

Частина 3

Векторний добуток векторів та пов'язані з ним добутки

§ 21. Векторний добуток геометричних векторів

• Орієнтованість трійки геометричних векторів

3.1. Означення. Впорядковану трійку приведених до спільного початку некомпланарних векторів $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ геометричного простору називають правоорієнтованою (або просто *правою*), коли найкоротший поворот від першого вектора до другого здійснюється у напрямку руху годинникової стрілки, якщо дивитись на площину векторів $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ від кінця вектора $\mathbf{a}_3$. В оберненому випадку трійку векторів називають лівоорієнтованою (або *лівою*).

3.2. Зауваження. Із даного зараз означення випливає, що орієнтованість трійки векторів змінюється на протилежну, при переставленні двох векторів між собою, та при інверсії напрямку одного з них. При так званому *циклічному переставленні* векторів трійки

$$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} \rightarrow \{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} \rightarrow \{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1\} \rightarrow \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$$

її орієнтованість не змінюється.

3.3. Приклад. Зазвичай орти декартової системи позначають таким чином, щоб трійка векторів $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ була правою. Тоді трійки векторів $\{\mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{k}\}$ та $\{-\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ є лівими, а трійка $\{\mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ – правою.

• Означення та властивості векторного добутку

3.4. Означення. Вектор $\mathbf{c}$ називають векторним добутком вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$, якщо він задовольняє трьом умовам:

- а) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin \alpha$, де α – кут між $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$;
- б) вектор $\mathbf{c}$ спрямований перпендикулярно до площини векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$;
- в) вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ та $\mathbf{c}$ утворюють праву трійку (рис. 7).

Існує два позначення векторного добутку: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ або $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Ми будемо додержуватись першого з цих позначень, оскільки друге використовується у книжках з фізики для комутатора двох математичних величин (частіше за все, матриць або операторів).

Перелічимо основні властивості векторного добутку геометричних векторів.

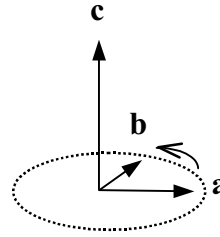


Рис. 7

3.5. Властивість. Векторний добуток дорівнює нулю у двох випадках: а) коли хоч один із векторів-співмножників дорівнює нульовому вектору; б) коли вектори-співмножники колінеарні.

◀ Впливає з означення 3.4. ▶

3.6. Зауваження. Оскільки, нульовий вектор можна вважати колінеарним з будь-яким іншим, рівність нулю векторного добутку по суті є формальним критерієм колінеарності векторів. Застосування цього критерію спрощує розв'язання багатьох задач аналітичної геометрії та фізики.

3.7. Властивість. Модуль векторного добутку двох геометричних векторів дорівнює площі паралелограма S , сторони якого збігаються з векторами-співмножниками (рис. 8).

$$h = |\mathbf{b}| \sin \alpha$$

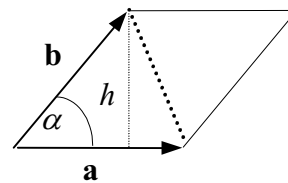


Рис. 8

$$\blacktriangleleft S = |\mathbf{a}|h = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha. \blacktriangleright$$

3.8. Зауваження. Коли вектори-співмножники є розмірними геометричними або фізичними величинами, то розмірність їх векторного та скалярного добутків дорівнює добутку розмірностей векторів-співмножників. Оскільки геометричні вектори мають розмірність довжини, розмірність їх добутку збігається з розмірністю площі. На відміну від цього, розмірність суми векторів дорівнює розмірності векторів-доданків. Із сказаного випливає, що а) модуль векторної

величини має таку ж розмірність як і сама величина; б) не можна додавати величини, що відрізняються за розмірністю.

3.9. Зауваження. У математичному аналізі та фізиці часто розглядають поняття *вектора площадки* S , побудованої на двох векторах $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$, зведених до спільного початку: $S = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

3.10. Властивість. Векторний добуток є *антикомутативним*, тобто $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

◀ Впливає з означення 3.4 та зауваження 3.2. ▶

3.11. Властивість. Векторний добуток є *асоціативним* відносно скаляра, тобто $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \lambda\mathbf{b}$, для будь-якого скаляра λ .

◀ Впливає з означення 3.4. ▶

3.12. Властивість. Векторному добуткові притаманна *дистрибутивність*, тобто $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ та $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.

◀ Доведення цієї властивості буде подано пізніше (див. наслідок 3.23). ▶

3.13. Приклад. Зважаючи на те, що орти $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ та $\mathbf{k}$ декартової системи координат попарно ортогональні, а векторний добуток – антикомутативний, легко вивести наступну «таблицю векторного множення» ортів правої трійки:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}, & \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}, & \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}, \\ \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

§22. Мішаний добуток та подвійний векторний добуток геометричних векторів

• Означення та властивості мішаного добутку

Векторний добуток геометричних векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ є вектором. Розглянемо скалярний добуток цього вектора та вектора $\mathbf{c}$, скориставшись означеннями скалярного та векторного добутків:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos \beta = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| |\mathbf{c}| \sin \alpha \cos \beta, \quad (3.2)$$

де α – кут між векторами $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$, β – кут між вектором $\mathbf{c}$ та вектором $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

3.14. Означення. Число $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ називають мішаним добутком векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ та $\mathbf{c}$.

Мішаний добуток не є принципово новим математичним поняттям, бо процедура його обчислення зводиться до послідовного знаходження скалярного та векторного добутків. Незважаючи на це, вивчення мішаного добутку як окремого математичного об'єкту є дуже доцільним, оскільки він часто зустрічається при розгляді різноманітних задач, і має низку властивостей, що спрощують їх розв'язання.

3.15. Властивість. Мішаний добуток векторів правої трійки є додатним, а лівої – від'ємним.

$$\triangleleft (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos \beta = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| |\mathbf{c}| \sin \alpha \cos \beta,$$

а за означенням векторного добутку кут α не перевищує 180° , тому його синус не може бути від'ємним і знак мішаного добутку визначається знаком $\cos \beta$. Якщо трійка $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ – права, то вектор $\mathbf{c}$ лежить по той самий бік від площини векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$, що й вектор $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, а тому для векторів правої трійки кут β – гострий, а його косинус – додатний. У випадку лівої трійки вектори $\mathbf{c}$ та $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ лежать по різні боки від площини векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$, тому для векторів лівої трійки кут β – тупий, а його косинус – від'ємний. ►

3.16. Властивість. Мішаний добуток $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ векторів правої трійки $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ дорівнює об'єму V паралелепіпеда, побудованого на векторах-співмножниках, зведених до спільного початку.

◀Впливає із формули (3.2), властивості 3.7 та рис. 9. Властивість

3.15 забезпечує виконання нерівності $V > 0$. ►

3.17. Зауваження. Іноді буває зручно користуватися поняттям *орієнтованого паралелепіпеду*, як такого паралелепіпеду, що побудований на орієнтованій трійці векторів. При цьому, паралелепіпед побудований на правій трійці векторів називають

додатним, з огляду на знак мішаного добутку цих векторів. Паралелепіпед, побудований на лівій трійці векторів називають *від'ємним* і умовно приписують йому від'ємний об'єм. Завдяки цьому, властивості 3.15 та 3.16 вдається сформулювати разом: мішаний добуток трьох некопланарних векторів дорівнює об'єму орієнтованого паралелепіпеда, побудованого на векторах-співмножниках.

3.18. Наслідок. Добуток $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ дорівнює об'єму цього ж паралелепіпеда з тією різницею, що тепер величину V виражено через площу грані, побудованої на векторах $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$, та перпендикулярну до неї висоту. Таким чином,

$$V = SH$$

$$S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|, H = |\mathbf{c}| \cos \beta$$

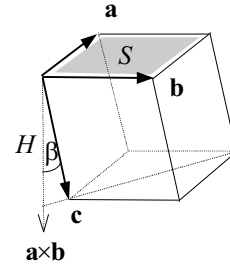


Рис. 9

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \equiv \mathbf{abc}. \quad (3.3)$$

3.19. Властивість. Для мішаного добутку справедливі наступні рівності

$$\mathbf{abc} = \mathbf{cab} = \mathbf{bca} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{bac} = -\mathbf{cba}. \quad (3.4)$$

◀Очевидно з антикомутативності векторного добутку або із зауваження 3.2 та властивості 3.16. ▶

3.20. Властивість. Мішаний добуток дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли вектори-співмножники компланарні.

◀Коли один з векторів нульовий, його можна вважати ортогональним до двох інших, що і доводить твердження теореми. Проведемо доведення для трьох ненульових векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$.

Необхідність: нехай $\mathbf{abc} = 0$. Доведемо, що $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ компланарні. Припустимо обернене. Тоді, $\mathbf{abc} = V \neq 0$.

Достатність: нехай вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ – компланарні. Тоді, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{c}$, а отже, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$. ►

3.21. Властивість. Мішаний добуток є асоціативним відносно скаляра λ , тобто

$$\lambda(\mathbf{abc}) = \lambda\mathbf{abc} = \mathbf{a}\lambda\mathbf{bc} = \mathbf{ab}\lambda\mathbf{c}.$$

◀ Впливає з асоціативності скалярного та векторного добутків відносно скаляра. ►

3.22. Властивість. Мішаний добуток є дистрибутивним, тобто для будь-яких векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ і $\mathbf{d}$ справедливі рівності

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{cd} = \mathbf{acd} + \mathbf{bcd}, \quad \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{d} = \mathbf{abd} + \mathbf{acd}, \quad \mathbf{ab}(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{abc} + \mathbf{abd}.$$

◀ $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{cd} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$. Отже, перша з наведених вище рівностей безпосередньо впливає з доведеної нами раніше дистрибутивності скалярного добутку. Звідси ж впливають і дві інші рівності, якщо записати $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{d} = [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})] \times \mathbf{d}$ та $\mathbf{ab}(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \times [\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d})]$. ►

3.23. Наслідок. Дистрибутивність векторного добутку. Доведемо, що $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

◀ Критерієм рівності векторів є рівність їх координат, а отже, подана векторна рівність рівносильна до трьох скалярних рівностей

$$[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}]_j = (\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c})_j, \quad j = x, y, z.$$

Доведемо першу з них

$$\begin{aligned} [(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}]_x &= [(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}] \cdot \mathbf{i} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{ci} = \mathbf{aci} + \mathbf{bci} \\ &= (\mathbf{ac} + \mathbf{bc})\mathbf{i} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{i} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c})_x. \end{aligned}$$

Дві інші рівності доводяться аналогічно. Рівність

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

не потребує окремого доведення з огляду на антикомутативність векторного добутку. ►

• **Виращення векторного та мішаного добутків за допомогою декартових координат**

Розглянемо два вектори, розкладені по ортах декартової системи координат:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}.$$

Зважаючи на дистрибутивність векторного добутку та його асоціативність відносно скаляра маємо

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_x b_x \mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_x b_y \mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_x b_z \mathbf{i} \times \mathbf{k} + \dots + a_z b_z \mathbf{k} \times \mathbf{k}.$$

Використовуючи «таблицю векторного множення» декартових ортів (3.1), одержуємо вирази

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i}, \quad (3.5)$$

з якого випливає, що

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_x = (a_y b_z - a_z b_y), \quad (3.6)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_y = (a_z b_x - a_x b_z),$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z = (a_x b_y - a_y b_x).$$

Безпосередньою перевіркою легко упевнитися, що векторний добуток (3.4) виражається за допомогою визначника, тобто

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (3.7)$$

Скалярний добуток вектора $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ та вектора $\mathbf{c}$ дорівнює, як ми вже знаємо, сумі попарних добутків декартових координат векторів-співмножників, тому для мішаного добутку векторів справедливій формули

$$\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_x c_x + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_y c_y + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z c_z.$$

Зважаючи на (3.6) бачимо, що ці формули відрізняються від (3.5) лише заміною декартових ортів на координати вектора $\mathbf{c}$. Зробивши таку ж заміну у виразі (3.7), доходимо висновку, що

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (3.8)$$

• **Подвійний векторний добуток та тотожність Лагранжа**

324. Означення. Подвійним векторним добутком векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ називають вектор типу $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ та $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

За означенням векторного добутку 3.4, вектор $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ ортогональний до вектора $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, тобто, лежить у площині векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$, і тому може бути представлений у вигляді їх лінійної комбінації. У подальшому ми доведемо, що коефіцієнти цієї лінійної комбінації дорівнюють $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ та $-\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, а отже,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \quad (3.9)$$

Вектор $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ лежить у площині векторів $\mathbf{b}$ та $\mathbf{c}$ і може бути розкладений по цих векторах за формулою

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (3.10)$$

Більшість студентів запам'ятовує формулу (3.10) «фонетично», як фразу «*абц дорівнює бац мінус цаб*».

У подальшому ми доведемо також справедливості *тотожності Лагранжа*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}, \quad (3.11)$$

яка часто використовується для виконання розрахунків, наприклад, в електродинаміці.

* * *

Проілюструємо важливість поняття подвійного векторного добутку простою, але дуже типовою задачею електродинаміки: електрон, імпульс $\mathbf{p}$ якого відомий, рухається в зовнішньому магнітному полі $\mathbf{H}$; треба знайти повздовжню та поперечну по відношенню до поля складову поля.

Для розв'язання задачі покладемо у співвідношенні (3.9) $\mathbf{a} = \mathbf{p}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{H}$. Одержимо

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{p}H^2.$$

Звідси знаходимо вирази

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_l + \mathbf{p}_t, \quad \mathbf{p}_l = \frac{(\mathbf{p}\mathbf{H})\mathbf{H}}{H^2}, \quad \mathbf{p}_t = -\frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}}{H^2}.$$

Вектор $\mathbf{p}_l$ спрямований вздовж магнітного поля, $\mathbf{p}_t$ – перпендикулярно до нього.

§ 23. Добутки векторів у тривимірному просторі Евкліда

• Означення векторного та мішаного добутоків у $\mathcal{E}_3$

Всі тривимірні простори є *ізоморфними* (у перекладі з грецької – подібними за будовою), тому виникає цілком природне бажання – поширити уявлення про векторний добуток векторів з випадку геометричного простору на тривимірні простори Евкліда довільної природи. Щоб уможливити таке поширення, слід зробити лише один принциповий крок – ввести поняття орієнтованої трійки векторів у просторі, який не є геометричним. Наступні кроки логічно випливатимуть із цього першого. І дійсно ж, у негеометричному просторі не можна вдатися до «правила годинникової стрілки», оскільки важко уявити собі, наприклад, годинник у просторі поліномів степеню не вищого за третій. Тому зробимо наступне: *а)* скористаємося з того, що в просторі Евкліда $\mathcal{E}_3$ існує ортонормований базис $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,3}$ (теорема 2.31); *б)* припишемо трійці ортів $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (а отже, і самому базисові) праву орієнтацію; *в)* розповсюдимо на негеометричні простори Евкліда твердження, сформульовані у зауваженні 3.2, тобто постулюємо, що орієнтованість базису змінюється на протилежну при переставленні двох ортів між собою та при інверсії напрямку одного з них (тоді при циклічному переставленні ортів орієнтованість базису не змінюється); *г)* зважимо на те, що вираз (3.7) встановлює взаємно-однозначну відповідність між векторними добутками геометричних векторів та їх координатами у правому базисі; *д)* пригадаємо, що орієнтованість трійки геометричних векторів легко визначається знаком їх мішаного добутку (властивість 3.15), тобто знаком детермінанта у виразі (3.8); *е)* поширимо вирази (3.7) та (3.8) на випадок негеометричних просторів.

Отже, почнемо виконувати накреслену програму. Розглянемо розклади векторів $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_3$ по ортах *правого ортонормованого базису*¹:

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}^1 + x^2 \mathbf{e}^2 + x^3 \mathbf{e}^3, \quad \mathbf{y} = y^1 \mathbf{e}^1 + y^2 \mathbf{e}^2 + y^3 \mathbf{e}^3.$$

3.25. Означення. Векторним добутком векторів $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ у тривимірному просторі Евкліда $\mathcal{E}_3$ називають вектор $\mathbf{x} \times \mathbf{y} \in \mathcal{E}_3$, що визначається за координатами векторів-співмножників у правому ортонормованому базисі згідно з формулою

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix}. \quad (3.12)$$

3.26. Означення. Мішаним добутком векторів $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ та $\mathbf{z}$ у просторі $\mathcal{E}_3$ називають скаляр $\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z} \in \mathbb{R}$, що визначається формулою

$$\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z} = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix}. \quad (3.13)$$

3.27. Зауваження. Означення 3.25 та 3.26 застосовні і в окремому випадку геометричних векторів.

У наступному параграфі ми доведемо, що означений нами зараз мішаний добуток не змінюється при зміні базису, в якому розкладені вектори-співмножники. Інакше кажучи, мішаний добуток є *інваріантом*, тобто скаляром.

3.28. Означення. Трійку векторів $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{E}_3$ називають правоорієнтованою (*правою*) якщо $\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z} > 0$ і лівоорієнтованою (*лівою*) – якщо $\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z} < 0$.

¹ Нагадаємо: для ортонормованого базису $\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i$, $x^i = x_i$, $y^i = y_i$.

3.29. Зауваження. Для векторів, про які йдеться в попередньому означенні, $\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z} \neq 0$. Це значить, що рядки детермінанта (3.13) лінійно незалежні, тому лінійно незалежні і вектори $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ та $\mathbf{z}$.

• **Властивості векторного добутку двох векторів простору $\mathcal{E}_3$**

Внаслідок означення (3.12) основні властивості векторного добутку у просторі $\mathcal{E}_3$ безпосередньо випливають із властивостей координат векторів, матриць та їх визначників. Тому, ці властивості можна подати без спеціального доведення.

3.30. Властивість. Векторний добуток є антикомутативним, тобто

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_3.$$

3.31. Властивість. Векторний добуток є дистрибутивним, тобто

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{z} + \mathbf{y} \times \mathbf{z},$$

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z},$$

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{E}_3.$$

3.32. Властивість. Векторний добуток є асоціативним відносно скаляра, тобто $\alpha(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{x} \times \alpha\mathbf{y}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_3$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

3.33. Властивість. $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{0}$ тоді й лише тоді, коли вектори $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ лінійно залежні.

3.34. Зауваження. Властивості 3.30 – 3.33 притаманні і геометричним векторам, оскільки колінеарні вектори є лінійно залежними, і навпаки.

• **Властивості мішаного добутку двох векторів простор $\mathcal{E}_3$**

Перелічимо основні властивості мішаного добутку, що випливають з означення (3.13).

3.35. Властивість. $\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z} = \mathbf{z}\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{y}\mathbf{z}\mathbf{x} = -\mathbf{y}\mathbf{x}\mathbf{z} = -\mathbf{z}\mathbf{y}\mathbf{x} = -\mathbf{x}\mathbf{z}\mathbf{y}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{E}_3$.

3.36. Властивість. Мішаний добуток є дистрибутивним, тобто

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{z}\mathbf{u} = \mathbf{x}\mathbf{z}\mathbf{u} + \mathbf{y}\mathbf{z}\mathbf{u}, \mathbf{x}(\mathbf{y} + \mathbf{z})\mathbf{u} = \mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{u} + \mathbf{x}\mathbf{z}\mathbf{u},$$

$$\mathbf{x}\mathbf{y}(\mathbf{z} + \mathbf{u}) = \mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z} + \mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u} \in \mathcal{E}_3.$$

3.37. Властивість. Мішаний добуток є асоціативним відносно скаляра, тобто $\alpha(\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}) = \alpha\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z} = \mathbf{x}\alpha\mathbf{y}\mathbf{z} = \mathbf{x}\mathbf{y}\alpha\mathbf{z}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{E}_3$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

3.38. Властивість. $\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z} = 0$ тоді й лише тоді, коли вектори-співмножники утворюють лінійно залежну систему.

Відзначимо, що вектори базису $\{\mathbf{e}^i\}$ та взаємного до нього базису $\{\mathbf{e}_i\}$ пов'язані між собою наступними співвідношеннями

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3}, \quad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3}, \quad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3},$$

а також,

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3}{\mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2 \mathbf{e}^3}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e}^3 \times \mathbf{e}^1}{\mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2 \mathbf{e}^3}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2}{\mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2 \mathbf{e}^3}.$$

◀Дійсно, з поданих співвідношень миттєво одержуємо рівності

$\mathbf{e}_i \mathbf{e}^j = \mathbf{e}^j \mathbf{e}_i = \delta_i^j$, які є означенням взаємних базисів (порівняй з (2.11)).▶

3.39. Зауваження. Властивості 3.35–3.38 притаманні, як і повинно бути, геометричним векторам, оскільки компланарні вектори є лінійно залежними, і навпаки.

• Перехід від одного орієнтованого базису до іншого

Як ми бачили у першому розділі цього курсу, перехід від базису $\{\mathbf{e}_i\}$ до базису $\{\mathbf{e}'_i\}$ характеризується матрицю переходу T з елементами t_i^j і здійснюється за допомогою формули $\mathbf{e}'_i = t_i^j \mathbf{e}_j$, або еквівалентного до неї матричного співвідношення (1.6). Елементи матриці переходу є координатами векторів $\mathbf{e}'_i$ у базисі $\{\mathbf{e}_i\}$ (властивість 1.56).

3.40. Властивість. Визначник матриці переходу між двома орієнтованими базисами є додатним, коли орієнтованість обох базисів однакова, і від'ємним, коли базиси мають різну орієнтацію.

◀ Спочатку доведемо дане твердження для випадку, коли базис $\{\mathbf{e}_i\}$ – правий ортонормований. В такому разі він є тим базисом, про який йдеться в означенні 3.25, тому, згідно з (3.13),

$$\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_3 = \begin{vmatrix} t_1^1 & t_1^2 & t_1^3 \\ t_2^1 & t_2^2 & t_2^3 \\ t_3^1 & t_3^2 & t_3^3 \end{vmatrix} = |T|.$$

Якщо базис $\{\mathbf{e}'_i\}$ орієнтований однаково з $\{\mathbf{e}_i\}$, тобто також правий, $\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_3 > 0$, а отже, $|T| > 0$. Якщо орієнтація базисів $\{\mathbf{e}'_i\}$ та $\{\mathbf{e}_i\}$ різна, то $\{\mathbf{e}'_i\}$ – лівий, а тому $|T| < 0$, що й доводить твердження теореми.

Нехай тепер вихідний базис є правим, але не є ортонормованим. Перейдемо від цього базису до допоміжного правого ортонормованого базису $\{\mathbf{e}''_i\}$. Цей перехід характеризується матрицею T^{-1} , причому ми вже довели, що $|T| > 0$, а тому $|T^{-1}| = 1/|T| > 0$. Тепер здійснімо перехід від правого ортонормованого базису $\{\mathbf{e}''_i\}$ до базису $\{\mathbf{e}'_i\}$ за допомогою відповідної матриці T' . Нами вже доведено, що $|T'| > 0$, коли $\{\mathbf{e}'_i\}$ – правий, і $|T'| < 0$, коли він лівий. Визначник матриці переходу від $\{\mathbf{e}_i\}$ до $\{\mathbf{e}'_i\}$ дорівнює $|T'| \cdot |T^{-1}|$ і його знак збігається зі знаком $|T'|$, тобто $|T'| \cdot |T^{-1}| > 0$, коли $\{\mathbf{e}'_i\}$ – правий і $|T'| \cdot |T^{-1}| < 0$, коли він лівий, що й доводить теорему.

Доведення теореми для лівого вихідного базису цілком подібне до попереднього, з тією відмінністю, що визначник переходу до допоміжного базису – від'ємний. Читачеві може бути корисним провести це доведення самотужки. ▶

§ 24. Обчислення мішаних і векторних добутоків векторів, заданих у довільних базисах

При розв'язанні фізичних та технічних задач вибір базису буває обумовлений різними обставинами (розташуванням приладів, формою досліджуваного фізичного тіла, просторовою симетрією фізичного середовища, виглядом математичного рівняння, що описує фізичне явище і, водночас, визначає добірку розв'язків, які потім вважаються базисом у просторі функцій). Тому іноді доводиться користуватися неортогональними базисами. У цьому розділі буде доведено низку співвідношень, які дозволяють обчислювати добуток векторів, заданих координатами у довільному *правому* базисі $\{\mathbf{e}_i\}$. При цьому, як і раніше, будемо

позначати літерою g визначник матриці Грама базису $\{\mathbf{e}_i\}$.

341. Теорема. Мішаний добуток векторів $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{E}_3$, заданих координатами x^i, y^i, z^i у довільному *правому* базисі $\{\mathbf{e}_i\}$ визначається формулою

$$\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z} = \sqrt{g} \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix}. \quad (3.14)$$

◀Для доведення теореми розглянемо допоміжний *правий* ортонормований базис $\{\mathbf{e}'_i\}$. У цьому базисі мішаний добуток векторів визначається вже відомою нам формулою

$$\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z} = \begin{vmatrix} x'^1 & x'^2 & x'^3 \\ y'^1 & y'^2 & y'^3 \\ z'^1 & z'^2 & z'^3 \end{vmatrix},$$

яку, зважаючи на (1.10) і додержуючись домовленості Ейнштейна, можна переписати у вигляді

$$\mathbf{xyz} = \begin{vmatrix} \tilde{t}_i^1 x^i & \tilde{t}_i^2 x^i & \tilde{t}_i^3 x^i \\ \tilde{t}_i^1 y^i & \tilde{t}_i^2 y^i & \tilde{t}_i^3 y^i \\ \tilde{t}_i^1 z^i & \tilde{t}_i^2 z^i & \tilde{t}_i^3 z^i \end{vmatrix},$$

де $\tilde{t}_i^j$ – елементи матриці T^{-1} , оберненої до матриці переходу від $\{\mathbf{e}_i\}$ до $\{\mathbf{e}'_i\}$. Останній вираз показує, що згідно до правил матричного множення та властивостей визначників

$$\mathbf{xyz} = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \tilde{t}_1^1 & \tilde{t}_1^2 & \tilde{t}_1^3 \\ \tilde{t}_2^1 & \tilde{t}_2^2 & \tilde{t}_2^3 \\ \tilde{t}_3^1 & \tilde{t}_3^2 & \tilde{t}_3^3 \end{vmatrix}.$$

Беручи до уваги, що матриця T^{-1} є матрицею переходу від ортонормованого базису до довільного, і використовуючи властивість 2.39, одержуємо рівності

$$\begin{vmatrix} \tilde{t}_1^1 & \tilde{t}_1^2 & \tilde{t}_1^3 \\ \tilde{t}_2^1 & \tilde{t}_2^2 & \tilde{t}_2^3 \\ \tilde{t}_3^1 & \tilde{t}_3^2 & \tilde{t}_3^3 \end{vmatrix} = |T^{-1}| = \sqrt{g},$$

які і довершують доведення теореми².►

3.42. Наслідок. Величина мішаного добутку векторів не залежить від вибору базису, тобто є інваріантом.

◀ Безпосередньо випливає з теореми 3.41, в якій встановлено, що вираз (3.14) є справедливим для *будь-якого* базису.►

3.43. Теорема. Векторний добуток векторів $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_3$, заданих координатами x^i, y^i у довільному правому базисі $\{\mathbf{e}_i\}$, визначається формулою

² Оскільки і вихідний і допоміжний базис – праві, $|T^{-1}| > 0$, а отже, $|T^{-1}| = +\sqrt{g}$.

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \sqrt{g} \begin{vmatrix} \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix}. \quad (3.15)$$

◀З одного боку, згідно з (2.7) та (2.21, а)

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \mathbf{y} \mathbf{z} &= \mathbf{z}(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = g_{ij} z^i (\mathbf{x} \times \mathbf{y})^j = z^i (\mathbf{x} \times \mathbf{y})_i = \\ &= z^1 (\mathbf{x} \times \mathbf{y})_1 + z^2 (\mathbf{x} \times \mathbf{y})_2 + z^3 (\mathbf{x} \times \mathbf{y})_3. \end{aligned}$$

З іншого боку, розкриття визначника у вже доведеній нами рівності (3.14) за елементами останнього рядочку дає

$$\mathbf{x} \mathbf{y} \mathbf{z} = \sqrt{g} \cdot z^1 \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ y^2 & y^3 \end{vmatrix} - \sqrt{g} \cdot z^2 \begin{vmatrix} x^1 & x^3 \\ y^1 & y^3 \end{vmatrix} + \sqrt{g} \cdot z^3 \begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ y^1 & y^2 \end{vmatrix}.$$

Порівняння двох останніх виразів показує, що

$$\begin{aligned} &z^1 (\mathbf{x} \times \mathbf{y})_1 + z^2 (\mathbf{x} \times \mathbf{y})_2 + z^3 (\mathbf{x} \times \mathbf{y})_3 \\ &= \sqrt{g} \cdot z^1 \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ y^2 & y^3 \end{vmatrix} - \sqrt{g} \cdot z^2 \begin{vmatrix} x^1 & x^3 \\ y^1 & y^3 \end{vmatrix} + \sqrt{g} \cdot z^3 \begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ y^1 & y^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Обираючи в якості вектора $\mathbf{z}$ вектор $\mathbf{e}_1$, маємо $z^2 = z^3 = 0$, а отже,

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_1 = \sqrt{g} \cdot \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ y^2 & y^3 \end{vmatrix}.$$

Обираючи по черзі $\mathbf{z} = \mathbf{e}_2$ та $\mathbf{z} = \mathbf{e}_3$, аналогічно попередньому маємо

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \times \mathbf{y})_2 &= -\sqrt{g} \cdot \begin{vmatrix} x^1 & x^3 \\ y^1 & y^3 \end{vmatrix}, \\ (\mathbf{x} \times \mathbf{y})_3 &= \sqrt{g} \cdot \begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ y^1 & y^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Тепер можна записати розклад векторного добутку по векторах базису у вигляді

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \sqrt{g} \cdot \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ y^2 & y^3 \end{vmatrix} \mathbf{e}^1 - \sqrt{g} \cdot \begin{vmatrix} x^1 & x^3 \\ y^1 & y^3 \end{vmatrix} \mathbf{e}^2 + \sqrt{g} \cdot \begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ y^1 & y^2 \end{vmatrix} \mathbf{e}^3,$$

який доводить, що векторний добуток векторів $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ є визначником (3.15) розкритим за елементами першого рядочка.►

3.44. Наслідок. Вираз (3.15) є інваріантним відносно заміни одного базису на інший базис *такої ж орієнтованості*. При заміні правого базису на лівий у (3.15) перед визначником слід поставити знак "мінус".

◀ Перша частина твердження безпосередньо випливає з теореми 3.43, в якій встановлено, що вираз (3.15) є справедливим для *будь-якого* правого базису. Друга частина доводиться тим, що лівий базис можна перетворити на правий зміною напрямку всіх трьох базисних векторів, тобто заміною знаку всіх елементів першого рядочка визначника (3.15); відомо, що при цьому визначник змінює знак.►

3.45. Зауваження. Матриця Грама ортонормованого базису дорівнює одиничній матриці, для якої $g = 1$. Таким чином, формули (3.12) та (3.13) є окремими випадками формул (3.15) та (3.14), відповідно. Наприкінці параграфу наведемо низку корисних формул, що випливають з виразів (3.14), (3.15) та формул (2.14), (2.21) та (2.22)

$$\begin{aligned} \mathbf{xyz} &= \sqrt{g} \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\ &= \sqrt{g} \begin{vmatrix} g^{1i} x_i & g^{2i} x_i & g^{3i} x_i \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} g_{1i} x^i & g_{2i} x^i & g_{3i} x^i \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \times \mathbf{y} &= \sqrt{g} \begin{vmatrix} \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\
&= \sqrt{g} \begin{vmatrix} g^{1i} \mathbf{e}_i & g^{2i} \mathbf{e}_i & g^{3i} \mathbf{e}_i \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} g_{1i} \mathbf{e}^i & g_{2i} \mathbf{e}^i & g_{3i} \mathbf{e}^i \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\
&= \sqrt{g} \begin{vmatrix} \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \\ g^{1i} x_i & g^{2i} x_i & g^{3i} x_i \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ g_{1i} x^i & g_{2i} x^i & g_{3i} x^i \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

§ 25. Символи Леві – Чивіта

• Означення символів Леві – Чивіта

Символи Леві – Чивіта дуже природно виникають при розгляді «Таблиці векторного множення» для ортів ортонормованого базису $\{\mathbf{e}_i\}$ у просторі $\mathcal{E}_3$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= -\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 &= -\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2, \\
\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 &= -\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = 0.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Всю цю таблицю можна записати у вигляді однієї формули

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k = \varepsilon_{ikl} \mathbf{e}_l,$$

в якій введено величини ε_{ikl} , означені наступним чином:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{123} &= \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = 1, & \varepsilon_{213} &= \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1, \\
\varepsilon_{iik} &= \varepsilon_{iki} = \varepsilon_{kii} = 0, & \forall i, k &= \overline{1,3}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Саме величини (3.19) й називають символами Леві – Чивіта. Надамо вербальне означення цих символів.

3.46. Означення. Символи Леві – Чивіта (абсолютно кососиметричні символи) це впорядкована сукупність двадцяти семи чисел ε_{ikl} , з яких двадцять одне дорівнює нулю (коли не всі індекси різні), а шість дорівнюють $(-1)^n$, де n – кількість переставлень двох індексів (першого з другим чи з третім, або першого з третім), які треба зробити, щоб розташувати індекси $i \neq k \neq l$ в «правильній» послідовності 123.

3.47. Зауваження. Для читачів знайомих з основами тензорного числення зауважимо, що величини $\sqrt{g}\varepsilon_{ijk}$ є складовими тричі коваріантного, а $(1/\sqrt{g})\varepsilon^{ijk}$ – тричі контраваріантного абсолютно кососиметричного тензора.

Покажемо, яким чином з (3.19) можна одержати (3.18). Наприклад, для векторного добутку ортів $\mathbf{e}_3$ та $\mathbf{e}_2$ маємо

$$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = \varepsilon_{321}\mathbf{e}_1 + \varepsilon_{322}\mathbf{e}_2 + \varepsilon_{323}\mathbf{e}_3 = -1 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + 0 \cdot \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1.$$

Векторні добутки інших ортів обчислюються аналогічно.

• Властивості символів Леві – Чивіта

Перелічимо властивості символів Леві – Чивіта, які мають важливі наслідки, що часто спрощують доведення алгебраїчних співвідношень та теоретичні розрахунки у фізиці.

3.48. Властивість. $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = \varepsilon_{jki} = -\varepsilon_{ikj}$, $\forall i, j, k = \overline{1,3}$.

◀Вказана властивість безпосередньо випливає з (3.19) та рівності $0 = -0$. ▶

3.49. Властивість.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{kmn} &= \delta_i^m \delta_j^n - \delta_i^n \delta_j^m = \begin{vmatrix} \delta_i^m & \delta_i^n \\ \delta_j^m & \delta_j^n \end{vmatrix}, \\ \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{kmn} &= \delta_m^i \delta_n^j - \delta_n^i \delta_m^j = \begin{vmatrix} \delta_m^i & \delta_n^i \\ \delta_m^j & \delta_n^j \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

◀Доводиться безпосередньою перевіркою. ▶

3.50. Властивість. Будь-який визначник третього порядку може бути представлений у вигляді

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_1^i a_2^j a_3^k = \varepsilon^{ijk} a_i^1 a_j^2 a_k^3. \quad (3.20)$$

◀Доводиться безпосередньою перевіркою.▶

• **Запис векторного, мішаного та подвійного векторного добутоків за допомогою символів Леві – Чивіта**

Наведемо низку дуже корисних і часто застосовних алгебраїчних співвідношень, що є наслідками основних властивостей символів Леві – Чивіта.

3.51. Наслідок. З виразів (3.14) та (3.20) випливає, що

$$\mathbf{x} \mathbf{y} \mathbf{z} = \sqrt{g} \varepsilon_{ijk} x^i y^j z^k. \quad (3.21)$$

3.52. Наслідок. З виразів (3.15) та (3.20) випливає, що

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \sqrt{g} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}^i x^j y^k. \quad (3.22)$$

3.53. Наслідок. Вирази (3.16) можна представити в еквівалентній формі

$$\mathbf{x} \mathbf{y} \mathbf{z} = \sqrt{g} \varepsilon_{ijk} x^i y^j z^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk} x_i y_j z_k = \sqrt{g} \varepsilon_{ijk} g^{im} x_m y^j z^k. \quad (3.23)$$

3.54. Наслідок. Вирази (3.17) можна представити в еквівалентній формі

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times \mathbf{y} &= \sqrt{g} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}^i x^j y^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk} \mathbf{e}_i x_j y_k = \sqrt{g} \varepsilon_{ijk} g^{im} \mathbf{e}_m x^j y^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk} g_{im} \mathbf{e}^m x_j y_k = \sqrt{g} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}^i g^{jm} x_m y^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk} \mathbf{e}_i g_{jm} x^m y_k, \end{aligned}$$

а отже, координати векторного добутку можна знаходити за формулами

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_i = \sqrt{g} \varepsilon_{ijk} x^j y^k, \quad (\mathbf{x} \times \mathbf{y})^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk} x_j y_k. \quad (3.24)$$

3.55. Наслідок. Вектор $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z})$ може бути розкладений по векторах $\mathbf{y}$ та $\mathbf{z}$ за формулою $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \mathbf{y}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) - \mathbf{z}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$.

◀Доведення даного твердження можна вважати самостійною вправою, спрямованою на засвоєння навичок роботи з символами Леві-Чивіта. У правильності виконання цієї вправи читач може упевнитися проаналізувавши низку тотожних перетворень:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) &= \sqrt{g} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}^i x^j (\mathbf{y} \times \mathbf{z})^k = \sqrt{g} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}^i x^j \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{kmn} y_m z_n \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{kmn} \mathbf{e}^i x^j y_m z_n = (\delta_i^m \delta_j^n - \delta_i^n \delta_j^m) \mathbf{e}^i x^j y_m z_n = \mathbf{e}^i x^j y_i z_j - \mathbf{e}^i x^j y_j z_i \\ &= (\mathbf{e}^i y_i) (x^j z_j) - (\mathbf{e}^i z_i) (x^j y_j) = \mathbf{y}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) - \mathbf{z}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}). \blacktriangleright \end{aligned}$$

3.56 Наслідок. Для векторів простору $\mathcal{E}_3$ є справедливою тотожність Лагранжа $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{u}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$.

◀Доводиться низкою тотожних алгебраїчних перетворень

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{u}) &= (\mathbf{x} \times \mathbf{y})^i (\mathbf{z} \times \mathbf{u})_i = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk} x_j y_k \sqrt{g} \varepsilon_{imn} z^m u^n \\ &= \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{imn} x_j y_k z^m u^n = -\varepsilon^{jik} \varepsilon_{imn} x_j y_k z^m u^n = \varepsilon^{jki} \varepsilon_{imn} x_j y_k z^m u^n \\ &= (\delta_m^j \delta_n^k - \delta_n^j \delta_m^k) x_j y_k z^m u^n = (x_j z^j) (y_k u^k) - (x_j u^j) (y_k z^k) \\ &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}). \blacktriangleright \end{aligned}$$

3.57. Зауваження. Поняття векторного добутку узагальнюється на випадок n -вимірного простору Евкліда. Нехай x_j^i – координати векторів

$\mathbf{x}_j \in \mathcal{E}_n \quad (j = \overline{1, n-1})$ в базисі $\{\mathbf{e}_i\}_{i=\overline{1, n}}$. Тоді векторним добутком векторів $\mathbf{x}_j$ називають вектор

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \times \dots \times \mathbf{x}_{n-1} = \sqrt{g} \begin{vmatrix} \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \dots & \mathbf{e}^n \\ x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^1 & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^n \end{vmatrix}.$$

3.58. Зауваження. Вектор $\mathbf{A} = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}^i x^j y^k$, який лише множителем $1/\sqrt{g}$ відрізняється від векторного добутку $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ у просторі $\mathcal{E}_3$, називають аксіальним вектором. Прикладами фізичних величин, які описуються за допомогою аксіальних векторів, є механічний та магнітний моменти, кутова частота обертання гіроскопа тощо.