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 b\, du - \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 (u-u_0)^2\, du \right) =$$

$$= c_0 \theta \left[\frac{u^4}{4} b - \frac{u^3}{3} - u_0 \frac{u^2}{2} \right] = -2u(u-u_0)^2 - 2u^2(u-u_0) \Big]$$

$$\langle u \rangle = \int u \rho(u)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} u c_0 \theta [b - (u-u_0)^2]\, du =$$

$$= c_0 \theta \int_{-\infty}^{+\infty} u b - u(u-u_0)^2\, du =$$

$$= c_0 \theta \left[\frac{u^2 b}{2} - (u-u_0)^2 - 2u(u-u_0) \right];$$

$$\langle (\Delta u)^2 \rangle = c_0 \theta \left[\frac{u^2 b}{2} - (u-u_0)^2 - 2u(u-u_0) \right. -$$

$$- c_0 \theta \left[\frac{u^2 b}{2} - 2u(u-u_0)^2 - 2u^2(u-u_0) \right] - c_0^2 \theta^2 \times$$

$\times \cancel{\left[\frac{u^2 b}{2} - (u-u_0)^2 - 2u\, (u-u_0) \right]^2}$,

Δu – ширина ділянки

$\langle u \rangle$ – середнє значення для неперервно поділеної величини

$$\langle u \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u \, \rho(u) \, du$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(u)\, du = 1 = c_0 \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(b - (u-u_0)^2)\, du =$$

$$= 2c_0 \int_0^{u_0} du = 2c_0 u_0 = 1.$$

Звідси маємо $\Rightarrow c_0 = \frac{1}{2u_0}$

$$\langle u \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2u_0} u \, \Theta[b - (u-u_0)^2]\, du =$$

$$= \frac{1}{2u_0} 2 \int_0^{u_0} u \, du = \frac{u_0^2}{2u_0} = \frac{u_0}{2}$$

$$[\langle u \rangle]^2 = \frac{u_0^2}{4}$$

$$\langle u^2 \rangle = \frac{1}{2u_0} 2 \int_0^{u_0} u^2 \, du = \frac{u_0^3}{3u_0} = \frac{u_0^2}{3}$$

$$\langle (\Delta u)^2 \rangle = \langle u^2 \rangle - [\langle u \rangle]^2 =$$

$$= \frac{u_0^2}{3} - \frac{u_0^2}{4} = u_0^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = u_0^2 \left(\frac{4-3}{12} \right) = \frac{u_0^2}{12}$$

Відповідь:

$$\langle (\Delta u)^2 \rangle = \frac{u_0^2}{12}$$

Контрольна робота №1
з статистичної фізики
студентки медичної радіофізики
Гайдар Вікторії

22.03.13

27. Густина ймовірності деякої величини „x" дається розподілом $\rho(x) = Cx^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}}$. Знайти константу нормування C та $\langle \Delta x^4 \rangle$

1). З умови нормування

$$\int \rho(x)\,dx = 1$$

$$C\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}}dx = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{3/2}}\cdot C = 1 \quad \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, a^3 C = 1 \Rightarrow$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, отже $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{d\alpha}e^{-\alpha x^2}dx = \frac{d}{d\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{3/2}}$, у нас $\alpha = \frac{1}{a^2}$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{2}{\sqrt{\pi}\, a^3}}$$

2). $\langle \Delta x^4 \rangle = \langle (x-\bar{x})^4 \rangle = \langle x^4 \rangle - 2\langle x^3 \bar{x} \rangle + 3\langle x^2 (\bar{x})^2 \rangle - 2\langle x(\bar{x})^3 \rangle + \langle (\bar{x})^4 \rangle$

Оск. густина розподілу у нас симетрична ф-ція, то $\langle \bar{x} x^3 \rangle = 0$ і $\langle x(\bar{x})^3 \rangle = 0$, оскільки x, x^3 - непарні

$\cancel{\langle x^4 \rangle =}$

$\langle x \rangle = 0$ отже $\langle \Delta x^4 \rangle = \langle x^4 \rangle$ в нашому випадку

$$\langle x^4 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot c \cdot x^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = c\int_{-\infty}^{+\infty} x^6 \cdot e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{3/2}} \qquad \alpha = \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx\right) = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{3/2}}\right), \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{5/2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^6 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{15}{8}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{7/2}}$$

$$\langle x^4 \rangle = \frac{15}{84}\frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{\sqrt{\pi}}\, a \cdot \frac{74\, 2}{\sqrt{\pi}\, a^3} = \frac{15a^4}{4}$$

Отве

$$\boxed{\langle \Delta x^4 \rangle = \frac{15a^4}{4}}$$