

§ 28. Локальні базиси криволінійних систем координат

Розглянувши у двох попередніх параграфах декартові системи координат разом із відповідними базисами на площині та у тривимірному просторі, бачимо, що базисні вектори декартових систем напрямлені паралельно до координатних ліній. З огляду на дієвість математичного апарату лінійної алгебри при розв'язанні задач аналітичної геометрії, математичного аналізу та теоретичної фізики, буває доцільно розглядати також базиси, пов'язані з іншими системами координат, такими як полярна, циліндрична, сферична та деякі інші. Але в такому разі треба враховувати, що координатні лінії, взагалі кажучи, не є прямими, а отже, напрямки базисних ортів можна вважати заданими лише в малому околі кожної точки простору. Іншими словами, *базисні орти, взагалі кажучи, слід вважати функціями координат просторової точки.*

Будемо, як і раніше, пов'язувати з кожною точкою певної області Ω тривимірного простору радіус-вектор $\mathbf{r}$ і характеризувати положення точки координатами цього вектора x^1, x^2, x^3 у криволінійній системі координат. Будемо вважати, що в області Ω тривимірного простору існує ненульовий якобіан переходу від криволінійних координат до прямокутних декартових, завдяки чому можливо знайти функції $x(x^i)$, $y(x^i)$, та $z(x^i)$ і виразити радіус-вектор будь-якої точки як

$$\mathbf{r} = x(x^i)\mathbf{i} + y(x^i)\mathbf{j} + z(x^i)\mathbf{k}. \quad (4.11)$$

(Тут і надалі, якщо не обумовлено щось інше, будемо вважати, що координатні індекси набувають значень 1, 2, 3).

4.21. Означення. Векторами локального контраваріантного базису $\{\mathbf{e}_i\}$ криволінійної системи координат x^1, x^2, x^3 в області Ω називають величини

$$\mathbf{e}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} = \frac{\partial x}{\partial x^i} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial x^i} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial x^i} \mathbf{k}. \quad (4.12)$$

4.22. Наслідок. Величини $\partial x / \partial x^i, \partial y / \partial x^i$ та $\partial z / \partial x^i$ є координатами векторів контраваріантного локального базису у прямокутній декартовій системі.

4.23. Зауваження. Як напрямок так і довжина векторів локального базису змінюються при переході від однієї точки простору до іншої (в цьому й полягає їх «локальність»). Особливо це треба мати на увазі при диференціюванні та інтегруванні функцій від цих векторів.

4.24. Зауваження. За обумовлених вище вихідних припущень означення 4.21 є змістовним, оскільки воно забезпечує лінійну незалежність векторів $\mathbf{e}_i$.

◀ Дійсно, зважаючи на наслідок 4.22 мішаний добуток векторів (4.12) може бути виражений у вигляді якобіана

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x^1} & \frac{\partial y}{\partial x^1} & \frac{\partial z}{\partial x^1} \\ \frac{\partial x}{\partial x^2} & \frac{\partial y}{\partial x^2} & \frac{\partial z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x}{\partial x^3} & \frac{\partial y}{\partial x^3} & \frac{\partial z}{\partial x^3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x^1} & \frac{\partial x}{\partial x^2} & \frac{\partial x}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y}{\partial x^1} & \frac{\partial y}{\partial x^2} & \frac{\partial y}{\partial x^3} \\ \frac{\partial z}{\partial x^1} & \frac{\partial z}{\partial x^2} & \frac{\partial z}{\partial x^3} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x^1, x^2, x^3)}.$$

Згідно вихідного припущення якобіан $\left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} \right]^{-1}$ існує, а тому

$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \neq 0$. Оскільки мішаний добуток векторів (4.10) не дорівнює нулю, ці вектори некомпланарні, а значить, лінійно незалежні. ▶

4.25. Зауваження. Вище було враховано, що базисні орти декартової системи є сталими. Оскільки можна позначити $x = x^1$, $y = x^2$ та $z = x^3$, для прямокутної системи координат з (4.10) одержуємо $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$, як і повинно бути.

4.26. Властивість. В кожній точці області Ω базисні вектори $\mathbf{e}_i$ дотичні до координатних ліній.

◀ Безпосередньо випливає з означення 4.21. ▶

4.27. Означення. Локальним коваріантним базисом $\{\mathbf{e}^i\}$ називають базис, взаємний до локального контраваріантного базису $\{\mathbf{e}_i\}$ (див. означення 2.50).

4.28. Наслідок. Величини $\partial x^i / \partial x, \partial x^i / \partial y$ та $\partial x^i / \partial z$ є координатами векторів локального коваріантного базису у прямокутній декартовій системі, тобто

$$\mathbf{e}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial x^i}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial x^i}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (4.13)$$

◀ Скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі попарних добутків відповідних координат векторів співмножників, тому з (4.12) та (4.13) випливає, що

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \frac{\partial x}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial z} = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j.$$

Отже, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$, тобто вектори (4.13) утворюють базис взаємний до контраваріантного базису $\{\mathbf{e}_i\}$ і, за означенням, вони є векторами коваріантного базису. ▶

4.29. Властивість. В кожній точці області Ω базисні вектори $\mathbf{e}^i$ перпендикулярні до координатних ліній.

◀Безпосередньо випливає з означень 4.27, 2.50 та властивості 4.26. ▶

Проілюструємо подані вище означення та властивості простим прикладом.

4.30. Приклад. Побудуємо локальні базиси полярної системи координат. Почнемо з контраваріантного базису

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} \frac{\partial x}{\partial r} + \mathbf{j} \frac{\partial y}{\partial r} = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi,$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{i} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \mathbf{j} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\mathbf{i} r \sin \varphi + \mathbf{j} r \cos \varphi.$$

Легко упевнитися, що

$$|\mathbf{e}_1| = 1, \quad |\mathbf{e}_2| = r, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0.$$

Вектори коваріантного базису знаходимо з означення коваріантного базису, згідно якого

$$\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1, \quad \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0.$$

Звідси випливає

$$\mathbf{e}^1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}^2 = \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_2.$$

На рис. 18 показано локальні базиси полярної системи координат у двох різних точках площини. В обох точках A і B базисні вектори $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}^1$ мають одиничну довжину і напрямлені паралельно радіус-векторів цих точок. На відміну від цього, базисні вектори $\mathbf{e}_2$ і $\mathbf{e}^2$ дотичні до координатних ліній (кіл), що проходять крізь точки A і B . Довжина вектора $\mathbf{e}_2$ дорівнює довжині відрізка OA (для точки A) або OB (для точки B). Отже, $|\mathbf{e}_2| > 1$ для A та $|\mathbf{e}_2| < 1$ для B .

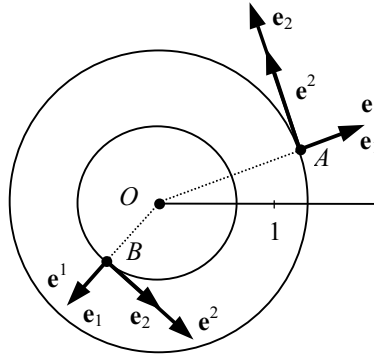


Рис. 18

Оскільки $|\mathbf{e}^2| = 1/|\mathbf{e}_2|$, то $|\mathbf{e}^2| < 1$ для A та $|\mathbf{e}^2| > 1$ для B .

Корисно мати на увазі ще деякі властивості та означення, що стосуються локальних базисів та криволінійних координат.

4.31. Властивість. В кожній точці області Ω мають місце наступні співвідношення між векторами коваріантного, контраваріантного та декартового базисів

$$\begin{cases} \frac{\partial x^i}{\partial x} \mathbf{e}_i = \frac{\partial x}{\partial x^i} \mathbf{e}^i = \mathbf{i}, \\ \frac{\partial x^i}{\partial y} \mathbf{e}_i = \frac{\partial y}{\partial x^i} \mathbf{e}^i = \mathbf{j}, \\ \frac{\partial x^i}{\partial z} \mathbf{e}_i = \frac{\partial z}{\partial x^i} \mathbf{e}^i = \mathbf{k}. \end{cases} \quad (4.14)$$

◀ Безпосередньо випливає з (4.12) та (4.13). Наприклад, згідно з (4.12)

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^i}{\partial x} \mathbf{e}_i &= \frac{\partial x^i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x^i} \mathbf{i} + \frac{\partial x^i}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x^i} \mathbf{j} + \frac{\partial x^i}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x^i} \mathbf{k} \\ &= \frac{\partial x}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{k} = \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i}. \end{aligned}$$

Інші співвідношення доводяться аналогічно. ▶

4.32. Властивість. В кожній точці області Ω мають місце наступні співвідношення між векторами двох різних (штрихованого та нештрихованого) локальних базисів:

$$\mathbf{e}'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \mathbf{e}^j. \quad (4.15)$$

◀ Ці співвідношення читачеві доцільно перевірити самотужки, використавши формули (4.12) та (4.14) для першого з них і формули (4.13) та (4.14) – для другого. ▶

4.33. Означення. Координатами вектора $\mathbf{a}$ з точкою прикладання в області Ω називають коефіцієнти його розкладу по векторах локального базису в цій точці, тобто

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = a_i \mathbf{e}^i,$$

де a^i – контраваріантні, а a_i – коваріантні координати.

4.34. Властивість. В кожній точці області Ω мають місце наступні співвідношення між контраваріантними (коваріантними) та прямокутними координатами вектора:

$$\begin{aligned} a^i &= \frac{\partial x^i}{\partial x} a_x + \frac{\partial x^i}{\partial y} a_y + \frac{\partial x^i}{\partial z} a_z, \\ a_i &= \frac{\partial x}{\partial x^i} a^x + \frac{\partial y}{\partial x^i} a^y + \frac{\partial z}{\partial x^i} a^z. \end{aligned} \quad (4.16)$$

(x^i та x, y, z – криволінійні та декартові координати області Ω).

◀ Доведемо першу з двох рівностей. Для цього розкладемо $\mathbf{a}$ в коваріантному та декартовому базисах:

$$\mathbf{a} = a^j \mathbf{e}_j = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}.$$

З цих розкладів випливає, що

$$a^j \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^i = a_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}^i + a_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}^i + a_z \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}^i.$$

Зваживши на означення взаємних базисів та формули (4.14) переписуємо останню рівність у вигляді

$$a^j \delta_j^i = a_x \frac{\partial x^i}{\partial x} + a_y \frac{\partial x^i}{\partial y} + a_z \frac{\partial x^i}{\partial z},$$

який і доводить правильність першого із співвідношень (4.16), оскільки $a^j \delta_j^i = a^i$. Друге співвідношення доводиться аналогічно. ▶

4.35. Властивість. В кожній точці області Ω мають місце наступні співвідношення між прямокутними та коваріантними (контраваріантними) координатами вектора

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{\partial x}{\partial x^i} a^i = \frac{\partial x^i}{\partial x} a_i, \\
a_y &= \frac{\partial y}{\partial x^i} a^i = \frac{\partial x^i}{\partial y} a_i, \\
a_z &= \frac{\partial z}{\partial x^i} a^i = \frac{\partial x^i}{\partial z} a_i.
\end{aligned}
\tag{4.17}$$

◀ Ці співвідношення доводяться за допомогою формул (4.16), хід доведення дуже подібний до того, який був використаний для властивості 4.31, тому ми його переписувати не будемо.▶

4.36. Властивість. В кожній точці області Ω мають місце наступні співвідношення між координатами вектора у двох різних (штрихованому та нештрихованому) локальних базисах:

$$a'^i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} a_j, \quad a'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} a^j. \tag{4.18}$$

◀ Ці співвідношення доводяться за допомогою формул (4.16) та (4.17)

$$\begin{aligned}
a'^i &= \frac{\partial x^i}{\partial x} a_x + \frac{\partial x^i}{\partial y} a_y + \frac{\partial x^i}{\partial z} a_z \\
&= \frac{\partial x^i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x^j} a^j + \frac{\partial x^i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x^j} a^j + \frac{\partial x^i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x^j} a^j \\
&= \left(\frac{\partial x^i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x^j} + \frac{\partial x^i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x^j} + \frac{\partial x^i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x^j} \right) a^j = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} a^j.
\end{aligned}$$

Друге співвідношення доводиться аналогічно.▶

§ 29. Фізичний базис та фізичні координати векторів

4.37. Означення. Фізичним контраваріантним базисом називають трійку векторів $\tilde{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_i / |\mathbf{e}_i|$ (без підсумовування по i)¹.

4.38. Означення. Фізичним коваріантним базисом називають трійку векторів $\tilde{\mathbf{e}}^i = \mathbf{e}^i / |\mathbf{e}^i|$ (без підсумовування по i).

4.39. Зауваження. За означенням, вектори фізичного базису мають одиничну довжину для кожної точки області Ω , тобто вони є ортами.

4.40. Зауваження. Оскільки $|\mathbf{e}_i| = \sqrt{g_{ii}}$, $|\mathbf{e}^i| = \sqrt{g^{ii}}$, то орти фізичного базису зазвичай означають формулами

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}}, \quad \tilde{\mathbf{e}}^i = \frac{\mathbf{e}^i}{\sqrt{g^{ii}}}, \quad (4.19)$$

де g_{ii} – діагональні елементи матриці Грама Γ базису $\{\mathbf{e}_i\}$ (або двічі коваріантного метричного тензора), а g^{ii} – діагональні елементи матриці Γ^{-1} (або двічі контраваріантного метричного тензора), підсумовування за індексом i немає.

4.41. Властивість. Орти фізичних та прямокутного декартового базисів пов'язані наступними співвідношеннями

¹ Деякі випадки, коли існує домовленість Ейнштейна, і водночас, в алгебраїчному рівнянні немає підсумовування за індексом, що повторюється, неважко помітити і без спеціального повідомлення: такий індекс присутній і в правій і в лівій частині рівняння. Але, для полегшення сприйняття формул ми будемо явно вказувати на відсутність підсумовування за індексом, що повторюється.

$$\begin{cases} \sum_i \sqrt{g_{ii}} \frac{\partial x^i}{\partial x} \tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_i \sqrt{g^{ii}} \frac{\partial x}{\partial x^i} \tilde{\mathbf{e}}^i = \mathbf{i}, \\ \sum_i \sqrt{g_{ii}} \frac{\partial x^i}{\partial y} \tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_i \sqrt{g^{ii}} \frac{\partial y}{\partial x^i} \tilde{\mathbf{e}}^i = \mathbf{j}, \\ \sum_i \sqrt{g_{ii}} \frac{\partial x^i}{\partial z} \tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_i \sqrt{g^{ii}} \frac{\partial z}{\partial x^i} \tilde{\mathbf{e}}^i = \mathbf{k}, \end{cases} \quad (4.20)$$

(підсумовування за індексом i немає).

◀ Впливає з (4.17) та (4.19).▶

4.42. Означення. Координати a^i вектора $\mathbf{a}$ у фізичному контраваріантному базисі називають контраваріантними фізичними координатами цього вектора.

4.43. Означення. Координати a_i вектора $\mathbf{a}$ у фізичному коваріантному базисі називають коваріантними фізичними координатами цього вектора.

4.44. Властивість. Фізичні координати вектора $(\tilde{a}_i, \tilde{a}^i)$ пов'язані з його координатами у довільному локальному базисі (a_i, a^i) наступними співвідношеннями:

$$\tilde{a}^i = \sqrt{g_{ii}} a^i, \quad \tilde{a}_i = \sqrt{g^{ii}} a_i \quad (4.21)$$

(без підсумовування по i).

◀ Вектор $\mathbf{a}$ може бути розкладений у локальному базисі $\{\mathbf{e}_i\}$, вектори якого пов'язані з ортами фізичного базису співвідношеннями (4.19). Тому

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = \sum_i \sqrt{g_{ii}} a^i \tilde{\mathbf{e}}_i.$$

З іншого боку, вектор $\mathbf{a}$ може бути розкладений безпосередньо у фізичному базисі: $\mathbf{a} = \tilde{a}^i \tilde{\mathbf{e}}_i$. Отже, $\sqrt{g_{ii}} a^i \tilde{\mathbf{e}}_i = \tilde{a}^i \tilde{\mathbf{e}}_i$, тобто $(\sqrt{g_{ii}} a^i - \tilde{a}^i) \tilde{\mathbf{e}}_i$. З огляду на лінійну незалежність базисних векторів

звідси впливає перша з рівностей (4.21). Друга з них доводиться аналогічно.►

4.45. Властивість. Фізичні координати вектора $(\tilde{a}_i, \tilde{a}^i)$ пов'язані з його координатами у прямокутному декартовому базисі (a_x, a_y, a_z) наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} a_x &= \sum_i \frac{\partial x}{\partial x^i} \cdot \frac{\tilde{a}^i}{\sqrt{g_{ii}}} = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial x} \cdot \frac{\tilde{a}_i}{\sqrt{g^{ii}}}, \\ a_y &= \sum_i \frac{\partial y}{\partial x^i} \cdot \frac{\tilde{a}^i}{\sqrt{g_{ii}}} = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial y} \cdot \frac{\tilde{a}_i}{\sqrt{g^{ii}}}, \\ a_z &= \sum_i \frac{\partial z}{\partial x^i} \cdot \frac{\tilde{a}^i}{\sqrt{g_{ii}}} = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial z} \cdot \frac{\tilde{a}_i}{\sqrt{g^{ii}}}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

(підсумовування за індексом i немає).

◀ Впливає з (4.17) та (4.19).►

§ 30. Ортогональні криволінійні системи координат

4.46. Означення. Криволінійна система координат задана в області Ω називається ортогональною, якщо *скрізь* у цій області $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ при $i \neq j$.

4.47. Наслідок. В ортогональних координатних системах координатні лінії, що відповідають *різним* координатам, перетинаються *лише* під прямими кутами; будь-яка координатна лінія є нормаллю до координатних поверхонь, що відповідають *тій самій* координаті.

◀ Впливає з означення 4.46 і того факту, що базисні вектори дотичні до відповідних координатних ліній.►

4.48. Властивість. Матриця Грама контраваріантного базису (матриця двічі коваріантного метричного тензора) ортогональної системи координат є діагональною для всіх точок області Ω .

◀ За означенням матриці Грама та згідно з означенням 4.46 маємо для елементів матриці Грама наступні рівності $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = |\mathbf{e}_i| \delta_{ij}$, які й доводять подане твердження.▶

4.49. Властивість. Матриця обернена до матриці Грама (матриця двічі контраваріантного метричного тензора) ортогональної системи координат є діагональною для всіх точок області Ω , причому

$$g^{ii} = 1 / g_{ii}. \quad (4.23)$$

◀Безпосередньо випливає з формул розрахунку елементів оберненої матриці і того факту, що матриця Грама є діагональною.▶

З означення матриці Грама випливає, що всі її діагональні елементи додатні, а тому зручно позначити $g_{ii} \equiv (h_i)^2$ (підсумовування немає).

4.50. Означення. Величини

$$h_i = |\mathbf{e}_i| = \sqrt{g_{ii}} \quad (4.24)$$

називають коефіцієнтами Ламе криволінійної ортогональної системи координат.

4.51. Наслідок. Для ортогональної системи координат є справедливими рівності

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = (h_i)^2 \delta_{ij}, \quad (4.25)$$

а для визначника матриці Грама g справджуються рівності

$$g = g_{11}g_{22}g_{33} = (h_1h_2h_3)^2. \quad (4.26)$$

◀ Випливає з означень 4.46, 4.50.▶

4.52. Наслідок. Скрізь в області Ω для ортогональної системи координат $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = 0$ при $i \neq j$; у зв'язку з цим є справедливими рівності

$$g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = (h_i)^{-2} \delta^{ij}. \quad (4.27)$$

◀ Випливає з означень 4.46, 4.50 і Властивості 4.49.▶

4.53. Висновок. Для ортогональної криволінійної системи координат фізичний контраваріантний базис не відрізняється від фізичного коваріантного базису, взятого в тій самій точці простору, і внаслідок цього, контраваріантні фізичні координати вектора не відрізняються від його коваріантних фізичних координат. Тому можна казати просто про фізичний базис і фізичні координати, а координатні індекси завжди ставити знизу.

◀ Впливає з (4.19), (2.14), (4.23), (4.25) та (4.27)

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{g_{ij}\mathbf{e}^j}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{(h_i)^2 \delta_{ij}\mathbf{e}^j}{h_i} = h_i \mathbf{e}^i = \frac{\mathbf{e}^i}{\sqrt{g^{ii}}} = \tilde{\mathbf{e}}^i,$$

підсумовування за індексом i в цих перетвореннях не проводиться. ▶

4.54. Приклад. Орти локального базису полярної системи координат пов'язані з декартовими ортами такими формулами:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} \frac{\partial x}{\partial r} + \mathbf{j} \frac{\partial y}{\partial r} = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi,$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{i} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \mathbf{j} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\mathbf{i} r \sin \varphi + \mathbf{j} r \cos \varphi.$$

В цьому разі

$$h_1 = |\mathbf{e}_1| = 1, \quad h_2 = |\mathbf{e}_2| = r, \quad \text{і тому}$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1 / h_1 = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi,$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_2 / h_2 = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi.$$

На рис. 19 показані орти фізичного базису полярної системи координат у двох точках простору (A та B).

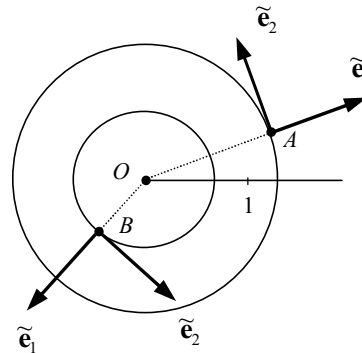


Рис. 19

§ 31. Довідкові формули для спеціальних систем координат

1. Полярна система координат:

$$a) \begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad b) \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sin \varphi = y / r, \quad \cos \varphi = x / r, \quad r \neq 0. \end{cases}$$

$$c) \quad h_\varphi = 1, \quad h_r = r, \quad \sqrt{g} = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right| = r.$$

2. Циліндрична система координат:

$$a) \begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \\ z = z. \end{cases} \quad b) \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sin \varphi = y / r, \quad \cos \varphi = x / r, \quad r \neq 0, \\ z = z. \end{cases}$$

$$c) \quad h_\varphi = 1, \quad h_r = r, \quad h_z = 1 \quad \sqrt{g} = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} \right| = r.$$

3. Сферична система координат:

$$a) \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos \theta = z / r, \sin \theta = \sqrt{x^2 + y^2} / r, r \neq 0, \\ \sin \varphi = y / \sqrt{x^2 + y^2}, \cos \varphi = x / \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

$$c) \quad h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta, \quad \sqrt{g} = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} \right| = r^2 \sin \theta.$$

§ 32. Обчислення добутків векторів у криволінійних системах координат

Використовуючи формули, наведені у §17, 19, 23, 28 та 29 легко отримати низку виразів для обчислення добутків векторів, заданих координатами у криволінійних базисах.

• Скалярний добуток векторів

У будь-якій криволінійній системі координат для обчислення скалярного добутку векторів **a** та **b** можна використати одну з наступних формул:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b_i = a_i b^i = g_{ij} a^i b^j = g^{ij} a_i b_j.$$

Використовуючи фізичні координати і враховуючи висновок 4.53, переписуємо ці формули у вигляді

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i \frac{\tilde{a}_i \tilde{b}_i}{\sqrt{g_{ii} g^{ii}}} = \sum_{i,j} \frac{g^{ij} \tilde{a}_i \tilde{b}_j}{\sqrt{g^{ii} g^{jj}}} = \sum_{i,j} \frac{g_{ij} \tilde{a}_i \tilde{b}_j}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}}.$$

В ортогональній криволінійній системі

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b_i = a_i b^i = \sum_i \tilde{a}_i \tilde{b}_i = \sum_i (h_i)^2 a^i b^i = \sum_i (h_i)^{-2} a_i b_i.$$

• Векторний добуток векторів

Домовленість про те, що у технічних та теоретичних фізичних розрахунках слід використовувати лише праві системи координат поширюється і на криволінійні системи координат. Завдяки цьому, при розрахунку векторних добутків завжди можна користуватися формулами

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sqrt{g} \epsilon_{ijk} \mathbf{e}^i a^j b^k = (1/\sqrt{g}) \epsilon^{ijk} \mathbf{e}_i a_j b_k.$$

У фізичних координатах

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sqrt{g} \sum_{i,j,k} \sqrt{\frac{g^{ii}}{g_{jj} g_{kk}}} \epsilon_{ijk} \tilde{\mathbf{e}}_i \tilde{a}_j \tilde{b}_k = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j,k} \sqrt{\frac{g_{ii}}{g^{jj} g^{kk}}} \epsilon^{ijk} \tilde{\mathbf{e}}_i \tilde{a}_j \tilde{b}_k.$$

В ортогональній криволінійній системі координат

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = h_1 h_2 h_3 \epsilon_{ijk} \mathbf{e}^i a^j b^k = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \epsilon^{ijk} \mathbf{e}_i a_j b_k = \epsilon^{ijk} \tilde{\mathbf{e}}_i \tilde{a}_j \tilde{b}_k.$$

• **Мішаний добуток векторів**

Для обчислення мішаного добутку векторів використовують наступні формули:

$$\mathbf{abc} = \sqrt{g} \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k = (1/\sqrt{g}) \varepsilon^{ijk} a_i b_j c_k.$$

За допомогою фізичних координат мішаний добуток можна виразити як

$$\mathbf{abc} = \sqrt{g} \sum_{i,j,k} \frac{\varepsilon_{ijk} \tilde{a}_i \tilde{b}_j \tilde{c}_k}{\sqrt{g_{ii} g_{jj} g_{kk}}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j,k} \frac{\varepsilon^{ijk} \tilde{a}_i \tilde{b}_j \tilde{c}_k}{\sqrt{g^{ii} g^{jj} g^{kk}}}.$$

В ортогональній криволінійній системі координат

$$\mathbf{abc} = h_1 h_2 h_3 \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \varepsilon^{ijk} a_i b_j c_k = \varepsilon^{ijk} \tilde{a}_i \tilde{b}_j \tilde{c}_k.$$

Ще раз нагадаємо, що всі формули подано для правоорієнтованої системи координат.

Додаток 1

Пояснення деяких символів та символічних записів

Символ або символічний запис	Тлумачення символу або запису
$\forall$	будь-який, для будь-якого, всі, для всіх
$\exists$	існує
$:$	такий, що
$\Rightarrow$	впливає
$\Leftrightarrow$	рівносильне, необхідно та достатньо
$\rightarrow$	прямує
$\equiv$	тотожно дорівнює
$\stackrel{def}{=}$	за означенням дорівнює, за означенням є
$\overline{k = 1 - n}$	k набуває цілих значень від 1 до n
$\{x_k\}_{k=1-\overline{n}}$	множина елементів $x_1, x_2, \dots, x_n$
$x_j \in \{x_k\}_{k=1-\overline{n}}$	x_j належить до $\{x_k\}_{k=1-\overline{n}}$
$x_j \notin \{x_k\}_{k=1-\overline{n}}$	x_j не належить до $\{x_k\}_{k=1-\overline{n}}$
$A \subset B$	множина A міститься в множині B
$A \supset B$	множина A включає до себе множину B

Додаток 2

Уявлення про афінний простір

У цьому підручнику ми неодноразово розглядали лінійний простір утворений вільними геометричними векторами, тобто напрямленими відрізками прямої лінії. Вільні геометричні вектори є рівними, коли вони мають рівні довжини та однакові напрямки. По суті це означає, що всі однакові за довжиною та однаково напрямлені геометричні вектори є одним і тим самим елементом лінійного простору, незважаючи на те, що ці вектори прикладені до різних геометричних точок. Це є дуже важливим, оскільки поняття точки взагалі не фігурує в аксіоматичній конструкції алгебри лінійних просторів.

Отже, сукупність всіх вільних геометричних векторів є простором. Водночас, прикладені вектори (вектори з початком у фіксованій точці) також можуть утворювати простір. Дійсно, у § 25 ми бачили, що існує взаємно однозначна відповідність між геометричними точками та їх радіус-векторами. Оскільки радіус-вектори складаються за правилом паралелограма, то легко перевірити, що радіус-вектори всіх геометричних точок утворюють лінійний простір, хоч вони і не є вільними векторами, оскільки початок кожного з них обов'язково лежить на початку координат. Більш того, у загальнолюдянському розумінні простором скоріше можна назвати не сукупність радіус-векторів, а сукупність точок (або дуже маленьких фізичних об'ємів) на які вказують ці вектори.

Кожній парі просторових (геометричних) точок A і B можна поставити у відповідність два геометричні вектори – $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{BA}$: початок вектора $\overrightarrow{AB}$ лежить в точці A , кінець – в точці B ; вектор $\overrightarrow{BA}$, навпаки, починається в B і закінчується в A . Кажуть, що вектор $\overrightarrow{AB}$ *прикладений* до точки A , а вектор $\overrightarrow{BA}$ – до точки B . Можна ввести в розгляд поняття *впорядкованої пари* точок A, B , перша з яких збігається з початком, а друга – з кінцем певного вектора. Тоді A, B та B, A є *різними* парами, незважаючи на те, що вони складаються одних і тих самих точок. Кожній впорядкованій парі A, B відповідає один-єдиний *прикладений* вектор $\overrightarrow{AB}$, і навпаки, кожному *прикладеному* вектору

відповідає одна-єдина впорядкована пара. У випадку вільних векторів взаємно однозначної відповідності немає: впорядкованій парі точок відповідає лише один вільний вектор, але одному вільному вектору відповідає безліч впорядкованих пар точок.

Математичним віддзеркаленням і узагальненням інтуїтивного уявлення про загадковий і по суті неозначений простір, в якому існує світ, є аксіоматично означене поняття афінного простору.

Д1. Означення. Множину G_n елементів $A, B, C, \dots$ називають n -вимірним афінним простором, а самі елементи – точками афінного простору, коли кожній впорядкованій парі елементів A, B за певним законом поставлений у відповідність один-єдиний вектор $\mathbf{x} \equiv \overline{AB}$, n -вимірний лінійний простору $\mathcal{L}$ і при цьому

1. $\forall A \in G_n, \exists \mathbf{x} \in \mathcal{L} : \exists B \in G_n, \overline{AB} = \mathbf{x}$ (точку B будемо позначати також як $P(A, \mathbf{x})$);
2. $\forall A, B, C \in G_n : \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Д2. Зауваження. Перша аксіома обумовлює можливість відкласти від кожної точки A будь-який вектор. Друга аксіома визначає правило додавання векторів, яке містить у собі правило трикутника для складання геометричних векторів.

Д3. Зауваження. Існує розбіжність у використанні словосполучення "афінний простір": деякі автори ототожнюють його зі словосполученням "лінійний простір скінченної вимірності", інші вважають, що елементами афінного простору є не лише точки, а й відкладені від них вектори. Ми будемо вважати, що елементами афінного простору є лише точки, а вектори фігурують в означенні афінного простору по суті так, як числа в означенні лінійного простору.

Д4. Наслідок. З другої аксіоми випливає, що $\forall A, B \in G_n \overline{AA} + \overline{AB} = \overline{AB}$, тому вектор, що відповідає парі двох однакових точок є нульовим вектором $\overline{AA} \equiv \mathbf{0}, P(A, \mathbf{0}) = A$.

Д5. Наслідок. З другої аксіоми випливає, що $\overline{AB} = \overline{BA}$.

Д6. Наслідок. Для $\forall A, B, A', B' \in G_n$ рівність $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ справджується тоді і лише тоді, коли $\overline{AA'} = \overline{BB'}$.

Цей наслідок відповідає згадуваному вище означенню рівності вільних геометричних векторів: рівними ті і лише ті вектори, які перетворюються один на другий паралельним перенесенням у просторі (рис. 20).

Д7. Наслідок. Лінійний векторний простір $\mathcal{L}$ з елементами $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$ породжує афінний простір, впорядкованим парам точок якого відповідають вектори $\overline{\mathbf{x}\mathbf{y}} \equiv \mathbf{y} - \mathbf{x}$.

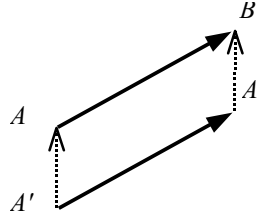


Рис. 20

Це твердження інтуїтивно означає наступне: елементи лінійного простору $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ можна інтерпретувати як вільні вектори, які після зведення до спільного початку стають радіус-векторами² певних точок, які й утворюють афінний простір; вектори $\overline{\mathbf{x}\mathbf{y}}$, що поєднують будь-які дві точки, є різницями радіус-векторів цих точок.

Д8. Означення. Афінний простір G_n називають *точковим простором Евкліда* E_n , якщо відповідний векторний простір $\mathcal{L}_n$ є простором Евкліда $\mathcal{E}_n$.

Д9. Означення. Відстанню між точками A і B точкового простору Евкліда E_n називають довжину (модуль) вектора $\overline{AB}$.

Д10. Зауваження. Геометричний простір з обраною в ньому одиницею виміру довжини є тривимірним точковим простором Евкліда.

Д11. Означення. Декартовою системою координат в точковому просторі Евкліда E_n називають сукупність обраної в ньому початкової точки O та базису $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1, \dots, n}$ у векторному просторі $\mathcal{E}_n$.

² Послідовне означення поняття радіус-вектора точки в афінному просторі буде подано далі.

Д12. Означення. Радіус-вектором точки A простору E_n називають вектор $\overline{OA}$.

Д13. Означення. Декартовими координатами точки A простору E_n в системі координат O , $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,n}$ називають координати її радіус-вектора $\overline{OA}$.

Д14. Зауваження. Координати радіус-вектора $\overline{OA}$ подають у вигляді матриці-рядочка (координатного рядочка) або матриці-стовпчика (координатного стовпчика).

Д15. Властивість. Якщо в просторі E_n обрано певну декартову систему координат, то існує взаємно-однозначна відповідність між точками простору та координатними рядочками (стовпчиками).

Д16. Властивість. Координатний рядочок (стовпчик) вектора $\overline{AB}$ дорівнює різниці координатних рядочків (стовпчиків) радіус-векторів $\overline{OB}$ і $\overline{OA}$.

Д17. Зауваження. Декартову систему координат у просторі E_n , породжену ортонормованим базисом, називають прямокутною.

• Системи криволінійних координат

Розглянемо поняття криволінійних координат для випадку тривимірного точкового простору Евкліда. (Узагальнення розгляду на випадок n -вимірного простору може бути проведене в разі потреби без залучення принципово нових уявлень). З огляду на довідковий характер цього розділу підручника, деякі твердження подамо без повного доведення.

Будемо вважати, що в певній області Ω тривимірного точкового простору Евкліда обрана прямокутна декартова система координат. Координатний рядочок точки в обраній прямокутній системі запишемо у вигляді (x, y, z) .

Д18. Означення. В області Ω задано криволінійна систему координат, якщо кожній точці області поставлено у відповідність трійку дійсних чисел (x^1, x^2, x^3) , які є неперервними функціями прямокутних координат,

$$x^1 = x^1(x, y, z) \quad x^2 = x^2(x, y, z), \quad x^3 = x^3(x, y, z), \quad (\text{Д.1})$$

причому якобіан $\left| \partial(x^1, x^2, x^3) / \partial(x, y, z) \right|$ існує і не дорівнює нулю.

Д19. Зауваження. Поставлені до функцій (Д.1) вимоги забезпечують взаємно-однозначну відповідність між криволінійними та декартовими координатами, а отже і взаємно-однозначну відповідність між криволінійними координатами і точками простору.

Д20. Зауваження. Криволінійна система координат буде декартовою (хоча, взагалі кажучи, і не прямокутною) тоді і лише тоді, коли всі функції (Д.1) лінійні за кожним з аргументів.

Д21. Означення. Поверхню, на якій $x^i(x, y, z) = \text{const}$, називають координатною поверхнею, відповідною до координати x^i .

Д22. Властивість. Координатні поверхні, які відповідають різним значенням однієї координати, не перетинаються в області Ω .

◀ Якщо припустити обернене, то на лінії перетину координатних поверхонь $x^i(x, y, z) = \text{const}_1$, та $x^i(x, y, z) = \text{const}_2$, функція $x^i(x, y, z)$ набуватиме двох різних значень (const_1 та const_2), тобто не буде однозначною.▶

Д23. Означення. Лінію перетину координатних поверхонь $x^i(x, y, z) = \text{const}_1$ та $x^j(x, y, z) = \text{const}_2$, відповідних до двох різних координат називають координатною лінією відповідною до третьої координати x^k ($i \neq j, i \neq k, j \neq k$).

Д24. Зауваження. Крізь будь-яку точку області Ω можна провести три різні координатні поверхні та три різні координатні лінії

Література

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М., 1984.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М., 1981.
3. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М., 1971.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М., Наука, 1975.
5. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. – М., 1985.
6. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М., 1985.
7. Ланкастер П. Теория матриц. – М., 1978 – 280 с.
8. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров А.И. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М., 1987.
9. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М., 1984.
10. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М., 1970.