Тема 1 Про числові множини

Позначення:

N – натур. числа

N_- – числа, протилежні N

$Z = N_- \cup \{0\} \cup N$

Q – рац. числа

Раціональним числом на-ся число, яке можна представити у вигляді відношення двох цілих чисел. Р. числа представляються у скінченними, періодичними нескінч. дробами

J – ірраці. числа

„J" числом на-ся число, яке не можна представити у вигляді відношення.

Приклад: Покажемо, що $\sqrt{2} \in J$?

Супр: Нехай $\sqrt{2} \in Q \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{m}{n}$, де $m, n \in N$, причому дріб є нескоротним (m, n не мають сп. множ.). З рівності слідує

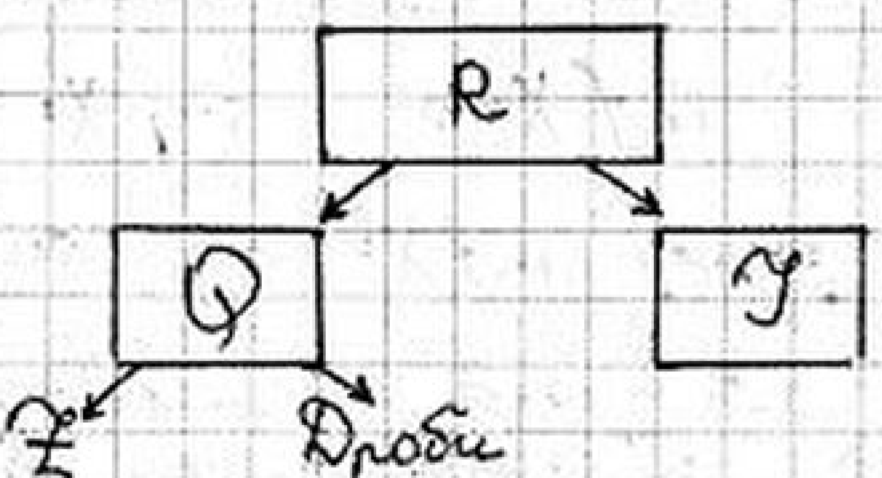
$$m = \sqrt{2}n$$
$$m^2 = 2n^2 \Rightarrow m = 2k$$
$$4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \to n = 2l$$

Протиріччя!

Ірраці. числа представляються нескінч. десятковими неперіод. дробами $\mu = 1{,}1010010001 0000\ldots \in J$

Дійсні числа: $R \in Q \cup J$.

Структура числових множин:



Основні властивості множини дійсних чисел

1) Лінійна впорядкованість R. $\forall x, y \in R$ або $x<y$, або $y<x$, або $x=y$

2) Властивість щільності R $\forall x, y \in R$ $x<y$ $\exists$ хоча б одне, а отже і безліч, дійсне, навіть раціональне число r, таке що $x<r<y$

$r = \frac{1}{2}(x+y)$.

3) Аксіома Архімеда $\forall x \in R$ $\exists n \in N$: $n > x$ (Існує число n, що більше за x).

4) Властивість повноти R Нехай множини X, Y є непорожніми; $X, Y \subset R$, причому кожне число з X не перевищує кожне число Y: $x \le y$ $\forall x \in X; \forall y \in Y$. Тоді існує таке число c, що $c \in R$ і $x \le c \le y$.

Зауваження: влас-ті (1)-(3) мають місце і для множини чисел раціональних; (4) – не виконується.

Приклад: $X = \{x \in Q : x \le 0 \vee x > 0 : x^2 < 2\} \neq \emptyset \subset Q$

$Y = \{y \in Q : y > 0 : y^2 > 2\} \neq \emptyset \subset Q$

$x \le y \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y$

Довести, що не існує $c \in Q$, щоб $x \le c \le y \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y$

Обмежені числові множини.
Точні межі множин

Озн. 1 Множ-на X на-ся обмеженою зверху (знизу), якщо $\exists M (m)$: $x \le M$ $(x \ge m)$ $\forall x \in X$, де M – верхня межа; m – нижня межа.

Озн. 2 Мн-на X на-ся обмеженою, якщо вона обмежена знизу і зверху: $m \le x \le M \quad \forall x \in X$ $(|x| \le r \ \forall x \in X)$.

Озн. 3 Найменша (якщо існує) з усіх верхніх меж X на-ся точною верхньою межею. Познач. $\sup X = M$

Озн. 4 Найбільша (як існує) з усіх нижніх меж X на-ся точною нижньою. Поз. $\inf X = M$

Озн. 5 Мн-на X на-ся необмеженою зверху, якщо $\forall n \in N$ $\exists x_n \in X$: $x_n > n \overset{def}{\Longleftrightarrow} \sup X = +\infty$

Озн. 6 Мн-на X на-ся необмеженою знизу, якщо $\forall n \in N$ $\exists x_n \in X$: $x_n < -n \Longleftrightarrow \inf X = -\infty$

Приклад:

а) $X = (0; 3]$ – обм. $\inf X = 0$; $\sup X = 3 = \max X$

б) $X = (-\infty; 3)$ – обм. зверху $\inf X = -\infty$; $\sup X = 3$

Теорема Больцано: Кожна обмежена зверху (знизу) непорожня множина дійсних чисел X має точну верхню (нижню) межу.

Доведення: X – обм. зверху. Y – мн. усіх верхніх меж. Справедливо, що $x \le y \quad \forall x \in X$ і $\forall y \in Y$. За властивістю повноти $\exists\, c \in R$, таке що $x \le c \le y$, тобто c – найменша з усіх верхніх меж; $c = \sup X$.

Еквівалентні означення точних меж:

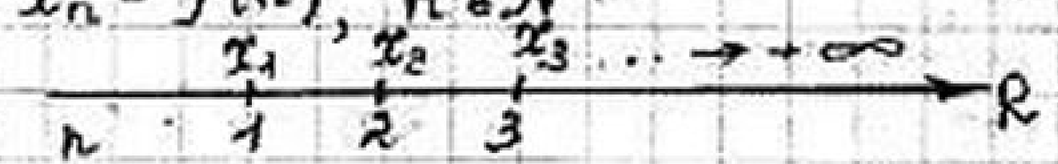
$$\sup X = M^* \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 1) x \le M^* \\ 2) \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon > M^* - \varepsilon \end{cases}$$

$$\inf X = M^* \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 1) x \ge M^* \ \forall x \in X \\ 2) \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in X \ \ x_\varepsilon < M^* + \varepsilon \end{cases}$$

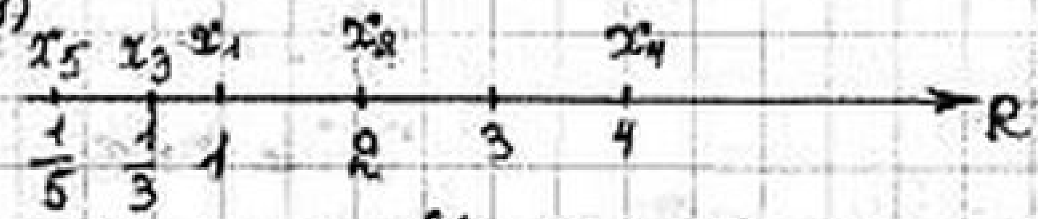
Тема 2 Теорія границь. Числові послідовності

Озн 1. Числовою послідовністю на-ся функція, визначена на множині натур. чисел. $x_n = f(n)$, $n \in N$ $\quad \lim x_n \to \infty$

Приклади: а) $x_n = n$

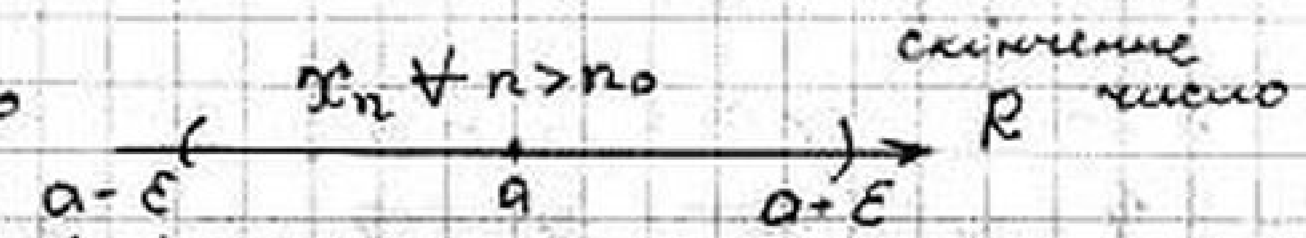


б) $x_n = n^{(-1)^n}$ $\quad \nexists \lim x_n$



в) $x_n = \frac{1}{n} \to 0 \qquad \lim x_n = 0.$

Озн 1 Границя послідовності x_n $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = const\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0,$ $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N: \ |x_n - a| < \varepsilon \ \forall n > n_0.$ $\quad (a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \ \forall n > n_0)$



Якщо послідовність має скінченну границю, то вона на-ся збіжною.

Озн 2 1) $\lim x_n = +\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall E > 0 \ \exists n_0(E) \in N: x_n > E \ \forall n > n_0.$

2) $\lim x_n = -\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall E > 0 \ \exists n = n_0(E) \in N: x_n < -E \ \forall n > n_0.$

Послідовність на-ся незбіжною (розбіжною) якщо вона не має границі, або границя є $\pm\infty$.

Знаходження границь послідовностей за означенням

Приклад 1. Довести, що $\lim \frac{2n-1}{n+3} = 2$ (?)

За Озн. 1 маємо: $\left|\frac{2n-1}{n+3} - 2\right| = \left|\frac{2n-1-2n-6}{n+3}\right| = \left|\frac{7}{n+3}\right| = \frac{7}{n+3} < \varepsilon$

$n + 3 > \frac{7}{\varepsilon}$

$n > \frac{7}{\varepsilon} - 3 \qquad n_0 = \left[\frac{7}{\varepsilon} - 3\right]$

Приклад 2 $\quad \lim \frac{\sin n}{n} = 0$ (?) $\qquad \left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| < \varepsilon$

Приклад 3 $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ (a > 0) \qquad (0 < a < 1)$ - самост.

$|x_n - 1| < \varepsilon \quad n > n_0$

$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$

$\sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$

$\frac{1}{n} \lg a < \lg(1+\varepsilon)$

$\frac{1}{n} < \frac{\lg(1+\varepsilon)}{\lg a} \qquad n > \frac{\lg a}{\lg(1+\varepsilon)} \qquad n_0 = \left[\frac{\lg a}{\lg(1+\varepsilon)}\right]$

Приклад 4 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha} = +\infty \quad (>0)$ $\quad x_n > E \;\forall n > n_0$ $\quad$ д/з. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\alpha} = 0$

$$n^{\alpha} > E \qquad n > E^{\frac{1}{\alpha}} \qquad n_0 = [E^{\frac{1}{\alpha}}]$$

Приклад 5 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (?)

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \mathcal{E} \;\forall n > n_0 \;?$$

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \mathcal{E} \quad (*)$$

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \mathcal{E}$$

Зробимо перетворення:

$$n = (\sqrt[n]{n})^n = (1 + \sqrt[n]{n} - 1)^n = C_n^1(\sqrt[n]{n} - 1) + C_n^2(\sqrt[n]{n}-1)^2 + \ldots + 1 >$$

$$> \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \rightarrow$$

$$(\sqrt[n]{n} - 1)^2 < \frac{2}{n-1}$$ Перейдемо до (*)

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \mathcal{E}$$

Зауваження: в теорії границь розрізняють два класи задач: $\widetilde{I}$ - границю знаходять одразу

$\widetilde{II}$ (Невизначеності) – наперед нічого не можна сказати про границю даного виразу (індивід. підхід)

Визначені ситуації	Невизначеність
	Існує рівно 7 штук
1. $(+\infty + \infty) = +\infty$ Два доданки $\to +\infty$, і сума $\to +\infty$	$\widetilde{I}$ $(\infty - \infty)$
2. $(-\infty - \infty) = -\infty$	$\widetilde{II}$ $(0 \times \infty)$
3. $(const \pm \infty) = \pm\infty$	
4. $\left(\frac{const}{\infty}\right) = 0$	$\widetilde{III}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$
5. $\left(\frac{const \neq 0}{0}\right) = \infty$	$\widetilde{IV}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$
6. $(+\infty^{+\infty}) = +\infty$	$\widetilde{V}$ (1^{∞})
7. $(+\infty^{-\infty}) = 0$	$\widetilde{VI}$ (∞^0)
8 $(+\infty)^{\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha < 0 \end{cases}$	$\widetilde{VII}$ (0^0)
9 $a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ 0, & 0 < a < 1 \end{cases}$	

Осн. задачею теорії границь є розкриття невизначеностей

Основні властивості послідовностей, що мають границі

Теорема 1 Збіжна послідовність має єдину границю

Теорема 2 Збіжна послідовність обмежена

$$x_n \to a = const \iff$$
$$a - \mathcal{E} < x_n < a + \mathcal{E} \quad \forall n > n_0$$

$$x_{n-1} \quad x_{n_0} \quad (\quad x_n \ \forall n>n_0 \quad) \quad x_1, \dots \quad M$$
$$a-\varepsilon \qquad a+\varepsilon$$

Теорема 3 (Про перехід до границі в рівностях і не-ах)

Нехай $\forall n>n_1 \quad x_n \le y_n \quad \left.\begin{array}{l}\lim x_n = a = const\\ \lim y_n = b = const\end{array}\right\} \Rightarrow \lim x_n \le \lim y_n$

$a \le b$.

Дов. Супротивне $a>b$ $\quad \varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$

$$a-\frac{a-b}{2} < x_n < a+\frac{a-b}{2} \quad \forall n>n_1$$

$$b-\frac{a-b}{2} < y_n < b+\frac{a-b}{2} \quad \forall n>n_3.$$

Виберемо n_0, таке що $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. $\forall n>n_0$

$$a-\frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}, \quad b+\frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

$x_n > y_n$, що є суперечністю

Зауваження: при переході до границі в строгій нерівності знак може перейти в знак рівності.

Приклад: $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} \quad n>1$

$$\lim \frac{1}{n^2} = \lim \frac{1}{n} = 0.$$

Теорема 4 (С/р) Нехай $\lim x_n = const$, $\lim y_n = const$ $\quad a<b$.

Тоді $\exists\ n_0 \in N$, $x_n < y_n \ \forall n>n_0$.

Теорема 5 (Про відмежування від 0) Нехай $\lim x_n = a = const \ne 0$.

Тоді $\exists\ r>0: \ |x_n| \ge r > 0 \quad \forall n>n_0$

Теорема 6 (Про арифметичні операції над зб. посл.)

Нехай $\lim x_n = a = const$

$\lim y_n = b = const$

Тоді:

1) $\lim (x_n + y_n) = a+b$
2) $\lim kx_n = ka \quad (k - const)$
3) $\lim x_n y_n = ab$
4) $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

Це 4 визначених ситуації теорії границь.

Доведення

4) $\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon \ \forall n>n_0 \ (?)$

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{bx_n - ay_n}{by_n}\right| = \frac{|bx_n - ab + ab - ay_n|}{|b|\cdot|y_n|} =$$

$$= \frac{|b(x_n-a) - a(y_n-b)|}{|b|\cdot|y_n|} \le \frac{|b|\,|x_n-a| + |a|\cdot|y_n-b|}{|b|\cdot|y_n|} = \frac{|x_n-a|}{|y_n|} + \frac{|a|}{|b|}\frac{|y_n-b|}{|y_n|} <$$

$|y_n| \ge r > 0 \ \forall n>n_1$

$|x_n - a| < \frac{\varepsilon r}{2} \ \forall n>n_2$

$|y_n - b| < \frac{|b|}{|a|}\varepsilon \cdot r \frac{1}{2} \ \forall n>n_3$

$n_0 = \{n_1, n_2, n_3\}$

$$< \frac{\frac{\varepsilon}{2}r}{r} + \frac{|a|}{|b|}\cdot\frac{\frac{|b|}{|a|}\varepsilon \cdot r\frac{1}{2}}{r} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\forall n>n_0$

Теорема 7. (Про двох міліціонерів)

Якщо $\forall n > n_1: x_n \le z_n \le y_n$, $\lim x_n = a$, $\lim y_n = a$, то і $\lim z_n = a$.

Доведення 1) $a = const$

$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon \quad \forall n > n_2$

$a-\varepsilon < y_n < a+\varepsilon \quad \forall n > n_3 \Rightarrow a-\varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < a+\varepsilon$

$x_n \le z_n \le y_n \quad \forall n > n_1$

$\Downarrow$

$|z_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > n_0$

Теорема (Вейєрштраса) Про границю монотонної послідовності

1) Якщо пос-ість обмежена зверху і монот. $\uparrow$, то $\exists \lim x_n = \sup\{x_n\}$

2) $x_n \downarrow$ і обм. знизу, то $\exists \lim x_n = \inf\{x_n\}$

3) $x_n \uparrow$ і необм. зв., то $\exists \lim x_n = +\infty$

4) $x_n \downarrow$ і необм. зн., то $\exists \lim x_n = -\infty$

Доведення

1) $X = \{x_n\}$ – обм. зверху (За Т. Больцано) $\exists \sup X = a$

$$\begin{cases} x_n \le a & \forall n \in N \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists x_{n_0}: x_{n_0} > a - \varepsilon \end{cases}$$

$$\forall n > n_0 \Rightarrow \begin{cases} x_n \ge x_{n_0} > a - \varepsilon \\ x_n \le a < a + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

Друга важлива (класична) границя

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ де $e = 2{,}718281828459 0\ldots$

Доведення існування границі. Нерівність Бернуллі $(1+x)^n \ge 1+nx$

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$x_n \le y_n \quad (\forall n \in N)$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{(n+2)^{n+1} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}(n+1)^n} = \frac{n+1}{n}\frac{(n^2+2n)^{n+1}}{((n+1)^2)^{n+1}} =$$

$$= \frac{n+1}{n}\frac{((n+1)^2-1)^{n+1}}{((n+1)^2)^{n+1}} = \frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \underset{\text{Нер. Бернуллі}}{>} \frac{n+1}{n}\left(1-\frac{n+1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1} = 1$$

Аналогічно і y_n. Тобто x_n і (y_n) монотонно зростає (спадає)

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < y_n < \ldots < y_2 < y_1$$

З цього випливає, що x_n обмежена зверху, а y_n – знизу.

$x_n < y_n$, отже

$$\underset{a}{\lim x_n} \le \underset{b}{\lim y_n} = \lim \overset{\nearrow a}{x_n} \left(1+\overset{\nearrow 1}{\frac{1}{n}}\right) = a$$

$$a = b \overset{def}{\Longleftrightarrow} e.$$

Наслідок II границі

1) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

2) $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

Під послідовності. Часткові границі

Розглянемо послідовність $\{x_n\}$: X_n і $\forall\ n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$

Послідовність X_{n_k} на-ся підпослідовність X_n.

x_n – підпослідовність самої себе.

Приклад: $x_n = n^2$, підпослідовності: $x_{2n} = 4k^2$, $x_{3k} = 9k^2$

Озн. частковою границею послідовності X_n називають таке число $C\ (\pm\infty)$, яке є границею деякої підпослідовності X_n.

Найбільша з усіх часткових границь пос-ті X_n на-ся верхньою границею ($\overline{\lim}\, X_n$). Найменша на-ся нижньою ($\underline{\lim}\, X_n$).

Приклад: $x_n = (-1)^n$ $x_{2n} = 1$ $x_{2n+1} = -1$ $\overline{\lim}\, x_n = 1$, $\underline{\lim}\, x_n = -1$

$x_n = \frac{1}{n}$ $x_{2n} = \frac{1}{2n}$ $x_{4n} = \frac{1}{4n}$ ... $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = 0$.

Теорема: Для того, щоб послідовність X_n була збіжною, необхідно, щоб $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = a = const$.

$\exists \lim X_n \Longleftrightarrow \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = a$

Основні леми математичного аналізу

Лема 1 (Принцип Коші-Кантора; лема про вкладені відрізки).

Нехай виконуються умови: $[a_1, b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \ldots \supset [a_n; b_n] \supset \ldots$ (1)

$\lim(b_n - a_n) = 0$.

Тоді $\exists!\ c$, спільне для всіх відрізків

$a_n \le c \le b_n$ $\forall n \in N$

Доведення: Нехай $X = [a_n]$ – множина лівих кінців

$Y = [b_n]$ – множина правих кінців

$a_n < b_n$ $\forall n, m \in N$. За властивістю повноти $\exists c \in R$: $a_n \le c \le b_n$ $\forall m, n$. Доведемо єдиність c $\exists c'$:

$$\left.\begin{array}{l} a_n \le c' \le b_n \\ a_n \le c \le b_n \end{array}\right\} \Rightarrow |c - c'| \le b_n - a_n \to 0 \Rightarrow |c - c'| = 0 \Rightarrow c = c'$$

Лема 2 (Теорема Больцано-Вейєрштраса)

З будь-якої обмеженої числової послідовності X_n можна виділити збіжну підпослідовність. Це справедливо і $\forall$ обмеженої нескінченної числ. п.

Застосуємо процес Больцано. Поділимо $[a; b]$ пополам і позначимо $[a_1; b_1]$ ту половину, яка містить нескінченну множину елементів з X. Далі $[a_1; b_1]$ поділимо пополам і позначимо $[a_2; b_2]$ ту половину, яка =//=. На n-му кроці $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \ldots \supset [a_n; b_n]$

Виберемо
$$x_1 \in [a_1; b_1] \cap X$$
$$x_2 \in [a_2; b_2] \cap X \qquad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0 \quad n \to \infty.$$
$$\ldots$$
$$x_n \in [a_n; b_n] \cap X \qquad \exists!\ c: \ a_n \le c \le b_n$$
$$|x_n - c| \le b_n - a_n \to 0.$$

Критерій Коші для збіжності числової послідовності

Озн. Числ. посл. x_n наз-ся фундаментальною, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N$:
$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall m, n > n_0$$
$$\Updownarrow$$
$$|x_{m+p} - x_m| < \varepsilon \ \forall m > n_0 \ \forall p \in N.$$

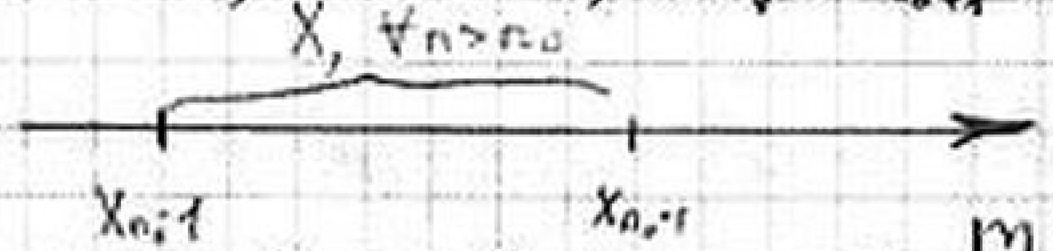
Критерій Коші. Щоб послідовність була збіжною необхідно і достатньо, щоб x_n була фундаментальна.

Дов:

1) Нехай x_n – збіжна $\Rightarrow x_n \to a = const$
$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \le \underbrace{|x_n - a|}_{\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a - x_m|}_{\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon,$$
$\forall\ n, m > n_0$. Отже x_n – фундаментальна

2) Нехай x_n – фундаментальна $\Rightarrow x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon \quad \forall n, m > n_0$

Нехай $\varepsilon = 1$, $m = n_0 + 1$, тоді $x_{n_0+1} - 1 < x_n < x_{n_0+1} + 1 \quad \forall n > n_0$.



Позначимо $M = \max\{x_{n_0+1} + 1; x_1 \ldots x_{n_0}\}$
$m = \min\{x_{n_0+1} - 1; x_1, \ldots x_{n_0}\}$

$m \le x_n \le M \ \forall n \in N \Rightarrow x_n$ – обмежена.

Якщо x_n – обмежена, то за т. Больцано – Вейєрштраса $x_{n_k} \to a = const$

Маємо: $|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \le \underbrace{|x_n - x_{n_k}|}_{\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|x_{n_k} - a|}_{\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$, що і т.д.

Приклад 1) $x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$ Довести, що x_n – збіжна.
$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}\right| =$$
$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \ldots - \frac{1}{n+p+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$
Посл. фундаментальна, отже збіжна.

2) Довести, що $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ розбіжна.
$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} > \frac{p}{\sqrt{n+p}} = \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \to +\infty$$
(Вибрано $p = n$). Послідовність не фундаментальна, а отже розбіжна.

За допомогою теорії границь можна довести такі співвідношення:

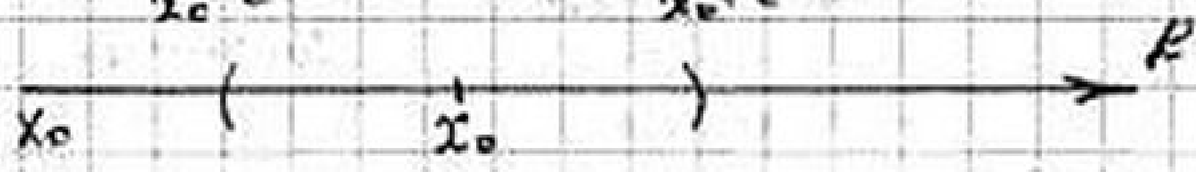
1) $\ln^\alpha n \ll n^\varepsilon \ll a^n \ll n! \ll n^n$, $n\to\infty$ $\quad \forall \alpha>0\ \forall\varepsilon>0\ \forall a>1$

$$\frac{\ln^\alpha n}{n^\varepsilon}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0;\quad \frac{n^\varepsilon}{a^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0;\quad \frac{a^n}{n!}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0;\quad \frac{n!}{n^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Границя функції в точці

Припустимо, що ф-я $f(x)$ визначена в деякому околі т. x_0 крім, можливо самої точки x_0

$U_r(x_0)=(x_0-r;\ x_0+r)$ r-окіл т. x_0

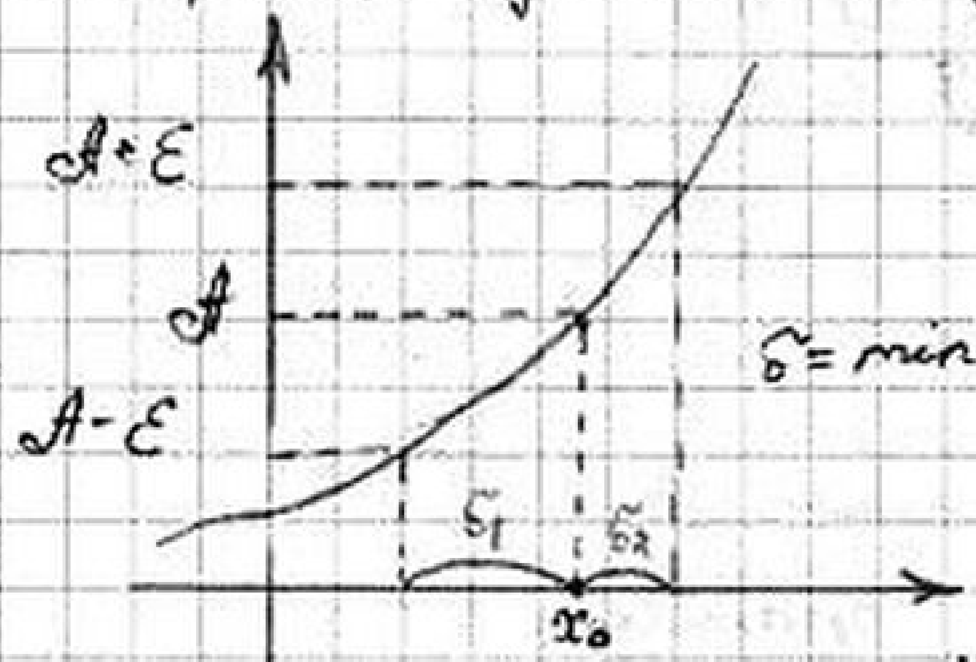


$\mathring{U}_r(x_0)=U_r(x_0)\setminus\{x_0\}$ - проколотий окіл

Означення границі ф-ї у розумінні Коші:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ $\quad x_0=const,\ A=const$ $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon,x_0,f)>0$

$|f(x)-A|<\varepsilon\ \ \forall x: 0<|x-x_0|<\delta$. (Наведене озн. говорить про те, що відстань між значеннями $f(x)$ і A може бути як завгодно малими, якщо значення x досить близьке до x_0).

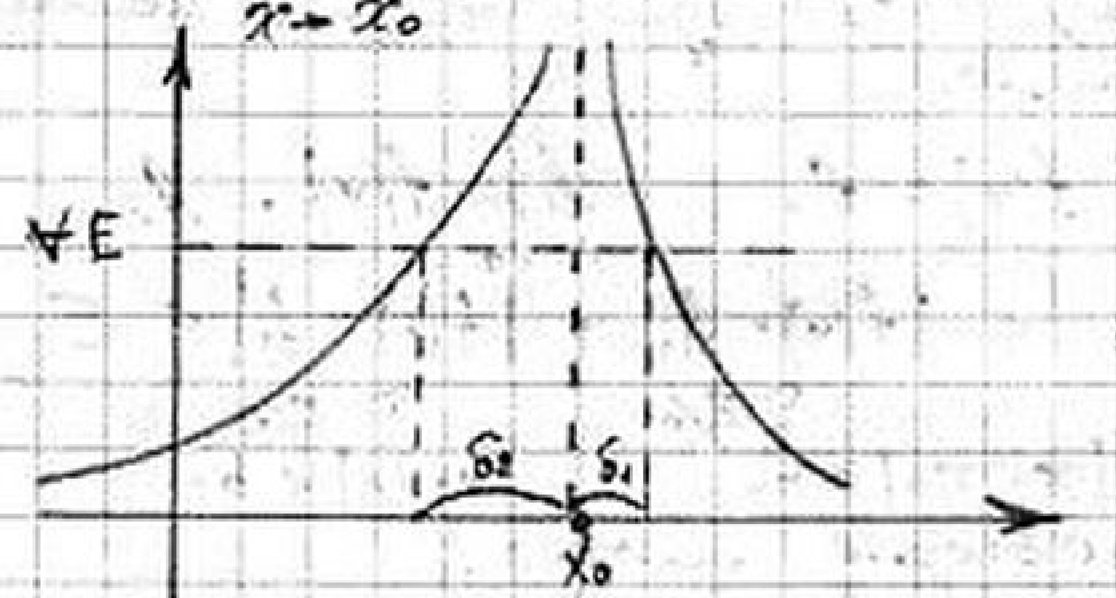


$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$

$\forall x: x_0-\delta<x<x_0+\delta$, $x\neq x_0$

$\delta=\min\{\delta_1;\delta_2\}$ $\quad x\in\mathring{U}_\delta(x_0)\Rightarrow f(x)\in\mathring{U}_\varepsilon(A)$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall E>0\ \ \exists\delta=\delta(E,x_0,f(x))>0: f(x)>E$
$\forall x: 0<|x-x_0|<\delta$.



С/р

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A=const$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A=const$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Означення границі ф-ї в розумінні Гейне

$$\lim_{x\to x_0} = A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \underset{(x_n \neq x_0)}{x_n \to x_0} \Rightarrow f(x_n) \to A$$

ні! Означення границі ф-ї у розумінні Коші і Гейне еквівалентні!

Приклад: $\exists \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ (Чи існує границя?)

$$x_n' = \frac{1}{\pi n} \to 0 \qquad f(x_n') = \sin\pi n = 0 \to 0$$

$$x_n'' = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n} \to 0 \qquad \text{але } f(x_n'') = \sin(\tfrac{\pi}{2}+2k\pi) \to 1 \quad !$$

Границя не існує!

Поняття про односторонні границі

$$f(x_0+0) \overset{def}{=} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) \qquad f(x_0-0) \overset{def}{=} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} (fx)$$

Умова існування границі ф-ї

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \Longleftrightarrow \exists f(x_0+0),\ \exists f(x_0-0).$$

Приклад: Чи існує границя $\lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$?

$$f(0+) = \lim_{\substack{x\to 0\\ (x<0)}} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$f(0-) = \lim_{\substack{x\to 0\\ (x>0)}} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

Основні теореми для границі функції

Теорема 1 (Про єдиність границі) В одній і тій самій точці ф-я має лише одну границю.

Доведення

Нехай: $\lim_{x\to x_0} f(x) = A_1$; $\lim_{x\to x_0} f(x) = A_2$

Тоді $\underbrace{|A_1 - A_2|}_{const} = |A_1 - f(x) + f(x) + A_2| \le \underbrace{|f(x) - A_1|}_{\substack{\varepsilon/2\\ |x-x_0|<\delta_1}} + \underbrace{|f(x) - A_2|}_{\substack{\varepsilon/2\\ |x-x_0|<\delta_2}} < \varepsilon$

Виходить, що константа якзавгодно мала!

Теорема 2 Якщо $\lim_{x\to x_0} = f(x) = A - const$, то функція обмежена.

Доведення: $\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0: \ A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$$

Теорема 3 (Відмежування від 0)

Якщо границя ф-ї не рівна 0, то $\exists \mathring{U}_\delta(x_0): |f(x)| \geq r > 0$

Теорема 4 (Перехід до нерівностей)

Нехай $\mathring{U}_\delta(x_0)$: $f(x) \leq g(x)$ і $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ - const,
$\exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ - const. Тоді $A \leq B$

Доведення: Супр. Нехай $A > B$. Оберемо таке ε, що
$\varepsilon = \frac{A-B}{2} > 0$. Тоді $A - \frac{A-B}{2} < f(x) < A + \frac{A-B}{2}$ $\forall x: |x-x_0| < \delta_1$

$$B - \frac{A-B}{2} < f(x) < B + \frac{A-B}{2} \quad \forall x: |x-x_0| < \delta_2$$

Виберемо мінімальне δ, щоб виконувались усі оцінки.

$$f(x) > \frac{A+B}{2} \qquad g(x) < \frac{A+B}{2}$$

$f(x) > g(x)$, суперечність.

Теорема 4

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A = const$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = B = const \quad \text{і } A < B$$

$$\exists \mathring{U}_\delta(x_0): \quad f(x) < g(x) \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$$

Теорема 5 (Про арифм. дії над границями)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A = const$$
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = B - const$$

Тоді $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g) = A+B$ $\qquad \lim\limits_{x\to x_0} f\cdot g = A\cdot B$

$\lim\limits_{x\to x_0}(C, f(x)) = CA$ (C-const) $\quad \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \frac{A}{B}$.

Доведення:

За означенням Гейне

Теорема 6 (Про границю проміжної ф-ї)

Нехай $\mathring{U}_{\delta_1}(x_0)$ і $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$

$$\lim_{x\to x_0} \psi(x) = A \qquad \text{тоді} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = A$$
$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = A$$

Зауваження: Метод заміни змінної:

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \begin{bmatrix} u = u(x) \\ x\to x_0 \Leftrightarrow u \to u_0 \\ F(x) = f(u) \end{bmatrix} = \lim_{u\to u_0} f(u) \qquad (*)$$

Якщо ф-я $u = u(x)$ задає взаємоодиозначну залежність між околами x_0, u_0, то якщо існує границя в правій частині, вона рівна в лівій. Якщо нема в правій, то нема і в лівій

Означення неперервності ф-ї
Неперервність елементарних ф-й

Припустимо $f(x)$ визначена в непроколотому околі $U(x_0)$: $\forall x \in U(x_0)$

Ф-ія $f(x)$ на-ся неперервною в точці x_0 коли

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = f(x_0).$$

Теорема: Всі елементарні ф-ї неперервні в кожній точці своєї обл. визначення.

Елементарною фу-ю на-ся функція, яку можна отримати скінченною кількістю арифм. операцій і суперпозицій з основних елементарних.

Основними елементарними є: x^{α} (α-const), a^x ($0<a\neq 0$), $\log_a x$ ($0<a\neq 1$) + тригоном. і обер. тригоном. функції.

Функція на-ся неелементарною, якщо вона не є елементарною.

Перша важлива класична границя

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha} = 1$$

З геометр. міркувань

$$S_{\triangle OMK} < S_{сект.} < S_{\triangle OTK}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\alpha < \frac{1}{2}1^2\alpha < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\, tg\alpha$$

$$\sin\alpha < \alpha < tg\alpha$$

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha} \quad \alpha\to 0.$$

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < 1 \Rightarrow \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$$

Зауваження: I важлива границя застосовується для розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ в тригон. виразах

Наслідки I важливої границі:

1) $\lim_{\alpha\to 0}\frac{tg\alpha}{\alpha} = 1$

2) $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha} = 1$ $\left(\frac{\arcsin\alpha}{\alpha} = \begin{bmatrix}\arcsin\alpha = t\\ \alpha = \sin t\end{bmatrix} = \frac{\sin t}{t}\right)$

3) $\lim_{\alpha\to 0}\frac{arctg\alpha}{\alpha} = 1$

4) $\lim_{\alpha\to 0}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{2}$

Друга важлива границя і її наслідки

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

, де знак ∞ є як „+" так і „-"

Доведення $x = n \in N$ (користаємось озн. Гейне).

$\forall x_n \to +\infty$ $(x_n > 1)$

Маємо: $[x_n] \leq x_n \leq [x_n]+1$ $(*)$

$$\Rightarrow \frac{1}{[x_n]+1} < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{[x_n]} \qquad (+1)$$

$$1+\frac{1}{[x_n]+1} < 1+\frac{1}{x_n} < \frac{1}{[x_n]}+1 \quad (**)$$

Нерівність (**) почленно піднесемо в степінь (*)

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} < \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(\frac{1}{[x_n]}+1\right)^{([x_n]+1)}$$

Теорема про проміжну границю

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]}}_{\to e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)}_{\to 1} \to e$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n+1]}}{\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)} \to e, \text{ що і т. д.}$$

Зауваження II важлива границя розкриває невизначеності (1^{∞}) в степен.-показн. виразах. Наслідки дають можливість розкрити $\left(\frac{0}{0}\right)$ в показн., логар., і степеневих виразах.

Наслідки

1) $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$ 2) $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u} = 1$

3) $\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u} = 1$ 4) $\lim\limits_{u\to 0}\frac{(1+u)^{\alpha}-1}{u} = \alpha$

Приклад $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{\sqrt{2}}-1}{x-1} = \left[\begin{matrix} t=x-1\to 0 \\ x=1+t\end{matrix}\right] = \lim\limits_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\sqrt{2}}-1}{t} = \sqrt{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{n}\ln(n+1) = \lim_{n\to 0}\left(\ln(n+1)\right)^{1/n} =$$

$$= \lim \ln(1+u)^{1/n} = \ln e = e$$

Властивості нескінченно малих і нескінченно великих функцій.

Ф-ія $\alpha(x)$ на-ся неск. м., якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$

$\beta(x)$ на-ся н/в, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}|\beta(x)| = +\infty$

Властивості н/м	Властивості н/в
1) $\left.\begin{matrix}\alpha(x) - н/м \\ \alpha(x)\neq 0 \\ x\neq x_0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\alpha(x)} - н/в$ $\forall E>0 \ \left\|\frac{1}{\alpha(x)}\right\| = \frac{1}{\|\alpha(x)\|} > E$ 2) Сума скінченого числа н/м функцій є н/м. 3) Нехай $\alpha(x) -$ н/м $\varphi(x)$ - обмежена $\|\varphi(x)\| = M$ $\forall x\in U^{0}(x_0)$ Тоді $\alpha(x)\cdot\varphi(x) -$ н/м $\|\alpha(x)\|\cdot\varphi(x) = M\cdot\alpha(x) < E$	1) $\left.\begin{matrix}\beta(x) - н/в \\ \beta(x)\neq 0 \\ x\neq x_0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\beta(x)} - н/м$ 2) Сума скінченого числа н/в функцій одного знаку є н/в ф-я того самого знаку. $\beta_1(x)\to+\infty$; $\beta_2(x)\to+\infty$ $\|\beta_1(x)\|+\|\beta_2(x)\| = \underbrace{\beta_1(x)}_{\frac{E}{2}}+\underbrace{\beta_2(x)}_{\frac{E}{2}} > \frac{E}{2}+\frac{E}{2} > E$ 3) $\beta(x) -$ н/в, $\varphi(x)$: $\|\varphi(x)\| \geq r > 0$ тоді $\beta(x)\cdot\varphi(x) -$ н/в. $\|\beta(x)\varphi(x)\| \geq \|\beta(x)\| r > E$

Для н/м функцій є ще одна властивість:

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ - const, то $f(x) = A + \alpha(x)$.

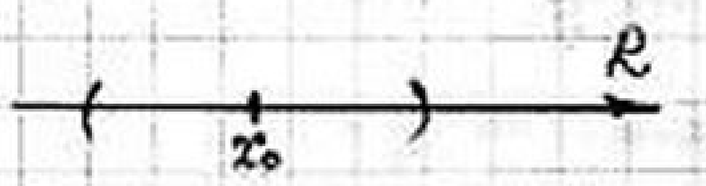
Справедливе і обернене твердження

$$f(x) = A + \alpha(x) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

Асимптотична символіка
(„O"-символіка, символіка Ландау)

*Мова йтиме про порівняння (в граничному розумінні) поведінки двох ф-й в околі т. x_0.

x_0: ($x_0 = \pm\infty$)



$f(x), g(x)$, $x \in \mathring{U}(x_0)$

$g(x) \neq 0$, при $x \to x_0$

I Означення $f = O^*g(x), x\to x_0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f}{g} = A \neq 0$, A - const

Справедливо, що $\frac{O^*(g)}{g} \to A \neq 0$

Приклади: $1-\cos x = O^*(x^2)$, бо $\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$

$10x^2 = O^*(x^2), x\to 0$ (бо $\frac{10x^2}{x^2} \to 10$)

$P_{(n)} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = O^*(x^n)$, $x \to \infty$

(бо $\frac{P(x)}{x^n} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots \to a_0$).

Означення Якщо $f = O^*g(x)$, то кажуть, що f і g одного порядку. Якщо f, g - н/м, то вони є одного порядку малості.

II Означення $f \sim g, x\to x_0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f}{g} = 1$ ($f\sim g \Rightarrow f = O^*(g)$)

Приклад $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \underset{const}{A \neq 0} \Rightarrow f \sim A, x \to x_0$

$\cos x \sim 1, x\to 0$; $\sin x \sim \frac{1}{2}, x \to \frac{\pi}{6}$

Кожна ф-я еквівалентна своїй ненульовій сталій границі.

III $f = o(g), x\to x_0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f}{g} = 0$ $\left(\frac{o(g)}{g} \to 0\right)$

Говорять, що ф-я f є н/м порівняно з ф-ю g коли $x\to x_0$. Якщо f і g - н/м, то кажуть, що f є нескінченно малою вищого порядку малості ніж ф-я g.

$f = o(1), x \to x_0 \Rightarrow f$ - н/м

Приклад: $x^3 = o(x), x\to 0$ $\left(\frac{x^3}{x} = x^2 \to 0, x \to 0\right)$.

$x^m = o(x^n), x \to 0$ і $m > n > 0$.

$1 - \cos x = o(x), x\to 0$ $\left(\frac{1-\cos x}{x}\right) = x \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} \to 0$

IV $f = O(g), x\to x_0$ ($x \in \mathring{U}(x_0)$) $\Longleftrightarrow |f(x)| \le M|g(x)|\ \forall x$

Кажуть, що ф-я f обмежена порівняно з g.

Приклад $x^2 \sin\frac{1}{x} = O(x^2)$

$x \to x_0$ | Основні властивості еквівалентних функцій

1) Якщо $f \to A = const \neq 0 \iff f \sim A$

2) $f \sim f$ 3) $f \sim g \Rightarrow g \sim f$ 4) $f \sim g,\ g \sim \psi \Rightarrow f \sim \psi$.

5) $f \sim f_1,\ g \sim g_1 \Rightarrow fg \sim f_1 g_1;\ \frac{f}{g} \sim \frac{f_1}{g_1}$

З властивості ⑤ випливає:

$$\lim_{x \to x_0} fg = \lim_{x \to x_0} f_1 g_1$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1}{g_1}.$$

7) Якщо $f \sim g \iff f = g + o(g),\ x \to x_0$

Доведення:

$$f \sim g \Rightarrow \lim \frac{f}{g} = 1 \Rightarrow \frac{f}{g} = 1 + \alpha(x)$$

$$\frac{f}{g} = 1 + \alpha(x) \Rightarrow f = g + \underbrace{g\alpha(x)}_{\to o(g)}$$

$$\frac{\alpha(x) g}{g} = \alpha(x) \to 0$$

$$f = g + \alpha(g) \quad (:g) \Rightarrow \frac{f}{g} = 1 + \frac{o(g)}{g} \to 1 \Rightarrow f \sim g$$

Властивості (1)-(7) дають наслідки: (шкала н/м екв. ф-й)

1) $\sin u \sim tg\, u \sim \arcsin u \sim arc\,tg\, u \sim e^u - 1 \sim \ln(u+1) \sim u$; $u \to 0$

2) $1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2},\ u \to 0$ $(1+u)^\alpha - 1 \sim \alpha u,\ u \to 0$.

$$\begin{aligned} \sin u &= u + o(u) & \ln(1+u) &= u + o(u) \\ tg\, u &= u + o(u) & e^u - 1 &= u + o(u) \\ \arcsin u &= u + o(u) & (1+u)^\alpha - 1 &= \alpha u + o(u) \\ arc\,tg\, u &= u + o(u) & 1 - \cos^2 u &= u^2/2 + o(u) \end{aligned}$$

Приклад
$$\lim_{x \to 0} \frac{arc\,tg(2x^2) \ln(1 + \sin^2 3x)}{(\sqrt[3]{1-x^3} - 1)(e^{\sin 5x} - 1)\cos\frac{x+2}{x+1}} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 \cdot 9x^2}{-\frac{1}{3}x^3 \cdot 5x \cdot \cos 2} = -\frac{54}{5\cos 2}.$$

$arc\,tg(2x^2) \sim 2x^2$ $e^{\sin 5x} - 1 \sim \sin 5x \sim 5x$

$\ln(1 + \sin^2 3x) \sim \sin^2 3x \sim (3x)^2 \sim 9x^2$ $\cos\frac{x+2}{x+1} \sim \cos 2$

$(1-x^3)^{1/3} \sim \frac{1}{3}(-x^3)$

Деякі інші властивості асимптотичних символів

1) $o(g) \pm o(g) = o(g)$ (Сума ф-й класу $o(g)$ теж є в класі $o(g)$)

2) $const \cdot o(g) = o(g)$ 4) $M \cdot o(g) = o(g)$, $M \neq 0$.

3) $o(g) \cdot o(g) = o(g^2)$ 5) $f = O^*(g) \Rightarrow o(f) = o(g)$

$O^*(g) \cdot o(g) = o(g^2)$ 6) $O^*(g) + o(g) = O^*(g)$

Доведення $\frac{O^*(g)+o(g)}{g} = \frac{O^*(g)}{g} + \frac{o(g)}{g} \to A$

Приклад: 1) $\sin 2x + x^4 = O^*(x) + O^*(x) = O^*(\sin 2x)$

2) $\begin{matrix} 1-\cos x = O^*(x^2), & x\to 0 \\ e^{x^2}-1 = O^*(x^2), & x\to 0 \end{matrix} \Rightarrow O(x^2) = O(1-\cos x) = O(e^{x^2}-1)$

Еквівалентні означення неперервності ф-ї в точці. Точки розриву функцій і їх класифікація

Означення (Мовою границь)

$f(x)$ – неперервна в т. x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon : |x - x_0| < \delta$.

Означення (Мова приростів)

$|\Delta f(x_0)| < \varepsilon \ \forall |\Delta x| < \delta \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(x_0) = 0$.

Означення (по Гейне) $\forall x_n \to x_0 : f(x_n) \to f(x_0)$

Означення (ліво/правосторонні границі)

$$f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0) \quad *$$

Озн.

Нехай $D(f)$ – область визначення ф-ї $f(x)$. Точка x_0 на-ся межовою точкою області $D(f)$, якщо в будь-якому околі цієї точки є як точки з $D(f)$ так і точки з не $D(f)$.

Приклад $y = \frac{\sin x}{x}$ $D(f) = R \setminus \{0\}$ 0 – межова точка

Означення Точка x_0 на-ся точкою розриву ф-ї f якщо

а) $x_0 \notin D(f)$, але є межевою точкою

б) $x_0 \in D(f)$, але не виконується умова неперервності (умова $*$).

Точки розриву поділяють на два класи:

I клас → точка розриву x_0 на-ся т. розриву I роду, якщо

$$\begin{cases} f(x-0) = const \\ f(x+0) = const \end{cases}$$

Якщо $f(x-0) = f(x+0)$ точка x_0 на-ся усувною точкою розриву

Якщо $f(x-0) \neq f(x+0)$, то x_0 – неусувна т. розриву

Приклад: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ (x<0)}} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{\substack{x\to 0 \\ (x>0)}} \frac{\sin x}{x} = 1$$

т. $x_0 = 1$ – точка усувного розриву

Приклад: $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)$

$f(0-0) = -\frac{\pi}{2}$ $\quad f(0+0) = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ т. $x=0$ – неусувна I роду

$f(1-0) = -\frac{\pi}{2}$ $\quad f(1+0) = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ т. $x=1$ – неусувна I роду

$h(x_0) \overset{def}{=} f(x_0+0) - f(x_0-0)$ – стрибок фун-ї

$h(0) = \pi \qquad h(1) = \pi.$

II клас → Якщо $f(x_0-0)$, або $f(x_0+0)$ не існує чи дорівнює нескінченності, то точка розриву на-ся точкою розриву II роду

Приклад: $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ $\quad f(0-0) = +\infty \quad f(1-0) = -\infty$

$f(0+0) = -\infty \quad f(1+0) = +\infty$

$x=0$; $x=1$ – точки розриву II роду.

Приклад: $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $\quad x=0$

$\nexists \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ $\quad x=0$ – розрив II роду.

Локальні властивості неперервних ф-ій

(Властивості ф-ій в околі точки неперервності)

Теорема 1 Якщо f неперервна в т. x_0, то вона обмежена в деякому околі т. x_0.

Доведення $\forall \varepsilon \ (\varepsilon = 1) \ \exists \delta: |f(x) - f(x_0)| < 1, \ |x - x_0| < \delta$

$$f(x) - 1 < f(x) < 1 + f(x_0)$$

Теорема 2 (Локальна знакосталість)

Якщо f – неперервна в т. x_0 і $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$), то $\exists$ окіл точки x_0 $U_\delta(x_0)$: $f(x) \geq r > 0$ $\quad (f(x) \leq -r < 0)$

$\forall x \in U_\delta(x_0)$.

Доведення $f(x_0) > 0 \quad \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$

$$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \overset{def}{=} r$$

$\forall x: |x - x_0| < \delta$

Теорема 3 (Арифм. дії)

f – непер-на в т. x_0

g – неп-на в т. x_0.

Тоді:

1) $f+g$ – неп. в x_0
2) $c \cdot f$ – неп. в x_0
3) $f g$ – неп. в x_0
4) $\frac{f}{g}$ – неп. в x_0, за умови $g \neq 0$.

Доведення 4) Озн. Гейне: $\forall x_n \to x_0 \Rightarrow \begin{matrix} f(x_n) \to f(x_0) \\ g(x_n) \to g(x_0) \end{matrix} \Rightarrow \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$

Теорема 4 (Неперервність склад. ф-ї)

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[rr, bend left=50, "F"] & u_0 = u(x_0) \arrow[r, bend left, "f"] & y_0 = f(u_0) \end{tikzcd}$$

x u y

$$F(x) = f(u(x_0)) = f(u).$$

Нехай $u = u(x)$ – неперервна в т. x_0

$f(u)$ – неперервна в т. x_0

Тоді $F(x) = f(u(x))$ – неперервна в x_0.

Доведення: За озн. Гейне $\forall x_n \to x_0 \Rightarrow u(x_n) = u_n \to u(x_0)$

$$\begin{matrix} f(u_n) & \to & f(u_0) \\ \| & & \| \\ f(u(x_0)) & & f(u(x_0)) \\ \| & & \| \\ F(x_n) & \to & F(x_0) \end{matrix}$$

Означення: Якщо ф-я f неперервна в кожній т. x множини X, то кажуть, що ф-я f неперервна на множині X

$$f \in C_X, \text{ або } f \in C(X).$$

$f \in C_{[a,b]}$ – неперервна на $[a,b]$.

Глобальні властивості неперервних ф-й

Теорема 1 (I теорема Больцано-Коші)

Нехай

1) $f \in C_{[a,b]}$; $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Тоді

$\exists\, c \in (a,b)$: $f(c) = 0$.

Доведення: Нехай $f(a) > 0$, $f(b) < 0$.

Поділимо $[a,b]$ пополам

$[a_1; b_1]$: $f(a_1) > 0$, $f(b_1) < 0$.

$[a_2; b_2]$: $f(a_2) > 0$, $f(b_2) < 0$

. . . . (Процес продовж. необмежено)

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \ldots \supset [a_n; b_n] \supset \ldots$$

За лемою про вкладені відрізки існує єдина точка, спільна для всіх відрізків. $\exists!\, c$, $a_n \le c \le b_n$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0, \ n \to \infty \qquad \left.\begin{matrix} f(a_n) \to f(c) \ge 0 \\ f(b_n) \to f(c) \le 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(c) = 0$$

Теорема 2 (II теорема Больцано-Коші)

Нехай f неперервна на $[a,b]$, і $\underset{A}{f(a)} \ne \underset{B}{f(b)}$.

Тоді $\forall\, C$ (між A і B) $\exists\, c \in (a,b)$, така що $f(c) = C$. Між точками A і B ф-я приймає усі проміжні значення.

Теорема 3 (Перша теорема Вейєрштраса)

Якщо $f \in C[a;b]$, то вона обмежена на $[a;b]$, тобто
$$m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a;b]$$

Доведення: Від супр. нехай f - необмежена зверху
$$\forall n \in N \quad \exists x_n \in [a,b]: f(x_n) \ge n \qquad (*)$$

З посл. x_n $(a \le x_n \le b \ \forall n \in N)$ можна виділити збіжну підпослідовність. За т. Больцано-Вейєрштраса
$$x_k \to x_n \ [a,b]$$
$$a \le x_n \le b$$
$$(k \to \infty \Rightarrow a \le x_0 \le b)$$

$(*)$: $\quad f(x_n) \ge n_k \quad \forall k \in N = 1,2\dots \quad (**)$

$$\lim_{k\to\infty} f(x) = +\infty$$
$f(x) = +\infty$ - суперечн.

Теорема 4. Якщо ф-я обмежена і неперервна на відрізку $f \in C[a,b]$, то $\exists x_0, x^0 \in [a,b]$: $f(x_0) = \min\limits_{[a,b]} f(x_0) = m^*$
$f(x^0) = \max\limits_{[a,b]} f(x^*) = M^*$.

Доведення $\quad f$ - обм. на $[a,b] \Rightarrow \exists \sup\limits_{[a,b]} f(x) \overset{def}{=} M^*$
$$f(x) < M^* \ \forall x \in [a,b]$$

Введемо допоміжну ф-ю
$$0 < g(x) = \frac{1}{M^* - f(x)} \le \mu - const$$

Тобто $g(x) \in C[a,b]$; $\quad M^* - f(x) \ge \frac{1}{\mu} \Rightarrow$
$$f(x) = M^* - \frac{1}{\mu} \ \forall x \in [a,b] \quad ?! \ M^* - \text{не sup} ?!$$

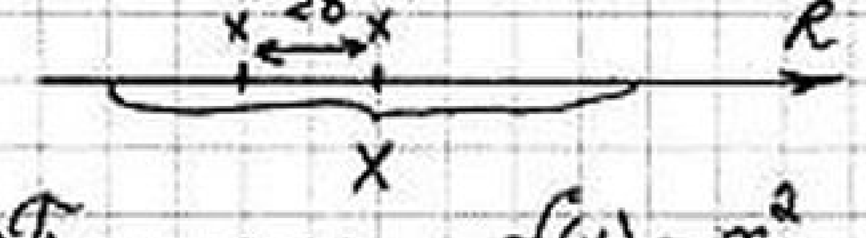
Ф-я має дві точні верхні границі. Це суперечність

Поняття про рівномірну неперервність ф-ї

Озн. неперервності: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0, f) > 0$:
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$
$\forall x \in X: |x - x_0| < \delta$

Озн. рівномір. непер. на множині x

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0, f) > 0: \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \forall x', x'' \in X: \ |x' - x''| < \delta$



Якщо виконується озн. 2, то виконується і озн. 1.

Приклад: $\quad f(x) = x^2 \quad X = (1, 5]$

$$\forall \varepsilon > 0: \ |f(x') - f(x'')| = |x'^2 - x''^2| = |x' - x''| \cdot |x' + x''| \le |x' - x''|(|x'| + |x''|) \le$$
$$\le 10\,|x' - x''| < \varepsilon$$
$$|x' - x''| < \frac{\varepsilon}{10} = \delta.$$

Приклад: $f(x)=\frac{1}{x}$, $X=(0;1]$ – не є рівном. неперервною

$$x_n'=\frac{1}{n}\to 0 \quad (n\to\infty) \qquad |f(x_n')-f(x_n'')|=|n-2n|=n\to+\infty$$
$$x_n''=\frac{1}{2n}\to 0 \quad (n\to\infty)$$

Теорема (Кантора) Якщо $f\in C_{[a,b]}$, то вона рівномірно неперервна на $[a,b]$.

Доведення: Нехай f не є рівном. неперервною на $[a,b]$.

Побудуємо послідовн. $x_n', x_n''\in[a,b]$: $[x_n'-x_n'']\to 0$, але $|f(x_n')-f(x_n'')|\not\to 0$

$$\begin{matrix} x_n'\to x_0'\in[a,b] \\ x_n''\to x_0''\in[a,b] \end{matrix} \Rightarrow \quad |f(x_n')-f(x_n'')|\to 0.$$

Тема 3

Поняття похідної, диференціалу, диференційованості функції.

Нехай маємо $f(x)$, $x\in U(x)$

$$x-x_0=\Delta x \text{ – приріст аргументу}$$
$$\Delta f(x)\overset{def}{=}f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta f(x) \text{ – приріст ф-ї.}$$

Швидкість зміни ф-ї $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

Похідною ф-ї в точці x_0 на-ся границя:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}, \text{ якщо вона існує.}$$

Позначення: $f'(x)$, f', y', $y'(x)$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$

Геометричний зміст похідної

Якщо $\exists$ похідна в т. M_0, то $\exists\ f'(x_0)=tg\,\alpha_0$ – const

Якщо f – неперервна і $f'(x_0)=\pm\infty$, то $\exists$ вертикальна дотична $x=x_0$.

Поняття односторонніх похідних

$$f_+'(x_0)\overset{def}{=}\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \text{ – правостороння похідна}$$

$$f_-'(x_0)\overset{def}{=}\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \text{ – лівостороння похідна}$$

Для того, щоб ф-я мала скінченну похідну, потрібно:

$$\exists f'(x_0)\text{ - const} \iff f_-'(x_0)=f_+'(x_0)=\text{const}\overset{def}{=}f'(x_0)$$

Приклад

$$f(x)=|x| \qquad \exists f'(0)\ ?$$

$$f_+'(x)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|f(x+\Delta x)|-|f(x)|}{\Delta x}=1$$

$$\nexists f'(0)$$

$$f_-'(x)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|f(x+\Delta x)|-|f(x)|}{\Delta x}=-1$$

Якщо $x\neq 0$ $\quad f'(|x|)=\operatorname{sgn}x$.

Отримання табличних похідних

1) $(x^{\alpha})' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} x^{\alpha} \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\Delta x} = \alpha x^{\alpha - 1}$

2) $(a^{x})' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^{x}}{\Delta x} =$

Теореми про середні значення в диферинціалоному численні

Озн. Нехай $f(x)$ визначена на (a, b) і $x_0 \in (a, b)$, $f \in C_{(a,b)}$.
Говорять, що f в т. x_0 має внутрішній лок. максимум (мінімум), якщо $f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$ $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$
$\Delta f(x) \leq 0$ $\quad (\Delta f(x_0) \geq 0)$ *
Якщо приріст ф-ї в т. x_0 змінює знак, то екстремуму немає.
Якщо в (*) має місце рівність, то екстремум є строгим.

Теорема (Ферма)
Нехай виконуються умови:
1. f в т. x_0 має лок. екстремум
2. f – диферинційована

Тоді $f'(x_0) = 0$

Доведення: Припустимо, що в x_0 f є лок. максимумом
$$f_1'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$$
Припустимо $f(x_0)$ – лок. мінімум, тоді
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \geq 0, \text{ отже } f'(x_0) = 0$$

Теорема (Ролля)
1. $f \in C_{[a,b]}$
2. f – диферинц. на (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

Тоді $\exists \xi \in (a, b)$: $f'(\xi) = 0$

Доведення: m^* і M^* значення ф-ї
1) $m^* = M^* \Rightarrow f(x)$ – const $\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \xi \in (a, b)$
2) $m^* < M^*$ $\xi \in (a, b)$, і в т. ξ $f'(\xi) = 0$.

Якщо одна з умов не виконується, твердження не є вірним.

Теорема (Лагранжа)
1. $f \in C_{[a,b]}$
2. f – диферинц. в (a, b)

Тоді $\exists \xi \in (a, b)$ $\quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \quad (1)$

При виконанні умов теореми на графіку знайдеться точка, в якій дотична до графіка паралельна хорді ab.

Доведення: $F(x) = f(x)(b-a) - x[f(b) - f(a)]$

$F(x)$ - неперервна на (a, b), і диференц.

$F(a) = f(a)(b-a) - a(f(b) - f(a))$

$F(b) = f(b)(b-a) - b(f(b) - f(a))$

$F(a) = F(b)$, що задовольняє т. Лагранжа і т. Ролля.

Отже $\exists\, \xi \in (a, b): F'(\xi) = 0$.

$$f'(\xi)(b-a) - (f(b) - f(a)) = 0 \Rightarrow (1)$$

Ф-ла Лагранжа

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a),$$ або в іншому вигляді:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x$$

$$\Delta f(x_0) = f'(\xi)\Delta x$$ - Формула скінченних приростів.

Деякі застосування формули Лагранжа

Приклад 1) $|\sin x| = |\sin x - \sin 0| = |\cos\xi| \cdot (x - 0) = |\cos\xi|\,|x| \le |x|$

Маємо нерівність:

$$|\sin x| \le |x|$$

2) $|\cos x| = |\cos x - \cos\frac{\pi}{2}| = |\cos\xi|\,(x - \frac{\pi}{2}) \le |x - \frac{\pi}{2}|$

$$|\cos x| \le |x - \frac{\pi}{2}|$$

Твердження: Якщо $|f'(x)| \le M$ на X, то ф-я f

Справді $|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi)(x' - x'')| = |f'(\xi)|\,|x' - x''| < M|x' - x''| < \varepsilon$

Теорема (Коші)

1. $f, g \in C_{[a,b]}$
2. f, g дифер в (a, b)
3. $g'(x) \ne 0\ \forall x \in (a, b)$

За цих умов справедлива формула

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Доведення за т. Ролля

Теорема (Правило Лопіталя)

Нехай

1. f, g - неперерв. в $\overset{\circ}{U}(x_0)$
2. f, g - дифер. в $\overset{\circ}{U}(x_0)$
3. $g'(x) \ne 0$, в $\overset{\circ}{U}(x)$
4. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty \end{cases}$
5. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (const, або ∞)

За цих умов виконується рівність

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Доведення:

$$f^*(t) = \begin{cases} f(t) & x_0 < t \le x \\ 0 & t = x_0 \end{cases} \in C_{[x_0, x]}$$

$$g^*(t) = \begin{cases} g(t) & x_0 < t \le x \\ 0 & t = x_0 \end{cases} \in C_{[x_0, x]}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^*(x) - f^*(x_0)}{g^*(x) - g^*(x_0)} = \frac{f^{*\prime}(\xi)}{g^{*\prime}(\xi)}$$

Зауваження: якщо умови не виконуються, то правила Лопіталя не застосовні.

Приклад: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-\cos x}{x+\sin x}$ – правило не застосовне! границі $\frac{x-\cos x}{x+\sin x}$ – не існує

Похідна і диференціал вищого порядку

Похідна в/п

$y = f(x)$

$y' = f'(x)$

$(y')' = y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

$(y^{(n-1)})' \overset{def}{=} y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$

$n = 1, 2 \ldots$

$y^{(0)} = y$

Зв'язок між диференціалом і похідною:

$d^2y = d(f'(x)dx) = dx\, d(f'(x)) = f''(x)\, dx^2$;

$d^ny = f^{(n)}(x)\, dx^n \quad (1)$

x – незалежна змінна

dx – const

$dx^n = (dx)^n \quad (n \geq 2)$

Диференціал в/п

$y = f(x)$

$dy = f'(x)\, dx$

$d^2y \overset{def}{=} d(dy)$

$\ldots$

$d(d^{n-1}y) = d^ny$; $n = 1, 2, 3 \ldots$

$d^0y = y$; $\quad d^1y \overset{def}{=} dy$

Якщо x не є незалежною змінною, ф-ла (1) при $n \geq 2$ не має місця. Диференціали вищих порядків не мають властивості інваріантності форми:

$n = 2 \quad x = \varphi(t) \quad t$ – незал. змінна

$dy = f'(x)\, dx$

$d^2y = d(f'(x)dx) = dx\, d(f'(x)) + f'(x)\, d(dx) = f''(x)\, dx^2 + f'(x)\, d^2x$

Правила знаходження похідних вищих порядків

① $(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$

② $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)} \quad (C = const)$

③ $(uv)' = u'v + uv'$

$(uv)'' = (u'v + uv')' = u''v + u'v' + u'v' + uv''$

$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$

Математична індукція $\Rightarrow \quad (uv)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$

Формула Лейбніца

Приклад:

1) $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$

$P_n^{(n)}(x) = a_0 n!$

2) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)\, x^{\alpha-n}$

3) $y = (x-x_0)^{n+1}$

$y' = (n+1)(x-x_0)^n$

$y'' = (n+1)n(x-x_0)^{n-1}$

$y^{(n)} = (n+1)n(n-1)$

Ряд Тейлора

Якщо $f(x)$ дифер. в т. x_0, то має місце ФМП

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = T_1 \quad (1)$$

T_1 – многочлен Тейлора ф-ї f відносно т. x_0

Властивості $T_1(x)$:

$$T_1(x_0) = f(x_0)$$

$$T_1'(x_0) = f'(x_0)$$

Побудуємо многочлен $\leq n$ такий, що в т x_0 його значення, а також значення його похідних до n-го порядку співпадали зі значеннями $f(x)$ і значеннями похідних до n-го порядку включно.

Означення Многочленом Тейлора n-го порядку для $f(x)$ відносно т. x_0 на-ся многочлен виду:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_n)}{n!}(x - x_0)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad (2)$$

Властивості $T_n(x)$:

$$T_n(x_0) = f(x_0) \qquad T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

$$T_n'(x_0) = f'(x_0) \qquad\qquad (3)$$

$$T_n''(x_0) = f''(x_0) \qquad T_n^{(n+1)}(x) = 0$$

$$\ldots\ldots$$

Припустимо, f в т. x_0 має похідні до n-го порядку

Тоді

$$f(x) \approx T_n(x) \quad (4)$$

Позначимо $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

Теорема 1 $U(x_0)$ точки x_0 ф-я f $\forall x \in U(x_0)$:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \text{ де}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (5)$$

$$(\xi = x_0 + e(x - x_0), \ 0 < e < 1)$$

Доведення:

$$R_n(x_0) = 0 \qquad R_n^{(n+1)}(x) = f^{n+1}(x)$$

$$R_n'(x_0) = 0$$

$$\ldots\ldots$$

$$R_n^{n}(x_0) = 0$$

За т. Коші

$$\frac{R_n(x)}{\underbrace{(x - x_0)^{n+1}}_{\varphi(x)}} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{R_n'(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)} = \frac{R_n'(\xi_1) - R_n'(x_0)}{\varphi_n'(\xi_1) - \varphi_n'(x_0)} = \frac{R_n''(\xi_2)}{\varphi_n''(\xi_2)} = \ldots =$$

$$= \frac{R_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{\varphi^{(n+1)}(\xi_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

З формули (5) випливає, що

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0$$

Формула Пеано

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

Про представлення ф-ї $f(x)$ в околі т. x_0

Якщо ф-я має в околі т. x_0 похідні до $(n-1)$ порядку включно і має похідну n-го порядку, то справедлива формула:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0$$

Теорема $f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0$

Тоді $P_n(x) = T_n(x)$ – єдиний!

Якщо $x_0 = 0$, то формула на-ся розкладом Маклорена

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \text{ де}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Стандартні розклади елементарних функцій в ряд Маклорена

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad x \to 0 \qquad R_n(x) = \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}$

II. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) \quad x \to 0 \qquad R_n = \frac{(-1)^n \cos\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

III. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \quad x \to 0 \qquad R_n = \frac{(-1)^{n+1}\cos\xi}{(2n+1)!}x^{2n+2}$

IV. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \quad x \to 0 \qquad R_n = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}(n+1)}$

V. $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + o(x^n) \quad x \to 0 \qquad R_n = x^{n+1} \cdot \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\xi)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}$

Гіперболічні функції і їх розклад в ряд Маклорена

$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$

$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \qquad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x \qquad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Осн. гіперболічна тотожність

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}), \quad x \to 0$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0$$

Інші розклади елементарних функцій

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{2n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n-1}),\ x\to 0$$

Застосування формули Тейлора (Маклорена)

I Наближені обчислення

Приклад: Обчислити $e, \sqrt[4]{e}, \sqrt{e}$, точність $\varepsilon = 10^{-2}$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^4}{4!} \qquad (*)$$

Розв'язання:

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!}$$

а) $e = e^1 \Rightarrow x = 1$

$$R_n(1) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{100}$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{6!} \qquad \left(\varepsilon = \frac{1}{100}\right)$$

$n = 6.$

б) $\sqrt{e} \Rightarrow x = 1/2$

$$R_n(1/2) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!\,2^{n+1}} < \frac{1}{100}$$

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48}$$

$$\frac{3}{(n+1)!\,2^{n+1}} < \frac{1}{100}. \qquad n = 3$$

в) $\sqrt[4]{e} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

$$R_n\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!\,4^{n+1}} < \frac{3}{(n+1)!\,4^{n+1}} \qquad n = 2$$

$$\sqrt[4]{e} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{32}.$$

II Розкриття невизначеностей

Знайти $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$

Можна виділити головні степеневі частини $f(x)$ і $g(x)$ при $x \to x_0$.

$$f(x) = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m),\ x\to x_0 \sim \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$$

$$g(x) = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n),\ x\to x_0 \sim \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(m)}(x_0)(x-x_0)^m \cdot n!}{m!\, g^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n} = \begin{cases} m=n, & f^{(n)}(x_0)/g^{(n)}(x_0) \\ 0, & m>n \\ \infty, & m<n \end{cases}$$

Дослідження функцій методами диференційного числення

I Дослідження на сталість

Теорема 1 Щоб $f(x)$ в (a, b) була сталою ($f(x) = const$)

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Доведення

1) $f - const \Rightarrow f'(x) = 0$ на (a, b)

2) Нех $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$ Запишемо ф. Лагранжа

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = 0, \text{ якщо } f(x) - f(x_0) = 0.$$

Приклад $f(x) = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \qquad x > 1$

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2 \frac{(1-x^2)}{(1+x^2)}} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0$$

II Дослідження функції на монотонність

Теорема 2 (Достатня умова диференційованої ф-ї для монотонності)

Якщо $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) на (a, b) то $f \uparrow (\downarrow)$ на (a, b)

Доведення $f'(x) \geq 0$ на (a, b).

$$f(x_2) - f(x_1) = \underset{\geq 0}{f'(\xi)}\underset{> 0}{(x_2 - x_1)} \geq 0$$

$$f(x_2) \geq f(x_1) \Rightarrow f \uparrow \text{ на } (a, b)$$

Якщо нерівність строга, монотонність теж строга

Теорема 3 Якщо ф-я f диференційовна на (a, b) і монотонно зростає (спадає), то $f'(x) \geq 0$ (≤ 0), $\forall x \in (a, b)$.

III Дослідження на внутрішній локальний екстремум

$f \in C_{(a,b)}$ і $x_0 \in (a, b)$ f в т. x_0 має внутрішній локальний макс. (мін.), якщо $\Delta f(x_0) \leq 0$ (≥ 0) в досить малому околі т. x_0.

Теорема 4 Якщо x_0 – т-ка внутрішнього лок. екстремуму, то $f'(x_0)$ рівна 0, або $f'(x_0)$ ∞ $f'(x_0) \nexists$ ($df(x_0) = 0$)

(Наслідок т. Ферма)

Точки, в яких $f'(x) = 0$, $f'(x) = \infty$ або $f'(x) \nexists$, на-ся критичними точками функції, причому точки, де $f'(x) = 0$ на-ся стаціонарними точками.

Теорема 5 ($\underset{\sim}{\text{I}}$ ознака внут. екстремуму)

Нехай x_0 – критична точка ф-ї f, і $\exists$ скінченна похідна в $\mathring{U}(x_0)$. Тоді, якщо:

1) $f'>0$ при $x<x_0$, $f'<0$ при $x>x_0$ x_0 – лок. макс.

2) $f'<0$ при $x<x_0$, $f'>0$, при $x>x_0$ x_0 – лок. мінім.

3) якщо знак не змінюється, x_0 – не екстремум

Доведення

ф. Лагранжа

1) $x<x_0$ $f(x_0)-f(x)=f'(\xi)(x_0-x)>0$ $f(x_0)>f(x)$

$x>x_0$ $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)<0$ $f(x_0)>f(x)$

$$y_{max}=f(x_0)$$

2) – Аналогічно

Теорема 6 ($\underset{\sim}{\text{II}}$ достатня ознака внут. екстремуму)

Нехай x_0 – стаціонарна точка $(f'(x_0)=0)$, і $\exists f'(x), f''(x)$ в околі т. x_0, до того ж $f''(x)$ неперервна в x_0

Тоді: Якщо $f''(x_0)<0$ $(d^2f(x_0)<0)$, то в т. x_0 внутр. локальний максимум

Якщо $f''(x_0)>0$ – x_0 – внут. лок. мінімум

Якщо $f''(x_0)=0$ – не є екстремумом ?

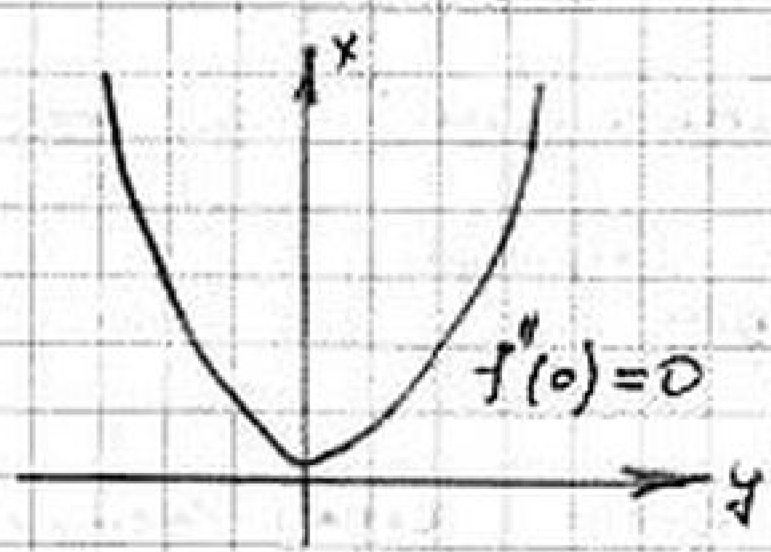
Доведення:

Запишемо ряд Тейлора

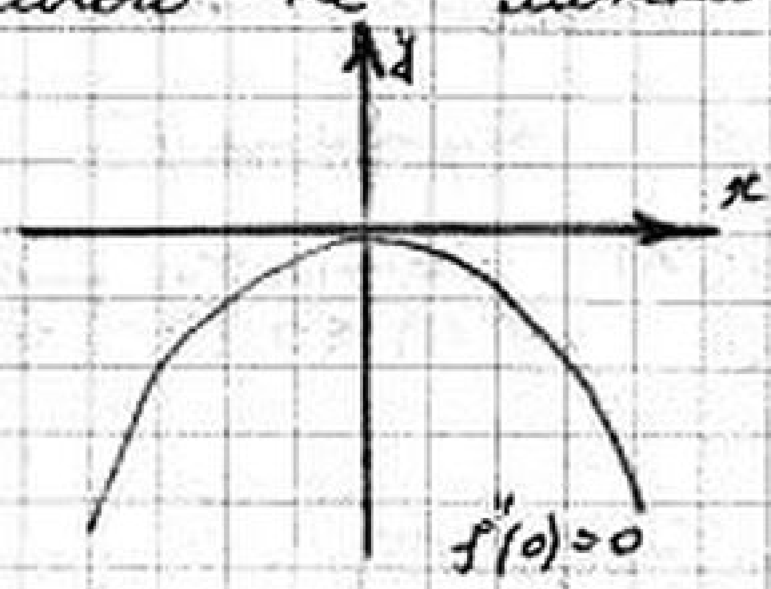
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

$$\Delta f(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2\le 0 \Rightarrow \text{ в т. } x_0 \text{ локальний максимум}$$

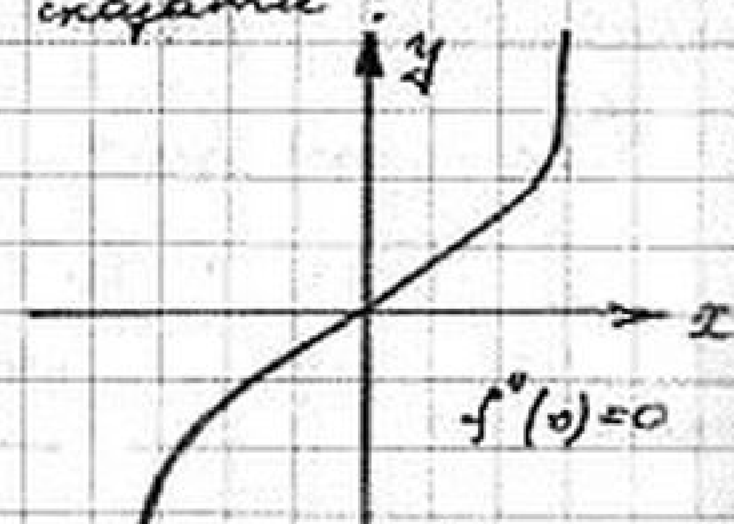
$f''(x_0)=0$ – нічого не можна сказати:



0 – лок. мін.



0 – лок. мін.



0 – не екстр.

Теорема 7 ($\underset{\sim}{\text{III}}$ ознака внут. екстремуму)

Нехай $\exists f', f'', \ldots f^{(n)}$ в околі т. x_0, причому $f^{(n)}$ неперервна в т. x_0

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots f^{(n-1)}(x_0)=0 \quad a \quad f^{(n)}(x_0)\ne 0$$

Тоді якщо $n = 2k$, то в т. x_0 $\exists$ в. лок. екстр.:

а) $f^{(n)}(x_0) < 0$, x_0 – max

б) $f^{(n)}(x_0) > 0$, x_0 – min

якщо $n = 2k+1$, то $\nexists$ внут. лок. екстр.

Доведення: Розкладемо $f(x_0)$ в ряд Тейлора до n-го порядку

1) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x-x_0)^n$

$\Delta f(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x-x_0)^n < 0$, x_0 – max

2) $\Delta f(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x-x_0)^n$ – змінює знак, не існує лок. екстремума

Приклад $f(x) = x^6 - x^3 + 1$ $\quad D(f) = R$

$f'(x) = 6x^5 - 3x^2 = 3x^2(2x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ – стац. точка

$f''(x) = 30x^4 - 6x$

Схема відшукання глобальних максимумів (мінімумів)

① $f(x) \in C[a,b]$

$\exists \min\limits_{[a,b]} f = m^*$, $\max\limits_{[a,b]} f = M^*$ – за II т. Вейєрштраса

Схема:

а) знаходимо критичні точки $x_1 \ldots x_n$ $[a,b]$

б) обчислюємо $f(x_1), f(x_2) \ldots f(x_n)$

в) вибираємо найбільше (найменше) число

$m^* = \min\{f(x_1), \ldots f(x_n)\}$

$M^* = \max\{f(x_1), \ldots f(x_n)\}$

Приклад $f(x) = (x+1)^{2/3} + (x-1)^{2/3}$ $\quad [1; 2\pi]$

Критичні точки: $x = 0$; $x =$

② $f(x) \in C_X$ $\quad (X = (a;b) \vee [a;b) \vee (a;b])$

В цьому випадку не гарантується існування min, max.

Шукається $\inf f$, $\sup f$.

Схема

1) Критичні точки $x_1, \ldots x_n \in X$

2) Обчислюємо $f(x_1), \ldots f(x_n)$, $f(a \to 0)$, $f(b \to 0)$

Приклад $f(x) = xe^{-x^2}$ $\quad X = [\frac{1}{2}; +\infty)$ $\quad \sup f - ?$ $\inf f - ?$

$f'(x) = e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0$ $\quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \notin X$; $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \in X$

$f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2e}}$ $\quad f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} e^{-1/4} = \frac{1}{2\sqrt[4]{e}}$

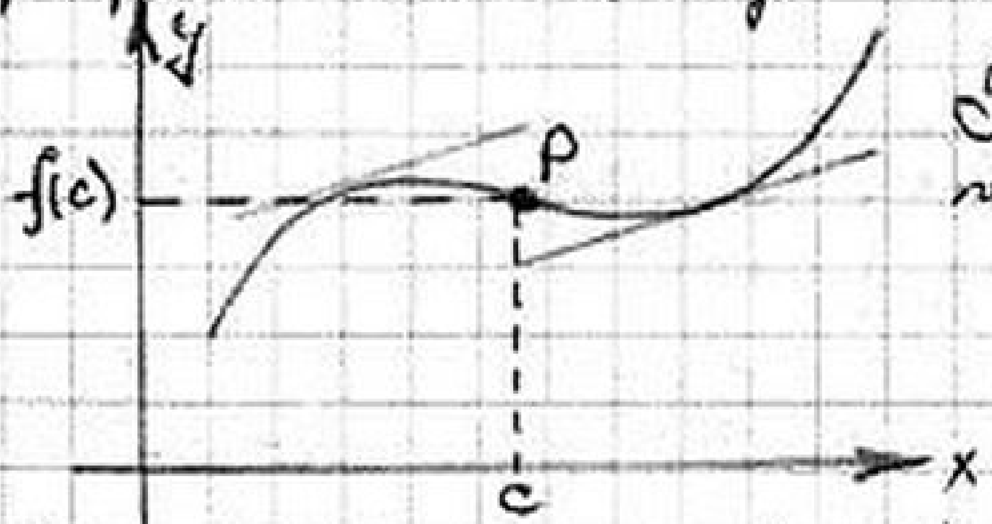
$$f(+\infty) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{e^{x^2}}\right) = \frac{1}{e^{x^2}\cdot 2x} = 0$$

Далі серед значень f знайдемо мінімальне і максимальне.

Дослідження на опуклість

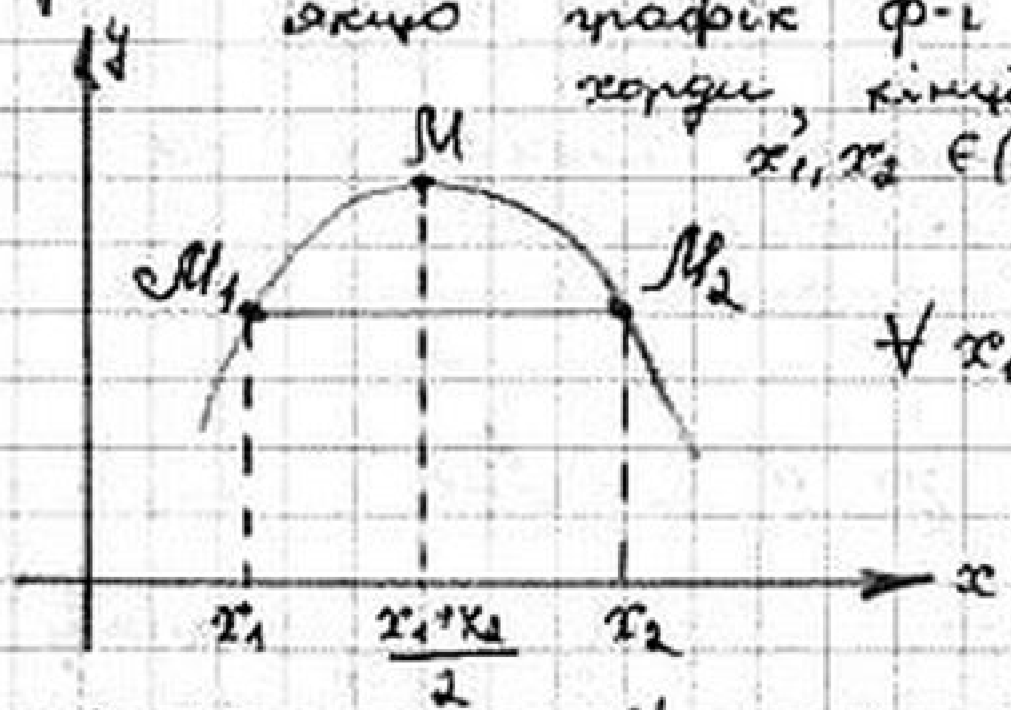
Означення: f диференц. на (a, b)

Ф-я f на-ся опуклою вгору (вниз), якщо всі точки функції розміщені не вище (не нижче) дотичної, проведеної до графіка в точці з абсцисою $x_0 \in (a, b)$.



Точка $P(c; f(c))$ на-ся точкою перегину, якщо вона на графіку ф-ї відділяє частини з різним напрямом опуклості.

Означення (для неперервної ф-ї) Ф-я f на-ся опуклою вгору (вниз), якщо графік ф-ї розміщений не вище (не нижче) хорди, кінці якої M_1 і M_2 мають абсциси $x_1, x_2 \in (a, b)$



$f \cap (\cup)$ на (a, b)

$\forall x_1, x_2 \in (a, b): \quad x_1 \neq x_2$

$M_1M_2 \quad [x_1, x_2]$

$$f\cap \Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

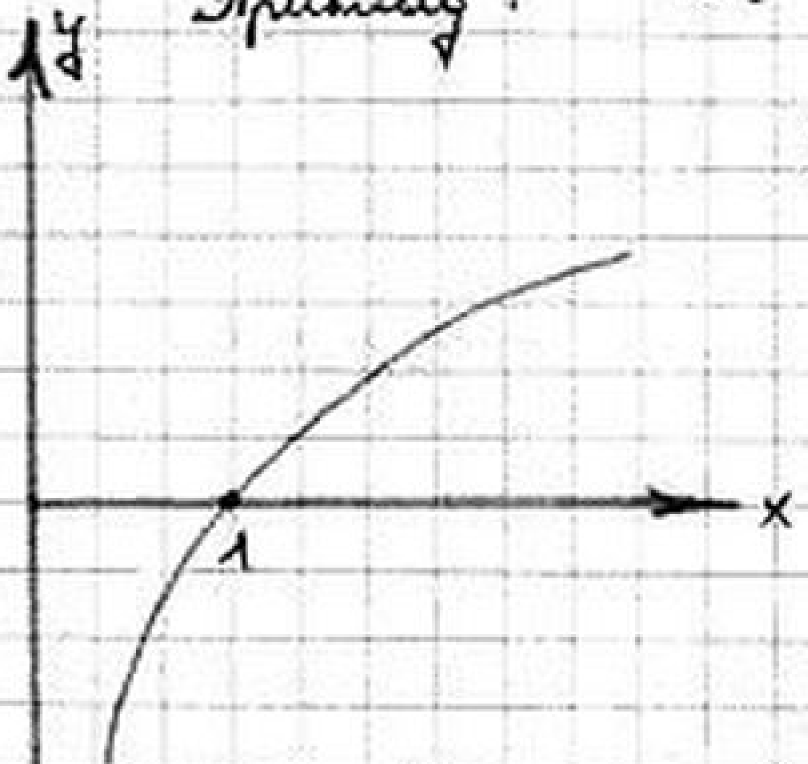
$$f\cup \Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

Нерівності Єнсена:

$(\cap)$ $$f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right) \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} f(n)}{n}$$

$(\cup)$ $$f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} f(n)}{n}$$

Приклад: $$\ln\frac{x_1+\ldots x_n}{n} \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_n = \ln(x_1\cdot\ldots x_n)^{1/n}$$



$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}.$$

Умови існування опуклості для двічі диференц. функцій

Теорема 1 $f \in C^2_{(a,b)}$ $(: f, f', f'' \in C_{(a,b)})$

Якщо

1) $f'' \le 0$ на (a,b), то $f \cap$ на (a,b)

2) $f'' \ge 0$ на (a,b), то $f \cup$ на (a,b)

Доведення:

Розкладемо $f(x)$ в ряд Тейлора

1) $$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{X} + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)^2$$

$$f(x) - X = \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)^2 \le 0 \Rightarrow f(x) \le X \Rightarrow \cap$$ що і т. д.

$f' \downarrow \Rightarrow f \cap$; $f' \uparrow \Rightarrow f \cup$ - це слідує з міркувань геометрії.

Алгоритм відшукання точок перегину неперервної функції

① f' і f''

② Знаходимо абсциси точок, підозрілих на перегин:

$$f''(x_0) = 0 \lor f''(x_0) = \infty \lor f''(x_0) \nexists$$

③ Якщо при переході через x_0 друга похідна змінює знак, то x_0 - абсциса т. перегину. Якщо знак не змінюється, то ні.

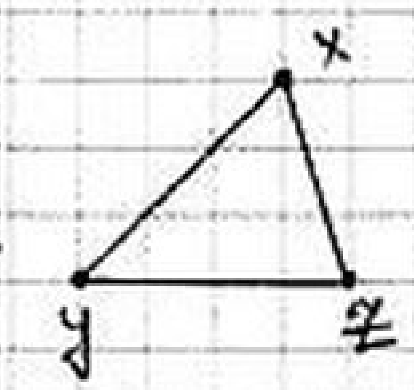
Модуль II Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Поняття про метричні простори

Розглянемо множину X елементів будь-якої природи. Кажуть, що на мно-ні X введена метрика, якщо кожній впорядкованій парі x, y з X поставлено у відповідність рівно одне число $\rho(x,y)$, таке що

1) $\rho(x,y) \ge 0$

$\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$



2) $\rho(x,y) = \rho(y,x) \quad \forall x, y \in X$

3) $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$ - Аксіома тр-ка

Множина X з введеною на ній метрикою на-ся метричним простором.

Евклідова метрика

$$X = R^n = \{(x_1, x_2 \dots, x_n)\}$$

$\overline{x} = (x_1, x_2 \dots x_n)$

$\overline{y} = (y_1, y_2 \dots y_n)$ $\rho(\overline{x}\,\overline{y}) \overset{def}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_n - y_n|^2}$

Інші метрики:

$$\rho_0(\overline{x}\,\overline{y}) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_n - y_n| \qquad \rho_1(\overline{x}, \overline{y}) \overset{def}{=} \max |x_n - y_n|$$

Метрики ρ, ρ_0 і ρ_1 є топологічно еквівалентними (коли відстань між якимись елементами прямує до 0 в одній з метрик, то вона прямує до 0 і в інших).

Вираз метрики через норму елементів

$$||\overline{x}|| \overset{def}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_n|^2}, \quad \overline{x} \in R^n$$

$$\rho(\overline{x}, \overline{y}) = ||\overline{x} - \overline{y}||$$

Рівномірна метрика $X = C_{[0,b]}$

$$\forall\, x(t), y(t) \in C_{[0,b]}$$

$$\rho(x(t), y(t)) \overset{def}{=} \max |x(t) - y(t)|$$

Поняття збіжності у метричному просторі

Нехай X - метричний простір, з метрикою $\rho(x, y)$

x_n - послідовн елементів з X.

Кажуть, що x_n збігається до елемента a, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in N: \ \rho(x_n, a) < \varepsilon \quad \forall n > n_0$$

Якщо x_n має границю, то вона на-ся збіжною;

Збіжність послідовності у просторі R^m.

$$\overline{x}_n = (x_n^1, x_n^2 \dots x_n^m) \rightarrow \overline{a} = (a^1, a^2, \dots a^m)$$

$$\rho(x_n, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x^m - a^m|^2} \rightarrow 0$$

$$|x^m - a^m| \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \lim x^1 \rightarrow a^1 \\ \lim x^2 = a^2 \\ \dots \end{array}$$

Збіжність в просторі R^m є покоординатною

Приклад: R^2, $\overline{x}_n\left(\frac{1}{n}, \sin n\right)$ $\quad \overline{y}_n = \left(\frac{1}{n}, n\sin\frac{1}{n}\right)$

$\frac{1}{n}\to 0$; $\sin n \not\to$ $\quad \overline{x}_n$ – розбіжна

$\frac{1}{n}\to 0$; $n\sin\frac{1}{n}\to 1$ $\quad \overline{y}_n \to (0;1)\in R^2$

Поняття про повні метричні простори

Нехай X – метр. простір з метрикою $\rho(x,y)$
Послідовність $x_n\in X$ на-ся фундаментальною, якщо $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in N$:

$$\rho(x_{n+p}, x_n)<\varepsilon \quad \forall n>n_0 \ \forall p\in N$$

Метричний простір X на-ся повним, якщо в ньому кожна фундамент. послідовність збігається до елемента цього самого простору.

Приклад $X = R^1$ – повний

$X = Q \quad \rho(x,y)=|x-y|$

$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \notin Q$ $\quad$ Простір є неповним

$\overline{x}_n=(x_n^1,\dots,x_n^m)$ – фундаментальна

$\rho(\overline{x}_{n+p},\overline{x}_n)\to 0 \ \forall p\in N \Leftrightarrow$

$|x^1_{n+p}-x^1_n|\to 0 \quad x_n^1\to a^1$

. . . . . . Послідовність збіжна

Теорема Банаха (Принцип стискаючих відображень)

Ця теорема є теоретичною основою ітераційних процесів.

Нехай X – метр. простір з метрикою $\rho(x,y)$;
$F: X\to X$ – відображення (деяка ф-я).

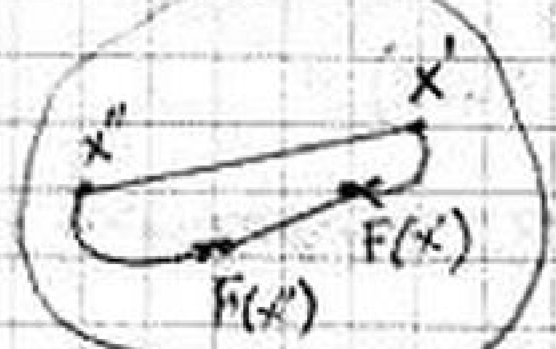
Означення:
т. $a\in X$ на-ся нерухомою точкою відображення F, якщо $F(a)=a$.

Приклад: $F(x)=x^2 \quad x\in X\in R$

$F(x)=x \quad x=0,\ x=1$

Означення: відображення $F: X\to X$ на-ся стискуючим, якщо виконуються умови

$$\rho(F(x'), F(x''))\le q\,\rho(x', x'') \qquad 0\le q<1$$



Приклад (x) диференц. на $X\subset R^1$ і

$|F'(x)|\le q<1 \ \forall x\in X$, тоді F – стискуючий оператор

$$\rho(F(x'), F(x'')) = |F(x') - F(x'')| \overset{ФЛ}{=} |F'(\xi)(x' - x'')| \le q\,|x' - x''| =$$
$$= q\rho(x' - x'')$$

Теорема Банаха

Нехай X - повний метричний простір, $F: X \to X$,
F - стискаюче відобр. з коефіц. q.

Тоді: 1) $\exists!$ нерухома точка a оператора F в просторі X

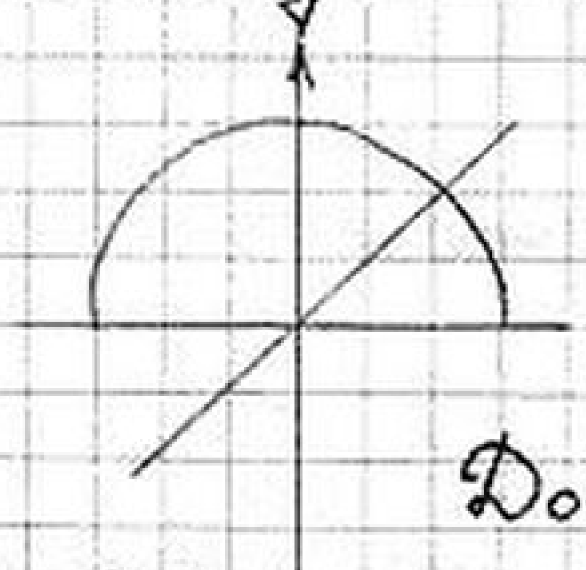
2) $a = \lim x_n$, де $x_n = F(x_{n-1})\ \forall x_0 \in X$

3) $\rho(a, x_n) \le \frac{q^n}{1-q}\rho(x_0, x_1)$

Зауваження: відшукання $a = \lim x_n$ наз-ся ітераційним процесом
x_0 - початкове наближення
$x_1 = F(x_0)$ - перша ітерація
$x_2 = F(x_1)$ - II ітерація
....
$x_n = F(x_n)$ На деякому кроці процес припиняється і $a \approx x_n$.

Оцінка $\rho(x_n, a) \le \frac{q^n}{1-q}\rho(x_0, x_1)$ - оцінка похибки

Приклад: $\cos x = x$ $X = [0; \frac{\pi}{3}]$



$F(x) = \cos x$ $|F'(x)| = |-\sin(x)| \le \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{q} < 1$

$x_1 = \cos 0 = 1$
$x_2 = \ldots$

Доведення теореми

1) Доведемо, що послідовність x_n фундаментальна

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(F(x_n), F(x_{n+1})) \le q\rho(x_n, x_{n+1}) \le$$
$$\le q^2\rho(x_{n-1}, x_n) \le \ldots \le q^n(x_1, x_0).$$

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \le \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \rho(x_{n+p-1}, x_n) \le q^{n+p-1}\rho(x_1, x_0) + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) +$$
$$+ \rho(x_{n+p-2}, x_n) \le \ldots \le \rho(x_1, x_0) + q^{n+p-1}\rho(x_1, x_0) + \ldots + q^n\rho(x_1, x_0) = q^n(1 + q + q^2 + \ldots + q^{p-1})\cdot$$
$$\cdot\rho(x_1, x_0) \le \frac{q^n}{1-q}\rho(x_1, x_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$ Отже x_n - фундаментальна посл.

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \le q^n\rho(x_1, x_0)$$
$$\exists\ a = \lim x_n$$

2) Доведемо, що a - нерухома точка

$$\rho(a, f(a)) \le \rho(a, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, F(a)) \le \rho(a, x_{n+1}) +$$
$$+ q\rho(x_n, a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \rho(a, f(a)) = 0 \quad a \text{ - нерухома}$$

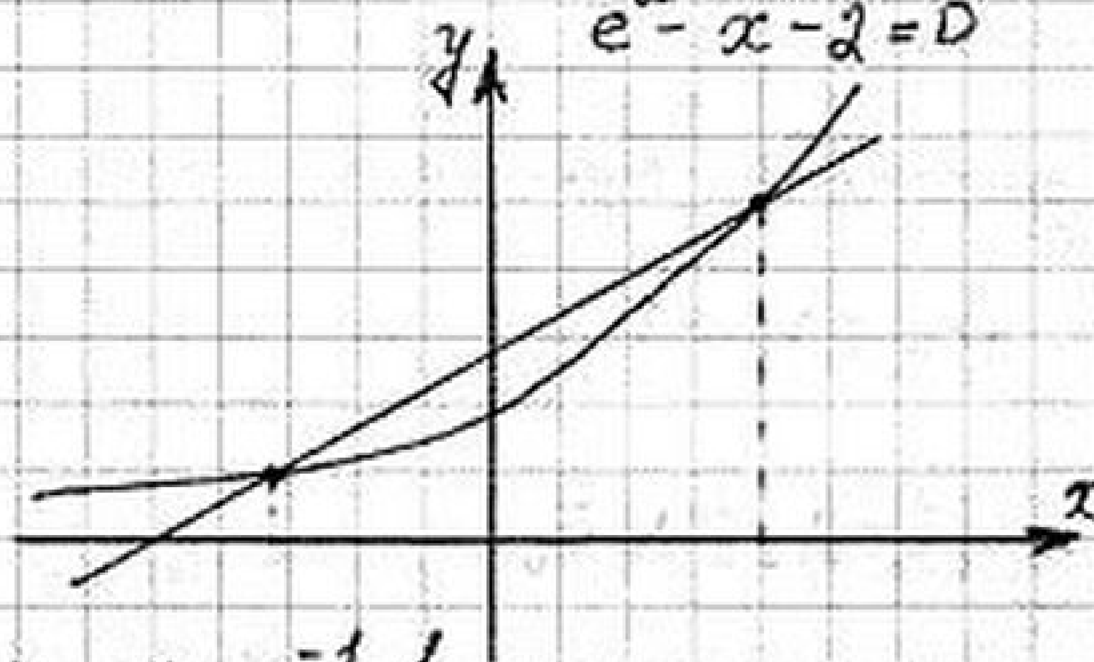
3) Доведемо єдиність a. $\exists a' : a' = F(x')$

$$\rho(a, a') = \rho(F(a), F(a')) \le q\rho(a, a')$$

$$\underbrace{\rho(a, a')}_{0} \underbrace{(1-q)}_{0} \le 0 \Rightarrow \rho(a, a') = 0 \qquad a' = a.$$

Побудувати ітераційні процеси для розв'язку рівняння

$$e^x - x - 2 = 0$$



$y = e^x$
$y = x + 2$

$a_1 \in [-2; -1] = X \qquad a_2 \in [1, 2] = X$

Шукаємо нерухому точку

$x = e^x - 2 = F(x)$

$-2 \le x \le -1$

$e^{-2} \le e^x \le e^{-1}$

$e^{-2} \le e^{-2} - 2 \le e^x - 2 \le e^{-1} - 2 \le -1$

$F(x) \in [-2; -1] \Rightarrow F : X \to X$

$|F'(x)| = e^x \le e^{-1} = \frac{1}{e} = q < 1$

$x_n = e^{x_{n+1}} - 2$

$n = 1, 2 \dots n$

$a_1 = \lim x_n$

$$\rho(x_n, a_1) \le \frac{\frac{1}{e^n}}{1 - \frac{1}{e^n}} \rho(x_1, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Границя функції векторного аргументу

$f(\bar{x}) \quad \bar{x} \in X \in R^m \qquad \bar{x} = (x_1, \dots x_n)$

Означення (Коші) $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = A = const$

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \; \delta = \delta(\varepsilon, \bar{x}, f) > 0 : |f(x) - A| < \varepsilon$

при $\forall \bar{x} \in X : \; 0 < \rho(\bar{x}, \bar{x}_0) < \delta$

Зауваження $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x})$ на-ся m-кратною границею.

1) Оскільки збіжність в просторі покоординатна, то $\bar{x} \to \bar{x}_0$ тоді і тільки тоді, коли кожна координата $\bar{x}$ прямує до кожної координати $\bar{x}_0$ одночасно і незалежно.

2) У випадку $m = 1 \to R^1$ ми мали: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$
У випадку $m > 1$ такого критерію не існує.

Приклад: Чи існують границі при $\bar{x} \to 0$ ф-ї:

1) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$

2) $g(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}$

$$f(x_1, kx_1) = \frac{kx_1^2}{x_1^2 + k^2 x_1^2} = \frac{k}{1 + k^2} \Rightarrow \not\exists \lim_{x\to 0} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

2) $g(x_1, kx_1) = \frac{kx_1^3}{x_1^4+k^2x_1^2} = \frac{k}{x_1^2+k^2} \to 0$ $\quad \nexists \lim\limits_{\bar x\to\bar 0} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2+x_2^2}$

Але $x_1 = x_2^2$, границі не існує.

Зауваження: Для границь ф-ї векторного аргументу справедливі теореми для звичайних ф-й.

Неперервність ф-ї векторного аргументу в точці

Поняття околу в m-вимірному просторі: відкритим околом радіуса δ в т. $\bar x_0$ на-ся множина

$$U_\delta(\bar x_0) = \{\bar x \in R^m : \rho(\bar x, \bar x_0) < \delta\}$$

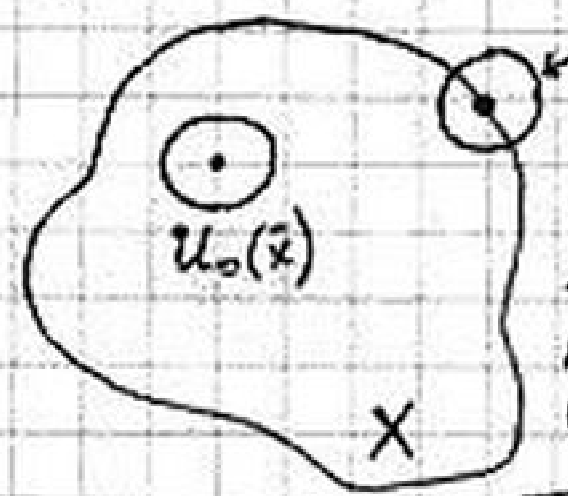
Проколотий окіл

$$\mathring{U}_\delta(\bar x_0) = \{\bar x \in R^m : \rho(\bar x, x_0) < \delta \setminus \bar x_0\}$$

Означення: т. $\bar x_0 \in X \subseteq R^m$ на-ся внутрішньою т. мн-ни X, якщо існує окіл точки, що повністю лежить в X

$\bar x_0$ на-ся межевою т. мн-ни X, якщо $\forall$ околу точки існують т., які належать мн-ні X і т., які не належать мн-ні X. Сукупність усіх межевих точок — межа.

Якщо межа належить X, то вона на-ся замкнутою межею



Межеві т-ки + внутрішні т-ки є граничними т-ми мн-ни X. Характерною властивістю граничної точки є те, що $\forall$ околу $\exists\ \infty$ точок з мн-н X.

Точка X на-ся ізольованою, якщо $\exists$ окіл такий що в ньому немає інших точок мн-ни X окрім цієї точки.

Нехай $f(\bar x)$, $\bar x \in X$, $\bar x_0$ - внут. точка на X

Означення 1 (Коші) Ф-ся f - неперервна в т. $x_0 \overset{def}{\iff}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\bar x_0, f, \varepsilon): |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x: \rho(x, x_0) < \delta$$

Означення 2 (Мовою границь)

Ф-ся f - неперервна в т. $x_0 \overset{def}{\iff} \lim\limits_{\bar x \to \bar x_0} f(\bar x) = f(\bar x)$

Означення 3 (Гейне) f- неперервна в т. $\bar x_0 \overset{def}{\iff}$

$$\forall \bar x_n \in X: \bar x_n \to \bar x_0 \Rightarrow \Delta f(\bar x_0) = f(\bar x + \Delta \bar x) - f(\bar x) \to 0, \ \Delta x \to 0$$

Основні локальні властивості неперервних ф-й

Т.1 f - неперервна в $\bar x_0$, то вона обмежена в $U_\delta(\bar x)$

Т.2 Якщо f - неперервна в т. $\bar x_0$ і $f(\bar x_0) > 0$ ($f(\bar x_0) < 0$) то

$f(\bar x) > 0$ ($f(\bar x) < 0$) $\forall x \in U_\delta(\bar x_0)$.

Т3. Нехай f, g – неперервні в x_0.
Тоді $f+g$ – неперервна в x_0

Cf – неперервна $C = const$

$f \cdot g$ – неперервна в $\bar{x}_0$

$\frac{f}{g}$ – $g \neq 0$, неперервна в $\bar{x}_0$

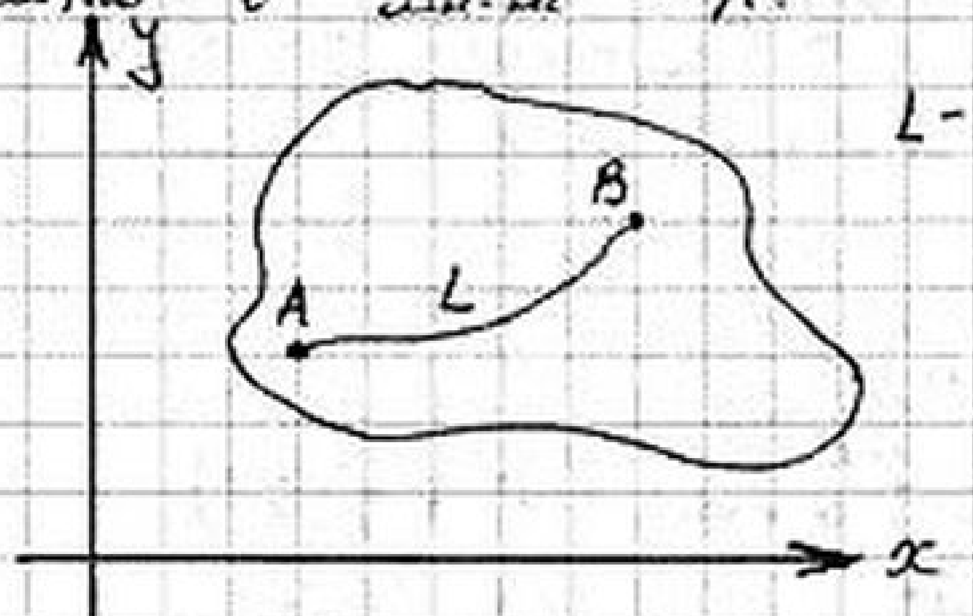
Теорема 4 (Про неперервність складної ф-ї)

Нехай $f(U_1(x_1, x_2, x_3), U_2(x_1, x_2, x_3 \ldots), U_3(x_1, x_2 \ldots)) = f(U(x))$, і $U(\bar{x})$ – неперервна в $\bar{x}_0$, тоді $f(U(x))$ – непер. в $\bar{x}_0$.

Глобальні властивості неперервних ф-й

Означення 1 (Зв'язної множини)

Мн-на $X \in R^m$ на-ся зв'язаною якщо будь-які дві точки мн-ни можна з'єднати неперервною кривою, яка повністю лежить в мн-ні X.

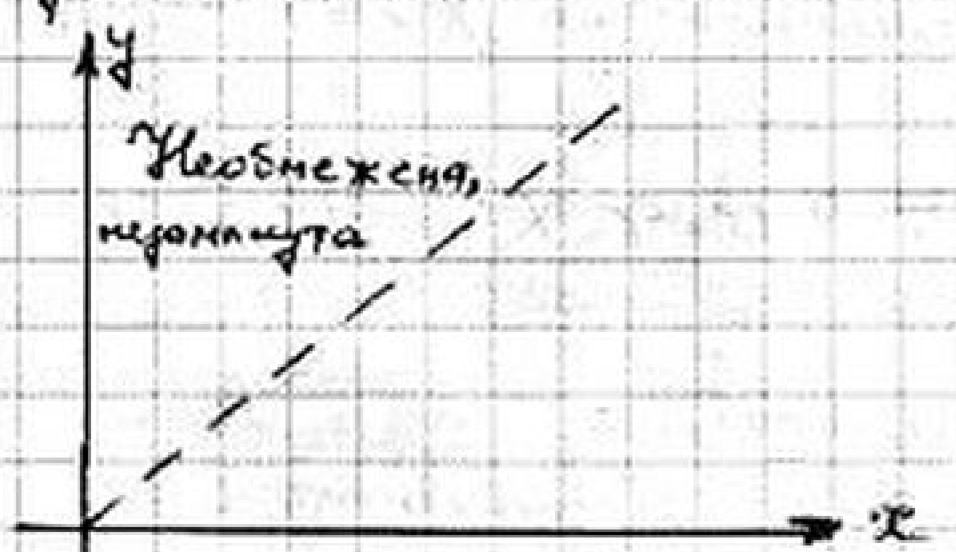


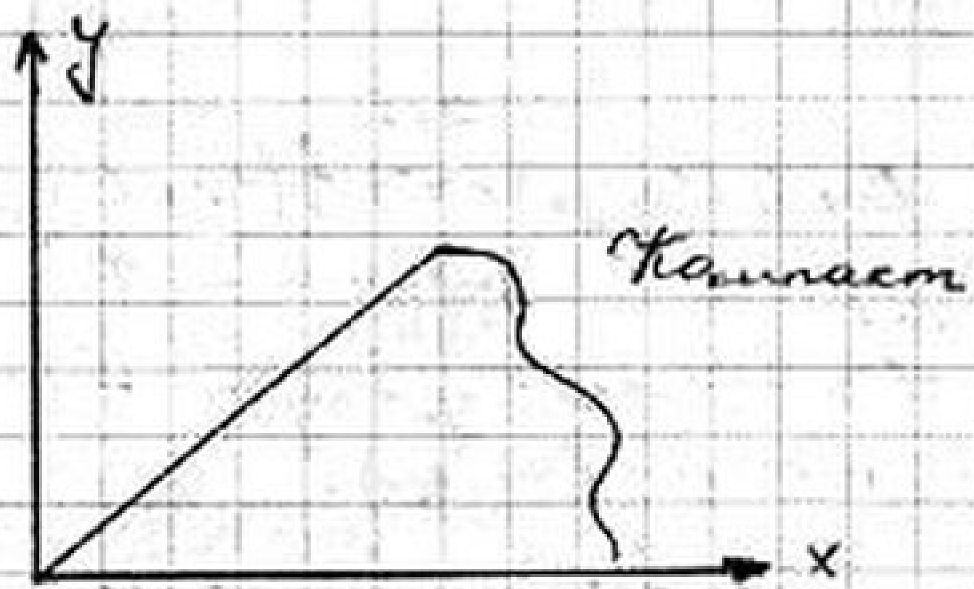
L – неперервна крива

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{– неперервні ф-ї}$$

$\alpha \leftrightarrow A \quad \beta \leftrightarrow B \qquad x, y \in C[\alpha, \beta]$

Означення 2 Мн-на $X \subset R^m$ на-ся компактом в R^m, якщо вона замкнута (містить всі свої граничні точки) і обмежена (мн-ну X можна помістити в круг скінченного радіусу).





Якщо X – компакт в R^m, то $\forall$ послідовності $\bar{x}_n \in R^m$ можна виділити збіжну підпослідовність

$$\forall X_n \in X \Rightarrow \bar{x}_n \text{ – обмежена} \Rightarrow x_n^i \ (i = 1, \ldots n) \text{ – обмежена}$$

$$\exists\, x^i_{n_k} \to x^i_0 \quad (i=1,\dots m)$$

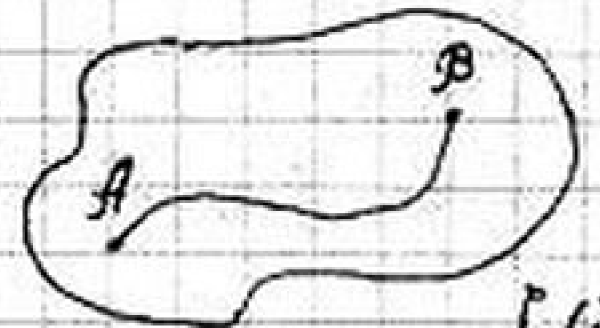
$$\overline{x}_{n_k} \to \overline{x}_0 = (x_0^1,\dots, x_0^m) \in X$$

Теорема 1 (Больцано - Коші)

Нехай $f(x)\in C_X$, X - зв'язна мн-на в R^m, $f(\overline{a})=c$, $f(\overline{b})=d$ і $c\ne d$. $\overline{a},\overline{b}\in X$

Тоді $\forall$ числа ξ: $c<\xi<d$ $\exists\, \overline{\xi}$: $f(\overline{\xi})=\xi$

Доведення $(n=2)$



$$L: \begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases} \in C_{[\alpha,\beta]}$$

$$f(\overline{x})\Big|_{\overline{x}\in L} = f(x(t),y(t))=\varphi(t)$$

$\varphi(t)\in C_{[\alpha,\beta]}$; $\varphi(\alpha)=f(a)=c$

$\varphi(\beta)=f(b)=d$ Дана теорема випливає з теореми Больцано - Коші для ф-ї однієї змінної

Теорема 2 (I теорема Вейєрштраса)

Нехай $f\in C_X$, X - компакт в R^m, тоді f - обмежена

$$m\le f(x)\le M \quad \forall\, \overline{x}\in X$$

Дов. — аналогічно $m=1$

Теорема 3 (II теорема Вейєрштраса)

Нехай: $f\in C_X$, X - компакт в R^m

Тоді $\exists\, \overline{x}_*, \overline{x}^*\in X$: $\sup\{f(x)\}=\max f(x)=f(\overline{x}^*)$

$\inf\{f(x)\}=\min f(x)=f(\overline{x}_*)$

Теорема 4 (Кантора)

Нехай $f\in C_X$; X - компакт в R^m

* Означення f на-ся рівномірно неперервною на $X \overset{def}{\iff} \forall\varepsilon>0$ $\exists\, \delta=\delta(\varepsilon,f,X)>0$:

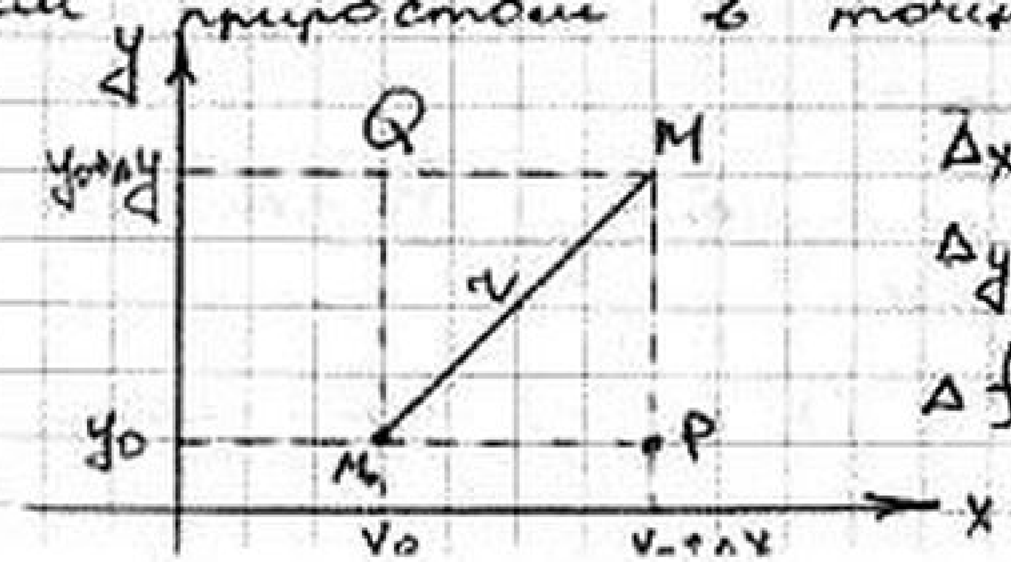
$$|f(\overline{x})-f(\overline{x}_0)|<\varepsilon \quad \forall\, \overline{x},\overline{x}_0\in X: \rho(\overline{x},\overline{x}_0)<\delta$$

Диференційне числення для функцій векторного аргументу

$U=f(x,y)$

Означення: Величина $\Delta_x f(x_0,y_0) \overset{def}{\iff} f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)$ на-ся частинним приростом по змінній x. в точці $(x_0;y_0)$.

$\Delta f(x_0,y_0) \overset{def}{\iff} f(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)-f(x_0;y_0)$ на-ся повним приростом в точці (x_0,y_0).



$$\Delta_x f(M_0)=f(P)-f(M_0)$$

$$\Delta_y f(M_0)=f(Q)-f(M_0)$$

$$\Delta f(M_0)=f(M)-f(M_0)$$

Величина $\frac{\Delta_x f(M_0)}{\Delta x}$ – середня швидкість зміни ф-ї в напрямі OX

Означення: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(M_0)}{\Delta x} = f'_x(M_0)$ – частинна похідна, шв-ть зміни ф-ї в т. M_0 в напрямку OX

Якщо береться похідна по якійсь змінній, то всі інші змінні вважають сталими. При цьому використовують всі відомі правила диференціювання

Позначення $U'_x = \frac{\partial U}{\partial x}$ – єдиний символ

Приклад: $U = \left(\sin\frac{x}{y}\right)^z$ $\quad U'_x = z\left(\sin\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left(\sin\frac{x}{y}\right)' =$

$= z\left(\sin\frac{x}{y}\right)^{z-1} \cdot \cos\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y}$; $\quad U'_y = z\left(\sin\frac{x}{y}\right)^{z-1} \cos\frac{x}{y}\left(-\frac{x}{y^2}\right)$

$U'_z = \left(\sin\frac{x}{y}\right)^z \ln\left(\sin\frac{x}{y}\right)$.

Диференційовність і диференціал ф-ї векторного аргументу

Означення: Ф-я $f(x,y)$ на-ся диференційовною в т. $M_0(x_0; y_0)$ якщо повний приріст можна представити у вигляді

(*) $\quad \Delta f(M_0) = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + \alpha_1(r)\Delta x + \alpha_2(r)\Delta y$, де α_1, α_2 – нескінченно малі при $r \to 0$, A_1, A_2 не залежать від Δx і Δy.

$$\alpha_1(r)\Delta x + \alpha_2(r)\Delta y = o(r)$$

$$\frac{\alpha_1(r)\Delta x}{r} + \frac{\alpha_2(r)\Delta y}{r} \to 0 \qquad \left(\frac{\Delta x}{r} < 1;\ \frac{\Delta y}{r} < 1\right).$$

$A_1 \Delta x + A_2 \Delta y \overset{def}{<=>} d f(x,y)$ – повний диференціал

*Якщо ф-я є диференційовна, її називають гладкою

Теорема 1 (Необхідна умова диференц. ф-ї).

Якщо f – диференційовна, то:

① $\exists\ f'_x(M_0),\ f'_y(M_0)$

② $d f(M_0) = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y$

Доведення: Нехай виконується (*)

Покладемо $\Delta y = 0,\ \Delta x \neq 0 \Rightarrow \Delta_x f(M_0) = A_1 \Delta x + o(\Delta x) \ :\ \Delta x$

Перейдемо до границі: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(M_0)}{\Delta x} = A_1 \frac{\Delta x}{\Delta x} + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to 0$

$f'_x(M_0) = A_1$;

Якщо $f(x,y) = x$

$df = dx = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y = \Delta x + 0$.

Якщо x, y – незалежні змінні і f – диференційовна, то має місце формула

$$d f(x,y) = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y$$

$dx = \Delta x \quad dy = \Delta y$ – довільні прирости.

Теорема 2. Якщо f - диференційовна, то вона неперервна. Це випливає з (*)

Приклад: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ x=0, y=0, & f(x,y)=0 \end{cases}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{0}{\Delta x^2+0} + 0}{\Delta x} = 0$$

В точці $(0,0)$ існують скінченні похідні але f не диференц.

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = (y = kx) = \frac{k}{1+k^2} - \text{ границя не існує!}$$

Теорема 3 (Достатня умова диференційовності)

Нехай $\exists f'_x, f'_y$ - неперервні в т. X_0. Тоді f диференційовна в т. x_0.

Доведення

$$\Delta f(M_0) = f(M) - f(M_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y_0) + f(x_0, y_0+\Delta y_0) - f(x_0, y_0) =$$

Застосуємо т. Лагранжа

$$= f'_x(\xi, y_0+\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0, y)\Delta y = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + o(r)$$

Зауваження: C^1_X - клас ф-й, які мають на мн-ні X неперервні частинні похідні (клас неперервно диференційовних ф-й)

Теорема 4 (Диференційовність складної ф-ї)

$W = F(u(x,y), v(x,y))$ u, v - проміжні аргументи

Нехай $\begin{matrix} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{matrix}$ диференційовні у т. (x,y)

$W = W(u,v)$ - диференційовна у т. (u,v)

Тоді W - диференційовна в т. (x,y) і

$$dW = f'_u du + f'_v dv$$

Доведення:

$$\Delta W = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = (f(u(x+\Delta x, y+\Delta y), v(x+\Delta x, y+\Delta y))$$
$$- f(u(x,y), v(x,y)) = f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u,v) = f'_u \Delta u + f'_v \Delta v + o(\rho) \quad \rho \to 0 =$$
$$= f'_x(u'_x \Delta x; v'_y \Delta y + o(r)) + f'_y(u'_x \Delta x, v'_y \Delta y + o(r)) + o(\rho) = f'_u du + f'_v dv + o(r) +$$
$$+ o(\rho); \qquad \frac{o(\rho)}{r} = \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\rho}{r} = \frac{o(\rho)}{\rho} \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{r}\right)^2}}_{\text{обмежене}} \to 0$$

$$\Delta W = f'_u du + f'_v dv + o(r)$$

Диференціал має властивість інваріантності. Байдуже, u, v - залежні чи незалежні змінні.

Теорема 5. Нехай $u=u(x,y)$, $V=V(x,y)$ – диференційовні ф-ї. Тоді: 1-4 – теж неперервні, і мають місце такі рівності:

1. $u+V$ — $d(u+V)=du+dV$
2. cu, c-const — $c\,du$
3. uV — $u\,dV+V\,du$
4. $\frac{u}{V}$, $V\neq 0$ — $\frac{V\,du-u\,dV}{V^2}$

Доведення:

1) $f(u,v)=u+v$ $\quad f'_u=1$ $\quad f'_v=1$ – неперервні, f – диференц.

$$d(u+V)=1du+1dV=du+dV.$$

3) $f(u,v)=uV$ $\quad f'_u=V$ $\quad f'_V=u$ – непер., диференц.

$$d(uV)=u\,dV+V\,du.$$

Формула частинної похідної складної ф-ї

З ф-ли $dW=f'_u du+f'_V dV$ випливає:

$$dW=u'_x dx+u'_y dy=f'_u(u'_x dx+u'_y dy)+f'_v(v'_x dx+v'_y dy)$$

dx, dy – будь-який приріст аргументів.

$$\begin{cases}dx=1\\dy=0\end{cases}\quad W'_x=f'_u u'_x+f'_v v'_x$$

$$\begin{cases}dx=0\\dy=1\end{cases}\quad W'_y=f'_u u'_y+f'_v v'_y$$

Частинна похідна складної ф-ї по незалежній змінній рівна сумі добутків частинних похідних по проміжному аргументу на частинні похідні проміжних аргументів по незалежній змінній

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Нехай $W=f(t,x,y,z)$ $\quad x=x(t)$ $\quad y=y(t)$ $\quad z=z(t)$

$$W=W(t)$$

$$\frac{dW}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{dy}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{dz}{dt}.$$

Приклад: Відомо, що $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$, $\begin{cases}x'=y\\y'=-x\end{cases}$ $\quad W=x^2+y^2$ $\quad \frac{dW}{dt}$?

$$\frac{dW}{dt}=2xx'+2yy'=2xy-2yx=0.$$

Зауваження: Запишемо всі формули для загального випадку:

① $W = f(x_1, \dots x_m) = f(\bar{x})$

$$dW = \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(\bar{x})dx_i$$

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}; \dots \frac{\partial f}{\partial x_m}\right)$$

$$d\bar{x} = (dx_1, dx_2 \dots dx_m)$$

Ввівши такі позначення, маємо:

$$dW = (\text{grad } f, d\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}, d\bar{x}\right)$$

② $W = f(x_1, x_2 \dots x_m) = f(\bar{x})$

$x_1 = x(t_1, \dots t_k)$ $\quad \bar{x} = \bar{x}(\bar{t}) \quad \bar{x} \in R^m \quad t \in R^k$

$$dW = \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(\bar{x})\, dx_i$$

③ $$\frac{\partial W}{\partial \bar{x}_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_j} \quad j = 1, \dots k$$

Частинні похідні вищих порядків

$U = U(x, y)$ $\quad U'_x, U'_y$ – частинні похідні I порядку

$U''_{xx} = (U'_x)'_x \quad U''_{yy} = (U'_y)'_y$ – ч. п. II порядку

Приклад: $U = \dfrac{x}{y} \quad U'_x = \dfrac{1}{y} \quad U'_y = -\dfrac{x}{y^2}$

$U''_{xx} = 0 \quad U''_{yy} = \dfrac{2x}{y^3}$

$U''_{xy} = -\dfrac{1}{y^2} \quad U''_{yx} = -\dfrac{1}{y^2}.$

Теорема: $\exists\ U'_x, U'_y, U''_{xy}, U''_{yx}$, причому $U''_{xy}, U''_{yx} \in C_x$

Тоді $U''_{xy} = U''_{yx}$.

Доведення:

$$\varphi(x,y) = f(x+\Delta x, y) - f(x,y);$$

$$\psi(x,y) = f(x, y+\Delta y) - f(x,y);$$

$A = \varphi(x, y+\Delta y) - \varphi(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x,y)$

$B = \psi(x+\Delta x, y) - \psi(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - \psi(x+y+\Delta y) + f(x,y)$

За формулою Лагранжа

$$A = \varphi'_y(x, y+\Delta y)\Delta y = [f'_y(x+\Delta x; y+\Delta y\Theta_1) - f'_y(x; \Theta y)] =$$

$$= f''_{yx}(x+\Theta_1\Delta x; y+\Theta_1\Delta y)$$

Аналогічно і для B. Перейшовши до границь, дістанемо: $f''_{xy} = f''_{yx}$.

C^n_x – клас неперервних, диференц. до n-го порядку ф-й

Диференціали вищих порядків

$u = u(x,y)$ $\qquad du = u'_x dx + u'_y dy$ — диференціал I порядку

$$d^2u \overset{def}{=} d(d(u)) = d(u'_x dx + u'_y dy) = dx\, d(u'_x) + dy\, d(u'_y) =$$
$$= dx(u''_{xx} dx + u''_{xy} dy) + dy(u''_{xy} dx + u''_{yy} dy) = u''_{xx} dx^2 + 2u''_{xy} dx dy +$$
$$+ u''_{yy} dy^2$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 u$$

$$d^n u \overset{def}{=} d(d^{n-1} u), \quad n = 1 \dots n \qquad d^1 u = du \qquad d^0 u = u.$$

Операторна формула:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n u$$

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^n u$$

Диференціали вищих порядків не мають властивості інваріантності

Порівняємо диференціали для складної і звичайної ф-ії

$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 z$, де

$z = (x,y)$; x, y — незал. змінні

$z = z(x,y)$ $\qquad x = x(t_1, t_2)$, $y = y(t_1, t_2)$

t_1, t_2 — незал. змінні

$dz = z'_x dx + z'_y dy$

Інваріантність форми другого диференціалу зберігається, якщо x, y — лінійні.

Тоді $d^2x = d^2y = 0$.

$$d^2 z = d(dz) = d(z'_x dx + z'_y dy) =$$
$$= d(z'_x dx) + d(z'_y dy) =$$
$$= dx(z''_{xx} dx + z''_{xy} dy) + z'_x d^2 x +$$
$$+ dy(z''_{yx} dx + dy\, z''_{yy}) + z'_y dy^2 =$$
$$= z''_{xx} dx^2 + 2 z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2 + z'_x d^2 x + z'_y d^2 y$$

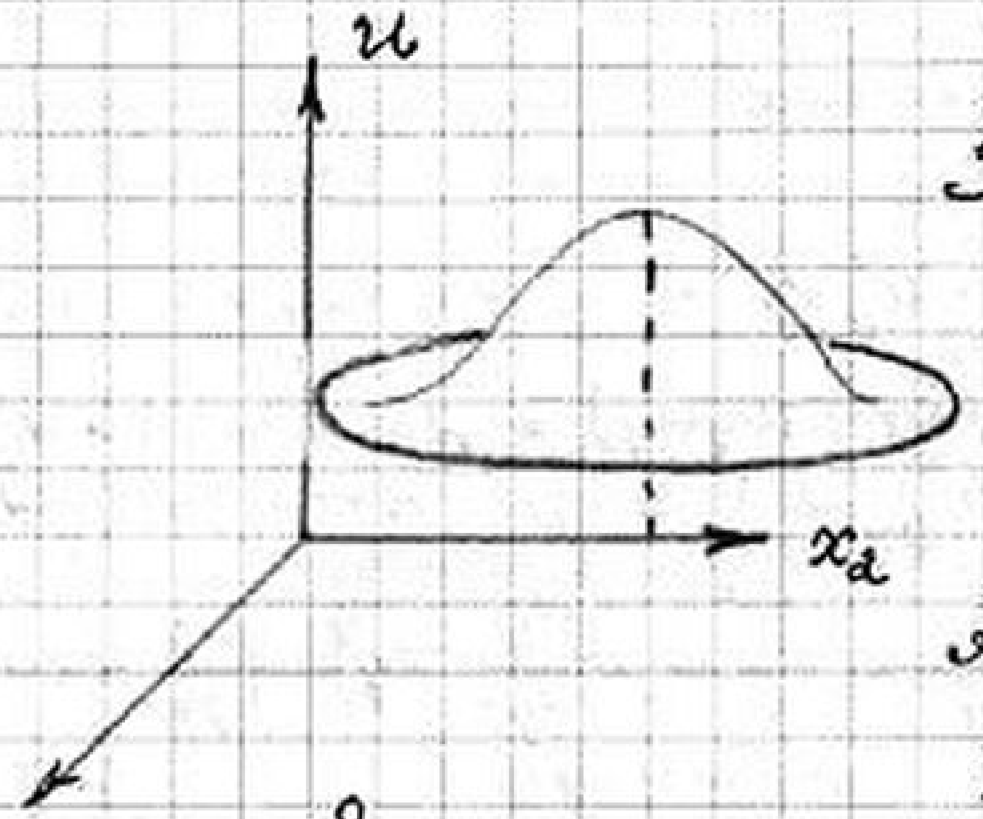
Формула Тейлора для функцій векторного аргументу

$u = f(\bar{x})$ — диференц. в т. x_0 $\qquad \Delta f(\bar{x}_0) = d(\vec{f}(\bar{x}_0)) + o(\|\Delta x\|)$, $r \to 0$

Формула Тейлора в диференційному вигляді:

$$\Delta F(x_0) = dF(dx) + \frac{1}{2!} d^2 F(t_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n F(t_0)$$

Знаходження внутрішніх локальних екстремумів ф-ії В/А



$$u = f(x_1, x_2) = f(\bar{x})$$

З геометричної точки зору це рівняння деякої поверхні.

$\bar{x} \in X$

Означення $f \in C_X$, $\bar{x}_0$ - вн. точка X, $x \in X$ в точці x_0 має локальний максимум (мінімум), якщо $\forall \bar{x} \in U_{\delta}(x_0)$

$$\Delta f(x_0) = f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) \leq 0 \quad (\geq 0)$$

Якщо знак строгий, то і екстремум теж строгий.

Необхідні умови локального екстремуму

Нехай f диференцц. в т. $\bar{x}_0 (x_{01}, x_{02})$ має внутрішній локальний екстремум. Тоді і $\varphi(x_0) = f(x_1, x_{02}) = \varphi(x_1)$ має внутрішній лок. екстремум, в т. x_{01} $\varphi'(x_{01}) = 0$.

Теорема 1 (Необхідна умова вн. лок. екстремуму)

Якщо $f(\bar{x}_0)$ має внутрішній локальний екстремум, то або $d(f(x_0)) = 0$, або f - не диференцц. в x_0

Еквівалентно, що

$$d f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1'(x_0) = 0 \\ f_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Припустимо, що ф-я $f \in C_X^2$ (неперервна з похідними 2-го порядку) x_0 - стаціонарна точка ($f(x_0) = 0$).

Запишемо формулу Тейлора:

$$\Delta f(x_0) = d f(x_0) + \frac{1}{2} d^2 f(\xi) = \frac{1}{2} d^2 f(\xi) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \ldots \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^2 f \Big|_{x=\xi} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(\xi) dx_i dx_j =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(x_0) dx_i dx_j + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i,j=1}^{m} d_{ij} dx_i dx_j}_{\gamma}$$

$$\Delta f(\bar{x}_0) = \frac{1}{2} d^2 f(x_0) + \gamma o(r^2), \; r \to 0$$

Отже якщо $d^2 f(\bar{x}_0) > 0$, то в $\bar{x}_0$ локальний мінімум

якщо $d^2 f(\bar{x}_0) < 0$, то в $\bar{x}_0$ локальний максимум

якщо $d^2 f(x_0)$ - знакозмінна, $\bar{x}_0$ - не екстремум

$d^2 f(x_0) \leq 0$, $d^2 f(x_0) \geq 0$ - Нічого не можна сказати

Нехай $f''_{x_i x_j}(x_0) = a_{ij}$

$$\varphi = d^2 f(x_0) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} dx_i dx_j \text{ - квадратична форма}$$

Квадратична форма φ на-ся додатньо (від'ємно) визначеною, якщо вона скрізь додатня (від'ємна) крім $dx_i = dx_j = \ldots = 0$.

φ на-ся знакозмінною, якщо вона змінює знак

φ на-ся від'ємно (додатньо) сталою, якщо $\varphi \le (\varphi \ge) 0$.

Приклад: $n=2$ $\quad \varphi = 2dx_i^2 + 10dx_j^2$ – додатньо визначена

$\varphi = -2dx_i^2 + 10dx_j^2$ – від'ємно визначена

$\varphi = dx_i\, dx_j$ – знакозмінна

$\varphi = (dx_1 - 2dx_2)^2$ – додатньостала

Критерій Сильвестра (знаковизначеність квадратичної форми)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Розглянемо діагональні мінори.

$\varphi > 0 \quad \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \ldots \Delta_n > 0$

$\varphi < 0 \quad \Delta_1 < 0\ \ \Delta_2 > 0, \ldots \Delta_n (-1)^n > 0$

$\varphi \ge 0 \quad \Delta_1 \ge 0,\ \Delta_2 \ge 0, \ldots \Delta_n \ge 0$

$\varphi \le 0 \quad \Delta_1 \le 0,\ \Delta_2 \le 0, \ldots \Delta_n \le 0$

В інших випадках φ – знакостала.

Доведення критерія Сильвестра при $n=2$

$$\varphi = a_{11} dx_1^2 + 2a_{12} dx_1 dx_2 + a_{22} dx_2^2$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad A_1 = a_{11} \quad A_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

$$\varphi = a_{11}\left(dx_1^2 + 2dx_1 \frac{a_{12}}{a_{11}} dx_2 + \frac{a_{22}}{a_{11}} dx_2^2 + \frac{a_{12}}{a_{11}} dx\right.$$

$$= \Delta_1 \left[\left(dx_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} dx_2\right)^2 - \frac{\Delta_2}{\Delta_1^2} dx_1^2\right]$$

$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0 \iff \varphi > 0$

$\Delta_1 < 0\ \ \Delta_2 > 0 \iff \varphi < 0$

$\Delta_1 > 0\ \ \Delta_2 = 0 \iff \varphi \ge 0$

$\Delta_1 < 0\ \ \Delta_2 = 0 \iff \varphi \le 0$

$\Delta_1 \ne 0\ \ \Delta_2 < 0$ – знакозмінна форма

Зауваження: Матриця квадратичної форми – другого диференціала ф-ї в точці має вигляд:

$n=2$
$$A(\bar{x}_0) = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(\bar{x}_0) & f''_{x_1x_2}(\bar{x}_0) \\ f''_{x_2x_1}(\bar{x}_0) & f''_{x_2x_2}(\bar{x}_0) \end{pmatrix}$$

$n=3$
$$= \begin{pmatrix} f''_{x}(x_0) & f''_{xy}(x_0) & f''_{xz}(x_0) \\ f''_{yx}(x_0) & f''_{yy}(x_0) & f''_{yz}(x_0) \\ f''_{zx}(x_0) & f''_{zy}(x_0) & f''_{zz}(x_0) \end{pmatrix}$$

Приклад (Дослідження на локальний екстремум)

$$U = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$$

$$\begin{cases} U'_x = 2x + 2 = 0 \\ U'_y = 2y + 4 = 0 \\ U'_z = 2z - 6 = 0 \end{cases} \qquad x_0 = (-1; -2; 3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = 4 \\ \Delta_3 = 8 \end{matrix} \Rightarrow d^2U(x_0) > 0$$

$$U_{min} = U(-1; -2; 3).$$

$$U = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2 \qquad U \in C^{\infty}_{\mathbb{R}^2}$$

$$dU = 4x^3dx + 4y^3dy - 2xdx - 2(xdy + ydx) - 2ydx =$$

$$= (4x^3 - 2x - 2y)dx + (4y^3 - 2x - 2y)dy = 0$$

$$\begin{cases} 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$y^3 = x^3 \qquad M_1 = (0; 0)$$
$$y = x \qquad M_2 = (1; 1)$$
$$M_3 = (-1; -1).$$

$$d^2U = d(dU) = (12x^2dx - 2dx - 2dy)dx + (12y^2dy - 2dx - 2dy)dy =$$

$$= (12x^2 - 2)dx^2 + 2(-2)dxdy + (12y^2 - 2)dy^2$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 = 0 \end{matrix} \quad ?$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{matrix}$$ Локальний мінімум

$$A_2 = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$ Локальний мінімум

Визначимо екстремум в $(0; 0)$ за означенням (Визначимо знак приросту)

$$U = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$$

$$\Delta U = U(x + \Delta x; y + \Delta y) - U(x, y)$$

$$\Delta U(0; 0) = U(\Delta x; \Delta y) - U(0; 0) = \Delta x^4 + \Delta y^4 - \Delta x^2 - 2\Delta x\Delta y - \Delta y^2$$

Розглянемо випадки

1) $\Delta x = \Delta y$, $\quad \Delta U = 2\Delta x^4 - 4\Delta x^2 = 2\Delta x^2(\Delta x^2 - 2) < 0$

2) $\Delta y = -\Delta x \quad \Delta U = 2\Delta x^4 > 0$.

ΔU – знакозмінний в будь-якому околі точки $(0; 0)$

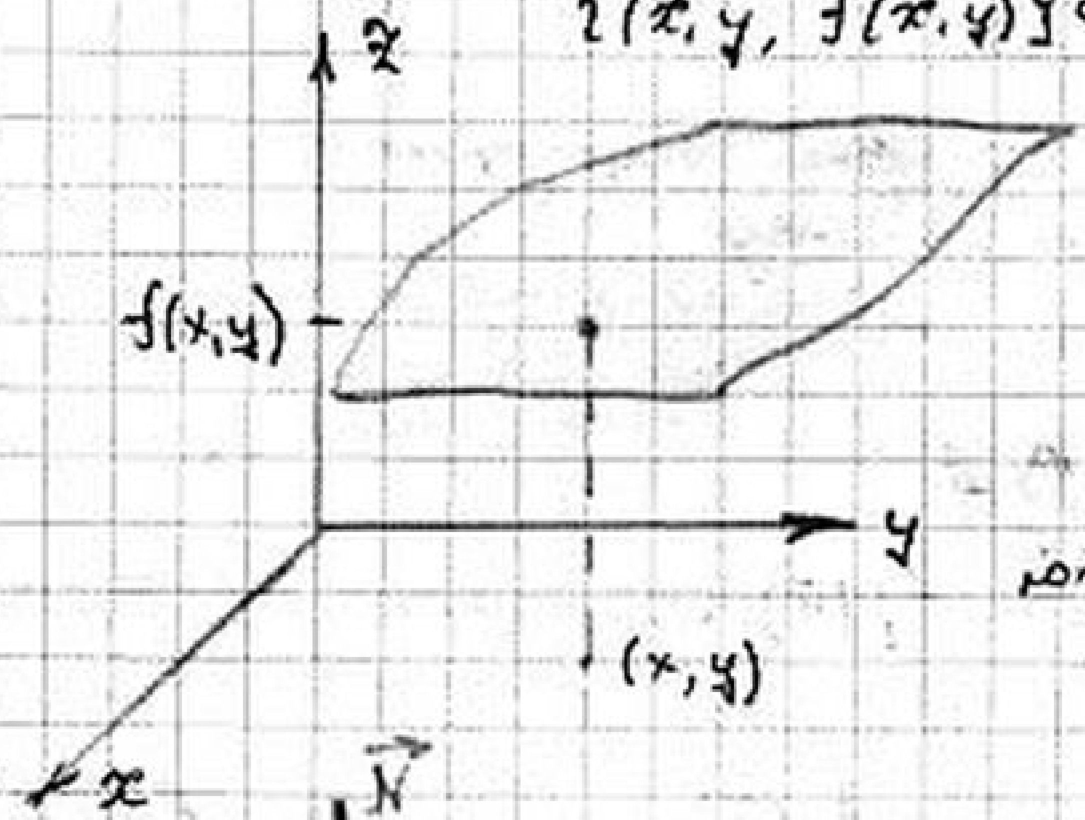
Локального екстремуму немає!

Рівняння дотичної площини в R^3

Нехай $z = f(x,y)$ $(x,y) \in D \subset R^2$

Графіком ф-ї $z = f(x,y)$ на-ся множина точок вигляду

$$\{(x, y, f(x,y)\} \subset R^3$$



Деякі поверхні

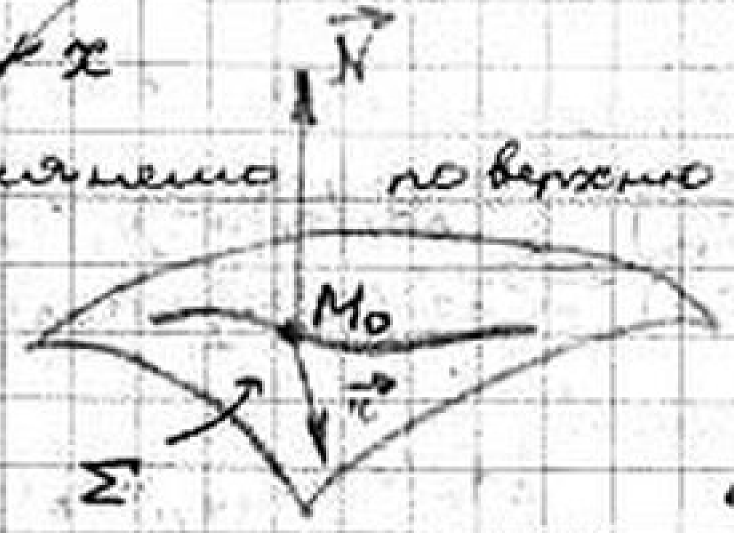
$z = x^2 + y^2$ – параболоїд

$z = \sqrt{x^2+y^2}$ – конус

Дуже часто поверхні задаються неявно

$x^2+y^2+z^2 = R^2$ – р-ня сфери

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ – трьохосний еліпсоїд.



Розглянемо поверхню $\Sigma: \ F(x, y, z) = 0$

$\forall M_0 \in \Sigma$

Проведемо через т. M_0 будь-яку гладку криву, що лежить на поверхні Σ

Нехай крива має рівняння

$$\Gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) & t \in (\alpha, \beta) \\ z = z(t) & t_0 \leftrightarrow M_0 \end{cases}$$

Оскільки Γ лежить на Σ,

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0 \qquad t \in (\alpha, \beta)$$

Продиференціюємо тотожність по t, причому $t = t_0$

$$F'_x(M_0)\dot{x}(t_0) + F'_y(M_0)\dot{y}(t_0) + F'_z(M_0)\dot{z}(t_0) = 0$$

$$\vec{N}(M_0) \overset{def}{=} \{F'_x(M_0); F'_y(M_0); F'_z(M_0)\} = \text{grad } F(M_0)$$

$M(x, y, z)$ $\qquad M_0(x_0; y_0; z_0)$ $\qquad \overrightarrow{MM_0} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$

$$(\vec{N}(M_0), \overrightarrow{MM_0}) = 0 \quad \forall M$$

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0$$

Поверхня Σ на-ся гладкою, якщо в кожній точці існує дотична площина, яка від точки до точки змінюється неперервно ($F(x; y; z) \in C^1_D$).

Диференціальне числення векторних функцій векторного аргументу

Система (1) на-ся векторною функцією векторного аргументу

$$\begin{cases} U_1 = f_1(x_1, x_2 \ldots x_m) \\ U_2 = f_2(x_1, x_2 \ldots x_m) \\ \ldots \\ U_n = f_n(x_1, x_2 \ldots x_m) \end{cases} \iff \overline{U} = \overline{f}(\overline{x})$$

$$R^m \to R^n$$

Приклад: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} : R^2 \to R^2$

$y_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$

$y_2 = a_2 x_1$

Границі векторних ф-й векторного аргументу

$\exists \lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f_i(\bar{x}) \quad i = 1, \ldots m$

Неперервність ВФВА

$\bar{f}(\bar{x})$ неперервна в т. $\vec{x_0} \overset{def}{\Leftrightarrow} f_i(\bar{x})$ неперервна в $\bar{x}_0$ $i = 1 \ldots m$

Диференційовність

$\bar{f}(\bar{x})$ диференц. в т. $\bar{x}_0$, якщо $f_i(\bar{x})$ диференц. в $\bar{x}_0$ $i = 1 \ldots m$

$\bar{u} = \bar{f}(\bar{x}) \Leftrightarrow \begin{matrix} u_1 = f_1(x_1, \ldots x_m) \\ u_2 = f_2(x_1, \ldots x_m) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \Delta f_1(x_0) = f'_{1x_1}(x_0)\Delta x_1 + \ldots \\ \Delta f_2(x_0) = f'_{2x_1}(x_0)\Delta x_1 + f'_{2x_2}(x_0) \ldots \\ \ldots \\ \Delta f_n(x_0) = f'_{nx_1}(x_0)\Delta x_1 + \ldots + f'_{nx_m} \end{matrix}$

Запишемо означення диференційовності

$$\Delta \bar{f}(\bar{x}_0) = \begin{pmatrix} f'_{1x_1}(x_0) & \ldots & f'_{1x_m}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f'_{nx_1}(x_0) & \ldots & f'_{nx_m}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \ldots \\ \Delta x_m \end{pmatrix}$$

Означення:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial(f_1, \ldots f_n)}{\partial(x_1, \ldots x_m)} \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \ldots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Матриця Остроградського-Якобі (Аналог похідної для ВФВА)

Таким чином $\Delta f(\bar{x}_0) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}_0)\Delta\bar{x} + o(r)$, $r \to 0$

Позначення: $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}_0)$ – Матриця Якобі

$\Delta\bar{x} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}$ – Вектор приростів незалежної змінної

Звернемо увагу, що $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}_0)\Delta\bar{x}$ – лінійна (відносно Δx) частина приросту, або диференціал

$$d\bar{f} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}_0)\Delta\bar{x}$$

Приклад: 1) $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ Це відображення $R^2 \to R^2$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

2) $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$ Відображення $R^3 \to R^2$
$y_2 = a_{21}x_1 \; a_{22}x_2 + a_{23}x_3$

$$\bar{y} = A\bar{x}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = A$$

Теорема (Достатня умова диференційовності ВФВА)

Для того, щоб ф-я $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ була дифер. на $X \subset R^m$ достатньо, щоб $f'_{i x_j} \in C_x^{1} \; \forall \; i = 1, \dots n$, $j = 1, \dots m$

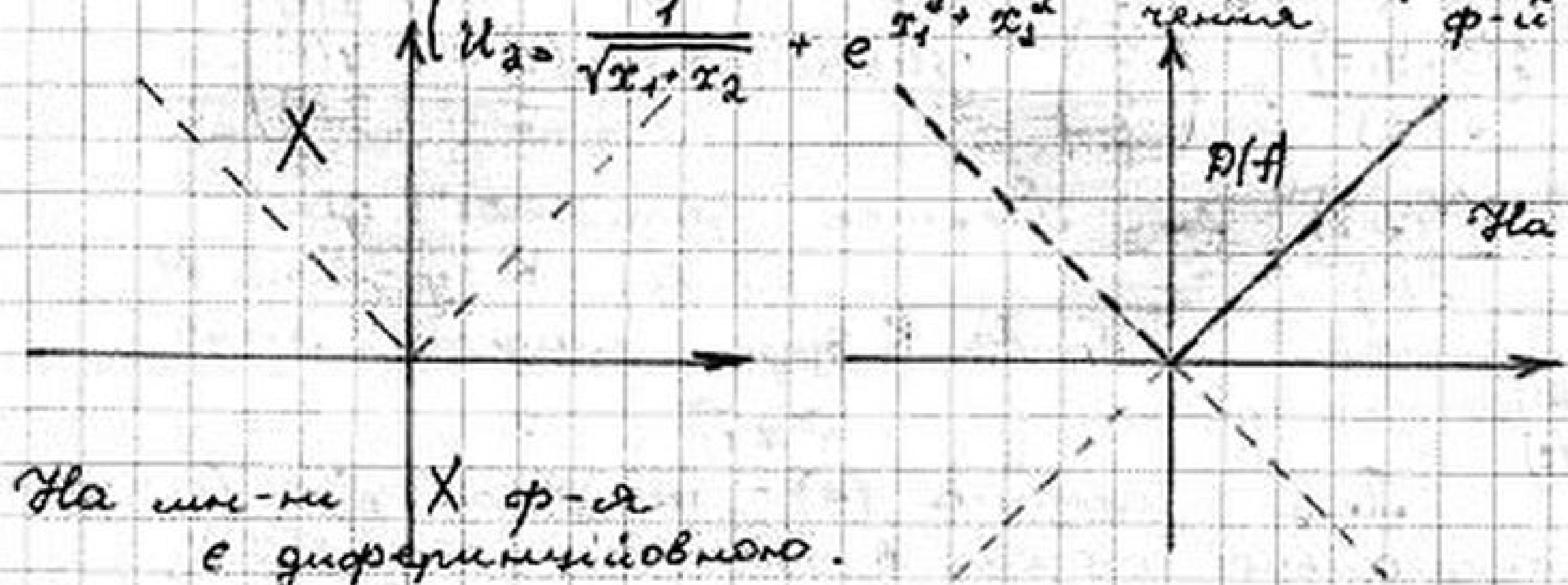
Приклад: Знайти область, в якій дана ф-я є диференц., обчислити матрицю Я-Я.

$$\begin{cases} U_1 = \sqrt{x_2 - x_1} - \sin(x_1 x_2) \\ U_2 = \dfrac{1}{\sqrt{x_1 + x_2}} + e^{x_1^2 + x_2^2} \end{cases}$$

Знаходимо область визначення ф-ії:

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 > x_1 \\ x_2 > -x_1 \end{cases}$$

На множині $D(\bar{f})$ ф-я є неперервною



На мн-ні X ф-я є диференційовною.

$$\frac{\partial(U_1, U_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2\sqrt{x_2 - x_1}} - x_2\cos(x_1 x_2) & \dfrac{1}{2\sqrt{x_2 - x_1}} - x_1\cos(x_1 x_2) \\ -\dfrac{1}{2}(x_1 + x_2)^{3/2} + e^{x_1^2 + x_2^2} \cdot 2x_1 & -\dfrac{1}{2}(x_1 + x_2)^{3/2} e^{x_1^2 + x_2^2} \cdot 2x_2 \end{pmatrix}$$

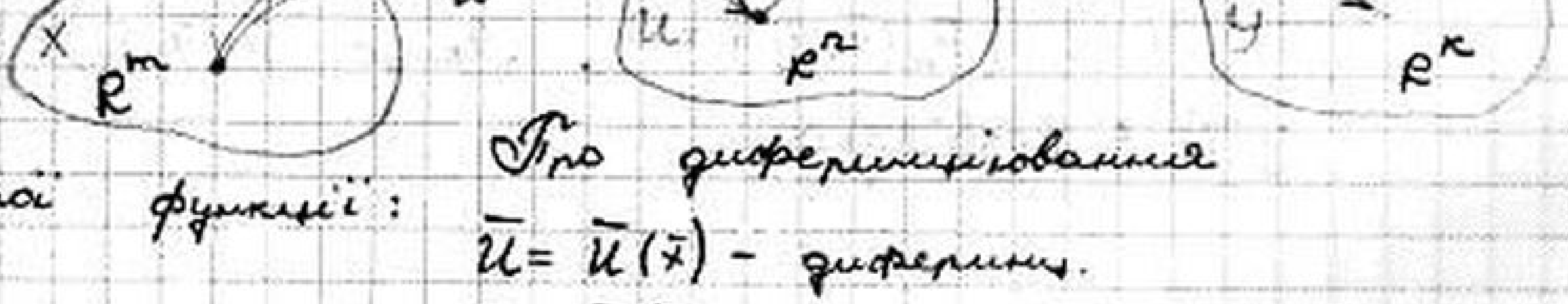
Основні властивості похідної ВФВА

1) $\dfrac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{x}} = O\,(n \times m) \quad \forall\, \bar{x} \to \bar{c}$, якщо $\bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_n \end{pmatrix}$

Похідна від const – нуль-матриця

2) $\dfrac{\partial(\bar{f} + \bar{g})}{\partial \bar{x}} = \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} + \dfrac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{x}}$

3) $\bar{f}(R^n \to R^m) \quad (C\bar{f})' = C\bar{f}' = \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \; \bar{F}$

4)


Про диференціювання складної функції:

$\bar{U} = \bar{U}(\bar{x})$ – диференц.

$\bar{f} = \bar{f}(\bar{u})$ – диференц.

$$\overline{F} = \overline{f}(\overline{u}(\overline{x})) \quad \underbrace{\frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{x}}}_{(m\times k)} = \underbrace{\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{u}}}_{(k\times n)} \times \underbrace{\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}}}_{(m\times n)}$$

Формула малих приростів

$$\Delta f(\overline{x}_0) = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{x}}(\overline{x}_0)\Delta\overline{x} + o(r) \approx \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{x}}(\overline{x}_0)\Delta\overline{x} = d\overline{f}(x_0)$$

Нехтуємо складовою $o(r)$

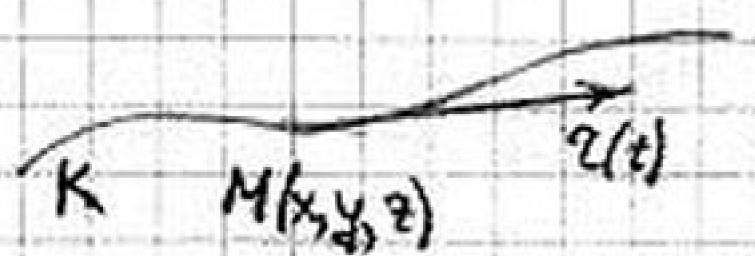
Геометричний смисл матриці Остроградського – Якобі диференційовного відображення з R^1 в R^3

$$(*) \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad t \in R^1 \quad t \to (x, y, z) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Якщо $x(t), y(t), z(t) \in C^1_T$, то система (*) описує деяку гладку криву.

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(t)} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \qquad \text{Нехай } \vec{r} = r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Тоді $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(t)} = \dot{\vec{r}}$ – вектор дотичної до кривої K у точці M



Крива K буде гладкою, якщо $\dot{\vec{r}} \neq \vec{0}$ на K.

Якщо система (*) – це закон руху (t – час) матеріальної точки в просторі по кривій K, то $\dot{\vec{r}}(t)$ – вектор миттєвої швидкості руху МТ.

Техніка диференціювання неявно заданих функцій

Означення 1 Кажуть, що ф-я $z = z(x,y)$ неявно задана на мн-ні $X \subset R^2$ за допомогою р-ня $F(x,y,z) = 0$, якщо вона є розв'язком цього р-ня.

$$F(x, y, z(x,y)) \equiv 0 \quad \text{на } X.$$

Приклад:

$$\left.\begin{matrix} z + x - y + x^2 = 0 \\ z = y - x^2 - x \end{matrix}\right] \begin{matrix} \text{Неявне задання} \\ \text{Явне задання} \end{matrix}$$

Означення 2 $\overline{y} = \overline{y}(x)$ $(\overline{x} \in R^m, \overline{y} \in R^n)$ неявно задана системою

$$\begin{cases} F_1(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = 0 \\ F_n(\overline{x}, \overline{y}) = 0 \end{cases}, \quad \text{якщо } \overline{F}(\overline{x}, \overline{y}) = 0 \text{ і}$$

$\overline{y}(x)$ є розв'язком.

Метод повного диференціювання (Знаходження частинних похідних і диференціалів неявно заданих ф-й)

Для того, щоб знайти диференціали неявно заданих ф-й, потрібно продиференціювати р-ня, що задають ф-ї і знайти звідти диференціали.

Приклад: ① $z = z(x, y):\ F(x, y, z) = 0 \quad z'_x - ?\ z'_y - ?$

$$dF(x,y,z) = 0 = F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0$$

$$dz = -\frac{F'_x dx + F'_y dy}{F'_z}; \quad z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

② $\begin{matrix} r = r(x, y) \\ \varphi = \varphi(x, y) \end{matrix} :\ \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad r'_x \quad r'_y$

$$\begin{cases} dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi \\ dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} dx & -r\sin\varphi \\ dy & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos\varphi\, dx + r\sin\varphi\, dy$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos\varphi & dx \\ \sin\varphi & dy \end{vmatrix} = -\sin\varphi\, dx + \cos\varphi\, dy$$

$$dr = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \cos\varphi\, dx + \sin\varphi\, dy$$

$$d\varphi = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{\sin\varphi}{r}dx + \frac{r\cos\varphi}{r}dy$$

Приклад $\quad u = u(x,t) \quad \Phi(u, (x - ut)) = 0$ Чи є Φ розв'язком?

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$d\Phi = 0$$

$$\Phi'_x dx + \Phi'_y dy = 0$$

$$du(\Phi'_u - t\,\Phi'_u)$$

Теорема I (Про існування явної скалярної ф-ї неявного аргументу)

$$F(x,y)=0 \quad (*)$$

Нехай $F(M_0)=F(x_0;y_0)=0$

F'_x, F'_y - неперервні в околі M_0

$F'_y(M_0)\neq 0$.

Тоді: 1) В деякому околі M_0 р-ня можна однозначно розв'язати відносно y.

2) $y(x_0)=y_0$

3) Ф-я $y(x)$ - неперервно диференц. і має місце формула

$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}$$

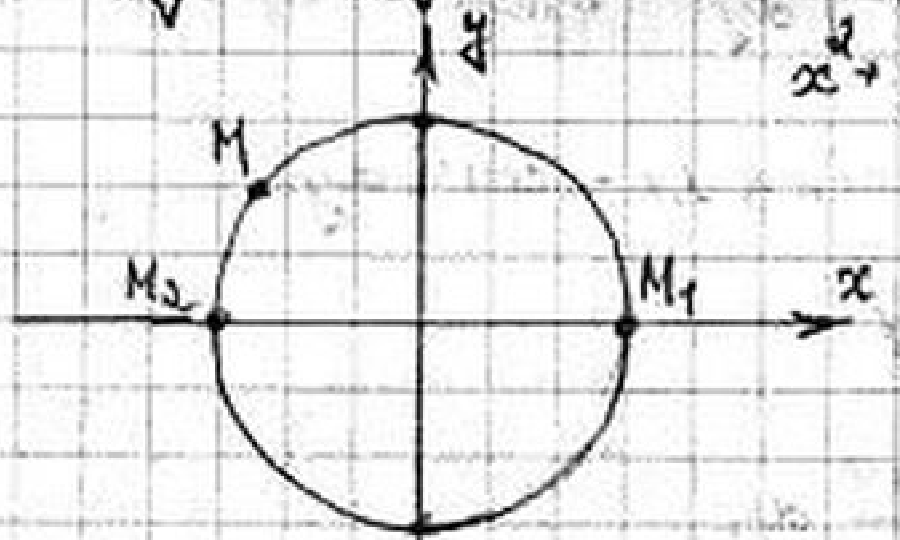
Ф-ю F замінимо за ФМП. Тоді $(*)$ заміниться на

$$F(x_0;y_0)+F'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

Останнє р-ня можна розв'язати, якщо

$$F'_y(x,y)\neq 0.$$

Приклад: Розглянемо р-ня



$$x^2+y^2-1=0$$

$M_0(x_0;y_0)\quad y_0<0$

$M_1(1;0)$ - $F'_y=0$, в околі M_1 р-ня однозначно не розв'язується

Теорема II (Існування неявної векторної ф-ї ВА)

$$\begin{cases} F_1(x_1\ldots x_n, y_1\ldots y_n)=0 \\ F_n(x_1\ldots x_n, y_1\ldots y_n)=0 \end{cases} \qquad \bar F(\bar x,\bar y)=0$$

Нехай $\bar F(\bar M_0)=\bar F(\bar x_0,\bar y_0)=0$

Матриці $\frac{\partial \bar F}{\partial \bar x}$, $\frac{\partial \bar F}{\partial \bar y}$ неперервні в околі M_0

$$j(x_0;y_0)=\det\frac{\partial \bar F}{\partial \bar y}\neq 0.$$

Тоді в деякому околі M_0 систему можна однозначно розв'язати відносно $\bar y$

$$\bar y(\bar x_0)=\bar y_0$$

Ф-я $\bar y(\bar x)$ - неперервно диференц.

$$y'=-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

Теорема III (Про існування і диференційовність оберненого відображення)

Розглянемо ВФВА $\bar{y} \to \bar{f}(x)$ $(R^n \to R^m)$

$\bar{y}(\bar{x}_0) = \bar{x}_0$; $\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}$ – неперервна в околі $\bar{x}_0$.

Величина $j(x_0) = \det \frac{\partial f}{\partial \bar{x}}(x_0) \neq 0$

Тоді існує єдина обернена $^{-1}$ $\bar{x} = \bar{x}(\bar{y})$, неперервно дифер. в околі x_0

і $\frac{\partial \bar{x}}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-1}$ (**)

Зауваження: Якщо матриця Я-Я квадратна, то її детермінант на-ся Якобіаном відображення

З формули (**) випливає, що

$$\det\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{y}}\right) = \frac{1}{\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}$$

Приклад

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad (R^2 \to R^2)$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

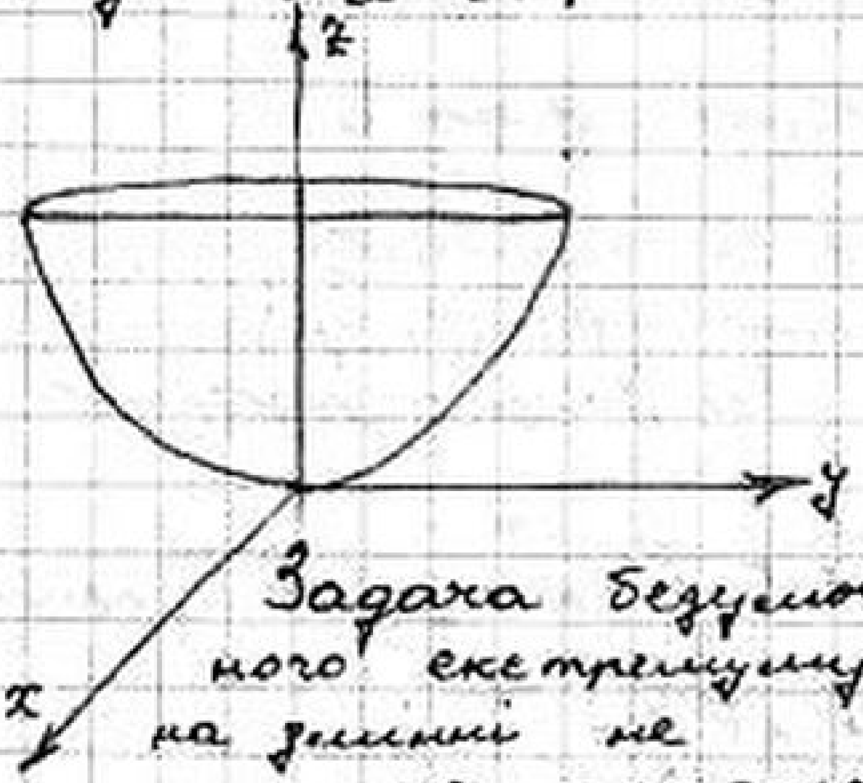
Обернене відображення

$$\begin{cases} r = (x,y) \\ \varphi = (x,y) \end{cases} \qquad \frac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix} \quad J(x,y) = \frac{1}{r}$$

Метод Лагранжа. Знаходження умовних локальних екстремумів ф-ії ВА

Задача безумовного екстремуму

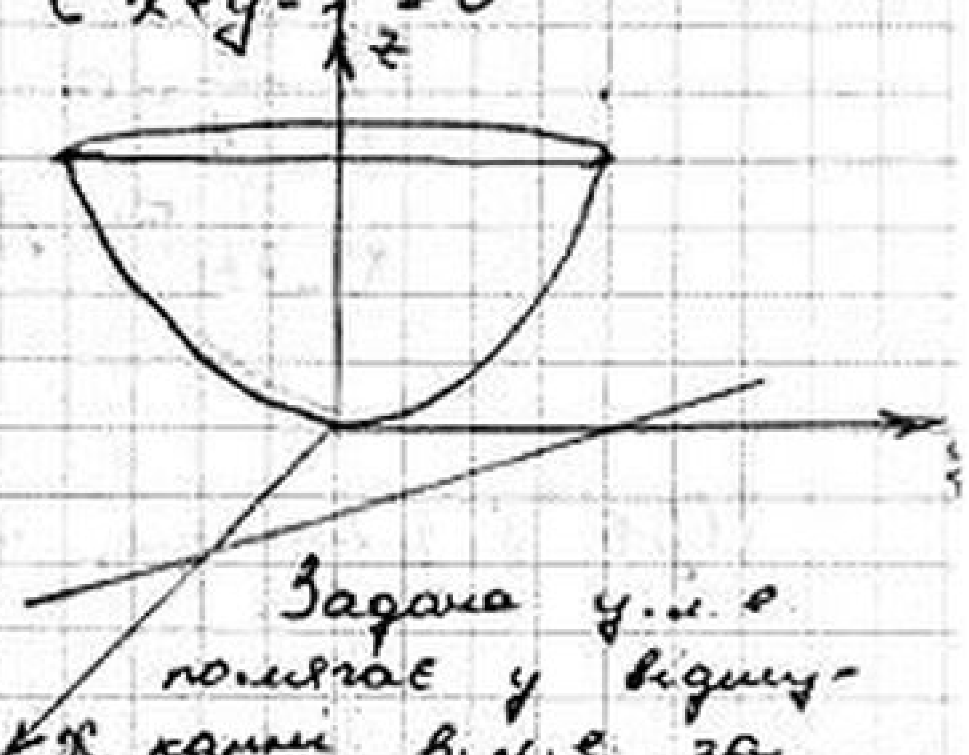
$U = x^2 + y^2$ – в.л.е.?



Задача безумовного екстремуму – на змінні не накладаються ніякі умови

Задача умовного екстремуму

$$\begin{cases} U = x^2 + y^2 - \text{в.л.е.?} \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$



Задача у.л.е полягає у відшуканні в.л.е. за умови, що змінні ф-ї зв'язані співвідношеннями

Задачу У.Л.Е можна розв'язувати 2 методами

I Метод виключення – він полягає у тому, що р-ня зв'язку розв'язують відносно змінної, підставити у ф-ю і дістати задачу безум. е. для ф-ї меншої к-ті змінних

$y = 1 - x \qquad U = x^2 + (1-x)^2$

II Метод мультиплікаторів Лагранжа

Нехай $U = f(x,y)$ (1) → умовний лок. екстремум?
$F(x;y) = 0$ (2)

Припущення: $M_0(x_0, y_0)$ – лок. екстремум
F'_x, F'_y, f'_x, f'_y – неперервні в околі M_0
$F'_y(M_0) \neq 0$

Рів-ня (2) можна однозначно розв'язати відносно y. Підставимо це у ф-ю (1).

$$U = f(x, y(x))$$

$$dU(x_0; y_0) = 0$$

$$f'_x dx + f'_y dy = 0$$

Продиференціюємо р-ня (2)

$$F'_x dx + F'_y dy = 0$$

Домножимо р-ня на λ і додамо

$$\left(f'_x(M_0) + \lambda F'_x(M_0)\right) dx + \left(f'_y(M_0) + \lambda F'_y(M_0)\right) dy = 0$$

Виберемо λ так, що

$$f'_y(M_0) + \lambda F'_y(M_0) = 0$$

Тоді і $f'_x(M_0 + \lambda F'_x(M_0) = 0$.

Використаємо рі-ня зв'язку

$$F(x,y) = 0$$

Дана система визначає екстремум

Введемо ф-ю Лагранжа

$$L \stackrel{def}{=} f(x,y) + \lambda F(x,y)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} F(x,y) = 0 \end{cases}$$

Схема розв'язання задачі умовного екстремуму

1) Складаємо ф-ю L
2) Складаємо систему, з якої знаходимо λ, (x_0, y_0).
Точка $M_0(x_0; y_0)$ – підозріла на екстремум
3) Достатні умови.

Щоб визначити, чи є в M_0 У.Л.Е складемо приріст ф-ї

$$\Delta f(M_0) = \Delta f(M_0) + \Delta F(M_0)$$

Якщо $d^2L < 0$, (x_0, y_0) – макс.
$d^2L > 0$, (x_0, y_0) – локальний мінімум

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x}}_{0} \cdot d^2x + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial y}}_{0} \cdot d^2y$$

Другий диференціал ф-ї Лагранжа можна знаходити так, ніби змінні незалежні. Якщо d^2L знайдений, то в нього підставляється залежність між диференц. змінних.

Приклад $L = x^2 + y^2 + \lambda(x+y-1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \qquad x = y = \frac{1}{2} \quad \lambda = -1$$

$$d^2L = 2(dx + dy) \qquad 2dx + 2dy > 0$$

$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ – мінімум

В загальному випадку

$$L = f(x,y) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_k F_k, \text{ де } F_k \text{ – умови}$$

Модуль 3 Інтегральне числення скалярної функції однієї змінної

$f(x) \quad x \in X = [a,b] \vee (a,b) \vee [a,b) \vee (a,b]$

Означення Ф-я $F(x)$ наз-ся первісною для $f(x)$ на X, якщо

$$dF(x) = f(x)dx \qquad (F'(x) = f(x)) \quad \forall x \in X$$

Теорема (Коші) Якщо ф-я $f \in C_X$, то для неї на мн-ні X обов'язково існує первісна.

Лема. Якщо $F_1(x)$ і $F_2(x)$ – первісні для $f(x)$ на мн-ні X, то

$$F_1(x) - F_2(x) = C = const \quad \forall x \in X$$

Доведення Знайдемо $(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$

Отже $F_1(x) - F_2(x)$ – const

Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$ на X, то

$$\Phi(x) = F(x) + C \qquad (1)$$

де $\Phi(x)$ – мн-на первісних

Означення Невизначеним інтегралом від ф-ї $f(x)$ на мн-ні X наз-ся сукупність усіх первісних на цій мн-ні

$$\int \overbrace{f(x)dx}^{\text{– підінтегр. вираз}} \stackrel{def}{=} F(x) + C \qquad (2)$$

Символ невизн. інтегралу → $\int$; $f(x)$ – підінтегр. ф-я

Зауваження: З озн 2 випливає, що операція інтегрування і диференціювання – взаємнообернені

$$\int f(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C$$

В Мат. аналізі символом $\int f(x)dx$ позначають сукупність усіх первісних. В теорії диф. рі-нь позначають так конкретну первісну.

Приклад. Розв'язати рі-ня

1) $y' = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$dy = f(x)\,dx$$

$$y = \int f(x)\,dx \quad \text{(Мат. Аналіз)}$$

В теорії диф. рівнянь

$$\int dy = \int f(x)\,dx$$

$$y = \int f(x)\,dx + C.$$

2) $y' = f(x)\,g(y)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \qquad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C$$

Загальний інтеграл диф. рів-ня

3) $y' = xy \qquad \frac{dy}{dx} = xy$

$$\frac{dy}{y} = x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$|y| = e^{C_1} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \qquad y = C e^{\frac{x^2}{2}}$$

Зауваження: Інтеграл від елементарної ф-ї далеко не завжди є елементарною ф-ю. Так $\int e^{\pm x^2}dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$, $\int \frac{\cos x}{x}dx$, $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$, ... не виражаються елементарними ф-ми. Про такі інтеграли кажуть, що вони „не беруться".

Основні властивості невизначеного інтегралу

① $\int d f(x) = f(x) + C \qquad \int f'(x)\,dx = f(x) + C$

② $d \int f(x)\,dx = f(x)\,dx$

③ $\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$

$$\int (f+g)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Сукупність ③ – властивість лінійності інтеграла

Зауваження: dx в символі інтеграла вказує на те, по якій змінній ведеться інтегрування.

$$\int e^{xt}dx = \frac{1}{t}e^{xt} + C(t)$$

$$\int e^{xt}dt = \frac{1}{x}e^{xt} + C(x)$$

Таблиця основних невизначених інтегралів

① $\int 0\,dx = \int dC = C$

② $\int dx = x + C$

③ $\int x^{\alpha}dx = \int d\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq -1$

④ $\int x^{-1}dx = \int \frac{dx}{x} = \int d(\ln|x|) = \ln|x| + C$

⑤ $\int e^{kx}dx = \int d\left(\frac{e^{kx}}{k}\right) = \frac{1}{k}e^{kx} + C$

$\int a^{x}dx = \int e^{x\ln a}dx = \frac{1}{\ln a}a^{x} + C$

⑥ $\int \sin\omega x\,dx = -\frac{1}{\omega}\cos\omega x + C$

$\int \cos\omega x\,dx = \frac{1}{\omega}\sin\omega x + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2\omega x} = \frac{1}{\omega}\operatorname{tg}\omega x + C$

$\int \frac{dx}{\sin^2\omega x} = -\frac{1}{\omega}\operatorname{ctg}\omega x + C$

$\int \operatorname{tg}\omega x\,dx = \int \frac{\sin\omega x\,dx}{\cos\omega x} = \int \frac{d(-\cos\omega x)}{\cos\omega x} = -\frac{1}{\omega}\int d\ln|\cos\omega x| = -\frac{1}{\omega}\ln|\cos\omega x| + C$

$\int \operatorname{ctg}\omega x\,dx = \frac{1}{\omega}\ln|\sin\omega x| + C$

⑦ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int d\left(\arcsin\frac{x}{a}\right) = \arcsin\frac{x}{a} + C$

$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int d\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

⑧ $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int d\left(\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \int d\left(\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})\right) = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$

Основні методи інтегрування

I. Метод розкладу – підінтегральну ф-ю намагаються представити у вигляді суми простіших ф-й

Приклад $\int tg^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tg x - x + C$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$$

II. Метод інтегрування частинами – ґрунтується на формулі

$$\int U\,dV = UV - \int V\,dU$$

$U = U(x)$ $V = V(x)$ – неперервно-диференц. ф-ї

Ф-я V повинна легко знаходитись за диференціалом, константа не враховується

Приклад $\int x^2 \ln x\,dx = \begin{bmatrix} U = \ln x & dU = \frac{1}{x} \\ dV = x^2 dx & V = \int x^2 dx \end{bmatrix} =$

$$\int \arcsin x\,dx = \begin{bmatrix} U = \arcsin x & dU = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dV = dx & V = x \end{bmatrix} = x\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= x\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\,2\sqrt{1-x^2} + C$$

III. Метод заміни змінної

$$\int\limits_{x\in X} f(x)\,dx = \left| \begin{matrix} x = x(t) \\ t \in T \end{matrix} \right| = \int\limits_{t\in T} f(x(t))\,x'(t)\,dt$$

Умови для використання заміни

$f \in C_x$;

$x(t) \in C^1_T$

$E(x(t)) = X$

$x(t):\ T \to X$

Якщо виконуються умови, має місце заміна

Для доведення візьмемо похідну:

$$(Лч)'_t = (Лч)'_x\, x'(t) = f(x)\cdot x'(t)$$
$$(Пр.ч)'_t = f(x(t))\,x'(t)$$

Приклад $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \begin{bmatrix} a > 0 & x = a\sin t & dx = a\cos t\,dt \\ x \in [-a; a] & t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] & \end{bmatrix} =$

$$= \int \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}\,a\cos t\,dt = a^2 \int |\cos t| \cos t\,dt = a^2 \int \cos^2 t\,dt =$$
$$= a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2 t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + C =$$
$$= \frac{a^2 \arcsin \frac{x}{a}}{2} + \frac{1}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{a}\right) + C$$

Приклад $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x-1}} = \left[\begin{matrix} \sqrt{2x-1}=t & x=\frac{1}{2}(t^2+1) \\ 2x-1=t^2 & dx = t\,dt \end{matrix} \right] = \int \frac{(t^2+1)\frac{1}{2}t\,dt}{t^2} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}+t\right)+C = \frac{1}{6}\left(\sqrt{2x-1}\right)^3 + \frac{1}{2}\sqrt{2x-1}.$$

$$\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x\,d(\sin x) = \int (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x) = \left[\sin x = t\right] =$$

$$= \int (t^2-1)^2 dt = \int (t^4-2t^2+1)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{2}{3}t^3 + t + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2}{3}t^3 + t + C$$

Аналогічно рахують $\int \cos^{2n+1} x\,dx$; $\int \sin^{2n+1} x\,dx$.

$$\int \sin^{2n} x\,dx = \int \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^{2n} dx = \dots$$

$$\int \cos^{2n} x\,dx = \int \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^{2n} dx = \dots$$

Інтегрування раціональних функцій

Функція вигляду $P_n(x) \overset{def}{=} a_0 x^n + a x^{n-1} + \dots + a_n$ (1) на-ся $\underset{n=0,1,2\dots}{}$ $a_0 \neq 0$ многочленом n-го степеня.
Числа $a_0, a \dots a_n$ – коефіцієнти.

Ф-я вигляду $R(x) = \frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ на-ся раціональною ф-ю або раціональним дробом.
Якщо $m \geq n$ – дріб неправильний; $m < n$ – правильний дріб.
Якщо дріб неправильний, поділивши на знаменник, його можна представити у вигляді цілої частини і правильного дробу.

Припустимо, $P_n(x)$ має дійсні коефіцієнти.

Основна теорема алгебри (Гауса)

Будь який многочлен степеня $n \geq 1$ в множині комплексних чисел $\mathbb{C}$ має хоча б один корінь (З урахуванням кратностей многочлен має рівно n коренів).

$$P_6(x) = (x^2+1)\,x\,(x-1)^3 = (x-i)(x+i)\,x\,(x-1)^3$$

$x_1 = i$
$x_2 = -i$
$x_3 = 0$
$x_{4,5,6} = 1$ (кратність 3)

Лема: Якщо $R(x)$ має дійсні коефіцієнти і комплексний корінь $z = \alpha + i\beta$, то він обов'язково має і спряжений корінь $\bar{z} = \alpha - i\beta$. Ці корені мають однакову кратність.

$$0 = P_n(z) = \overline{P_n(z)} = \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} = \bar{a}_0 \bar{z}^n + \bar{a}_1 \bar{z}^{n-1} + \dots + \bar{a}_n =$$

$$= a_0 \bar{z}^n + a_1 \bar{z}^{n-1} + \dots + a_n.$$

Теорема (Безу) Многочлен $P_n(x)$ ділиться націло на $(x-z)$ тоді і тільки тоді, коли z є коренем

$$P_n(z) = 0.$$

Наслідок: Якщо многочлен має комплексний корінь, то він націло ділиться на $(x-z)(x-\bar{z}) = x^2 - x(z+\bar{z}) + z\bar{z} = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$

Висновок: будь який многочлен $P(x)$ можна представити у вигляді $P_n(x) = a_0(x-x_1)^{m_1} \dots (x-x_k)^{m_k} (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$

$x_1, \dots x_k$ – дійсні корені кратностей $m_1, \dots m_k$

$D_i = p_s^2 - 4q_s < 0 \quad i = 1, \dots s$.

Такий розклад є канонічним розкладом

Означення: Дроби вигляду

$\widetilde{\widehat{I}} \quad \dfrac{A}{x-x_0} \quad x_0 \in R$

$\widetilde{\widehat{II}} \quad \dfrac{A}{(x-x_0)^k} \quad x_0 \in R \quad k > 1 \quad k \in N$

$\widetilde{\widehat{III}} \quad \dfrac{Mx+N}{x^2+px+q} \quad D = p^2 - 4q < 0$

$\widetilde{\widehat{IV}} \quad \dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} \quad D = p^2 - 4q < 0 \quad k \in N$

на-ся найпростішими елементарними дробами $\widetilde{\widehat{I}}, \widetilde{\widehat{II}}, \widetilde{\widehat{III}}$ і $\widetilde{\widehat{IV}}$ типів.

Основна теорема розкладу

Будь-який правильний рац. дріб з дійсними коефіцієнтами можна єдиним способом представити у вигляді суми I-IV типу дробів. Кожному множнику $(x-x_j)^{m_j}$ в канонічному розкладі відповідає рівно m_j доданків типу $\dfrac{A_1}{x-x_j} + \dfrac{A_2}{(x-x_j)^2} + \dots \dfrac{A_{m_j}}{(x-x_j)^{m_j}}$ і А кожному множнику $(x^2+p_rx+q_r)^{l_r}$ відповідає l_r доданків виду:

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_rx+q_r} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_rx+q_r)^2} + \dots + \frac{M_{l_r}x+N_{l_r}}{(x^2+p_rx+q_r)^{l_r}}$$

Щоб знайти невідомі коефіцієнти, потрібно звести до спільного знаменника, відкинути його і прирівняти коефіцієнти при відповідних степенях.

Приклад
$$\frac{3x^2-1}{(x-1)(x-2)x} = \frac{\overset{x(x-2)}{A}}{x-1} + \frac{\overset{x(x-1)}{B}}{x-2} + \frac{\overset{(x-1)(x-2)}{C}}{x}$$

$$3x^2-1 = Ax(x-2) + Bx(x-1) + C(x-1)(x-2)$$

$x^2 \;\|\; 3 = A+B+C$

$x \;\|\; 0 = -2A-B-3C$

$x^0 \;\|\; -1 = 2C$

Метод підстановки – знаменник має однократні корені

$x=0 \quad 2C = -1$

$x=1 \quad -A = 2 \qquad x=2 \quad 11 = 2B$

Приклад: Записати вигляд розкладу на елементарні дроби

$$\frac{x^3-x^2+10}{(x-1)^2(x-2)(x^2-x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-2)}+\frac{Mx+N}{x^2-x+1}+\frac{Kx-L}{(x^2-x-1)^2}$$

Знаходження інтегралів раціональних елементарних дробів

I $\int\frac{A}{x-x_0}dx=A\int\frac{d(x-x_0)}{x-x_0}=A\ln|x-x_0|+C$

II $\int\frac{A}{(x-x_0)^k}=A\int(x-x_0)^{-k}d(x-x_0)=A\frac{(x-x_0)^{-k+1}}{-k+1}+C$

III $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\left[\begin{array}{l}\text{Виділення}\\ \text{повного квадрату в знаменнику}\end{array}\right]=\int\frac{Mx+N}{\underbrace{x^2+2x\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}}+q-\frac{p^2}{4}}$

$q-\frac{p^2}{4}\overset{def}{=}w^2$

$$=\int\frac{Mx+N}{(x+\frac{p}{2})^2-w^2}=\left[\begin{array}{l}x+\frac{p}{2}=t\\ x=t-\frac{p}{2}\\ dx=dt\end{array}\right]=\int\frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2-w^2}dt=\int\frac{Mt+(N-\frac{p}{2}M)}{t^2+w^2}dt=$$

$$=M\int\frac{t\,dt}{t^2+w^2}+L\int\frac{dt}{t^2+w^2}=\frac{M}{2}\int\frac{d(t^2)}{t^2+w^2}+\frac{1}{w}\operatorname{arctg}\frac{t}{w}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln|t^2+w^2|+\frac{L}{w}\operatorname{arctg}\frac{t}{w}+C=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{L}{w}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{w}+C$$

Приклад $\int\frac{dx}{x^3-1}=J$

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$A(x^2+x+1)+(x-1)(Bx+C)=1$$

$$\begin{array}{l|l}x^2 & A+B=0\\ x & A+C-B=0\\ x^0 & A-C=1\end{array}\qquad A=\frac{1}{3},\quad B=-\frac{1}{3},\quad C=-\frac{2}{3}\qquad J=\int\left(\frac{1/3}{x-1}+\frac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}\right)dx$$

IV $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^2}=\left[\begin{array}{ll}\text{Виділимо} & x+\frac{p}{2}=t\\ \text{повний квадрат} & x=t-\frac{p}{2}\quad dx=dt\\ w^2=q-\frac{p^2}{4}>0 & \end{array}\right]=$

$$=\int\frac{Mt+N-\frac{Mp}{2}}{(t^2+w^2)^k}dt=M\int\frac{t\,dt}{(t^2+w^2)^k}+L\int\frac{dt}{(t^2+w^2)^k}=M\int\frac{d(t^2+w^2)}{2(t^2+w^2)^k}+LJ_k=$$

$$=\frac{M}{2}\frac{(t^2+w^2)^{-k+1}}{-k+1}+LJ_k=\frac{M}{2}\frac{-1}{(1-k)(t^2+w^2)^{k-1}}+LJ_k$$

$$J_k=\int\frac{dt}{(t^2+w^2)^k}=\int(t^2+w^2)^{-k}dt=\left[\begin{array}{l}U=(t^2+w^2)^{-k}\\ dV=dt\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{l}dU=-k(t^2+w^2)^{-k-1}2t\,dt\\ V=t\end{array}\right]=$$

$$=t(t^2+w^2)^{-k}+\int2k(t^2+w^2)^{-k-1}t^2dt=t(t^2+w^2)^{-k}+2k\int\frac{t^2dt}{(t^2+w^2)^{k+1}}=$$

$$= \frac{t}{(t^2+\omega^2)^2} + 2k\int \frac{t^2+\omega^2-\omega^2}{(t^2+\omega^2)^{k+1}}dt = \frac{t}{(t^2+\omega^2)^2} + 2k\underbrace{\int\frac{dt}{(t^2+\omega^2)^2}}_{J_k} + 2k\underbrace{\int\frac{-\omega^2\,dt}{(t^2+\omega^2)^{k+1}}}_{J_{k+1}} =$$

$$= \frac{t}{(t^2+\omega^2)^2} + 2kJ_k - 2k\omega^2\int\frac{dt}{(t^2+\omega^2)^{k+1}} = J_k$$

$$J_{k+1} = \frac{1}{2k\omega^2}\left[\frac{t}{(t^2+\omega^2)^2} + (2k-1)J_k\right] \quad k=1,2,\dots$$

$$J_1 = \int\frac{dt}{t^2+\omega^2} = \frac{1}{\omega}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\omega} + C$$

$$J_2 = \int\frac{dt}{(t^2+\omega^2)^2} = \frac{1}{2\omega^2}\left[\frac{t}{t^2+\omega^2} + \frac{1}{\omega}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\omega}\right] + C$$

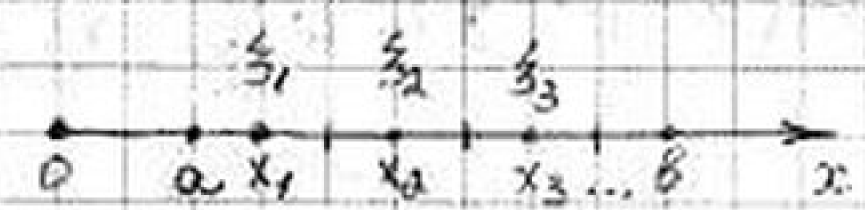
Висновок: Інтеграл від раціонального дробу завжди виражається через елементарні ф-ї: степеневу, раціональну, ln, arctg.

Інтеграл Рімана
(Визначений Інтеграл)

Означення Інтеграла Рімана: Нехай ф-я $f(x)$ визначена на $[a, b]$.

Розбиття на часткові відрізки

$$\tau: [a,b] = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}; x_k]$$



$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – довжина відрізка

$d = d(\tau) = \max\{\Delta x_k\}$ – діаметр розбиття

Інтегральна сума

$$\sigma = \sigma(f,[a,b],\tau,\xi_1\dots\xi_n) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Границя інтегральної суми при $d(\tau)\to 0$ на-ся інтегралом Рімана, якщо

$$\lim_{d\to 0}\sigma = J \quad (*)$$

1. J – const
2. J не залежить від розбиття
3. J не залежить від $\xi_1\dots\xi_n$

Позначення: $\int_a^b f(x)dx$ $\quad a, b$ – межі

Зауваження: Якщо для даної ф-ї f існує границя $(*)$, то ф-я f на-ся інтегровною за Ріманом на відрізку $[a, b]$

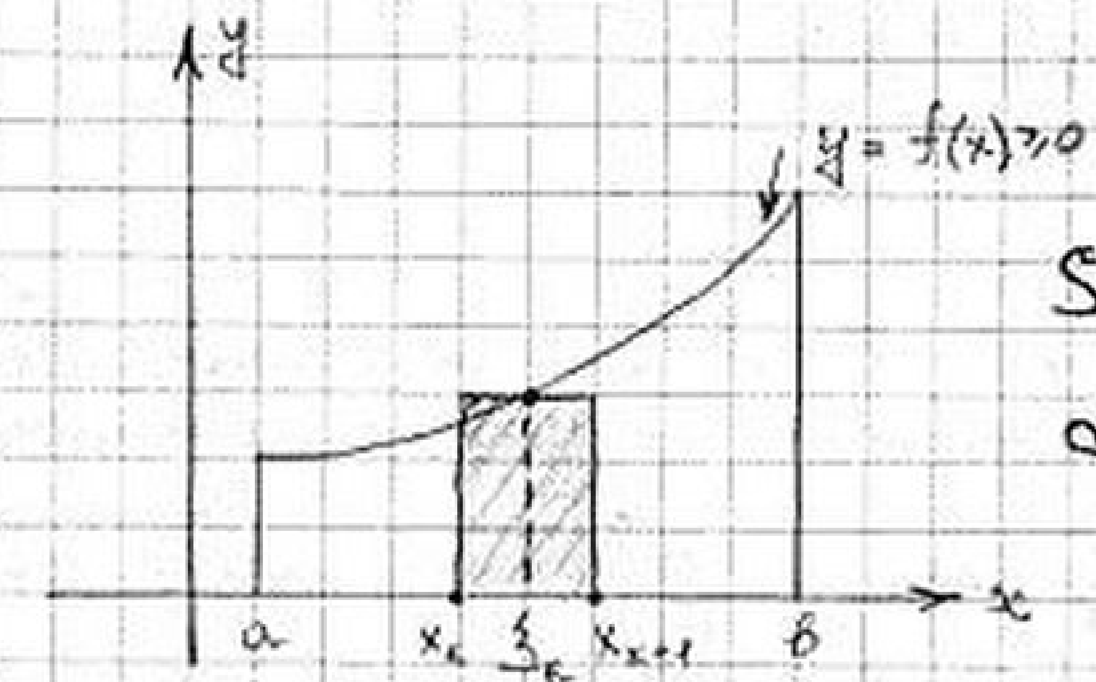
Позначення: $f \in R[a,b]$.

З озн інтеграла Рімана випливає, що інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\cdot)d(\cdot)$$

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)' = 0 .$$

Геометричний смисл інтеграла Рімана



Фігура T на-ся криволінійною трапецією.

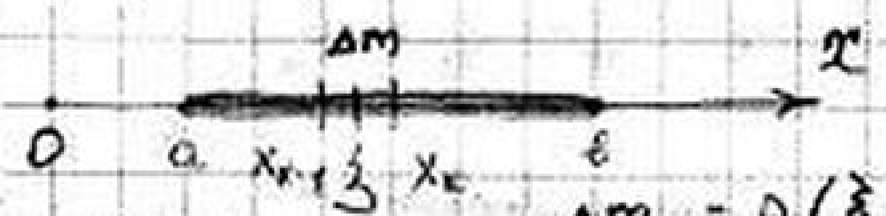
$$S(T) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

За означенням

$$S(T) \overset{def}{=} \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

Фізичний смисл інтеграла Рімана

Задача: Відшукання маси тонкого неоднорідного стержня



$\rho(x)$ - лінійна густина

$$\Delta m_k = \rho(\xi_k)\Delta x_k$$

$$m = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b \rho(x)\,dx$$

Теорема 1. Якщо $f \in R[a,b]$, то f - обмежена на $[a,b]$ (Позначається $f \in M[a,b]$).

Доведення: Від супротивного припустимо, що f необмежена на $[a,b]$. Складемо інтегральну суму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k + f(\xi_i)\Delta x_i \Rightarrow \sigma \text{ - необмежена,}$$

отже $\notin R[a,b]$.

Приклад

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in I \end{cases} \in M[a,b]$$

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} D(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b-a \qquad x \in Q$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} D(\xi_k)\Delta x_k = 0 \qquad x \in I$$

Інтеграл залежить від розбиття $D \notin R[a,b]$

Теорема 2 (Достатня умова інтегровності)

Якщо $f \in C[a,b]$, то $f \in R[a,b]$ $\quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$

$F(x)$ - первісна для $f(x)$

Доведення:

$$F(b)-F(a) = \lim_{d\to 0}(F(b)-F(a)) = \lim_{d\to 0}\Big(\overbrace{F(x_n)-F(x_{n+1})}^{\text{Ф. Л.}} + F(x_{n+1}) -$$

$$- F(x_{n-2}) + F(x_{n-2}) + \dots + F(x_1) - F(x_0)\Big) =$$

$$= \lim_{d\to 0}\Big(F'(\xi_n)\Delta x_n + F'(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} + \dots + F'(\xi_1)\Delta x_1 = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k =$$

$= \int_a^b f(x)dx$, що і т.д.

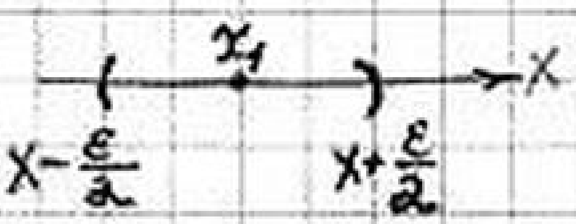
Формула Ньютона – Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Наслідок: $C_{[a,b]} \subset R_{[a,b]}$

Означення: Мн-на дійсних чисел $E \subset R$ на-ся мн-ю Лебегової міри 0, якщо її можна покрити системою інтервалів $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots$ сумарна довжина яких не перевищує $\varepsilon > 0$

$E = \{x_1\}$



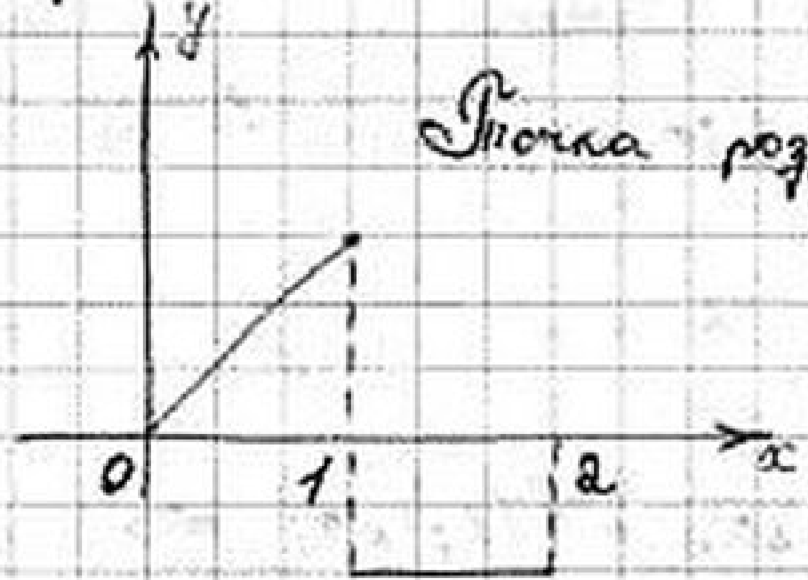
$\Delta x = \varepsilon$

$E = \{x_1, \dots x_n\}$

Теорема 3

Для того, щоб $f(x)$ була інтегровна на $[a, b]$, необхідно і достатньо, щоб вона була $m_{[a,b]}$ і неперервна скрізь за можливим виключенням точок, які мають Лебегову міру 0.

Приклад



Точка розриву $x = 1$ є Лебеговою множиною міри 0

$f \in R_{[a,b]}$

$f \in R_{[0;2]}$!

Властивості інтеграла Рімана

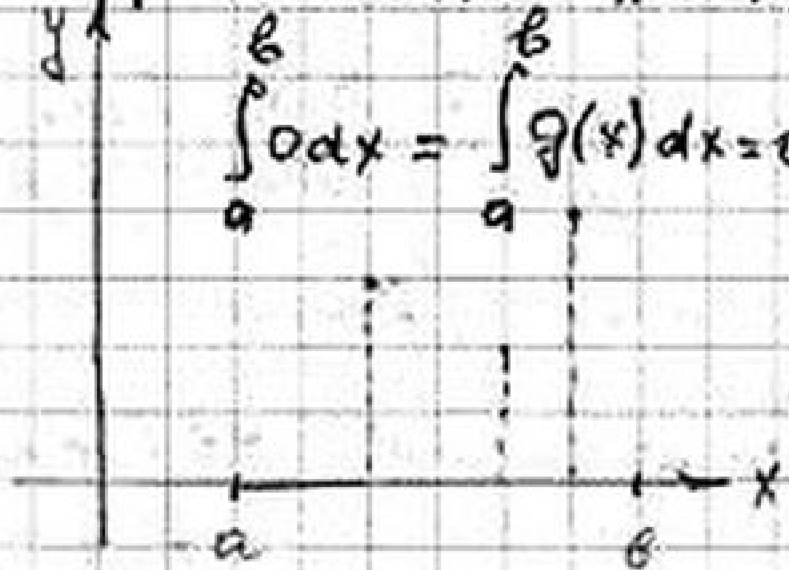
I Грубість інтеграла $f \in R_{[a,b]}$, g - обмежена на $[a, b]$

$f = g$ (можливе виключення скінченної к-ті точок)

Тоді $g \in R_{[a,b]}$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

$$\int_a^b 0dx = \int_a^b g(x)dx = 0$$



Властивості які виражаються рівностями:

II $\int_a^a f(x)dx = 0$ $\quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

$$\int_a^b dx = b - a \qquad \int_a^b dF(x) = F(b) - F(a)$$

Лінійність інтеграла

$$\left.\begin{array}{l} f, g \in C[a,b] \\ \alpha, \beta - \text{const} \end{array}\right\} \int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha\int_a^b f\,dx + \beta\int_a^b g\,dx$$

Адитивність інтеграла Рімана

f - неперервна на більшому з відрізків $[a,b]$, $[a,c]$, $[c,b]$. Тоді має місце формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Незалежно від взаємного розміщення a, b, c формула виконується.

III Властивості, що виражаються нерівностями

$a \le b$

1) Якщо $f \ge 0$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

Доведення: $F(x)$ - первісна $F'(x) = f(x) \ge 0$ $F(x) \uparrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \ge 0.$$

2) Нехай $f \in C[a,b]$, $f \ge 0$ на $[a,b]$ і $\exists\, x_0 \in [a,b] : f(x_0) = r > 0$

Тоді $\int_a^b f(x)\,dx > 0$

Доведення: $x_0+\delta$ $f(x) > \frac{r}{2}$ $\forall\, x \in [x_0-\delta; x_0+\delta]$

$$\int_a^b = \int_a^{x_0-\delta} + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} + \int_{x_0+\delta}^b \Rightarrow \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx > \frac{r}{2}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} dx = \frac{r}{2}\cdot 2\delta = r\delta$$

3) Нехай $f \ge g$ на $[a,b]$.

Тоді $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$

Доведення $f - g \ge 0$ на $[a,b]$

$$\int_a^b (f-g)\,dx \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f\,dx \ge \int_a^b g\,dx$$

Властивість 3 говорить про те, що коли якась рівність або нерівність пов'язує інтегровні ф-ї на $[a,b]$, то її можна почленно інтегрувати.

4) Груба оцінка інтеграла

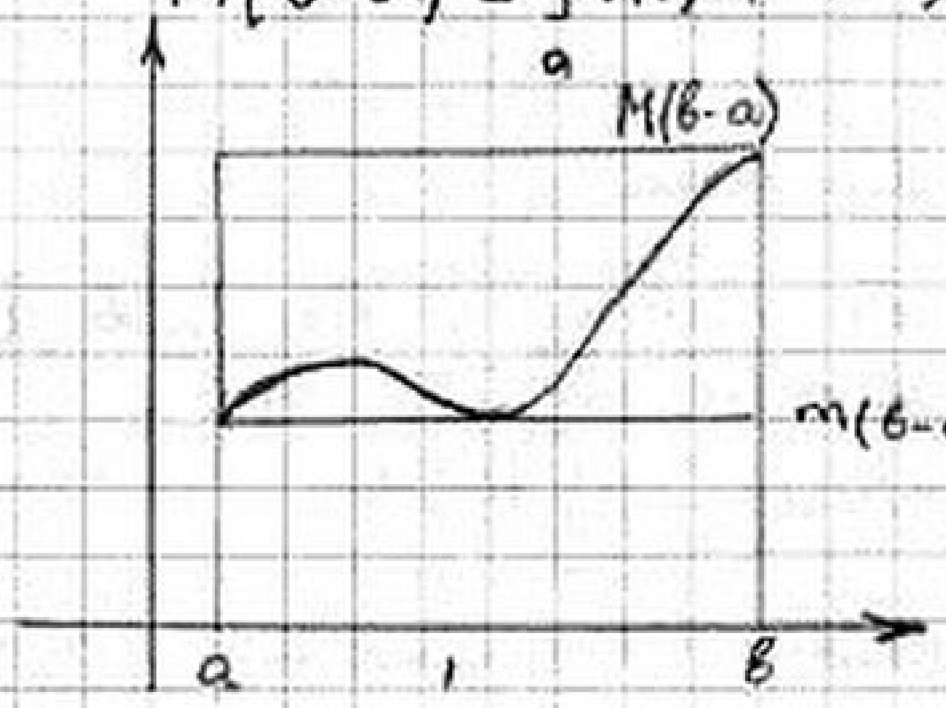
Якщо $m \le f(x) \le M$ $\forall\, x \in [a,b]$, то $(*)$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

Проінтегруємо нерівність $(*)$

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$



5) Нерівність Коші - Буняковського

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\ \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

Доведення

$$\int_a^b \left(tf(x)+g(x)\right)^2 dx \ge 0 \quad \forall t\in R$$

$$\int_a^b (t^2f^2+2tfg+g^2)\,dx \ge 0$$

$$t^2\int_a^b f^2dx + 2t\int_a^b fg\,dx + \int_a^b g^2dx \ge 0 \quad \forall t\in R$$

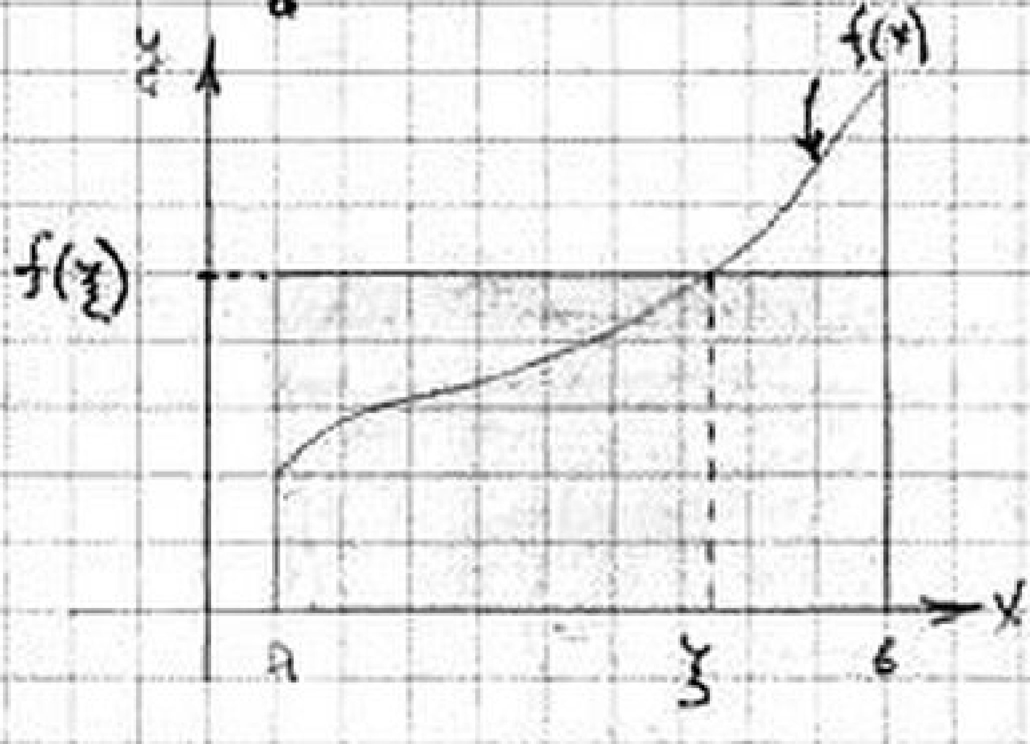
Отже $D\le 0$ $\quad D = 4\left(\int_a^b fg\,dx\right)^2 - 4\int_a^b f^2dx\cdot\int_a^b g^2dx \le 0$

що і т.д.

IV Теорема про середнє значення в інтегральному численні

$f\in C_{[a,b]}$, то $\exists\, \xi \in [a,b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$

Доведення $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a)$



Площа трапеції рівна площі прямокутника.

V Властивості інтеграла зі змінною межею

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

1) $f \in R_{[a,b]}$, то $\Phi \in C_{[a,b]}$

Доведення $|\Delta\Phi(x)| = |\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)| = \left| \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| =$

$$= \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \right| \le \left| \int_x^{x+\Delta x} \underbrace{|f(t)|}_{\le M}\,dt \right| \le M(x+\Delta x - x) = M\Delta x \to 0 \quad \Phi \text{ - непер.}$$

2) $f \in C_{[a,b]}$ $\quad \Phi(x)$ диференційовна на $[a,b]$

$b = x$

$$\left(\int_a^b f(t)\,dt \right)'_x = f(x) \qquad \text{Похідна Барроу}$$

Доведення $\left(\int_a^b f(t)\,dt \right)'_x = \left(F(b) - F(a) \right)' = F'(x) - F'(a) = f(x)$

Наслідки: $\left(\int_a^{u(x)} f(t)\,dt \right)'_x = \left(\int_a^{u(t)} f(t)\,dt \right)' u'(x) = f(u(x))\,u'(x)$

$$\left(\int_{v(x)}^b f(t)\,dt \right)'_x = -f(v(x))\,v'(x)$$

3) $\begin{cases} y' = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \text{ - поч. умова} \end{cases}$ $\quad y = ?$ $\quad$ Задача Коші

$$\int_{x_0}^x y'(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

$$y(t)\Big|_{x_0}^x = \int_{x_0}^x f(t)\,dt \qquad y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

$\Phi(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$ - це та первісна, яка при $x = x_0$ перетворюється в 0

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt = 0$$

Кривошия пробачає ;) $\Rightarrow$ Оцінка інтеграла за модулем

III ⑥ $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

Проінтегруємо нерівність

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \text{, що і т.д.}$$

Зауваження: Властивості інтеграла Рімана мають місце на $R_{[a,b]}$.

$f(U(x))$ – якщо $f \in C_{[a,b]}$, а $U \in R_{[a,b]}$, то складна ф-я є інтегровною (неперервна від інтегровної ф-ї є інтег.)

Основні методи обчислення інтеграла Рімана

I. Метод розкладу → аналогічно $\int f(x)dx$

II. Інтегрування частинами

$$U = U(x),\ v = v(x) \in C^1_{[a,b]}$$

$$d(Uv) = Udv + vdU$$

$$\int_a^b d(Uv) = \int_a^b Udv + \int_a^b vdU$$

$$\int_a^b Udv = (Uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdU$$

III. Метод заміни змінної

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{bmatrix} x = x(t) \\ dx = x'(t)dt \end{bmatrix} = \int_\alpha^\beta f(x(t))\,x'(t)dt$$

$f \in C_{[a,b]}$

$x(t) \in C^1_{[\alpha,\beta]}$

$[a,b] = E(x(t))$

$a = \varphi(\alpha)\quad b = \varphi(\beta)$

На практиці зручно обирати $x(t)$ таким, що монотонно зростає (спадає) на $[\alpha,\beta]$

Приклад:

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} x = a\sin t \\ dx = a\cos t\,dt \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=a \Rightarrow t=\pi/2 \end{bmatrix} = a\int_0^{\pi/2} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2\cos^2 t}\,\cos t\,dt =$$

$$= a^4\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt = \frac{1}{4}a^4\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt =$$

$$= \frac{a^4}{8}\left(\int_0^{\pi/2}dt - \int_0^{\pi/2}\cos 4t\,dt\right)$$

Наслідки з формули заміни змінної

1) $f \in C_{[a,b]}$ f-парна: $f(-x) = f(x)\quad \forall x \in [-a;a]$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

2) $f \in C_{[-a;a]}$ f-непарна $f(-a) = -f(a)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Доведення $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \left[\begin{matrix} x=-t \\ dx=-dt \end{matrix}\right] = -\int\limits_{a}^{0} f(-t)\,dt + \int\limits_{0}^{a} f(t)\,dx =$

$$= \int\limits_{0}^{a} \left[f(-x) + f(x) \right] dx = \begin{cases} 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx \Rightarrow f \text{ - парна} \\ 0 \Rightarrow f \text{ - непарна} \end{cases}$$

3) $f \in C_R$ і є періодичною з періодом $T>0$

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)\,dx \quad \forall a$$

$$\int\limits_{a}^{a+T} = \int\limits_{a}^{0} + \int\limits_{0}^{T} + \int\limits_{T}^{a+T}; \qquad \int\limits_{T}^{a+T} f(x)\,dx = \left[\begin{matrix} x=t+T \\ dx=dt \\ t_н=0 \\ t_в=a \end{matrix}\right] = \int\limits_{0}^{a} f(t+T)\,dt = \int\limits_{0}^{a} f(t)\,dt$$

Закони диференціювання різних ф-й

$\vec{r} = \vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ – Векторна ф-я

$A(t) = (a_{ij}(t))$ $\quad i=1,\dots m$, $j=1,\dots n$ Матриця

$W(t) = u(t) + iv(t)$ – Комплексна ф-я

1) $\vec{r}'(t) = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}$

$(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t))' = (\vec{r}_1'(t)\vec{r}_2(t)) + (\vec{r}_1(t)\,\vec{r}_2'(t))$

2) $W'(t) = u'(t) + i v'(t)$

3) $A'(t) = (a_{ij}'(t))$ Закони диференціювання ті самі.

Інтегрування різних ф-й

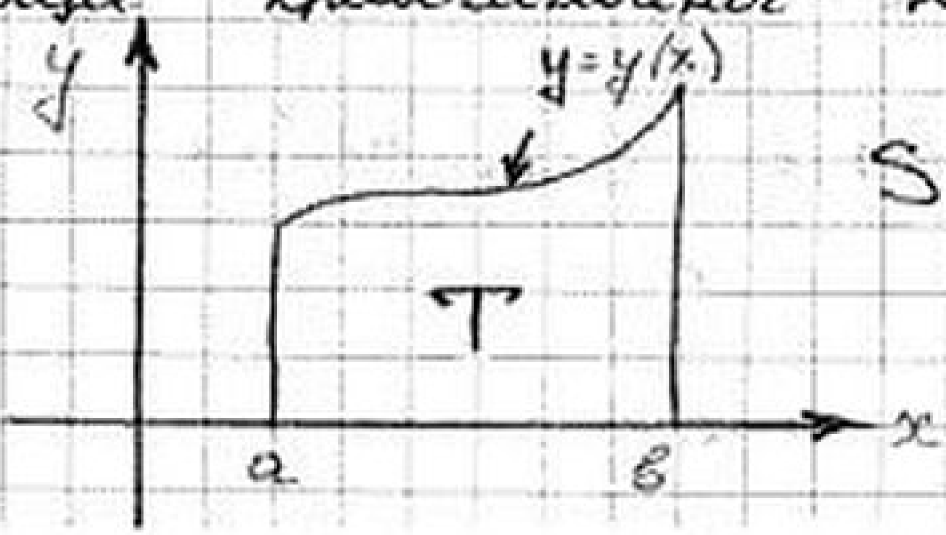
1) $\int\limits_a^b \vec{r}(t)\,dt = \left\{ \int\limits_a^b x(t)\,dt, \int\limits_a^b y(t)\,dt, \int\limits_a^b z(t)\,dt \right\}$

2) $\int\limits_a^b A(t)\,dt = \left(\int\limits_a^b a_{ij}(t)\,dt \right)$

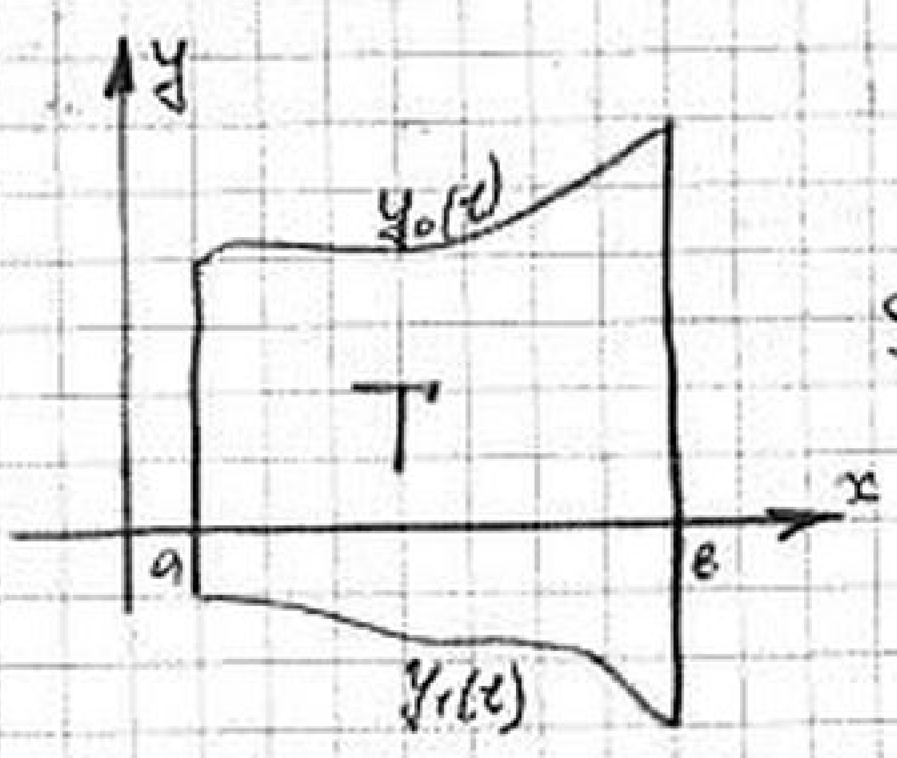
3) $\int\limits_a^b W(t)\,dt = \int\limits_a^b u(t)\,dt + i\int\limits_a^b v(t)\,dt$

Деякі геометричні застосування визначеного інтеграла

I. Площа криволінійної трапеції



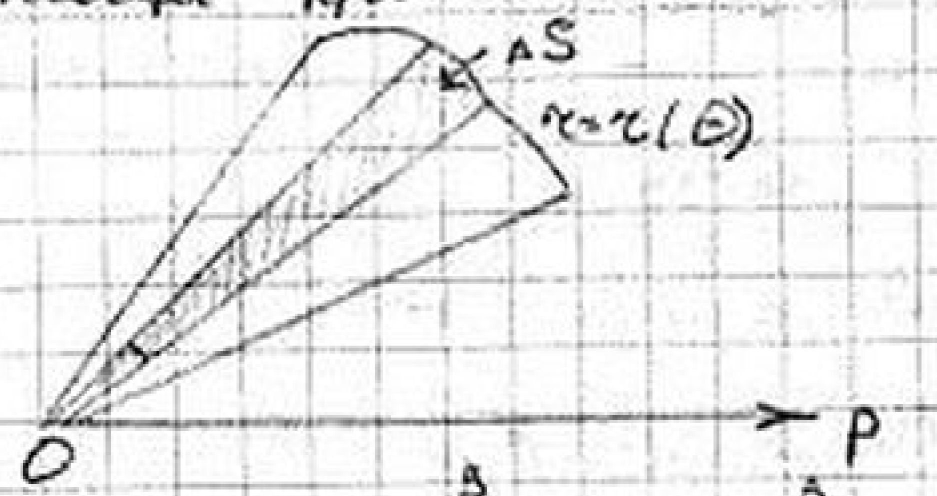
$$S(T) = \int\limits_a^b y(x)\,dx$$



Площа фігури, обмеженої двома кривими

$$S(T)=\int_a^b [y_0(t)-y_1(t)]\,dt$$

II. Площа криволінійного сектора



$S_0=S([\alpha,\beta])$

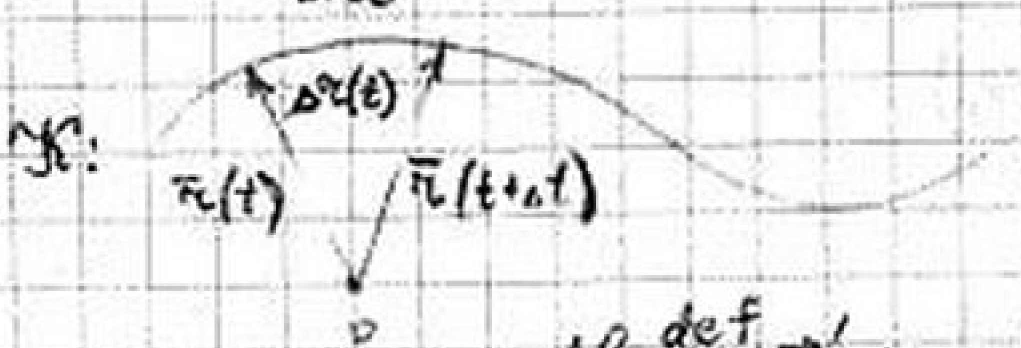
$S(\varphi)=S([\alpha,\varphi])$

$S(\alpha)=0 \quad S(\beta)=S_0$

$dS=\frac{1}{2}r^2(\varphi)\,d\varphi$

$$\int_\alpha^\beta dS=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi$$

III. Обчислення довжини дуги кривої



$\vec r=\vec r(t) \qquad t\in[\alpha,\beta]$

$\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases} \qquad l(\alpha)=0,\quad l(\beta)=l(K)$

ФМП

$\Delta l\approx|\Delta\vec r(t)|=|d\vec r(t)|=|r'(t)\,dt|$

$dl\overset{def}{=}|\vec r'(t)\,dt|$

$dl=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$

$dl=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$

$$l(K)=\int_\alpha^\beta dl=\int_\alpha^\beta|\vec r'(t)|\,dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$$ – довжина дуги просторової кривої

Довжина дуги плоскої кривої

1) $K:\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases} \qquad l_K\overset{def}{=}\int_\alpha^\beta dl=\int_\alpha^\beta|\vec r'(t)|\,dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$

2) Випадок явного задання кривої

$K:\ y=y(x) \qquad x\in[a,b]$

$\begin{cases} x=x\\ y=y(x)\end{cases} \qquad l(K)=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+(y')^2}\,dx$

3) Випадок, коли крива задається полярними р-ми

$K: \ r = r(\varphi) \quad \varphi \in [\alpha, \beta]$

$K: \begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{aligned} x' &= r'\cos\varphi - r\sin\varphi \\ y' &= r'\sin\varphi + r\cos\varphi \end{aligned}$

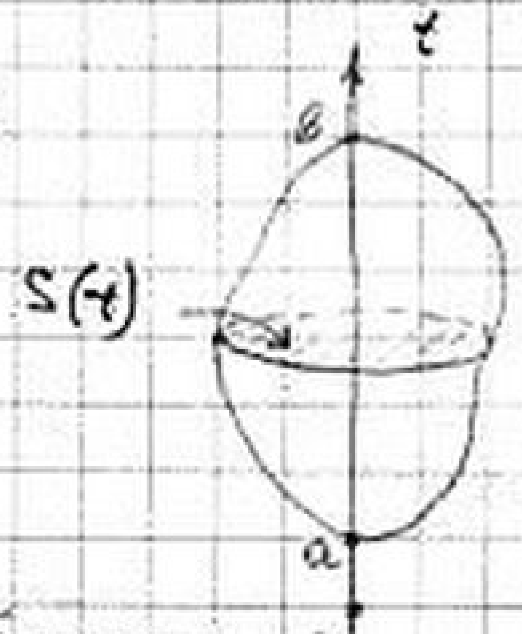
$$dl^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\,d\varphi^2 = (r'^2 + r^2)\,d\varphi^2$$

$$l(K) = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi$$

III Обчислення об'ємів тіл обертання

1) Відома площа поперечного перерізу $S(t)$ - непр. ф-я

$$V = \int_a^b S(t)\,dt$$

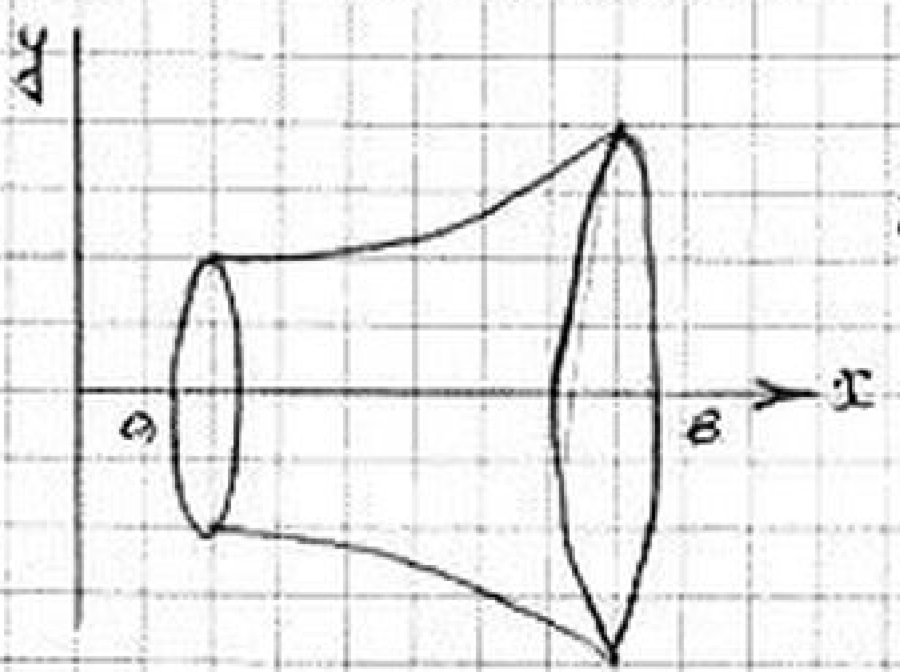


$\Delta V \approx S(t)\Delta t$

$dV = S(t)\,dt$

$\forall t \in [a, b]$

2) Об'єм тіл обертання



$$2V = 2\pi \int_a^b y^2(x)\,dx$$

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx$$

Приклад: Знайти об'єм трьохосного еліпсоїда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$$

$$\frac{x^2}{\Big(\underbrace{a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}}_{a(t)}\Big)^2} + \frac{y^2}{\Big(\underbrace{b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}}_{b(t)}\Big)^2} = 1$$ – Рівняння перерізу еліпса.

$$V = \int_{-c}^{c} \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)dt = 2\pi abc\,\frac{2}{3}$$