

Частина 4

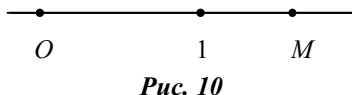
Системи координат.

Векторна алгебра в криволінійних координатах

§ 26. Загальна декартова система координат¹

• Декартові координати на площині

Поняття системи координат природно виникає при розв'язанні такого питання: яким чином можна охарактеризувати просторове положення точки P на площині?



Щоб відповісти на поставлене питання, спочатку проведемо на площині пряму лінію (див. рис. 10). Оберемо на прямій певну точку O й назвемо її нульовою точкою. Зафіксуємо ще одну точку на прямій та позначимо її цифрою 1. Довжину відрізка між точками O та 1 вважатимемо одиницею виміру відстані від нульової точки до будь-якої іншої точки площини. Положення довільної точки M на прямій визначається числом x , модуль якого дорівнює довжині відрізка OM (в обраних одиницях). Вважатимемо x додатним, якщо точка M розташована з того ж боку від нульової точки, що й точка 1. Якщо точки M та 1 розташовані з різних боків від нульової точки, вважатимемо x від'ємним. Число x називають *координатою* точки M на прямій. Далі ми побачимо, що введене таким чином поняття координати точки узгоджується з означенням **1.47** координат вектора.

4.1. Означення. Пряму з обраними на ній нульовою точкою O та одиничним відрізком $O1$ називають *віссю координат*.

¹ Рене Декарт (*Картезіус*), видатний діяч французького відродження, жив у 1596–1650 рр. і вславився науковими працями з математики, механіки, оптики та філософії.

4.2. Означення. Дві непаралельні осі координат OX та OY , що перетинаються у спільній нульовій точці, утворюють загальну декартову систему координат на площині (рис. 11). Цю систему називають також косокутною, або афінною. Вісь OX називають віссю абсцис, вісь OY – віссю ординат, точку перетину координатних осей – початком координат.

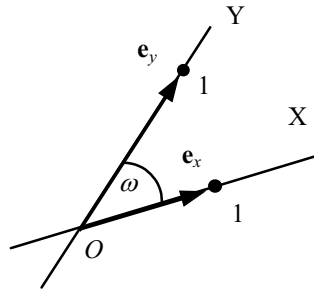


Рис. 11

4.3. Зауваження. В загальній декартовій системі координат одиниці виміру відстаней по осях OX та OY можуть бути різними. Введення різних одиниць довжини буває абсолютно необхідним. Наприклад, коли накреслюють на площині переріз тонкої плівки, її товщину часто вказують у мікронах, а ширину або довжину – у міліметрах, та іще й зображують ці одиниці довжини у різних масштабах. Якщо не зробити цього, переріз плівки буде ледь помітним (або зовсім непомітним) для неозброєного ока.

4.4. Означення. Прямі, паралельні до однієї з осей координат, називають координатними прямими декартової системи.

З декартовою системою координат на площині пов'язують вектори e_x, e_y , що лежать на осях OX та OY (відповідно), починаються на початку координат і напрямлені в бік їх зростання (рис. 11). Ці вектори утворюють базис на площині. Кут ω між осями координат відраховують від напрямку e_x і вважають додатним, коли поворот вектора e_x до напрямку вектора e_y здійснюється проти руху годинникової стрілки, і від'ємним – в оберненому випадку.

4.5. Означення. Декартову систему координат на площині називають правою коли $0 < \omega < \pi$ і лівою, коли $-\pi < \omega < 0$.

Повернемося до питання про положення точки P на площині.

4.6. Означення. Геометричний вектор $\mathbf{r}$, початок якого лежить на початку координат, а кінець – в точці P , називають *радіус-вектором* точки P (рис. 12).

Розкладемо радіус-вектор точки P у базисі $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y. \quad (4.1)$$

4.7. Означення. Декартовими координатами точки P на площині називають координати x, y її радіус-вектора в базисі $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$. Координату x називають *абсцисою*, а y – *ординатою* точки P .

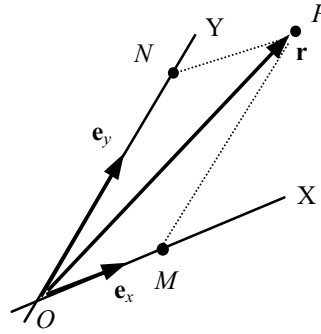


Рис. 12

4.8. Зауваження. Поняття декартових координат має простий геометричний зміст: координатні лінії, що проходять крізь точку P перетинаються з осями координат у певних точках M та N , які називають *проекціями* точки P на відповідні осі; числа x та y дорівнюють довжинам відрізків OM та ON . Декартові координати можуть бути (і історично були) означені саме як числа, що визначають положення точок перетину координатних ліній з осями координат. Але сучасне означення 4.7 має дуже істотні переваги над історичним: з одного боку, воно дозволяє використовувати потужний апарат лінійної алгебри для розв'язання геометричних задач, а з іншого – полегшує сприйняття основних положень лінійної алгебри, надаючи їм просту геометричну інтерпретацію.

У §11 ми упевнилися, що існує взаємно-однозначна відповідність між векторами та їх координатами в заданому базисі. Оскільки кожна точка площини P має один-єдиний радіус-вектор, така ж відповідність існує між точками та їх координатами. Отже, відповідь на питання,

поставлене на початку цього параграфа знайдена. Сформулюємо її у вигляді висновку.

4.9. Висновок. Щоб визначити положення точки P на площині, достатньо знайти її абсцису та ординату і вказати їх після літери, що символізує точку: $P(x, y)$. При цьому кожній точці відповідатиме одна-єдина впорядкована пара координат і, навпаки, кожна впорядкована пара значень (x, y) відповідає одній-єдиній точці на площині.

4.10. Зауваження. Дуже часто виникає потреба у знаходженні координат вектора $\mathbf{a}$, початок якого лежить у точці P_1 , а кінець – у точці P_2 . Цю задачу легко розв'язати за допомогою правила трикутника, з якого випливає, що вектор $\mathbf{a}$ дорівнює різниці радіус-векторів точок P_1 та P_2 , тобто $\mathbf{a} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Розкладемо радіус-вектори у базисі декартової системи координат та врахуємо, по-перше, асоціативність операції додавання векторів (у даному випадку – ортів), по-друге, дистрибутивність множення вектора на скаляр:

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = x_2 \mathbf{e}_x + y_2 \mathbf{e}_y - (x_1 \mathbf{e}_x + y_1 \mathbf{e}_y) = (x_2 - x_1) \mathbf{e}_x + (y_2 - y_1) \mathbf{e}_y.$$

Таким чином, розклад вектора $\mathbf{a}$ за базисними векторами має вигляд

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y, \quad (4.2)$$

де $a_x = x_2 - x_1$, та $a_y = y_2 - y_1$ – шукані координати вектора $\mathbf{a}$ у декартовій системі координат. Сформулюємо результат (4.2) у вигляді висновку.

4.11. Висновок. Декартові координати вектора, спрямованого із точки P_1 до точки P_2 , дорівнюють різницям координат цих точок; можна вважати базисні вектори вільними і переносити їх початки до початку будь-якого прикладеного вектора.

• Декартові координати у просторі

Декартові координати у тривимірному геометричному просторі застосовуються для розв'язання широкого кола математичних, фізичних та технічних задач, які в той чи інший спосіб зводяться до задачі про просторове положення геометричної точки P . Поняття, що виникають при розгляді загальної декартової системи координат у просторі подібні до

тих, що введені вище у цьому параграфі: означення **4.1**, **4.4**, **4.7**, зауваження **4.3**, **4.8** та висновок **4.11** лишаються чинними і в тривимірному випадку. Тому подальше викладення буде дуже стислим.

4.12. Означення. Загальна декартова система координат у тривимірному просторі складається з трьох некомпланарних осей OX , OY та OZ , які перетинаються у спільній нульовій точці (на початку координат). Осі OX , OY та OZ називають відповідно віссю *абсцис*, віссю *ординат* та віссю *аплікату*. Площини, що містять у собі пару координатних осей, або паралельні до них, називають *координатними площинами*.

4.13. Зауваження. Непаралельні координатні площини декартової системи у просторі перетинаються вздовж осей координат або координатних ліній.

Із декартовою системою у просторі пов'язують некомпланарні базисні вектори $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$, що лежать на осях OX , OY та OZ (відповідно), починаються на початку координат і напрямлені в бік їх зростання.

4.14. Означення. Загальну декартову систему координат у тривимірному просторі називають *правою*, якщо трійка векторів $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$, має праву орієнтацію, і *лівою*, якщо ця трійка є лівоорієнтованою. Радіус-вектор $\mathbf{r}$ будь-якої точки P тривимірного простору можна розкласти в базисі $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z. \quad (4.3)$$

4.15. Означення. Декартовими координатами точки P у просторі називають координати x , y , z її радіус-вектора в базисі $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$.

Координату x називають *абсцисою*, y – *ординатою*, z – *аплікатою* точки P .

4.16. Висновок. Щоб визначити положення точки P у просторі, достатньо знайти її декартові координати і вказати їх після літери, що символізує точку: $P(x, y, z)$. При цьому кожній точці відповідатиме одна-єдина впорядкована трійка координат і, навпаки, кожна впорядкована трійка значень (x, y, z) відповідає одній-єдиній точці на площині.

Іще раз зауважимо, що висновок **4.11** є чинним і для векторів у тривимірному геометричному просторі.

Цілковита подібність задач про визначення положення точки у двовимірному та тривимірному просторі призводить до того, що поняття точки та її координат вдається поширити на випадок n -вимірного точкового простору. Як це робиться, показано у Додатку 2.

§ 27. Спеціальні системи координат

Загальна декартова система координат дозволяє розв'язати широке коло задач університетських курсів аналітичної геометрії та фізики, але практично її використовують лише в окремих, як правило, досить складних випадках. У більшості ж випадків достатньо скористатися спеціальними системами координат, кожна з яких спрощує розв'язання більш вузького кола задач, специфічного для кожної системи.

• Прямокутні системи координат

4.17. Означення. Декартову систему координат, базис якої ортонормований, називають прямокутною.

З наданого означення випливає, що прямокутна система координат на площині є окремим випадком загальної декартової системи, в якому вектори $\mathbf{e}_x \equiv \mathbf{i}$ та $\mathbf{e}_y \equiv \mathbf{j}$ є взаємно

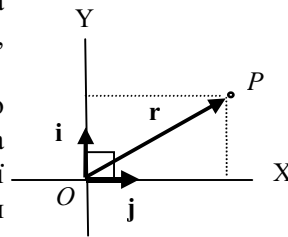


Рис. 13

перпендикулярними ортами, а отже, осі абсцис та ординат перетинаються під прямим кутом (рис. 13). Розклад радіус-вектора по ортах прямокутної системи координат має такий вигляд

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}. \quad (4.4)$$

4.18. Властивість. В прямокутній системі координат на площині абсциса x та ордината y точки на площині дорівнюють за абсолютною величиною відстаням від цієї точки до відповідних осей координат.

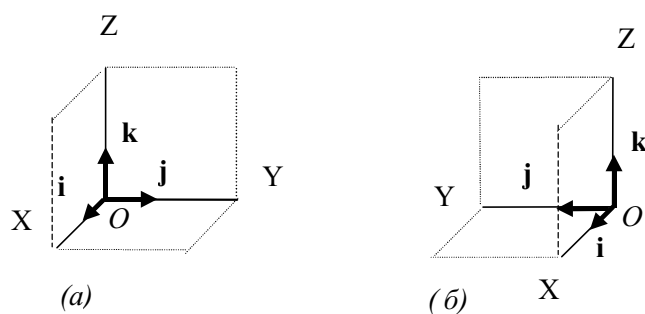


Рис. 14

Прямокутна система координат у тривимірному просторі складається з трьох осей OX , OY та OZ , які спрямовані під кутом 90° відносно одна одній та перетинаються у спільній нульовій точці. Пов'язані з координатними осями орти $\mathbf{e}_x \equiv \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_y \equiv \mathbf{j}$ та $\mathbf{e}_z \equiv \mathbf{k}$ можуть утворювати як праву, так і ліву трійку, тому треба відрізнити праві та ліві прямокутні системи координат у просторі. Праву трійку ортів та відповідну декартову систему координат зображено на рис. 14(а). Практично зручною ознакою правої системи є те, що вона задовольняє правилу гвинта: якщо головка гвинта обертається навколо осі OZ у напрямку від $\mathbf{i}$ до $\mathbf{j}$, орт $\mathbf{k}$ вказує напрямок поступального руху гвинта. У лівій системі орт $\mathbf{k}$ спрямований у бік протилежний до напрямку поступального руху гвинта. Ліву систему координат зображено на рис. 14(б). Нагадаємо, що зміна напрямку будь-якого одного орта правої системи на 180° змінює саму систему на ліву (і навпаки). Праву систему можна перетворити на ліву (і навпаки) також шляхом переставлення або перепозначення будь-яких двох осей (наприклад, $OX \leftrightarrow OY$). На відміну від цього *сумісне* обертання всіх трьох ортів системи на будь-який кут *не* веде до зміни її орієнтованості.

Існує домовленість, згідно з якою, коли не обумовлено інше, використовуються праві системи координат. Ми також будемо додержуватись цієї домовленості.

Розклад радіус вектора будь-якої точки простора по ортах прямокутної системи координат має вигляд

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \quad (4.5)$$

4.19. Властивість. В прямокутній системі координат у просторі абсциса x , ордината y та апліката z точки на площині дорівнюють за абсолютною величиною відстаням від цієї точки до координатних площин XOY , XOZ та YOZ .

• Полярна система координат

Полярну систему координат застосовують для визначення точок та векторів, що лежать у певній площині.

Введемо у розгляд пряму лінію, яка починається з деякої точки O та йде на нескінченність. Таку пряму називають *променем*. Точку O називають *полюсом*.

Положення будь-якої точки P на площині можна визначити, якщо відомі дві величини – по-перше, *полярний кут* φ між радіус-вектором $\mathbf{r}$ цієї точки та променем, й по-друге, модуль радіус-вектора r . Отже, координатами точки та її радіус-вектора у полярній системі координат є впорядкована пара чисел (r, φ) , які заведено вказувати у дужках праворуч від символу, що позначає точку, тобто писати $P(r, \varphi)$. Вважають, що величина кута зростає, коли $\mathbf{r}$ обертається навколо полюса в напрямку, протилежному до напрямку обертання стрілки годинника. Вважають також, що значення кута лежить в інтервалі $0 < \varphi < 2\pi$. Цим встановлюється взаємно-однозначна відповідність між точками та парами координат.

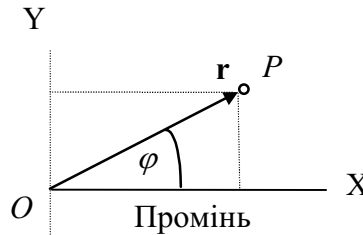


Рис. 15

Координатні лінії $r = \text{const}$ це сімейство кіл різних радіусів з центрами у полюсі, а лінії $\varphi = \text{const}$ є сімейством променів, що виходять з полюса.

Полярну систему координат зображено на рис. 15 разом з прямокутною системою, причому вісь OX спрямовано вздовж променя, а полюс суміщено з початком прямокутних координат. У такому разі

$$x = r \cos \varphi, \quad (4.6)$$

$$y = r \sin \varphi.$$

Складаючи x^2 та y^2 , одержуємо обернені співвідношення

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin \varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4.7)$$

Формули (4.6), (4.7) дозволяють у разі потреби переходити від прямокутної системи координат до полярної і навпаки. Якобів переходу

$$\left| \frac{\partial(r, \varphi)}{\partial(x, y)} \right| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right|^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{r}$$

існує для всіх значень r за винятком $r = 0$ і не дорівнює нулю. В точці $r = 0$ якобів не існує, а тому їй відповідає безліч значень полярного кута.

• Циліндрична система координат

Циліндрична система координат призначена для роботи з векторами та точками у тривимірному просторі. Вона складається з площини, на якій введено полярні координати, та осі OZ , перпендикулярної до цієї площини. На рис. 16 зображено циліндричну систему координат, яку для зручності суміщено з декартовою.

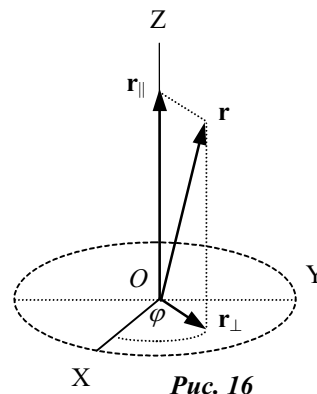


Рис. 16

Будь-який вектор $\mathbf{r}$ можна представити у вигляді суми двох векторів $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$, перший з яких спрямований вздовж, а другий – поперек осі OZ . Координатами точки та її радіус-вектора $\mathbf{r}$ в циліндричній системі є впорядкована трійка чисел $(r_{\perp}, \varphi, z)$. Кут φ визначає напрямок вектора $\mathbf{r}_{\perp}$, число $r_{\perp}$ дорівнює довжині цього вектора, координата z дорівнює довжині вектора $\mathbf{r}_{\parallel}$. Треба підкреслити, що значення $r_{\perp}$ за звичай пишуть у дужках на першому місці, значення кута – на другому, а z – на третьому.

Координатні поверхні циліндричної системи $r = \text{const}$ – сімейство кругових циліндрів різних радіусів з віссю OZ ;

$\varphi = const$ – сімейство напівплощин, краєм яких є вісь OZ ;

$z = const$ – сімейство площин паралельних до площини XOY .

Перехід від циліндричних координат до декартових здійснюється за формулами

$$z = z, y = r_{\perp} \sin \varphi, x = r_{\perp} \cos \varphi. \quad (4.8)$$

(Обернений перехід виконується за формулами (4.7), у яких r треба замінити на $r_{\perp}$). Якобіан переходу

$$\left| \frac{\partial(r, \varphi, z)}{\partial(x, y, z)} \right| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} \right|^{-1} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{r}.$$

Якобіан не існує коли $r = 0$, тобто на осі OZ , на якій порушується взаємно однозначна відповідність точок та їх координат.

• Сферична система координат

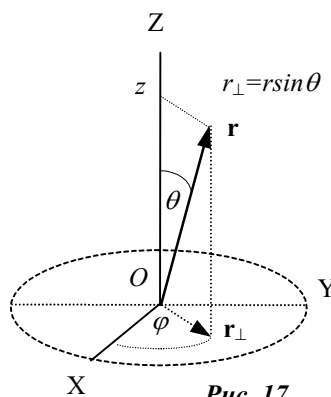
Сферичну систему координат зображено на рис. 17 разом із декартовими осями. Ця система складається з тих самих елементів, що й циліндрична (тобто з осі OZ та перпендикулярної до неї площини). Але сферичними координатами точки у просторі та її радіус-вектора $\mathbf{r}$ є числа (r, θ, φ) . Перше з цих чисел є модулем $\mathbf{r}$, друге – кутом між $\mathbf{r}$ та віссю OZ , третє – кутом між $\mathbf{r}_{\perp}$ та променем полярної системи координат на площині. Щоб встановити однозначну відповідність між точками простору та їх сферичними координатами, встановлюють певні обмеження на значення полярного кута θ та азимутального кута φ , а саме, вважають, що

$$0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 < \theta < \pi,$$

отже, інтервали значень полярного та азимутального кутів різні!

Координатні поверхні сферичної системи:

$r = const$ – сімейство сфер різних радіусів з центром в точці O ;



$\theta = const$ – сімейство напівконусів з віссю OZ та вершиною в точці O ;
 $\varphi = const$ – сімейство напівплощин краєм яких є вісь OZ .

Як випливає з рис. 17 та виразів (4.8), від сферичних координат до декартових треба переходити за формулами

$$z = r \cos \theta, y = r \sin \theta \sin \varphi, x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad (4.9)$$

а від декартових до сферичних – за допомогою формул

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (4.10)$$

$$\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Якобіан переходу

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(r, \theta, \varphi)}{\partial(x, y, z)} \right| &= \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} \right|^{-1} \\ &= \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{r^2 \sin \theta}. \end{aligned}$$

Якобіан не існує для точок осі OZ , на якій порушується взаємно однозначна відповідність точок та їх координат.

4.20. Зауваження. Не дивлячись на те, що кути полярної, циліндричної та сферичної систем називають координатами, величини θ і φ не є коефіцієнтами розкладів по ортах, на зразок (4.3), (4.4).