1. Чи може функція $F(u)=\dfrac{1}{1+u^2}$ бути функцією розподілу випадкової змінної, що змінюється у межах а) (-∞;+∞), б) (-∞;0], в) [0; +∞) ?

2. Знайти густину розподілу випадкової змінної U та ймовірність Prob{$3<U\le 6$}, якщо функція розподілу задана такими співвідношеннями:

а) $F(u)=\begin{cases}0, & u<0,\\ u, & 0\le u<1,\\ 1, & u\ge 1.\end{cases}$ б) $F(u)=\begin{cases}0, & u<0,\\ \dfrac{u^2}{25}, & 0\le u<5,\\ 1, & u\ge 5.\end{cases}$

3. Покажіть, що для дисперсії випадкової змінної U справедливе співвідношення $\sigma^2=\langle u^2\rangle-\langle u\rangle^2$

4. Випадкова змінна U рівномірно розподілена у інтервалі [0;1]. Визначити середнє значення, середній квадрат та дисперсію U.

5. Функція розподілу випадкової змінної

$$F(u)=\begin{cases}0, & u<u_0,\\ 1-\dfrac{u_0^3}{u^3}, & u>u_0\end{cases}$$

Визначити середнє значення, середній квадрат та дисперсію U.

6. Функція розподілу випадкової змінної u має вигляд:

$$F(u)=\begin{cases}1, & u\ge a,\\ A+B\arcsin\dfrac{u}{a}, & -a<u<a,\\ 0, & u\le -a.\end{cases}$$

Визначити:

а) при яких значеннях A і B дана змінна неперервна;

б) ймовірність того, що випадкова змінна u знаходиться у межах (-a/2, a/2);

в) густину ймовірності випадкової змінної u.

7. Густина розподілу випадкової величини u дорівнює:

$$p(u) = Au^2 \exp(-ku), \quad k > 0, \quad 0 \le u < \infty.$$

а) Знайдіть A.
б) Визначте функцію розподілу випадкової величини u.
в) Обчисліть імовірність того, що випадкова величина u попадає в інтервал (0,1/k).

8. Густина розподілу амплітуд описується співвідношенням

$$p_A(a) = \frac{a}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right), \qquad a \ge 0$$

Визначити середню амплітуду та ймовірність того, що випадково взята амплітуда виявиться більшою за середню.

9. Густину розподілу випадкової змінної U задано співвідношенням $p_U(u) = \frac{1}{2}\exp(-u)$. Визначити дисперсію U. Знайти характеристичну функцію цього розподілу.

10. Показати, що моменти довільного порядку для нормальної змінної u з нульовим середнім та відомою дисперсією σ^2 дорівнюють:

$$\left\langle u^{(2k+1)} \right\rangle = 0, \qquad k = 0,1,\ldots$$

$$\left\langle u^{2k} \right\rangle = \frac{(2k)!}{2^k k!}\sigma^{2k}$$

11. Випадкові змінні u, v визначаються як u=cos(θ), v=sin(θ). Визначити коефіцієнт кореляції змінних u, v, якщо θ - випадкова змінна, рівномірно розподілена у інтервалі 1) [0,π]; 2) [0,π/2].

12. Знайти загальний вираз для дисперсії суми N корельованих змінних u_n з відомими середніми, дисперсіями та коефіцієнтами кореляції γ_{mn}. Розглянути окремі випадки: 1) некорельованих змінних з однаковими дисперсіями; 2) змінних з однаковими дисперсіями, що мають також однакові коефіцієнти взаємної кореляції: $\gamma_{mn}=\gamma$; $m \ne n$; $m,n=1,2,\ldots N$.

13. u, v – корельовані сумісно гаусівські змінні із нульовими середніми, однаковими дисперсіями σ^2 та коефіцієнтом кореляції γ. Визначити дисперсію змінної u за умови, що $v=v_0$

14. Покажіть, що характеристична функція суми статистично незалежних випадкових змінних дорівнює добутку характеристичних функцій цих змінних.

15. Покажіть, що сума двох гаусівських змінних є гаусівською змінною. Розгляньте випадки некорельованих та корельованих змінних.

16. Дано n незалежних випадкових змінних $u_1,\ldots,u_N$, кожна з яких підкоряється розподілу Коші:

$$p(u_i)=\frac{1}{\pi\beta\left[1+\left(\frac{u}{\beta}\right)^2\right]}.$$

Довести, що випадкова змінна v

$$v=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}u_i$$

підкоряється розподілу Коші при всіх N. Проаналізуйте цей результат з точки зору центральної граничної теореми.

17. Статистично незалежні випадкові змінні u_i мають густину розподілу $p(u_i)$:

$$p(u_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{3}\sigma}, & |u_i|\le\sqrt{3}\sigma,\\ 0, & |u_i|>\sqrt{3}\sigma\end{cases}$$

Знайти густину розподілу випадкової змінної $v_{(2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(u_1+u_2)$.

18. Дано дві випадкові нормальні змінні (u_1,u_2), що мають нульові середні та однакові дисперсії σ^2. Розглянути перетворення повороту:

$$\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}.$$

Знайти: 1) середні значення та дисперсії змінних v_i;

2) коефіцієнт кореляції γ_v;

3) сумісну густину розподілу $p(v_1,v_2)$.

19. Довести стаціонарність і ергодичність випадкового процесу $U(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, де A, ω=const, φ - рівномірно розподілена в інтервалі $[0;2\pi]$.

20. Знайти кореляційну функцію 2 порядку для випадкового процесу виду

$$U(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$$

де ω=const, φ - рівномірно розподілена в інтервалі $[0,2\pi]$, а амплітуда A рівномірно розподілена в інтервалі $[0,L]$.

21. Нехай випадковий процес $U(t)$ задано функцією

$$U(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$$

де ω=const, а амплітуда і фаза є статистично незалежними випадковими змінними, причому φ - рівномірно розподілена у інтервалі $[0,2\pi]$, а амплітуда A має густину розподілу

$$P(A)=\delta(A-1)+\delta(A-2)$$

Знайти: 1) густину розподілу $p(u)$;

2) середнє значення та дисперсію змінної $U(t)$.

22. Стаціонарний випадковий процес $u(t)$ з відомою кореляційною функцією та спектральною густиною потужності затримується на час T і додається до початкового процесу. Знайти кореляційну функцію і спектр суми.

23. Знайти кореляційну функцію похідної випадкового процесу $u(t)$:

$$v(t)=du/dt$$

Визначити спектральну густину процесу $v(t)$, якщо $u(t)$- стаціонарний випадковий процес із спектральною густиною $S(\nu)$.

24. Знайти імпульсний відгук і передаточну функцію диференціюючої RC-ланки і визначити, за яких умов вона може розглядатись як апроксимація для ідеальної лінійної диференціюючої ланки.

25. Знайти спектр випадкового процесу на виході диференціюючої RC-ланки, якщо на виході діє випадковий процес з кореляційною функцією

$$G(\tau) = exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_0}\right)$$

Визначити дисперсію процесу на виході.

26. На вході інтегруючого пристрою діє стаціонарний випадковий процес $u(t)$ з нульовим середнім і кореляційною функцією $G_u(\tau)$. Визначити кореляційну функцію $G_v(\tau)$ процесу

$$v(t) = \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} u(t')dt'$$

Знайти спектральну густину процесу на виході, якщо $u(t)$ — білий шум.

27. Сигнал $r(t)$ має вигляд $r(t) = f(t) + n(t)$, де

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{E}}{T}, & 0 \le t \le T \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

а $n(t)$ - білий нормальний шум із спектральною густиною потужності $S_n(\nu) = \dfrac{N_0}{2}$.

Детектування сигналу здійснюється шляхом його інтегрування на інтервалі часу T_i. Визначити, як залежить відношення сигнал/шум від часу інтегрування. Під відношенням сигнал/шум слід розуміти величину

$$C/Ш = \left(\int_0^{T_i} f(t)dt\right)^2 \Bigg/ \left\langle\left(\int_0^{T_i} n(t)dt\right)^2\right\rangle$$

28 Використовуючи теорему Прайса, знайти кореляційну функцію випадкового процесу на виході нелінійної системи з характеристикою $F(u)$, якщо на вході діє нормальний випадковий процес з відомою кореляційною функцією.

$$F(u) = \begin{cases} u, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0. \end{cases}$$

29 Використовуючи теорему Прайса, знайти кореляційну функцію випадкового процесу на виході нелінійної системи з характеристикою $F(u)$, якщо на вході діє нормальний випадковий процес з відомою кореляційною функцією.

$$F(u) = \exp(u)$$