Задачи к главе 1

Задача 1.1. Показать, что

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0; \qquad \operatorname{rot}\operatorname{grad} f(\mathbf{r}) = 0.$$

Решение. Используя возможность циклической перестановки векторов в смешанном произведении, получим:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (\nabla\cdot[\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})]) = ([\nabla\times\nabla]\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r})) = 0,$$

поскольку оператор $[\nabla\times\nabla]$ является дифференциальным векторным оператором, компоненты которого представляют собой разность вторых частных смешанных производных, отличающихся лишь порядком дифференцирования по координатам трехмерного пространства.

Задача 1.2. Доказать дифференциальные тождества:

а) $\operatorname{grad}(f\varphi) = \varphi \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad}\varphi$; б) $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi\operatorname{div}\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\operatorname{grad}\varphi)$;

в) $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi\operatorname{rot}\mathbf{A} + [\operatorname{grad}\varphi\times\mathbf{A}]$; г) $\operatorname{div}[\mathbf{A}\times\mathbf{B}] = (\mathbf{B}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}) - (\mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B})$;

д) $\operatorname{rot}[\mathbf{A}\times\mathbf{B}] = \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B} - \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$;

е) $\operatorname{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = [\mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B}] + [\mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}] + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$;

ж) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$.

Решение. Используя оператор ∇ и принимая во внимание, что он и вектор, и дифференциальный оператор, вычисления проводим с учетом правил дифференцирования произведения (стрелкой можно указывать, на какой из сомножителей действует дифференциальная операция):

а) $\operatorname{grad}(f\varphi) = \nabla(f\varphi) = \nabla(\overset{\downarrow}{f}\,\varphi) + \nabla(f\,\overset{\downarrow}{\varphi}) = \varphi \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad}\varphi$;

б) $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{A}) = (\nabla\cdot(\varphi\mathbf{A})) = (\nabla\cdot(\overset{\downarrow}{\varphi}\,\mathbf{A})) + (\nabla\cdot(\varphi\,\overset{\downarrow}{\mathbf{A}})) = (\mathbf{A}\cdot\operatorname{grad}\varphi) + \varphi\operatorname{div}\mathbf{A}$;

в) $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{A}) = [\nabla\times\varphi\mathbf{A}] = [\nabla\times\overset{\downarrow}{\varphi}\,\mathbf{A}] + [\nabla\times\varphi\,\overset{\downarrow}{\mathbf{A}}] = [\operatorname{grad}\varphi\times\mathbf{A}] + \varphi\operatorname{rot}\mathbf{A}$;

г) $\mathrm{div}[\mathbf{A}\times\mathbf{B}] = (\nabla\cdot[\mathbf{A}\times\mathbf{B}]) = (\nabla\cdot[\overset{\downarrow}{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}]) + (\nabla\cdot[\mathbf{A}\times\overset{\downarrow}{\mathbf{B}}]) =$
$= (\nabla\cdot[\overset{\downarrow}{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}]) - (\nabla\cdot[\overset{\downarrow}{\mathbf{B}}\times\mathbf{A}]) = (\mathbf{B}\cdot[\nabla\times\overset{\downarrow}{\mathbf{A}}]) - (\mathbf{A}\cdot[\nabla\times\overset{\downarrow}{\mathbf{B}}]) =$
$= (\mathbf{B}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{A}) - (\mathbf{A}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{B});$

ж) $\mathrm{rot\,rot}\mathbf{A} = [\nabla\times[\nabla\times\mathbf{A}]] = \nabla\cdot(\nabla\cdot\mathbf{A}) - (\nabla\cdot\nabla)\mathbf{A} = \mathrm{grad\,div}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}.$

Задача 1.3. Показать, что при действии на функции, зависящие только от модуля радиуса-вектора $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, оператор ∇ можно заменить на $\mathbf{e}_r d/dr$, где $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ – единичный вектор в радиальном направлении. Доказать следующие векторные дифференциальные тождества:

а) $\mathrm{grad}\ r = \mathbf{e}_r;$ б) $\mathrm{grad}\ f(r) = \mathbf{e}_r \dfrac{df}{dr};$

в) $\mathrm{div}\mathbf{A}(r) = \left(\mathbf{e}_r\cdot\dfrac{d\mathbf{A}}{dr}\right);$ г) $\mathrm{rot}\mathbf{A}(r) = \left[\mathbf{e}_r\times\dfrac{d\mathbf{A}}{dr}\right];$

д) $\mathrm{grad}\,(\mathbf{A}(r)\cdot\mathbf{B}(r)) = \mathbf{e}_r\left\{\left(\dfrac{d\mathbf{A}}{dr}\cdot\mathbf{B}(r)\right) + \left(\mathbf{A}(r)\cdot\dfrac{d\mathbf{B}}{dr}\right)\right\};$

е) $\mathrm{div}\,(\varphi(r)\mathbf{A}(r)) = \dfrac{\varphi}{r}\left(\mathbf{r}\cdot\dfrac{d\mathbf{A}}{dr}\right) + \dfrac{d\varphi}{dr}\left(\dfrac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{A}(r)\right);$

ж) $\mathrm{rot}\,(\varphi(r)\mathbf{A}(r)) = \dfrac{\varphi}{r}\left[\mathbf{r}\times\dfrac{d\mathbf{A}}{dr}\right] + \dfrac{d\varphi}{dr}\left[\dfrac{\mathbf{r}}{r}\times\mathbf{A}(r)\right].$

Решение.

б)
$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}\,f(r) &= \mathbf{i}\frac{\partial f(r)}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f(r)}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f(r)}{\partial z} = \\
&= \mathbf{i}\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial z} = \\
&= \frac{df(r)}{dr}\left(\mathbf{i}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \mathbf{j}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \mathbf{k}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \\
&= \frac{df(r)}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{df(r)}{dr}\mathbf{e}_r;
\end{aligned}$$

в)
$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{A}(r) &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{dA_x}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{dA_y}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{dA_z}{dr}\frac{\partial r}{\partial z} = \\
&= \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dr}\right) = \left(\mathbf{e}_r\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dr}\right);
\end{aligned}$$