ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Т.А. Крыловецкая, В.Д. Овсянников

ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Часть 1

СТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

Учебное пособие для вузов

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2008

Утверждено научно-методическим советом физического факультета 25 сентября 2008 г., протокол № 9

Рецензент А.М. Бобрешов

Учебное пособие подготовлено на кафедре теоретической физики физического факультета Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов 3 курса дневного отделения.

Для направления: 010800 – Радиофизика.
Для специальности: 010801 – Радиофизика и электроника, 010803 – Микроэлектроника и полупроводниковые приборы

Предисловие

Настоящее пособие предназначается для практических занятий и самостоятельной работы по курсу «Электродинамика» для студентов 3-го курса физического факультета. Данное издание ориентировано главным образом на студентов направления 010800 — «Радиофизика», специальностей 010801 — «Радиофизика и электроника» и 010803 — «Микроэлектроника и полупроводниковые приборы».

В учебном плане курсу «Электродинамика» отводится 120 часов аудиторных занятий, из них 50 часов – практических, на которых изучение материала основывается на решении задач. Настоящее пособие представляет собой руководство к таким занятиям и содержит минимальный набор задач, умение решать которые необходимо для успешного овладения материалом первой части курса – теорией стационарных электромагнитных полей.

В главе «Векторный анализ» рассматриваются задачи, способствующие овладению основными приемами преобразования векторных дифференциальных выражений и использования в расчетах интегральных аналитических соотношений – теоремы Гаусса – Остроградского и теоремы Стокса.

В разделе «Электростатика» изучаются основные методы расчета полей стационарных систем зарядов. Наряду с интегральными методами расчета – теоремой Гаусса и принципом суперпозиции полей – предлагается набор задач на использование общих решений уравнений Лапласа и Пуассона, а также специального метода расчета электрических полей неподвижных зарядов и проводников – метода изображений.

В разделе «Постоянное магнитное поле» также представлены задачи на использование как интегральных формул Био – Савара и закона Ампера, так и дифференциальных уравнений магнитного поля.

Дополнительный набор задач можно найти в книжных изданиях, в частности, в сборниках задач [1-3], приведенных ниже в списке рекомендуемой литературы. Обращение к книжным изданиям является необходимой частью самостоятельной работы, наряду с активным освоением курса лекций и решением задач, предлагаемых на практике и в качестве домашних заданий.

1. Векторный анализ

Основным понятием электродинамики является электромагнитное поле. Этот математический термин в электродинамике относится к реально существующему объекту, связанному с электромагнитными свойствами вещества. В настоящее время в физике известно 2 типа материальных объектов: вещество и электромагнитное поле (в частности, электромагнитное излучение). Эти объекты тесно связаны друг с другом и не существуют независимо друг от друга: ни создание, ни обнаружение электромагнитных полей невозможно без вещественных объектов (заряженных и намагниченных тел, проводников с током, электроприборов, приемников и излучателей и т.д.), в то же время само существование вещественных объектов в природе и различных типов их воздействия друг на друга обязано наличию электромагнитных сил, возникающих между отдельными частицами вещества.

Знакомство с понятием «поле» начинается с математического описания его свойств. Математическим понятием поля является некоторая функция координат точек трехмерного пространства, связанного с реально существующими материальными (вещественными) объектами. Допускается также отождествление понятия поля с самим трехмерным пространством, в котором задана такая функция координат его точек.

Поля бывают скалярными, векторными, в общем случае – тензорными, в зависимости от свойств соответствующей функции относительно преобразований координат в данном пространстве.

Наряду с численной величиной (для векторного или тензорного поля речь идет о величине каждой компоненты) поля важной характеристикой является и скорость ее изменения при переходе в соседние точки пространства. Скорость изменения скалярного поля $f(\mathbf{r})$ определяет совокупность производных по трем взаимно перпендикулярным направлениям в данной точке пространства, объединяемых в одну векторную функцию – градиент, для записи которой удобно использовать векторный дифференциальный оператор набла: $\mathrm{grad}\, f(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r})$. В декартовых (x, y, z), цилиндрических (r, ϕ, z) и сферических (r, θ, ϕ) координатах этот вектор имеет вид:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad} f(\mathbf{r}) &= \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z} = \\
&= \mathbf{e}_r\frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{e}_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi} + \mathbf{e}_z\frac{\partial f}{\partial z} = \\
&= \mathbf{e}_r\frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

У градиента простой геометрический смысл: он определяет абсолютную величину и направление максимальной скорости роста скалярной функции. Скорость изменения функции в направлении произвольного вектора $\mathbf{a}$ определяется скалярным произведением $(\mathbf{a}\cdot\nabla f)/a$. В общем случае оператор дифференцирования по направлению, задаваемому единичным вектором $\mathbf{n}$, представляет собой скалярный оператор вида $(\mathbf{n}\cdot\nabla)$. Такой оператор может действовать как на скалярное, так и на векторное поле.

Вместе с производной по направлению векторное поле $\mathbf{a}$ имеет еще одну скалярную и одну векторную дифференциальные характеристики, называемые соответственно дивергенцией, $\mathrm{div}\mathbf{a}$, и ротором, $\mathrm{rot}\mathbf{a}$. Дивергенция определяет плотность потока вектора через замкнутую поверхность, охватывающую данную точку (отношение потока к величине объема, охватываемого замкнутой поверхностью):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{a} &= \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint(\mathbf{a}\cdot d\mathbf{S})}{\Delta V} = \\
&= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ra_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\phi}{\partial \phi}. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Аналогичным образом отношение циркуляции вектора по контуру, охватывающему данную точку, к площади поверхности, опирающейся на контур, определяется проекцией вектора rot $\mathbf{a}$ на нормаль к поверхности (направление обхода контура составляет правовинтовую систему с вектором нормали):

$$
\mathrm{rot}_n\mathbf{a} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint(\mathbf{a}\cdot d\mathbf{l})}{\Delta S}. \qquad (3)
$$

Явные выражения для этого вектора в декартовых, цилиндрических и сферических координатах имеют вид:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right) = \\
= \ \mathbf{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \phi}-\frac{\partial a_\phi}{\partial z}\right)+\mathbf{e}_\phi\left(\frac{\partial a_z}{\partial r}-\frac{\partial a_r}{\partial z}\right)+\mathbf{e}_z\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(ra_\phi)-\frac{\partial a_r}{\partial \phi}\right) = \\
= \ \mathbf{e}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta a_\phi)-\frac{\partial a_\theta}{\partial \phi}\right)+\mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \phi}-\frac{\partial}{\partial r}(ra_\phi)\right)+ \\
+\mathbf{e}_\phi\frac{1}{r}\left(\frac{\partial a_r}{\partial \theta}-\frac{\partial}{\partial r}(ra_\theta)\right). \qquad (4)
\end{aligned}$$

Операции $\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{div}\mathbf{a}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ можно записать с помощью оператора ∇: $\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = (\nabla\cdot\mathbf{a})$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = [\nabla\times\mathbf{a}]$.

Важнейшим уравнением для электродинамики постоянных полей является уравнение Лапласа, которому удовлетворяет электростатический потенциал в точках пространства, где свободных электрических зарядов нет,

$$\Delta\varphi = 0, \qquad (5)$$

где Δ – линейный дифференциальный оператор второго порядка (квадрат оператора ∇). Явное выражение этого оператора в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат имеет вид:

$$\begin{aligned}
\Delta = \nabla^2 \ &= \ \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \\
&= \ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \\
&= \ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Уравнение Лапласа (5) в точках, где есть пространственный заряд, превращается в уравнение с неоднородной правой частью, называемое уравнением Пуассона

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}). \qquad (7)$$

Частное решение этого уравнения можно найти с помощью функции Грина уравнения Лапласа, $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, удовлетворяющей уравнению (7) с δ-образной неоднородностью

$$\Delta G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \qquad (8)$$

Решение уравнения (8) (которое можно получить в аналитическом виде методом Фурье-преобразования) имеет вид:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{9}$$

С его помощью решение уравнения (7) можно записать в виде:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \tag{10}$$

где интегрирование проводится по всему пространству. Вообще говоря, к этому выражению можно добавить любую функцию, удовлетворяющую уравнению Лапласа (5) (например, линейную функцию декартовых координат). Однако для электродинамики интерес представляют только поля, создаваемые конкретными материальными источниками, плотность которых и описывает функция $f(\mathbf{r}')$ в подынтегральном выражении в (7), и в отсутствие которых (т. е. при $f(\mathbf{r}') \equiv 0$) поле $\varphi(\mathbf{r})$ обращается в нуль.

Основными интегральными теоремами электродинамики являются теорема Остроградского – Гаусса и теорема Стокса. Эти теоремы лежат в основе инвариантного определения дивергенции и ротора векторного поля. Теорема Гаусса – Остроградского гласит:

$$\oint\limits_S (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}) = \int\limits_V \operatorname{div} \mathbf{a} \, dV. \tag{11}$$

Интеграл от дивергенции векторного поля $\mathbf{a}$ в правой части этого равенства вычисляется по объему, ограниченному замкнутой поверхностью, поток вектора через которую вычисляется в левой части.

Теорема Стокса гласит:

$$\oint\limits_L (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}) = \int\limits_S (\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}). \tag{12}$$

Поверхность S, через которую вычисляется поток ротора векторного поля в правой части этого соотношения, опирается на контур, циркуляция по которому вычисляется для этого же векторного поля в левой части. Направление нормали к поверхности образует с направлением обхода контура правовинтовую систему.

Задачи к главе 1

Задача 1.1. Показать, что

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0; \qquad \operatorname{rot}\operatorname{grad} f(\mathbf{r}) = 0.$$

Решение. Используя возможность циклической перестановки векторов в смешанном произведении, получим:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (\nabla\cdot[\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})]) = ([\nabla\times\nabla]\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r})) = 0,$$

поскольку оператор $[\nabla\times\nabla]$ является дифференциальным векторным оператором, компоненты которого представляют собой разность вторых частных смешанных производных, отличающихся лишь порядком дифференцирования по координатам трехмерного пространства.

Задача 1.2. Доказать дифференциальные тождества:

а) $\operatorname{grad}(f\varphi) = \varphi \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad}\varphi$; б) $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi\operatorname{div}\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\operatorname{grad}\varphi)$;

в) $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi\operatorname{rot}\mathbf{A} + [\operatorname{grad}\varphi\times\mathbf{A}]$; г) $\operatorname{div}[\mathbf{A}\times\mathbf{B}] = (\mathbf{B}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}) - (\mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B})$;

д) $\operatorname{rot}[\mathbf{A}\times\mathbf{B}] = \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B} - \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$;

е) $\operatorname{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = [\mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B}] + [\mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}] + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$;

ж) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$.

Решение. Используя оператор ∇ и принимая во внимание, что он и вектор, и дифференциальный оператор, вычисления проводим с учетом правил дифференцирования произведения (стрелкой можно указывать, на какой из сомножителей действует дифференциальная операция):

а) $\operatorname{grad}(f\varphi) = \nabla(f\varphi) = \nabla(\overset{\downarrow}{f}\,\varphi) + \nabla(f\,\overset{\downarrow}{\varphi}) = \varphi \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad}\varphi$;

б) $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{A}) = (\nabla\cdot(\varphi\mathbf{A})) = (\nabla\cdot(\overset{\downarrow}{\varphi}\,\mathbf{A})) + (\nabla\cdot(\varphi\,\overset{\downarrow}{\mathbf{A}})) = (\mathbf{A}\cdot\operatorname{grad}\varphi) + \varphi\operatorname{div}\mathbf{A}$;

в) $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{A}) = [\nabla\times\varphi\mathbf{A}] = [\nabla\times\overset{\downarrow}{\varphi}\,\mathbf{A}] + [\nabla\times\varphi\,\overset{\downarrow}{\mathbf{A}}] = [\operatorname{grad}\varphi\times\mathbf{A}] + \varphi\operatorname{rot}\mathbf{A}$;

г) $\mathrm{div}[\mathbf{A}\times\mathbf{B}] = (\nabla\cdot[\mathbf{A}\times\mathbf{B}]) = (\nabla\cdot[\overset{\downarrow}{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}]) + (\nabla\cdot[\mathbf{A}\times\overset{\downarrow}{\mathbf{B}}]) =$
$= (\nabla\cdot[\overset{\downarrow}{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}]) - (\nabla\cdot[\overset{\downarrow}{\mathbf{B}}\times\mathbf{A}]) = (\mathbf{B}\cdot[\nabla\times\overset{\downarrow}{\mathbf{A}}]) - (\mathbf{A}\cdot[\nabla\times\overset{\downarrow}{\mathbf{B}}]) =$
$= (\mathbf{B}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{A}) - (\mathbf{A}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{B});$

ж) $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{A} = [\nabla\times[\nabla\times\mathbf{A}]] = \nabla\cdot(\nabla\cdot\mathbf{A}) - (\nabla\cdot\nabla)\mathbf{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}.$

Задача 1.3. Показать, что при действии на функции, зависящие только от модуля радиуса-вектора $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, оператор ∇ можно заменить на $\mathbf{e}_r d/dr$, где $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ – единичный вектор в радиальном направлении. Доказать следующие векторные дифференциальные тождества:

а) $\mathrm{grad}\ r = \mathbf{e}_r;$ б) $\mathrm{grad}\ f(r) = \mathbf{e}_r \dfrac{df}{dr};$

в) $\mathrm{div}\mathbf{A}(r) = \left(\mathbf{e}_r\cdot\dfrac{d\mathbf{A}}{dr}\right);$ г) $\mathrm{rot}\mathbf{A}(r) = \left[\mathbf{e}_r\times\dfrac{d\mathbf{A}}{dr}\right];$

д) $\mathrm{grad}\,(\mathbf{A}(r)\cdot\mathbf{B}(r)) = \mathbf{e}_r\left\{\left(\dfrac{d\mathbf{A}}{dr}\cdot\mathbf{B}(r)\right) + \left(\mathbf{A}(r)\cdot\dfrac{d\mathbf{B}}{dr}\right)\right\};$

е) $\mathrm{div}\,(\varphi(r)\mathbf{A}(r)) = \dfrac{\varphi}{r}\left(\mathbf{r}\cdot\dfrac{d\mathbf{A}}{dr}\right) + \dfrac{d\varphi}{dr}\left(\dfrac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{A}(r)\right);$

ж) $\mathrm{rot}\,(\varphi(r)\mathbf{A}(r)) = \dfrac{\varphi}{r}\left[\mathbf{r}\times\dfrac{d\mathbf{A}}{dr}\right] + \dfrac{d\varphi}{dr}\left[\dfrac{\mathbf{r}}{r}\times\mathbf{A}(r)\right].$

Решение.

б)
$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}\,f(r) &= \mathbf{i}\frac{\partial f(r)}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f(r)}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f(r)}{\partial z} = \\
&= \mathbf{i}\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial z} = \\
&= \frac{df(r)}{dr}\Big(\mathbf{i}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \mathbf{j}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \mathbf{k}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big) = \\
&= \frac{df(r)}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{df(r)}{dr}\mathbf{e}_r;
\end{aligned}$$

в)
$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{A}(r) &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{dA_x}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{dA_y}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{dA_z}{dr}\frac{\partial r}{\partial z} = \\
&= \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dr}\right) = \left(\mathbf{e}_r\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dr}\right);
\end{aligned}$$

$$\text{г) } \mathrm{rot}\mathbf{A}(r) = \mathbf{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{dA_z}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{dA_y}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{dA_x}{dr}\frac{\partial r}{\partial z} - \frac{dA_z}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{dA_y}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{dA_x}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}\right) =$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{y}{r}\frac{dA_z}{dr} - \frac{z}{r}\frac{dA_y}{dr}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{z}{r}\frac{dA_x}{dr} - \frac{x}{r}\frac{dA_z}{dr}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{x}{r}\frac{dA_y}{dr} - \frac{y}{r}\frac{dA_x}{dr}\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\left[\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{A}}{dr}\right] = \left[\mathbf{e}_r \times \frac{d\mathbf{A}}{dr}\right].$$

Задача 1.4. Доказать следующие векторные дифференциальные тождества, содержащие радиус-вектор $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$:

а) $\mathrm{div}\mathbf{r} = 3$; б) $\mathrm{rot}\mathbf{r} = 0$; в) $\mathrm{div}(\varphi(r)\mathbf{r}) = 3\varphi(r) + r\dfrac{d\varphi}{dr}$;

г) $\mathrm{rot}(\varphi(r)\mathbf{r}) = 0$; д) $\mathrm{grad}\dfrac{1}{r} = -\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}$; е) $\mathrm{div}\dfrac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$, при $r \neq 0$;

ж) $\mathrm{rot}\dfrac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$; з) $\Delta r = \dfrac{2}{r}$; и) $\Delta\mathbf{r} = 0$.

Решение.

$$\text{в)}\quad \mathrm{div}(\varphi(r)\mathbf{r}) = \frac{\partial(\varphi(r)x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi(r)y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varphi(r)z)}{\partial z} =$$

$$= 3\varphi(r) + \frac{d\varphi(r)}{dr}\left(\frac{x^2}{r} + \frac{y^2}{r} + \frac{z^2}{r}\right) = 3\varphi(r) + r\frac{d\varphi}{dr};$$

$$\text{г)}\quad \mathrm{rot}(\varphi(r)\mathbf{r}) = \mathbf{i}\left(z\frac{\partial\varphi(r)}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi(r)}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(x\frac{\partial\varphi(r)}{\partial z} - z\frac{\partial\varphi(r)}{\partial x}\right) +$$

$$+ \mathbf{k}\left(y\frac{\partial\varphi(r)}{\partial x} - x\frac{\partial\varphi(r)}{\partial y}\right) = \frac{1}{r}\frac{d\varphi(r)}{dr}\{\mathbf{i}(zy - yz) + \mathbf{j}(xz - zx) +$$

$$+\mathbf{k}\,(yx - xy)\} = 0;$$

$$\text{з)}\quad \Delta r = \nabla(\nabla r) = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,r = \mathrm{div}\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{3}{r} + r\frac{d\left(\dfrac{1}{r}\right)}{dr} = \frac{2}{r};$$

Задача 1.5. Доказать следующие равенства, содержащие постоянные векторы $\mathbf{p} = const$ и $\mathbf{q} = const$:

а) $\mathrm{grad}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{p}$; б) $\mathrm{grad}\dfrac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^3} = \dfrac{\mathbf{p}}{r^3} - \dfrac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^5}\mathbf{r}$;

в) $\mathrm{div}[\mathbf{p}\times\mathbf{r}] = 0$; г) $\mathrm{rot}[\mathbf{p}\times\mathbf{r}] = 2\mathbf{p}$;

д) $\operatorname{div}[\mathbf{p}\times[\mathbf{r}\times\mathbf{q}]]=2(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})$;   е) $\operatorname{rot}[\mathbf{p}\times[\mathbf{r}\times\mathbf{q}]]=-[\mathbf{p}\times\mathbf{q}]$;

Решение.

а) $\operatorname{grad}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})=\mathbf{i}\dfrac{\partial p_x x}{\partial x}+\mathbf{j}\dfrac{\partial p_y y}{\partial y}+\mathbf{k}\dfrac{\partial p_z z}{\partial z}=\mathbf{i}p_x+\mathbf{j}p_y+\mathbf{k}p_z=\mathbf{p}$;

в) $\operatorname{div}[\mathbf{p}\times\mathbf{r}]=\nabla[\mathbf{p}\times\mathbf{r}]=-\mathbf{p}[\nabla\times\mathbf{r}]=(-\mathbf{p}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{r})=0$;

г) $\operatorname{rot}[\mathbf{p}\times\mathbf{r}]=\mathbf{p}(\nabla\mathbf{r})-(\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{r}=3\mathbf{p}-\left(p_x\dfrac{\partial}{\partial x}+p_y\dfrac{\partial}{\partial y}+p_z\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\times$
$\times\,(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})=3\mathbf{p}-(p_x\mathbf{i}+p_y\mathbf{j}+p_z\mathbf{k})=2\mathbf{p}$;

е) $\operatorname{rot}[\mathbf{p}\times[\mathbf{r}\times\mathbf{q}]]=[\nabla\times[\mathbf{p}\times[\mathbf{r}\times\mathbf{q}]]]=\mathbf{p}(\nabla\cdot[\mathbf{r}\times\mathbf{q}])-(\mathbf{p}\cdot\nabla)[\mathbf{r}\times\mathbf{q}]=$
$=\mathbf{p}(\mathbf{q}\cdot[\nabla\times\mathbf{r}])-[(\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{r}\times\mathbf{q}]=0-[\mathbf{p}\times\mathbf{q}]=-[\mathbf{p}\times\mathbf{q}]$;

Задача 1.6. С помощью теоремы Гаусса – Остроградского доказать соотношения ($\mathbf{p}$ – постоянный вектор, V – объем пространства, ограниченный замкнутой поверхностью S):

а) $\oint\limits_S(\mathbf{r}\cdot d\mathbf{S})=3V$;   б) $\oint\limits_S\mathbf{r}(\mathbf{p}\cdot d\mathbf{S})=\mathbf{p}V$;

в) $\oint\limits_S(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})d\mathbf{S}=\mathbf{p}V$;   г) $\oint\limits_S f(\mathbf{r})d\mathbf{S}=\int\limits_V\operatorname{grad}\,f(\mathbf{r})dV$.

Решение.

б) При решении этой и других подобных задач удобно рассмотреть скалярное произведение интеграла с произвольным постоянным вектором $\mathbf{c}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{c}\cdot\oint\limits_S\mathbf{r}(\mathbf{p}\cdot d\mathbf{S}) &= \oint\limits_S(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{p}\cdot d\mathbf{S})=\oint\limits_S((\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})\mathbf{p}\cdot d\mathbf{S})=\\ &= \int\limits_V\operatorname{div}((\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})\mathbf{p})dV=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{p})\int\limits_V dV=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{p})\cdot V.\end{aligned}$$

Поскольку $\mathbf{c}$ – произвольный вектор, то отсюда следует, что

$$\oint\limits_S\mathbf{r}(\mathbf{p}\cdot d\mathbf{S})=\mathbf{p}V.$$

Задача 1.7. Применяя теорему Гаусса – Остроградского, вычислите поток векторного поля:

а) $\mathbf{a} = (x-y)\mathbf{i} + (z-y)\mathbf{j} + (z-x)\mathbf{k}$; б) $\mathbf{a} = (z+1)\mathbf{k}$;

через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в сторону внешней нормали.

Ответы: а) $4\pi/3$; б) $4\pi/3$.

2. Электростатика

Основной задачей электростатики является нахождение напряженности электрического поля по заданному закону распределения зарядов в пространстве. Заряды могут рассматриваться как точечные, линейные, поверхностные или объемные, в зависимости от соотношения между линейными размерами пространства, в котором создается электрическое поле, и той области, где заряды сосредоточены.

Поле, создаваемое зарядом любого типа, удовлетворяет электростатической теореме Гаусса

$$\oint_S (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}) = 4\pi \sum_i q_i, \tag{13}$$

где суммирование в правой части распространяется на все заряды q_i, находящиеся внутри области пространства, ограниченной замкнутой поверхностью S, через которую вычисляется поток вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ в левой части равенства. Предполагая, что заряд распределен по пространству с объемной плотностью $\rho(\mathbf{r})$, и используя теорему Остроградского-Гаусса (11) для интеграла в левой части, получим дифференциальное уравнение электростатики (теорему Гаусса в дифференциальной форме), определяющее плотность источников электростатического поля:

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho. \tag{14}$$

Второе дифференциальное уравнение, указывающее на отсутствие вихрей у электростатического поля, можно получить с помощью теоремы Стокса, исходя из условия потенциальности поля:

$$\oint_L (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0. \tag{15}$$

Две дифференциальные характеристики (14) и (15) полностью определяют векторное поле. Вводя на основании уравнения (15) электростатический потенциал, согласно соотношению

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi, \tag{16}$$

и подставляя его в (14), получим уравнение Пуассона для потенциала:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{17}$$

Решение этого уравнения согласно (10) имеет вид суперпозиции потенциалов полей, создаваемых точечными зарядами $dq(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{18}$$

Подставляя правую часть этого равенства в (16), получим аналогичное выражение для напряженности:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}d\mathbf{r}'. \tag{19}$$

Соотношения (13) – (19) позволяют рассчитывать напряженности и потенциалы электростатических полей, создаваемых различными системами зарядов. При использовании этих уравнений следует учитывать симметрию распределения зарядов в пространстве, приводящую к существенному упрощению расчетов. В случае поверхностных или линейных зарядов объемные интеграл и плотность $\rho(\mathbf{r}')$ в выражениях (18) – (19) следует заменить соответственно на поверхностные или линейные интеграл и плотность $\sigma(\mathbf{r}')$ или $\tau(\mathbf{r}')$.

Задачи к главе 2

Дифференциальные уравнения электростатики

Задача 2.1. Найти напряженность $\mathbf{E}$ электростатического поля, потенциал φ которого равен:

а) $\mathbf{a}[\mathbf{b}\times\mathbf{r}]$; б) $[\mathbf{a}\times\mathbf{r}][\mathbf{b}\times\mathbf{r}]$;

в) $(\mathbf{d}\cdot\mathbf{r})\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$; г) $(\mathbf{d}\cdot\mathbf{r})/r^3$;

д) $f(r)F(r)$; е) $F(f(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}))$.

Здесь векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{k}$ и $\mathbf{d}$ не зависят от координат и времени, а f и F – произвольные дифференцируемые функции своего аргумента.

Ответы:

а) $[\mathbf{b}\times\mathbf{a}]$; б) $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{b}-2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{r}+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\mathbf{a}$;

в) $(\mathbf{d}\cdot\mathbf{r})\mathbf{k}\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})-\mathbf{d}\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$; г) $3(\mathbf{d}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}/r^5-\mathbf{d}/r^3$;

д) $-\left[\dfrac{df(r)}{dr}F(r)+f(r)\dfrac{dF(r)}{dr}\right]\dfrac{\mathbf{r}}{r}$; е) $-\dfrac{dF}{df}\dfrac{df}{d(\mathbf{ar})}\mathbf{a}$.

Задача 2.2. Можно ли создать в пространстве электростатическое поле с напряженностью:

а) $\mathbf{E}=[\mathbf{a}\times\mathbf{r}]$; б) $\mathbf{E}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{b}$;

в) $\mathbf{E}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}$; г) $\mathbf{E}=f(r)[\mathbf{a}\times\mathbf{r}]$,

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – постоянные вектора?

Ответы:

а) нельзя, так как ротор заданной векторной функции отличен от нуля: $\mathrm{rot}\mathbf{E}=2\mathbf{a}$;

б) можно, если вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ параллельны, так как при этом условии ротор заданной векторной функции равен нулю, а дивергенция отлична от нуля: $\mathrm{rot}\mathbf{E}=[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$; $\mathrm{div}\mathbf{E}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$;

в) нельзя, так как ротор заданной векторной функции отличен от нуля:
$\mathrm{rot}\mathbf{E}=[\mathbf{a}\times\mathbf{r}]$;

г) нельзя, так как ротор заданной векторной функции отличен от нуля:
$\mathrm{rot}\mathbf{E} = \left(r\mathbf{a} - \frac{\mathbf{r}}{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})\right)\frac{\partial f}{\partial r} + 2\mathbf{a}f(r).$

Задача 2.3. Определить распределение объемной плотности ρ заряда, создавшего в пространстве электрическое поле с напряженностью $\mathbf{E}$, равной:

а) $(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\mathbf{b}$; б) $gr\mathbf{r}$;

в) $\frac{e\mathbf{r}}{r^3}\left\{1 - \left[1 + \frac{2r}{a}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\right]\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)\right\}$.

Здесь векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и величины a, g и e не зависят от координат, а f - произвольная дифференцируемая функция своего аргумента.

Ответы:

а) $\frac{b^2}{4\pi}$; б) $\frac{gr}{\pi}$. в) $\frac{e}{\pi a^3}e^{-2r/a}$;

Теорема Гаусса

Задача 2.4. Показать, что в случае сферически-симметричного распределения зарядов $\rho(r)$ вектор напряженности электрического поля направлен по радиусу-вектору: $\mathbf{E} \parallel \mathbf{r}$.

Задача 2.5. Шар радиуса R заряжен по объему зарядом Q с постоянной плотностью ρ. Найти распределение напряженности поля $\mathbf{E}$ внутри и вне шара.

Решение.

Поле шара, заряженного с постоянной плотностью $\rho(r)$, обладает сферической симметрией: $E_r = E(r)$; $E_\theta = E_\varphi = 0$. Применив теорему Гаусса $\oint\limits_S(\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}) = 4\pi\int\limits_V \rho(r)dV$ к сферической поверхности радиуса $r \le R$ с центром в центре заряженного шара, получим

$$E\cdot 4\pi r^2 = 4\pi\rho(r)\cdot\frac{4}{3}\pi r^3; \qquad E = \frac{4}{3}\pi\rho r; \qquad \mathbf{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\mathbf{r} = Q\mathbf{r}/R^3.$$

Для аналогичной сферической поверхности радиуса $r > R$ имеем:

$$E\cdot 4\pi r^2 = 4\pi\rho(r)\cdot\frac{4}{3}\pi R^3; \qquad E = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{R^3}{r^2}; \quad \mathbf{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{R^3}{r^3}\mathbf{r} = Q\mathbf{r}/r^3.$$

Таким образом, поле вне шара таково, как если бы весь заряд был сосредоточен в его центре, а внутри шара поле прямо пропорционально расстоянию от центра шара.

$$\textit{Ответ:} \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}\pi\rho\mathbf{r} = \dfrac{Q\mathbf{r}}{R^3}, & \text{для } r \le R; \\ \dfrac{4}{3}\pi\rho\dfrac{R^3}{r^3}\mathbf{r} = Q\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}, & \text{для } r > R. \end{cases}$$

Задача 2.6. Прямой круглый цилиндр бесконечной длины, с радиусом сечения R заряжен равномерно с объемной плотностью ρ. Найти распределение напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ во всех точках пространства. Получить выражение для поля бесконечной нити, заряженной с линейной плотностью τ.

$$\textit{Ответ:}\ E_\phi = E_z = 0;\ \mathbf{E} = \mathbf{e}_r E(r); \quad E(r) = \begin{cases} 2\pi\rho r, & \text{для } r \le R, \\ 2\pi\rho R^2/r, & \text{для } r > R; \end{cases}$$

$$\mathbf{E}_{\text{нити}} = 2\tau\mathbf{e}_r/r.$$

Задача 2.7. В шаре радиуса R_2 равномерно заряжен с объемной плотностью ρ внешний шаровой слой. Внутренний радиус слоя R_1. Найти распределение напряженности поля $\mathbf{E}$ во всех точках пространства.

$$\textit{Ответ:} \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \text{для } r \le R_1; \\ \dfrac{4}{3}\pi\rho\dfrac{r^3 - R_1^3}{r^3}\mathbf{r}, & \text{для } R_1 < r \le R_2; \\ \dfrac{4}{3}\pi\rho\dfrac{R_2^3 - R_1^3}{r^3}\mathbf{r}, & \text{для } r > R_2. \end{cases}$$

Задача 2.8. В цилиндре радиуса R_2 равномерно заряжен с объемной плотностью ρ внешний цилиндрический слой. Внутренний радиус слоя R_1. Найти распределение напряженности поля $\mathbf{E}$ во всех точках пространства.

$$\textit{Ответ:} \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \text{для } r \le R_1; \\ 2\pi\rho\dfrac{r^2 - R_1^2}{r}\mathbf{e}_r, & \text{для } R_1 < r \le R_2; \\ 2\pi\rho\dfrac{R_2^2 - R_1^2}{r}\mathbf{e}_r, & \text{для } r > R_2. \end{cases}$$

Задача 2.9. Проводящая сфера радиуса R имеет заряд Q. Найти напряженность поля $\mathbf{E}$ внутри и вне сферы и выразить ее через поверхностную плотность заряда σ. Вычислить величину скачка напряженности на поверхности сферы.

$$\textit{Ответ:} \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \text{для } r \le R; \\ Q\mathbf{r}/r^3 = 4\pi\sigma R^2\mathbf{r}/r^3, & \text{для } r > R; \end{cases}$$
$$((\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{e}_r)|_{r=R} = 4\pi\sigma.$$

Задача 2.10. Проводящий цилиндр радиуса сечения R равномерно заряжен с постоянной поверхностной плотностью σ. Найти напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ внутри и вне цилиндра и вычислить величину скачка $\mathbf{E}$ на поверхности цилиндра.

Решение.

Поле обладает аксиальной симметрией: $E_r = E(r)$, $E_\theta = E_z = 0$. Применив теорему Гаусса к поверхности цилиндра высотой h и радиуса r, ось которого совпадает с осью заряженного цилиндра, и учитывая, что поток через основания цилиндра равен нулю, получим

$$\text{в случае } r \le R: \ E = 0;$$
$$\text{в случае } r > R: \ E \cdot 2\pi r h = 4\pi\sigma \cdot 2\pi R h; \quad E = 4\pi\sigma\frac{R}{r}; \quad \mathbf{E} = 4\pi\sigma R\mathbf{r}/r^2.$$

$$\textit{Ответ:} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \text{для } r \le R; \\ 4\pi\sigma R\mathbf{r}/r^2, & \text{для } r > R; \end{cases} \quad ((\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{e}_r)|_{r=R} = 4\pi\sigma.$$

Задача 2.11. Показать по теореме Гаусса, что любой заряд, вносимый в проводник, может располагаться лишь на его поверхности.

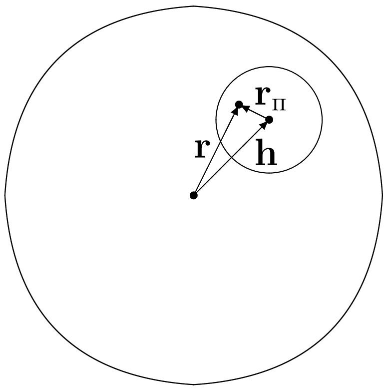
Задача 2.12. Показать по теореме Гаусса, что замкнутый полый проводник экранирует внутренний объем от действия зарядов, расположенных снаружи, не экранирует внешний объем от действия зарядов, расположенных внутри.

Задача 2.13. Можно ли создать электростатическое поле, для которого $\mathrm{grad} E \perp \mathbf{E}$?

Задача 2.14. Решить задачи 2.7 и 2.8, воспользовавшись принципом суперпозиции полей и представив незаряженную полость как область с положительным и отрицательным зарядом одинаковой величины.

Задача 2.15. В шаре, равномерно заряженном по объему с постоянной плотностью ρ, имеется сферическая полость, центр которой отстоит от центра шара на расстояние $\mathbf{h}$. Полость находится целиком внутри шара. Найти напряженность поля внутри полости.

Решение.



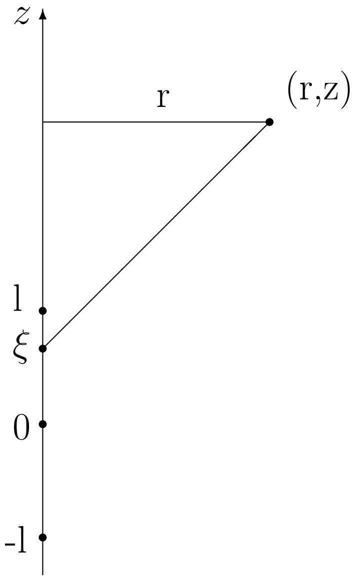
Искомое поле можно представить в виде суперпозиции полей, создаваемых шаром без полости, равномерно заряженным с плотностью ρ, и «шаром-полостью» – равномерно заряженным с плотностью $(-\rho)$:

$$\mathbf{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\mathbf{r} - \frac{4}{3}\pi\rho\mathbf{r}_{\text{п}} = \frac{4}{3}\pi\rho\mathbf{h}.$$

Как видно из ответа, поле внутри полости однородное.

Ответ: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{4}{3}\pi\rho\mathbf{h}.$

Задача 2.16. Исходя из принципа суперпозиции (см. уравнения (18), (19)), найти поле, создаваемое в вакууме прямолинейным равномерно заряженным с линейной плотностью τ проводом длиной $2l$. Рассмотреть случай $l \gg r$. Сравнить с результатом, полученным по теореме Гаусса.



Решение.
Если начало цилиндрической системы координат поместить в середине отрезка, а ось z направить вдоль него, то для произвольной точки (r, z) поля, исходя из принципа суперпозиции, имеем

$$\varphi = \int_{-l}^{+l} \frac{\tau d\xi}{\sqrt{r^2 + (z - \xi)^2}}.$$

Интегрирование дает

$$\varphi(r,z) = \tau \ln \frac{z + l + \sqrt{r^2 + (z+l)^2}}{z - l + \sqrt{r^2 + (z-l)^2}}.$$

Для бесконечного провода потенциал не зависит от z, а потому, положив $z = 0$, для достаточно большого значения $l \gg r$ находим, что

$$\varphi = \tau \ln \frac{l + \sqrt{r^2 + l^2}}{-l + \sqrt{r^2 + l^2}} = \tau \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \dfrac{r^2}{l^2}}}{-1 + \sqrt{1 + \dfrac{r^2}{l^2}}} =$$

$$= \tau \ln \frac{2 + \dfrac{r^2}{2l^2}}{\dfrac{r^2}{2l^2}} = \tau \ln \frac{4l^2}{r^2} = \mathrm{const} - 2\tau \ln r.$$

Отсюда напряженность поля

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2\tau}{r}; \quad E_\theta = E_z = 0.$$

Задача 2.17. В прямом круглом бесконечном цилиндре, равномерно заряженном по объему с постоянной плотностью ρ, имеется бесконечная цилиндрическая полость, ось которой параллельна оси цилиндра и отстоит от нее на расстояние $\mathbf{h}$. Найти напряженность поля внутри полости.

Ответ: $\qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2\pi\rho\mathbf{h}.$

Задача 2.18. Найти потенциал и напряженность электрического поля на оси тонкого кольца радиуса a, равномерно заряженного зарядом q.

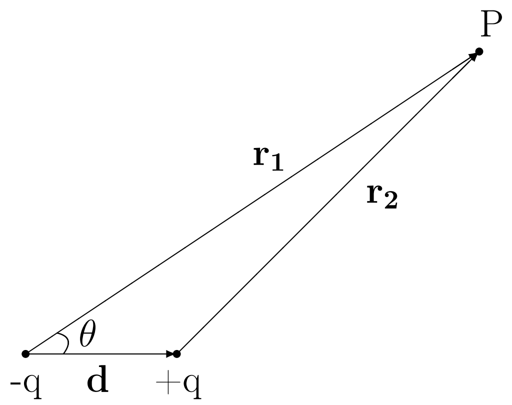
Ответ: $\quad \varphi = \dfrac{q}{\sqrt{z^2 + a^2}}, \qquad \mathbf{E} = \dfrac{qz}{(z^2 + a^2)^{3/2}}\mathbf{e}_z.$

Задача 2.19. Найти потенциал и напряженность электрического поля в центре окружности радиуса a, частью которой является дуга, равномерно заряженная с линейной плотностью τ. Центральный угол дуги γ.

Ответ: $\quad \varphi = \tau\gamma; \qquad E = \dfrac{2\tau}{a} \sin \dfrac{\gamma}{2}.$

Задача 2.20. Найти потенциал и напряженность электрического поля, создаваемого диполем с моментом $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ на больших расстояниях, $r \gg d$.

Решение.



Диполем называется совокупность двух зарядов $+q$ и $-q$, разделенных расстоянием $\mathbf{d}$ (вектор $\mathbf{d}$ направлен от отрицательного к положительному заряду). Потенциал обоих зарядов в произвольной точке поля P равен:

$$\varphi = q\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{q(r_1 - r_2)}{r_1 r_2}.$$

В случае $r_1 \approx r_2 \gg d$ можно приближенно положить:

$$r_1 r_2 = r^2, \qquad r_1 - r_2 = \frac{(\mathbf{d}\cdot\mathbf{r})}{r}.$$

Ввиду малости расстояния d безразлично, из какой именно точки диполя проведен радиус-вектор $\mathbf{r}$ в точку наблюдения P. Таким образом, потенциал диполя принимает вид

$$\varphi = \frac{q(\mathbf{d}\cdot\mathbf{r})}{r^3} = \frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^3}.$$

Напряженность поля

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\operatorname{grad}\left(\frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^3}\right) = /\text{см. }(1.5(\text{б}))/ = \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}.$$

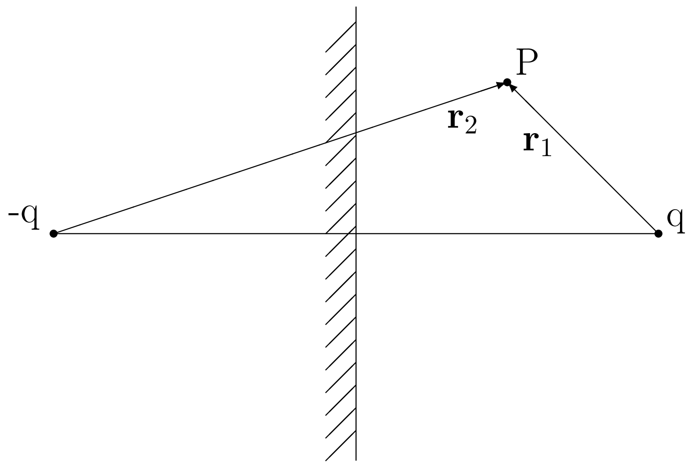
$$\textit{Ответ:}\quad \varphi = \frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^3}; \qquad E = \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}.$$

Задача 2.21. Найти напряженность электрического поля в точке, отстоящей на расстояние a от равномерно заряженного с плотностью τ стержня. Стержень виден из точки под углом γ.

$$\textit{Ответ:}\quad E = \frac{2\tau}{a}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

<u>Метод изображений</u>

Данный метод основывается на однозначности решения уравнений электростатики с заданными граничными условиями и используется для расчета полей статических зарядов в присутствии проводников. Суть его состоит в замене проводника с индуцированными на его поверхности зарядами такой системой зарядов-изображений, которая бы дала вместе с исходными зарядами эквипотенциальную поверхность, совпадающую с поверхностью проводника. Тогда поле в пространстве вне проводника (внутри проводника поле отсутствует) определяется как суперпозиция полей исходного заряда и зарядов-изображений.



Задача 2.22. На расстоянии d от бесконечного проводника, занимающего все левое полупространство, находится точечный заряд q. Определить: 1) поле вне проводника; 2) силу F притяжения заряда проводником; 3) энергию U взаимодействия проводника и заряда; 4) плотность заряда σ, индуцированного на поверхности проводника; 5) полный заряд Q поверхности.

Ответ: $$1)\ \varphi = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}; \qquad 2)\ F = -\frac{q^2}{4d^2}; \qquad 3)\ U = -\frac{q^2}{2d};$$

$$4)\ \sigma = -\frac{qd}{2\pi(r^2+d^2)^{3/2}}; \qquad 5)\ Q = -q.$$

Здесь r – расстояние от оси, проходящей через заряд и перпендикулярной к поверхности проводника.

Задача 2.23. Бесконечный проводник занимает 3/4 пространства. На расстояниях a и b от его граней находится точечный заряд q. Найти: 1) поле вне проводника; 2) плотность заряда, индуцированного на его поверхности; 3) силу притяжения заряда к проводнику.

Ответ: $$1)\ \varphi = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} + \frac{q}{r_3} - \frac{q}{r_4}; \quad \text{где } r_1 = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}, \qquad r_3 = \sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2},$$
$$r_4 = \sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2},$$
$$2)\ \sigma|_{x=0} = -\frac{qa}{2\pi}\left[\frac{1}{(a^2+(y-b)^2+z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(a^2+(y+b)^2+z^2)^{3/2}}\right];$$

$$\sigma|_{y=0} = -\frac{qb}{2\pi}\left[\frac{1}{((x-a)^2+b^2+z^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x+a)^2+b^2+z^2)^{3/2}}\right];$$

$$3)\ F_x = -\frac{q^2}{4a^2}\left[1-\frac{a^3}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right]; \quad F_y = -\frac{q^2}{4b^2}\left[1-\frac{b^3}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right].$$

Здесь $\{x, y\}$ – декартовы координаты в плоскости, перпендикулярной обеим плоским поверхностям проводника, и содержащей заряд в точке $x = a,\ y = b$; координата z направлена вдоль линии пересечения поверхностей проводника.

Задача 2.24. На расстоянии d друг от друга находятся два точечных заряда q и $-q'$ ($q' < q$). Определить поверхность, на которой потенциал равен нулю.

Ответ: сфера радиуса $R = d\dfrac{qq'}{q^2 - q'^2}$.

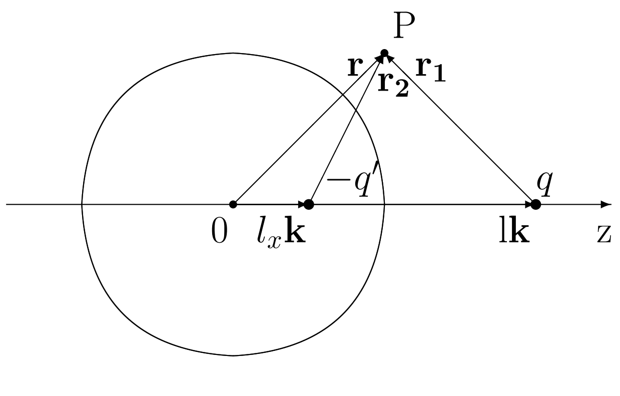
Центр сферы располагается на линии, соединяющей заряды, так что меньший (по абсолютной величине) заряд находится внутри сферы на расстоянии $l' = Rq'/q$ от ее центра, а больший – вне сферы на расстоянии $l = Rq/q'$ от центра.

Задача 2.25. На расстоянии l от центра заземленной сферы радиуса R находится точечный заряд q. Найти поле вне сферы, распределение заряда, индуцированного на ее поверхности, и силу притяжения заряда сферой.

Решение.

Условие заземленности сферы задает нулевой потенциал на ее поверхности:

$$\varphi(R, \theta, \phi) = 0.$$



Согласно решению задачи 2.24, такому условию удовлетворяет потенциал системы двух зарядов: q и $-q'$, где $q' = qR/l$, причем заряд $-q'$ помещен на линии, соединяющей центр шара с зарядом q, на расстоянии $l' = R^2/l$.

Таким образом, проводящую заземленную сферу можно заменить зарядом-изображением $-q'$ и рассматривать поле вне сферы как суперпозицию полей двух точечных зарядов:

$$\varphi(r,\theta) = \frac{q}{\sqrt{l^2 + r^2 - 2lr\cos\theta}} - \frac{q}{\sqrt{R^2 + r^2 l^2/R^2 - 2lr\cos\theta}}.$$

Для определения плотности индуцированного заряда воспользуемся граничным условием $E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$. Так как $E_{1n} = 0$, то

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{q(R^2 - l^2)}{4\pi R(R^2 + l^2 - 2Rl\cos\theta)^{3/2}}.$$

Силу притяжения заряда сферой можно определить как силу притяжения реального заряда зарядом-изображением:

$$F = -\frac{qq'}{(l-l')^2} = -\frac{q^2 Rl}{(l^2 - R^2)^2}.$$

Ответ: $\varphi(r,\theta) = \dfrac{q}{\sqrt{l^2 + r^2 - 2lr\cos\theta}} - \dfrac{q}{\sqrt{R^2 + r^2 l^2/R^2 - 2lr\cos\theta}};$

$$\sigma = \frac{q(R^2 - l^2)}{4\pi R(R^2 + l^2 - 2Rl\cos\theta)^{3/2}}; \qquad F = -\frac{q^2 Rl}{(l^2 - R^2)^2}.$$

Задача 2.26. Рассмотреть предыдущую задачу для изолированной (незаземленной) сферы, если задан: а) потенциал сферы φ_0; б) полный заряд на сфере Q. Рассмотреть случай, когда точечный заряд q находится внутри сферы.

Ответ: *а)* $\varphi_a = \varphi + \varphi_0\dfrac{R}{r};$ $\quad\sigma_a = \sigma + \dfrac{\varphi_0}{4\pi R};$ $\quad F_a = F + \dfrac{\varphi_0 qR}{l^2};$

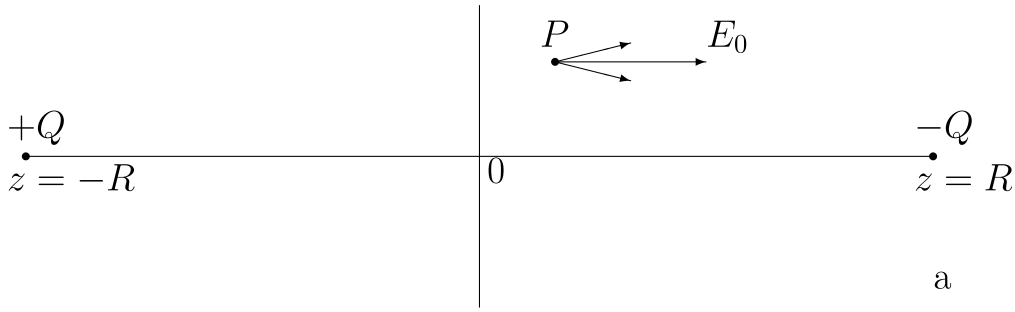
б) $\varphi_б = \varphi + \dfrac{Q + qR/l}{r};$ $\quad\sigma_б = \sigma + \dfrac{Q + qR/l}{4\pi R^2};$ $\quad F_б = F + \dfrac{(Q + qR/l)q}{l^2},$

где φ, σ, F даны в ответе к задаче 2.25.

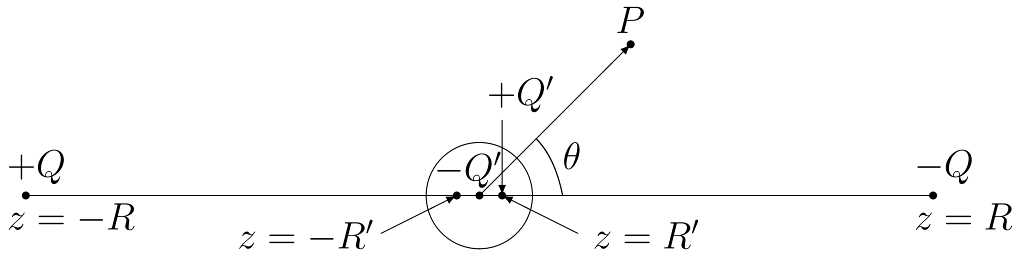
Задача 2.27. Бесконечная металлическая поверхность согнута под углом 60°. На биссектрисе угла на расстоянии d от его вершины находится точечный заряд q. Найти поле во всем пространстве.

Задача 2.28. Определить поле вокруг проводящего незаряженного шара радиуса а, помещенного в однородное электрическое поле $\mathbf{E_0}$. Найти плотность индуцированных зарядов σ и дипольный момент шара $\mathbf{p}$.

Решение.



а



б

Можно считать, что однородное поле создано соответствующими положительным и отрицательным зарядами на бесконечности. Если, например, два заряда $+Q$ и $-Q$ находятся в точках $z = \mp R$, как показано на рис. а, то в близкой к началу координат области, размеры которой много меньше R, электрическое поле имеет почти постоянное значение $E_0 \approx 2Q/R^2$ и приблизительно параллельно оси z. В пределе, когда $R \to \infty$, $Q \to \infty$ при $Q/R^2 = const$, это приближение становится совершенно точным.

Пусть теперь в начало координат помещена проводящая сфера радиусом a (рис. б); при этом поле будет определяться реальными зарядами $\pm Q$, находящимися на расстоянии $\mp R$, и зарядами-изображениями $\mp Q'$, расположенными в точках $z = \mp R'$. Полный потенциал равен:

$$\varphi = \frac{Q}{(r^2 + R^2 + 2rR\cos\theta)^{1/2}} - \frac{Q}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta)^{1/2}} -$$
$$- \frac{Q'}{(r^2 + z^2 + 2rz\cos\theta)^{1/2}} + \frac{Q}{(r^2 + z^2 - 2rz\cos\theta)^{1/2}}.$$

Аналогично задаче 2.25 для зарядов-изображений находим: $Q' = Qa/R$, $R' = a^2/R$.

$$\varphi = \frac{Q}{(r^2 + R^2 + 2rR\cos\theta)^{1/2}} - \frac{Q}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta)^{1/2}} -$$
$$-\frac{aQ}{R\left(r^2 + \dfrac{a^4}{R^2} + \dfrac{2a^2r}{R}\cos\theta\right)^{1/2}} + \frac{aQ}{R\left(r^2 + \dfrac{a^4}{R^2} - \dfrac{2a^2r}{R}\cos\theta\right)^{1/2}}.$$

В первых двух слагаемых, учитывая, что по предположению R много больше r, можно разложить корень по степеням r/R, вынеся предварительно за скобки R^2. Аналогично в третьем и четвертом членах можно произвести разложение после вынесения r^2. В результате получим

$$\varphi = \left[-\frac{2Q}{R^2} r\cos\theta \ + \ \frac{2Q}{R^2}\frac{a^3}{r^2}\cos\theta \right] \ + \ \dots .$$

Здесь не выписаны члены, обращающиеся в нуль при $R \to \infty$. В пределе при $R \to \infty$ отношение $2Q/R^2$ переходит в величину приложенного электрического поля E_0, так что потенциал равен

$$\varphi = -E_0 \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos\theta.$$

Первое слагаемое $(-E_0 z)$ равно, очевидно, просто потенциалу однородного поля E_0. Второе слагаемое описывает потенциал, создаваемый индуцированными поверхностными зарядами, или, что то же самое, потенциал, создаваемый зарядами-изображениями. Заметим, что заряды-изображения образуют диполь с моментом

$$p = \frac{Qa/R}{R/(2a^2)} = a^3 E_0.$$

Поверхностная плотность индуцируемого заряда равна

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \frac{3}{4\pi} E_0 \cos\theta.$$

Ответ: $\varphi(\mathbf{r}) = (\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})/r^3 - (\mathbf{E_0}\cdot\mathbf{r})$; $\quad \mathbf{p} = a^3\mathbf{E_0}$; $\quad \sigma = 3(\mathbf{E_0}\cdot\mathbf{r})/(4\pi r)\Big|_{r=a}$.

При наличии симметрии в распределении заряда уравнения в частных производных (5) и (17) могут быть решены путем разделения переменных и сведения их к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Последние в ряде случаев удается проинтегрировать в аналитическом виде.

Задача 2.29. Найти распределение потенциала электрического поля, создаваемого шаром радиуса R, равномерно заряженным по объему полным зарядом Q.

Решение.

Потенциал рассматриваемого поля обладает сферической симметрией, т. е. $\varphi = \varphi(r)$, а потому уравнение Пуассона принимает вид:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = -4\pi\rho,$$

где $\rho = Q/(4\pi R^3/3)$. Интегрированием находим:
1) внутри шара ($r < R$)

$$r^2\frac{d\varphi_1}{dr} = -\frac{4\pi\rho r^3}{3} + C_1, \qquad \varphi_1 = -\frac{4\pi\rho}{3}\frac{r^2}{2} - \frac{C_1}{r} + C_2;$$

из условия ограниченности потенциала при $r = 0$ следует, что $C_1 = 0$ и

$$\varphi_1 = -\frac{2\pi\rho r^2}{3} + C_2;$$

2) вне шара ($r > R$)

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi_2}{dr}\right) = 0, \qquad \varphi_2 = -\frac{C_3}{r} + C_4;$$

из условия $\varphi\big|_{r=\infty} = 0$ следует, что $C_4 = 0$.

Постоянные интегрирования C_2 и C_3 определяются граничными условиями $\varphi_1 = \varphi_2$ и $E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$ при $r = R$. Так как поверхностная плотность заряда в данной задаче равна нулю, а $E_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}$, то имеем:

$$\begin{cases} -2\pi\rho R^2/3 + C_2 = -C_3/R, \\ \quad -4\pi\rho R/3 = C_3/R^2, \end{cases}$$

откуда находим $C_3 = -Q$, $C_2 = 3Q/(2R)$.

Ответ: $$\varphi(\mathbf{r}) = \begin{cases} 3Q/(2R) - (Qr^2)/(2R^3) & \text{для } 0 \le r \le R; \\ Q/r & \text{для } r > R. \end{cases}$$

Задача 2.30. Найти потенциал электрического поля бесконечного цилиндра с зарядом τ на каждую единицу длины. Заряд распределен равномерно по объему цилиндра.

Ответ: $$\varphi(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\tau r^2/R^2 & \text{для } 0 \le r \le R; \\ -\tau[1 + 2ln(r/R)] & \text{для } r > R. \end{cases}$$

Задача 2.31. Найти распределение потенциала поля $\varphi(r)$, создаваемого шаровым слоем с внутренним радиусом R_1, внешним радиусом R_2, заряженным с постоянной объемной плотностью ρ.

Ответ: $$\varphi(\mathbf{r}) = \begin{cases} 2\pi\rho(R_2^2 - R_1^2) & \text{для } 0 \le r \le R_1; \\ 2\pi\rho[R_2^2 - r^2/3 - 2R_1^3/(3r)] & \text{для } R_1 < r \le R_2; \\ 4\pi\rho(R_2^3 - R_1^3)/(3r) & \text{для } r > R_2. \end{cases}$$

Задача 2.32. Найти распределение потенциала поля $\varphi(r)$, создаваемого проводящей сферой радиуса R, заряженной равномерно с постоянной поверхностной плотностью σ.

Ответ: $$\varphi(\mathbf{r}) = \begin{cases} 4\pi\sigma R & \text{для } 0 \le r \le R; \\ 4\pi\sigma R^2/r & \text{для } r > R. \end{cases}$$

Задача 2.33. Рассчитать собственную электрическую энергию U заряженного шара радиуса R, если заряд Q равномерно распределен а) по поверхности шара, б) по объему шара.

Ответы: а) $U_{\text{п.}} = \dfrac{Q^2}{2R}$; б) $U_{\text{об.}} = \dfrac{3Q^2}{5R}$.

Электростатика в диэлектриках

В присутствии нейтрального поляризующегося вещества – диэлектрика – поле статических зарядов становится зависящим от электрических свойств этого вещества. Разделение зарядов, составляющих атомы и молекулы диэлектрика, приводит к его поляризации. Наряду с вектором напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ появляется вектор поляризации среды $\mathbf{P}$. Оба вектора объединяются в новую характеристику поля – вектор электрической индукции $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \epsilon\mathbf{E}$, где ϵ – диэлектрическая проницаемость вещества. В линейном приближении $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E}$, где α – поляризуемость изотропного диэлектрика, так что $\epsilon = 1 + 4\pi\alpha$.

Уравнения электростатики в диэлектрике записываются в виде:

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0; \qquad \mathrm{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho. \tag{20}$$

В неоднородно поляризованном диэлектрике появляются связанные заряды, объемная плотность которых определяется соотношением

$$\mathrm{div}\mathbf{P} = -\rho_{\text{связ.}}. \tag{21}$$

Соответствующие объемным уравнениям (20), (21) уравнения на поверхности раздела двух сред, имеющей свободный σ или связанный $\sigma_{\text{связ.}}$ заряд, имеют вид:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; \quad D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma; \quad P_{1n} - P_{2n} = \sigma_{\text{связ.}}. \tag{22}$$

При этом электростатический потенциал φ остается всюду непрерывной функцией пространственных координат, а его связь с напряженностью электрического поля подчиняется уравнению (16), как и для поля в вакууме.

Задача 2.34. В сферическом конденсаторе радиусы внутренней и внешней обкладок R_1 и R_2. Диэлектрическая проницаемость всех непроводников ϵ. Заряд внутренней сферы q, наружняя – заземлена. Найти напряженность и потенциал электрического поля во всех точках пространства. Определить емкость конденсатора.

$$\textit{Ответ:} \qquad \varphi(r) = \begin{cases} q/\epsilon(1/R_1 - 1/R_2), & \text{для } 0 \le r \le R_1, \\ q/\epsilon(1/r - 1/R_2), & \text{для } R_1 < r \le R_2, \\ 0, & \text{для } r > R_2; \end{cases}$$

$$C = \frac{\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Задача 2.35. В цилиндрическом конденсаторе радиусы внутренней и внешней обкладок R_1 и R_2. Диэлектрическая проницаемость всех непроводников ϵ. Длина конденсатора l, заряд внутренней обкладки q. Пренебрегая влиянием краевых эффектов, найти напряженность и потенциал электрического поля во всех точках пространства. Определить емкость конденсатора.

Решение.

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{D} = \mathrm{div}\,\varepsilon\mathbf{E} = \varepsilon\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} = -\varepsilon\nabla^2\varphi, \quad \nabla^2\varphi = -4\pi\rho/\varepsilon.$$

Поле внутри цилиндрического конденсатора обладает аксиальной симметрией, т.е. $\varphi = \varphi(r)$, и поэтому в цилиндрических координатах уравнение Пуассона принимает вид

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right) = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.$$

Отсюда находим, что
1) при $r < R_1$: $\nabla^2\varphi = 0,\qquad \varphi_1 = C_1 \ln r + D_1;$
2) при $R_1 < r < R_2$: $\nabla^2\varphi = 0,\quad \varphi_2 = C_2 \ln r + D_2;$
3) при $r > R_2$: $\nabla^2\varphi = 0,\qquad \varphi_3 = C_3 \ln r + D_3.$
Из требования конечности потенциала в нуле и на бесконечности определяем соответственно постоянные $C_1 = 0$ и $C_3 = 0$. Из условия $\varphi_\infty = 0$ находим $D_3 = 0$. Остальные постоянные могут быть определены из требования непрерывности потенциала на границах $r = R_1$ и $r = R_2$ и поверхностного уравнения $D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma$:

$$\left\{\begin{array}{c} D_1 = C_2 \ln R_1 + D_2 \\ C_2 \ln R_2 + D_2 = 0, \\ -C_2/R_1 = 4\pi\sigma_1/\epsilon, \end{array}\right.$$

где $\sigma_1 = q/(2\pi R_1 l)$. Решая эту систему уравнений, находим:

$$C_2 = -\frac{2q}{\epsilon l},\qquad D_1 = \frac{2q}{\epsilon l}\ln\frac{R_2}{R_1},\qquad D_2 = -\frac{2q}{\epsilon l}\ln R_2.$$

В результате получаем:

$$\varphi(r) = \left\{\begin{array}{rll} 2q/(\epsilon l)ln(R_2/R_1) & \text{для} & 0 \le r \le R_1, \\ 2q/(\epsilon l)ln(R_2/r) & \text{для} & R_1 < r \le R_2, \\ 0 & \text{для} & r > R_2. \end{array}\right.$$

Емкость конденсатора – отношение заряда конденсатора к разности потенциалов его обкладок:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\epsilon l}{2ln(R_2/R_1)}.$$

Напряженность поля между обкладками цилиндрического конденсатора равна

$$E = \frac{2q}{\epsilon l r}.$$

Задача 2.36. Вычислить потенциал электрического поля и емкость плоского конденсатора, расстояние между обкладками у которого d заполнено диэлектриком с проницаемостью ϵ, площадь каждой обкладки S. Заряд конденсатора q. Краевым эффектом пренебречь.

Ответ: $$\varphi(x) = \begin{cases} 4\pi q d/(\epsilon S) & \text{для } x \le 0, \\ 4\pi q(d-x)/(\epsilon S) & \text{для } 0 < x \le d, \\ 0 & \text{для } x > d; \end{cases} \quad C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}.$$

Задача 2.37. Левая часть пространства ($z < 0$) занята диэлектриком с проницаемостью ϵ_1, правая ($z \ge 0$) – диэлектриком с проницаемостью ϵ_2. Во второй среде на расстоянии d от плоской границы раздела двух сред находится точечный заряд q. Определить поле в обоих диэлектриках и поверхностную плотность связанного заряда на границе раздела двух сред методом изображений. Рассмотреть случай $\epsilon_2 = 1$ (правое полупространство – вакуум). Сравнить искажение поля точечного заряда, вызываемое диэлектриком ϵ_1, с тем искажением, которое было бы, если бы в левом полупространстве находился проводник. При каком условии искажение поля точечного заряда диэлектриком будет таким же, как и бесконечной проводящей стенкой?

Ответ:

$$\varphi(z,r) = \begin{cases} 2q/[(\epsilon_1+\epsilon_2)\sqrt{r^2+(z-d)^2}\,] \text{ для } z \le 0, \\ \dfrac{q}{\epsilon_2}\cdot\left\{\dfrac{1}{\sqrt{r^2+(z-d)^2}} - \dfrac{\epsilon_1-\epsilon_2}{(\epsilon_1+\epsilon_2)\sqrt{r^2+(z+d)^2}}\right\} \text{ для } z > 0; \end{cases}$$

$$\sigma_{\text{связ.}} = \frac{qd(\epsilon_2-\epsilon_1)}{2\pi\epsilon_2(\epsilon_1+\epsilon_2)(d^2+r^2)^{3/2}}.$$

При $\epsilon_2 = 1$ случай бесконечной проводящей стенки соответствует $\epsilon_1 = \infty$.

Задача 2.38. Шар радиуса a из диэлектрика с проницаемостью $\epsilon^{(i)}$ помещен в однородное поле напряженности $\mathbf{E}_0$. Найти потенциал и напряженность поля внутри и вне шара. Рассмотреть частные случаи: 1) шар в пустоте; 2) шаровая полость в диэлектрике. Найти вектор поляризации шара и плотность связанного заряда $\sigma_{\text{связ}}$ на его поверхности. Диэлектрическая проницаемость среды $\epsilon^{(e)}$.

Решение.

Вне шара на внешнее однородное поле накладывается поле, создаваемое незаряженным поляризованным шаром. Ввиду симметрии шара потенциал последнего поля может зависеть лишь от расстояния от центра шара и направления внешнего поля. Единственным решением уравнения Лапласа, удовлетворяющим этим условиям и убывающим на бесконечности, является поле диполя (см. задачу 2.28). Поэтому ищем потенциал в виде:

$$\begin{cases} \varphi_1 = -Cr\cos\theta \quad \text{для} \quad r \le a, \\ \varphi_2 = -E_0 r\cos\theta + \dfrac{p}{r^2}\cos\theta \quad \text{для} \quad r > a. \end{cases}$$

Граничные условия

$$\varphi_1|_{r=a} = \varphi_2|_{r=a} \quad \text{и} \quad \epsilon^{(i)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\Big|_{r=a} - \epsilon^{(e)}\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=a} = 4\pi\sigma = 0$$

определяют C и p:

$$\begin{cases} -Ca\cos\theta = -E_0 a\cos\theta + \dfrac{p}{a^2}\cos\theta, \\ \epsilon^{(i)}(-C\cos\theta) + \epsilon^{(e)}E_0\cos\theta + \dfrac{2p\epsilon^{(e)}}{a^3}\cos\theta, \end{cases}$$

откуда

$$p = E_0 a^3\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}; \qquad C = E_0\frac{3}{\epsilon_r + 2}, \quad \text{где} \quad \epsilon_r = \frac{\epsilon^{(i)}}{\epsilon^{(e)}}.$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \begin{cases} -3(\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{r})/(\epsilon_r + 2) \quad \text{для} \quad r \le a, \\ -(\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{r})\left[1 + \dfrac{1-\epsilon_r}{\epsilon_r + 2}\cdot\dfrac{R^3}{r^3}\right] \quad \text{для} \quad r > a. \end{cases}$$

Плотность связанного заряда шара:

$$\sigma_{\text{связ}} = P_{1n} - P_{2n} = \frac{1}{4\pi}\left((\epsilon^{(i)} - 1)E_{1n}|_{r=a} - (\epsilon^{(e)} - 1)E_{2n}|_{r=a}\right) =$$

$$= \Big/\epsilon^{(e)}E_{2n}|_{r=a} - \epsilon^{(i)}E_{1n}|_{r=a} = 0\Big/ = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\bigg|_{r=a} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\bigg|_{r=a}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(-3E_0\cos\theta\frac{1}{\epsilon_r + 2} - 2E_0\cos\theta\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} + E_0\cos\theta\right) = \frac{3}{4\pi}\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}E_0\cos\theta.$$

Задача 2.39. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено двумя диэлектриками. Диэлектрическая проницаемость первого слоя ϵ_1, второго – ϵ_2, а их толщины соответственно d_1 и d_2, причем $d_1 + d_2 = d$ – толщина конденсатора. Площадь каждой обкладки S. Найти емкость конденсатора.

$$\textit{Ответ:} \quad C = \frac{\epsilon_1\epsilon_2 S}{4\pi(\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1)}.$$

Задача 2.40. Пространство между обкладками сферического конденсатора заполнено двумя слоями диэлектриков с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2. Радиусы обкладок a и b. Радиус поверхности раздела диэлектриков h. Определить емкость конденсатора.

$$\textit{Ответ:} \quad C = \frac{\epsilon_1\epsilon_2 h}{\epsilon_1(b-h)/b + \epsilon_2(h-a)/a}.$$

3. Магнитостатика

Аналогично тому как *неподвижные* заряды создают в окружающем пространстве электростатическое поле или могут обнаружить поле, созданное другими зарядами в данной точке пространства, *движущиеся* заряды создают в окружающем пространстве магнитное поле или могут обнаружить в данной точке пространства магнитное поле, созданное другими зарядами. Движущиеся заряды образуют *электрический ток*. Если распределение токов в пространстве с течением времени не изменяется (токи стационарны), то возбуждаемое ими магнитное поле не зависит от времени, т. е. является *статическим*.

Законы постоянного тока

Заметные по величине постоянные токи могут создаваться в *проводниках* – веществах с высокой *электропроводностью*. Для этого необходимо поддерживать внутри проводника постоянное электрическое поле. Эту задачу решает *источник* тока. При этом вне проводника электрическое поле может отсутствовать вследствие нейтральности вещества, поддерживаемого в процессе прохождения по нему электрического тока, а распределение зарядов в проводнике и окружающем его пространстве должно оставаться неизменным. Из этого условия и уравнения непрерывности заряда

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0, \tag{23}$$

связывающего скорость изменения плотности заряда ρ с плотностью источников вектора плотности тока $\mathbf{j}$, следует *условие постоянства электрического тока*, записываемого через вектор $\mathbf{j}$ в виде:

$$\mathrm{div}\mathbf{j} = 0. \tag{24}$$

Соответствующее уравнение на границе раздела двух проводников имеет вид:

$$j_{1n} = j_{2n}. \tag{25}$$

В случае *линейных токов*, текущих по бесконечно тонким проводникам, это уравнение приводит к *первому закону Кирхгофа* (правилу узлов):

$$\sum_i J_i = 0, \tag{26}$$

где суммирование проводится по всем токам, приходящим в данный узел цепи.

Закон Ома связывает вектор $\mathbf{j}$ с напряженностью электрического поля в проводнике линейным соотношением вида:

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}, \tag{27}$$

где λ – удельная проводимость (электропроводность) вещества.

Постоянное электрическое поле в проводнике поддерживается сторонними (неэлектростатическими) силами, действующими внутри источника тока. Электрическая энергия от источника расходуется на преодоление сопротивления отдельных участков цепи. Математическим выражением этого факта является *второй закон Кирхгофа* (правило замкнутого контура):

$$\sum_i J_i R_i = \sum_i \mathcal{E}_i, \tag{28}$$

где $\mathcal{E}_i$ – электродвижущая сила (эдс) источника, действующего на i-м участке замкнутого контура.

Расход (диссипация) электрической энергии в цепи происходит в виде выделения Джоулева тепла на сопротивлении:

$$U = RI^2, \quad \text{или для единицы объема проводника } u = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) = \frac{j^2}{\lambda} = \lambda E^2.$$

Задачи к главе 3

Задача 3.1. Определить объемную плотность статического заряда ρ, появляющегося в неоднородной проводящей среде при прохождении по ней постоянного электрического тока $\mathbf{j}$.

Решение.

Объемную плотность статического заряда определяет дифференциальное уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \qquad \text{где} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{j}.$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\lambda}\mathbf{j}\right) = 4\pi\rho,$$

$$\left(\mathbf{j}\nabla\frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda}\nabla\mathbf{j} = 4\pi\rho;$$

учитывая условие постоянства электрического тока (23) $\operatorname{div}\mathbf{j} = \nabla\,\mathbf{j} = 0$, получаем

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{j}\cdot\nabla\frac{1}{\lambda}\right) = -\frac{1}{4\pi\lambda^2}\left(\mathbf{j}\cdot\nabla\lambda\right).$$

Задача 3.2. Выразить линейную плотность заряда, $\tau(x)$, появляющегося на неоднородном проводнике при прохождении по нему тока I, если проводимость вдоль проводника изменяется по закону $\lambda = \lambda_0 + ax$.

$$\text{Ответ}: \quad \tau(x) = -\frac{Ia}{4\pi(\lambda_0 + ax)^2}.$$

Задача 3.3. Определить величину заряда q на поверхности раздела двух проводников с проводимостями λ_1 и λ_2, через которую проходит ток I.

$$\text{Ответ}: \quad q = \frac{I}{4\pi}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right).$$

Задача 3.4. Пространство между обкладками шарового конденсатора (радиусы обкладок r_1 и r_2) заполнено проводящей средой с электропроводностью λ. Найти силу тока, протекающего через конденсатор, если его обкладки поддерживаются при постоянной разности потенциалов. Вычислить сопротивление R находящегося между обкладками шарового слоя.

Решение.

Напряженность поля между обкладками

$$E = E_r = \frac{a}{r^2}.$$

Обкладки конденсатора поддерживаются при постоянной разности потенциалов:

$$\Delta\varphi = \int\limits_{r_1}^{r_2} E_r dr = a\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Отсюда можем определить постоянную a: $a = \Delta\varphi r_1 r_2/(r_2 - r_1)$.

Сила тока:

$$I = \int\limits_S jdS = \int\limits_S \lambda E dS = \lambda E\cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi\lambda\Delta\varphi r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

Сопротивление:
$$R = \frac{\Delta\varphi}{I} = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Задача 3.5. Элемент Даниэля состоит из двух коаксиальных цилиндров – медного и цинкового, радиусов a и b и высотой h. Удельное сопротивление раствора медного купороса $\mathcal{R}$. Каково внутреннее сопротивление элемента r?

$$\text{Ответ}: \quad r = \frac{\mathcal{R}}{2\pi h}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Задача 3.6. Показать, что на поверхности раздела двух проводников с электропроводностями λ_1 и λ_2 линии тока испытывают преломление, описываемое уравнением $tg\alpha_1/tg\alpha_2 = \lambda_1/\lambda_2$, где α_1 и α_2 – углы между линиями тока и нормалью к поверхности раздела.

Задача 3.7. В проводящую среду погружена система электродов, поддерживаемых при постоянных потенциалах φ_i. С каждого электрода стекает ток J_i. Определить количество тепла Q, выделяющегося в среде в 1 с.

$$\text{Ответ}: \quad Q = \sum_i \varphi_i J_i.$$

Задача 3.8. Записать выражение для вектора электрической индукции $\mathbf{D}$ в диэлектрике с проницаемостью ϵ вблизи поверхности проводника с электропроводностью λ, заряженной с плотностью σ, если по проводнику течет ток с плотностью $\mathbf{j}$. Рассмотреть частные случаи: а) проводник без тока, $\mathbf{j} = 0$, б) проводник без заряда, $\sigma = 0$.

$$\text{Ответ}: \quad \mathbf{D} = \frac{\epsilon}{\lambda}\mathbf{j} + 4\pi\sigma\mathbf{n}, \quad \text{где } \mathbf{n} \text{ – единичный вектор нормали}$$

к поверхности.

Магнитное поле токов

В расчетах вектора напряженности магнитного поля, создаваемого электрическими токами в окружающем пространстве, можно использовать три подхода:

1) принцип суперпозиции, основанный на векторном суммировании вкладов $d\mathbf{H}$ в напряженность магнитного поля от отдельных *элементов* тока, $Jd\mathbf{l}$, определяемых *законом Био – Савара*
$$d\mathbf{H} = \frac{J[d\mathbf{l} \times \mathbf{R}]}{cR^3}, \tag{29}$$

где $\mathbf{R}$ – радиус-вектор, проведенный из элемента тока в точку наблюдения, c – электродинамическая константа, равная скорости света в вакууме;

2) формулу Ампера для циркуляции вектора напряженности $\mathbf{H}$ по замкнутому контуру:

$$\oint_L (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}) = \frac{4\pi}{c} \sum_i I_i, \tag{30}$$

где суммирование проводится по всем токам, пронизывающим контур L;

3) решение дифференциальных уравнений магнитостатики

$$\mathrm{div}\mathbf{H} = 0, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{31}$$

где $\mathbf{j}$ – вектор плотности электрического тока в данной точке пространства.

Все три метода взаимно связаны и следуют друг из друга. В частности, интеграл формулы Био – Савара (29) может быть получен, как решение системы дифференциальных уравнений (31) для магнитного поля токов, текущих по тонким проводникам. Формулу Ампера можно получить интегрированием уравнения для ротора по произвольной поверхности, опирающейся на замкнутый контур, с последующим преобразованием поверхностного интеграла в левой части по формуле Стокса (12) к контурному интегралу. Формула Ампера аналогична электростатической теореме Гаусса и используется в расчетах магнитного поля, создаваемого симметричным распределением токов в пространстве.

Задача 3.9. Решить систему дифференциальных уравнений (31) путем введения векторного потенциала на основании уравнения для дивергенции, подстановки его в уравнение для ротора и приведения последнего к виду уравнения Пуассона (7). Какой калибровке должен удовлетворять векторный потенциал? При каком условии полученное решение сводится к интегральной формуле Био – Савара?

Задача 3.10. Вдоль бесконечного цилиндрического проводника радиуса a течет постоянный ток J, равномерно распределенный по сечению. Определить напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ внутри и вне проводника, исходя из дифференциальных уравнений (31).

Решение.

Исходя из симметрии распределения тока, можно считать, что напряженность магнитного поля может зависеть только от расстояния до проводника: $\mathbf{H} = \mathbf{H}(r)$, где r – радиальная переменная цилиндрической системы координат с осью $0z$ направленной вдоль оси проводника с током. Уравнение $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ в этой системе дает $rH_r = const = 0$, так как $H_r(0)$ должно быть ограничено. Следовательно, $H_r \equiv 0$.

Уравнение $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}/\text{c}$ дает $H_z = 0$, $H_\phi = 2\pi jr/c$ внутри проводника, $H_\phi = 2J/(cr)$ – вне проводника.

$$\text{Ответ}: \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 2Jr/(ca^2)\mathbf{e}_\phi & \text{для} \quad r \le a, \\ 2J/(cr)\mathbf{e}_\phi & \text{для} \quad r > a. \end{cases}$$

Задача 3.11. Найти распределение напряженности магнитного поля в предыдущей задаче с помощью формулы Ампера (30).
Решение.

Направим ось $0z$ вдоль проводника с током. Тогда с помощью закона Ампера находим:

$$H_\phi \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \int\limits_S j_n dS.$$

$$\text{Для} \;\; r > a: \qquad \int\limits_S j_n dS = J;$$

$$\text{для} \;\; r \le a \;\; (\text{ввиду того, что} \;\; j_n = J/(\pi a^2)): \;\; \int\limits_S j_n dS = \frac{J}{\pi a^2}\pi r^2 = \frac{Jr^2}{a^2}.$$

$$H_\phi = \begin{cases} 4\pi/c \cdot (Jr^2)/a^2 \cdot 1/(2\pi r) = 2Jr/(ca^2)\mathbf{e}_\phi & \text{для} \quad r \le a, \\ 4\pi/c \cdot J/(2\pi r) = 2J/(cr)\mathbf{e}_\phi & \text{для} \quad r > a. \end{cases}$$

$H_z = 0$, так как напряженность поля каждого из элементов тока, согласно закону Био – Савара, перпендикулярна направлению тока.

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = \frac{\partial H_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} = 0,$$

откуда следует $rH_r = const$, что ввиду конечности вектора $\mathbf{H}$ при $r = 0$ может иметь место лишь при $H_r = 0$.

Задача 3.12. Коаксиальный кабель имеет центральную жилу радиуса r_1 и внешнюю оболочку радиусов r_2 и r_3. По жиле и оболочке, в противоположных направлениях, протекают токи силы J, равномерно распределенные по сечению. Исследовать распределение напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ с помощью закона Ампера (30).

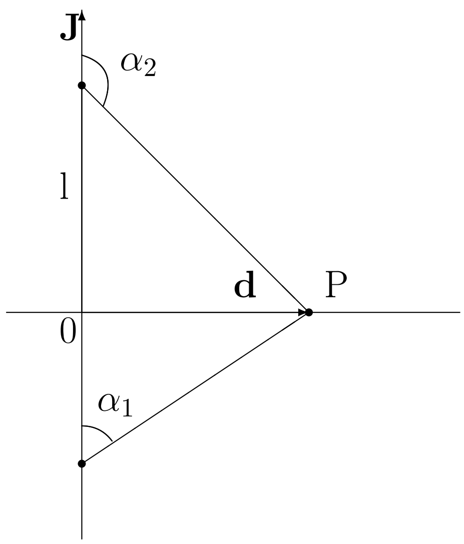
Ответ:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = H(r)\mathbf{e}_\phi, \text{ где } H(r) = \begin{cases} 2Jr/(cr_1^2) & \text{для } r \le r_1, \\ 2J/(cr) & \text{для } r_1 < r \le r_2, \\ \dfrac{2J}{cr}\left[1 - \dfrac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}\right] & \text{для } r_2 < r \le r_3, \\ 0 & \text{для } r > r_3. \end{cases}$$

Задача 3.13. По полому цилиндрическому проводнику радиуса сечения R протекает ток J. Вычислить напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ внутри и вне цилиндра с помощью закона Ампера. Показать, не прибегая к формуле Ампера, что внутри цилиндра $H = 0$. Выразить величину скачка тангенциальной составляющей магнитного поля на поверхности цилиндра через поверхностную плотность тока $i = J/(2\pi R)$.

$$\textit{Ответ:} \quad H(r) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad r \le R, \\ 2J/(cr) & \text{для} \quad r > R; \end{cases} \qquad H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i.$$

Задача 3.14. Определить напряженность магнитного поля в точке, отстоящей на расстояние $\mathbf{d}$ от отрезка прямолинейного проводника с током J. Углы, под которыми видна точка с концов проводника, α_1 и α_2 (углы отсчитываются от направления тока). Рассмотреть случай бесконечного проводника.



Решение.

В случае прямолинейного тока вектор $[d\mathbf{l} \times \mathbf{R}]$ имеет одинаковое направление для всех элементов тока при фиксированной точке наблюдения. Поэтому численное значение вектора $\mathbf{H}$ равно сумме значений подынтегрального выражения формулы Био – Савара:

$$\mathbf{H} = \frac{J}{c} \oint \frac{[d\mathbf{l} \times \mathbf{R}]}{R^3}.$$

Введем угол α между направлением тока и радиусом-вектором, проведенным из элемента тока в точку наблюдения. Тогда

$$H = \frac{J}{c}\int \frac{dl}{R^2}\sin\alpha = \Big/ R = \frac{d}{\sin\alpha}, \quad l = \frac{d}{\mathrm{tg}(\pi-\alpha)} = -d\,\mathrm{ctg}\alpha \Big/ = $$
$$= \frac{J}{cd}\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha d\alpha = \frac{J}{cd}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

$$\mathbf{H} = \frac{[\mathbf{J}\times\mathbf{d}]}{cd^2}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

В случае бесконечного проводника $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$,

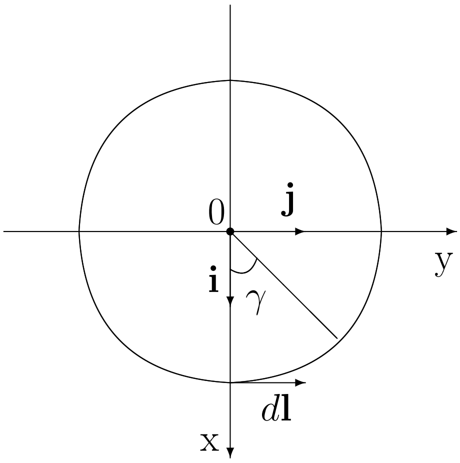
$$\mathbf{H} = \frac{2[\mathbf{J}\times\mathbf{d}]}{cd^2}.$$

Задача 3.15. Внутри бесконечного цилиндрического проводника радиуса сечения a с током J, равномерно распределенным по сечению, имеется бесконечная цилиндрическая полость радиуса сечения b, ось которой параллельна оси проводника и отстоит от нее на расстояние $\mathbf{h}$. Найти напряженность магнитного поля внутри полости.

$$\text{Ответ}: \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{2[\mathbf{J}\times\mathbf{h}]}{c(a^2-b^2)}.$$

Задача 3.16. Бесконечный проводник с током согнут под углом $60°$. Найти напряженность магнитного поля в точке, лежащей на биссектрисе угла и отстоящей на расстояние $\mathbf{d}$ от его вершины.

$$\text{Ответ}: \quad \mathbf{H} = 4\frac{[\mathbf{J}\times\mathbf{d}]}{cd^2}(\sqrt{3}+2).$$



Задача 3.17. По дуге окружности радиуса a, определяемой центральным углом γ, проложен проводник с током J. Найти напряженность $\mathbf{H}$ и векторный потенциал $\mathbf{A}$ магнитного поля в центре окружности.

Решение.

$$\mathbf{H} = \frac{J}{c}\int\frac{[d\mathbf{l}\times\mathbf{R}]}{R^3} = \mathbf{k}\frac{J}{c}\int\frac{dl}{R^2} =$$

$$= \mathbf{k}\frac{J}{ca^2}\int dl = \mathbf{k}\frac{J}{ca^2}\cdot a\gamma = \frac{J\gamma}{ca}\mathbf{k}.$$

$$\mathbf{A} = \frac{J}{c} \int \frac{d\mathbf{l}}{R}.$$

Так как

$$d\mathbf{l} = dl(-\sin\phi)\mathbf{i} + dl\cos\phi\mathbf{j}, \quad R = a, \quad dl = ad\phi$$

для векторного потенциала имеем

$$\mathbf{A} = \frac{Ja}{ca} \left\{ \int_0^\gamma (-\sin\phi)d\phi\mathbf{i} + \int_0^\gamma (-\cos\phi)d\phi\mathbf{j} \right\} = \frac{J}{c}\left[(\cos\gamma - 1)\mathbf{i} + \sin\gamma\mathbf{j}\right].$$

$$\text{Ответ}: \quad \mathbf{H} = \frac{J\gamma}{ca}\mathbf{k}; \qquad \mathbf{A} = \frac{J}{c}[\mathbf{i}(\cos\gamma - 1) + \mathbf{j}\sin\gamma].$$

Задача 3.17. По кольцу радиуса a протекает ток J. Найти напряженность магнитного поля на оси кольца.

$$\text{Ответ}: \quad \mathbf{H} = \frac{2\pi a^2 J}{cR^3}\mathbf{k}.$$

Задача 3.18. По кольцу радиуса a протекает ток J. Найти напряженность магнитного поля на оси кольца.

$$\text{Ответ}: \quad \mathbf{H} = \frac{2\pi a^2 J}{cR^3}\mathbf{k}.$$

Задача 3.19. В однородное магнитное поле напряженности $\mathbf{H}_0$ вносится шар радиуса a, сделанный из материала с магнитной проницаемостью μ. Определить поле внутри и вне шара и магнитный момент шара $\mathbf{m}$.
Указание: Воспользоваться идентичностью уравнений магнитостатики и электростатики в отсутствие токов и зарядов, а также решением задачи 2.38.

Ответ:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 3\mathbf{H}_0/(\mu+2) & \text{для } r \le a, \\ \mathbf{H}_0 + 3\mathbf{r}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})/r^5 - \mathbf{m}/r^3 & \text{для } r > a; \end{cases} \quad \mathbf{m} = \mathbf{H}_0 a^3 \frac{\mu - 1}{\mu + 2}.$$

Список литературы

1. Батыгин В.В. Сборник задач по электродинамике / В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. – М. : Наука, 2002. – 639 с.

2. Алексеев А.И. Сборник задач по классической электродинамике / А.И. Алексеев. – М. : Наука, 1977. – 319 с.

3. Сборник задач по теоретической физике / Л.Г. Гречко, В.И. Сугаков, О.Ф. Томасевич, А.Ф. Федорченко. – М. : Высшая школа, 1984. – 336 с.

4. Бредов М.М. Классическая электродинамика / М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин. – СПб. : Лань, 2003. – 400 с.

5. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: В 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Физматлит, 2003. – Т. 2: Теория поля. – 530 с.

6. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: В 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Физматлит, 2003. – Т. 8: Электродинамика сплошных сред. – 651 с.

7. Терлецкий Я.П. Электродинамика / Я.П. Терлецкий , Ю.П. Рыбаков. – М. : Высш. шк., 1990. – 351 с.

8. Тамм И.Е. Основы теории электричества / И.Е. Тамм. – М. : Физматлит, 2003. – 615 с.

Учебное издание

Крыловецкая Татьяна Алексеевна,
Овсянников Виталий Дмитриевич

ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Часть 1

СТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

Учебное пособие для вузов

Редактор И.Г. Валынкина

Подписано в печать 17.10.08. Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 2,44.
Тираж 100 экз. Заказ 1907.

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета.
394000, г. Воронеж, пл. им. Ленина, 10. Тел. 208-298, 598-026 (факс)
http://www.ppc.vsu.ru; e-mail: pp_center@ppc.vsu.ru

Отпечатано в типографии Издательско-полиграфического центра
Воронежского государственного университета.
394000, г. Воронеж, ул. Пушкинская, 3. Тел. 204-133