

Частина 2

Векторні простори зі скалярними добутками

§ 14. Скалярний добуток геометричних векторів

Скалярний добуток векторів геометричного простору вивчають у середній школі, тому зараз доцільно лише нагадати деякі означення та вказати властивості цього добутку.

2.1. Означення. Скалярним добутком векторів **a** та **b** називають дійсне число **a · b**,¹ яке дорівнює добутку модулів **|a|** та **|b|** цих векторів на косинус кута φ ² між ними:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi. \quad (2.1)$$

Згідно з наданим означенням скалярний добуток геометричних векторів дорівнює нулю лише у двох випадках – по-перше, коли модуль (довжина) принаймні одного з векторів-співмножників дорівнює нулю (такий вектор є геометричною точкою, його вважають нульовим елементом простору геометричних векторів), а по-друге, коли кут між векторами дорівнює 90° . З означення 2.1 випливають також наступні властивості скалярного добутку.

2.2. Властивість. Скалярний добуток є комутативним, тобто для будь-яких векторів **a** та **b** справджується рівність **a · b = b · a**.

2.3. Властивість. Скалярний добуток є дистрибутивним, тобто для будь-яких векторів **a**, **b** та **c** справджується рівність

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}.$$

¹ Крапку у позначенні скалярного добутку будемо ставити обов'язково, оскільки запис **ab** часто використовують для позначення іншого алгебраїчного об'єкта.

² Звичайно кут φ означається як найменший з кутів між векторами **a** та **b** зведеними до спільного початку, а отже, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

2.4. Властивість. Скалярний добуток є асоціативним, тобто для будь-яких векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ і довільного дійсного числа λ мають місце рівності

$$\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}).$$

2.5. Властивість. Для будь-якого ненульового вектора $\mathbf{a}$ є справедливою нерівність $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$.

* * *

2.6. Означення. Ортом ненульового вектора $\mathbf{a}$ називають вектор одиничної довжини $\mathbf{e}_a$ напрямлений в один бік з вектором $\mathbf{a}$. Отже,

$$\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

2.7. Означення. Проекцією вектора $\mathbf{b}$ на напрямок ненульового вектора $\mathbf{a}$ називають число b_a , що позначається формулою

$$b_a \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

Проекцію вектора на певний напрямок називають також його складовою (компонентою) вздовж цього напрямку. Слід пам'ятати, однак, що іноді складовою вектора $\mathbf{b}$ вздовж напрямку вектора $\mathbf{a}$ називають вектор $b_a \mathbf{e}_a$.

Тепер розглянемо праву трійку попарно перпендикулярних ортів $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ та $\mathbf{k}$. Ці орти утворюють базис у геометричному просторі (див. § 9), завдяки чому, будь-які вектори $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ можуть бути розкладені по цих ортах:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}.$$

Для розв'язання математичних, фізичних та технічних задач дуже часто стають у пригоді вказані нижче властивості координат та скалярних добутоків векторів.

2.8. Властивість. Координати a_x, a_y, a_z будь-якого вектора $\mathbf{a}$ дорівнюють скалярним добуткам цього вектора на відповідні орти, тобто

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}, \quad a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}, \quad a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}.$$

2.9. Властивість. Скалярний добуток векторів дорівнює сумі добутоків відповідних координат, тобто

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

2.10. Властивість. З означення скалярного добутку та попередньої властивості випливає, що ³

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}.$$

2.11. Властивість. Кут φ між векторами $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ пов'язаний зі скалярним добутком цих векторів та їх координатами у такий спосіб:

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2} \sqrt{(b_x)^2 + (b_y)^2 + (b_z)^2}}.$$

2.12. Означення. Напрямними косинусами вектора $\mathbf{a}$ в базисі $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ називають косинуси кутів α, β, γ між цим вектором і ортами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, відповідно.

Напрямні косинуси слід обчислювати за формулами:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}},$$

які безпосередньо впливають з властивості 2.11.

§ 15. Простір Евкліда

У багатьох розділах математики та фізики дуже важливу роль відіграє поняття скалярного добутку в просторах векторів

³ Щоб відрізнити показники степенів від верхніх індексів, домовимося, що тут і надалі запис $(\dots)^m$ означає вираз в дужках підведений у степінь m .

негеометричної природи, або, навіть, у просторах вимірності $n > 3$. Цілком очевидно, що означення 2.1 скалярного добутку геометричних векторів не можна безпосередньо поширити на випадок багатовимірних просторів, оскільки воно базується на фізично-інтуїтивних поняттях відстані між точками геометричного простору та кута між двома напрямками у просторі. Наполегливі спроби подумки уявити собі або виміряти за допомогою транспортира, наприклад, кут між напрямками двох векторів 4-імпульсу (див. § 13) приречені на невдачу, і навіть, небезпечні для психіки. Тому в теорії лінійних просторів обрано інший шлях розгляду скалярного добутку векторів: скалярний добуток означається *аксіоматичним* шляхом, як числова функція векторів n -вимірного простору, на яку поширюються властивості 2.2 – 2.5 "звичайного" скалярного добутку. Після цього довжина вектора і кут між векторами означаються *формально* як величини, яким притаманні властивості аналогічні до 2.10 і 2.11.

Аксіоматичні означення скалярного добутку в дійсному та комплексному просторі хоч і подібні одне до одного, але дещо відрізняються. Зараз обмежимося розглядом дійсних просторів.

2.13. Означення. Дійсний n -вимірний простір $\mathcal{L}_n$ називають n -вимірним *простором Евкліда* і позначають $\mathcal{E}_n$, коли в ньому означена операція скалярного добутку, тобто, будь-яким векторам $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ поставлено у відповідність дійсне число $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ і при цьому є виконаними наступні вимоги (аксіоми):

- 1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_n \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x},$
- 2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{E}_n \quad (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z},$
- 3) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_n, \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \alpha (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}),$
- 4) $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} (\mathbf{x} \in \mathcal{E}_n) \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0.$

З аксіом 1) – 4) випливає низка простіших наслідків.

2.14. Наслідок. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{E}_n \quad \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$.

◀ Випливає з 1) і 2). ▶

2.15. Наслідок. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_n, \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \mathbf{x} \cdot \alpha \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$.

◀ Випливає з 1) і 3). ▶

2.16. Наслідок. $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}_n \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{0} = 0$.

◀ Згідно з наслідком 1.19 з означення векторного простору покладемо $\mathbf{0} = 0\mathbf{x}$. Тоді $\mathbf{x} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{x} \cdot 0\mathbf{x} = \{3\} = 0(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) = 0$. ▶

• Приклади просторів Евкліда

2.17. Приклад. Якщо в просторі геометричних векторів обрано одиницю виміру довжини, формула (2.1) ставить у відповідність кожній парі векторів дійсне число. Оскільки властивості 2.2 – 2.5 є окремим випадком аксіом 1) – 4), геометричний простір з обраною в ньому одиницею виміру довжини є простором Евкліда.

2.18. Приклад. Кожним двом елементам $|x\rangle$ та $|y\rangle$ арифметичного простору (див. приклад 1.45) відповідає матричний добуток $\langle x|y\rangle = x^i y^i$ ($i = \overline{1, n}$). Отже, операція матричного множення встановлює відповідність між парами елементів арифметичного простору та числами $\langle x|y\rangle$. Легко впевнитися, що ця операція задовольняє вимогам 1) – 4), а отже, числа $\langle x|y\rangle$ є скалярними добутками елементів арифметичного простору, а сам простір є простором Евкліда.

2.19. Приклад. Скалярним добутком елементів $f(\xi)$, $g(\xi)$ простору функцій неперервних на відрізку $[\xi_1, \xi_2]$ можна вважати інтеграл

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(\xi)g(\xi)d\xi \equiv f \cdot g.$$

Справедливість аксіом 1) – 4) безпосередньо впливає з властивостей визначеного інтеграла. Отже, простір функцій неперервних на відрізки $[\xi_1, \xi_2]$ є простором Евкліда.

• Довжини векторів та кути між ними

Поглиблюючи аналогію між простором геометричних векторів і будь-яким простором Евкліда, дамо наступні означення.

2.20. Означення. Довжиною вектора $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_n$ назвемо число $\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \equiv |\mathbf{x}|$.

Згідно з аксіомою 4) із означення простору Евкліда довжина (модуль) ненульового вектора має бути додатним дійсним числом, а тому, в даному означенні мається на увазі арифметичне значення квадратного кореня. З наслідку 2.16 випливає, що довжина вектора дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли він нульовий.

2.21. Означення. Кутом між векторами $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ простору $\mathcal{E}_n$ назвемо число φ , яке є розв'язком рівняння

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|}. \quad (2.2)$$

Оскільки, косинус кута за модулем не може перевищувати одиницю, **2.22. Означення.** буде коректним лише тоді, коли ми доведемо, що скалярний добуток будь-яких векторів простору $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ не перевищує за модулем добутку їх модулів. Зважаючи на означення 2.20 цю вимогу формулюють у вигляді нерівності

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}), \quad (2.3)$$

історично пов'язаної з іменами Шварца, Коші та Буняковського.

• Доведення нерівності Коші – Буняковського

◀ Для $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ виконання нерівності Коші – Буняковського (2.3) є очевидним, тому проведемо подальше доведення, вважаючи вектор $\mathbf{y}$ ненульовим. Розглянемо вектор $\mathbf{z} = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{y})\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{y}$. За аксіомою 4) означення скалярного добутку та наслідку 2.16 маємо, що $\mathbf{z} \cdot \mathbf{z} \geq 0$. Використовуючи аксіоми 1) та 2) одержуємо умову

$\mathbf{z} \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}) \{ (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \} \geq 0$, з якої безпосередньо випливає нерівність (2.3).►

2.23. Зауваження. Рівність у співвідношенні (2.3) має місце тоді й лише тоді, коли вектори $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ лінійно залежні (У подальшому ми доведемо теорему, що включає дане твердження в як окремий випадок, тому зараз приймемо його без доведення).

•Нерівність трикутника

З нерівності Коші – Буняковського випливає ще одна проста і корисна нерівність. Її записують у вигляді

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}| \quad (2.4)$$

ї називають нерівністю трикутника, оскільки в окремому випадку геометричних векторів вона показує, що сторона трикутника менше суми двох інших його сторін.

◀ Справедливість нерівності трикутника випливає з наступного ланцюжка алгебраїчних перетворень, що базуються на властивостях скалярного добутку та нерівності (2.3):

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2 \leq |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 \\ &= (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2. \end{aligned}$$

проведені перетворення показують, що знак рівності в (2.4) має місце тоді й лише тоді, коли $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$, тобто, коли кут між векторами $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ дорівнює нулю.

§ 16. Ортонормовані системи векторів

2.24. Означення. Вектори $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ називають ортогональними (або перпендикулярними) якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Формула (2.2) показує, що кут між ненульовими ортогональними векторами $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ дорівнює 90° , як це і повинно бути. Коли хоч один з векторів дорівнює нулю, права частина рівняння (2.2) втрачає зміст, але

дане вище означення охоплює також і цей випадок: оскільки нульовий вектор не має певного напрямку, його вважають ортогональним будь-якому вектору.

2.25. Властивість. Лише нульовий вектор є ортогональним будь-якому вектору.

◀ Якщо $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0, \forall \mathbf{y}$, то це має справджуватись зокрема і для $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Але $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ тоді й лише тоді, коли вектор $\mathbf{x}$ має нульову довжину, тобто, є нульовим вектором. ▶

• Символи Кронекера⁴

2.26. Означення. Символами Кронекера $\delta_{ij} (i, j = \overline{1, k})$ називають величини, що визначаються такими рівностями:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \quad (2.5)$$

Зручно вважати, що δ_{ij} є елементами одиничної матриці порядку k . Надалі, в залежності від ситуації, ми будемо розташовувати індекси символів Кронекера або знизу (δ_{ij}), або зверху (δ^{ij}), або один знизу, а інший зверху (δ_j^i).

2.27. Означення. Систему k векторів $\{\mathbf{e}_i\}_{i=\overline{1, k}} (k \leq n)$ простору $\mathcal{E}_n$ називають ортонормованою, коли $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$.

2.28. Властивість. Вектори ортонормованої системи лінійно незалежні

◀ Щоб довести цю властивість, досить довести, що будь-яка нульова лінійна комбінація векторів ортонормованої системи є тривіальною. Отже, покладемо $\alpha^i \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$, і доведемо, що в такому разі $\alpha^i = 0, \forall i$. Для цього зауважимо, що

⁴ Л. Кронекер – німецький математик (1823 – 1891)

$$\alpha^i \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha^i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{0} \cdot \mathbf{e}_j \Rightarrow \alpha^i \delta_j^i = 0, \forall j.$$

Ліва частина останньої рівності є сумою, в якій не є нулем лише доданок з $i = j$. Цей доданок дорівнює α^j , а отже, $\alpha^j = 0, \forall j$. ►

2.29. Властивість. З векторів будь-якої лінійно незалежної системи $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,k}}$ можна побудувати лінійні комбінації $\{\mathbf{e}_i\}_{i=\overline{1,k}}$, які є ортонормованою системою векторів.

◀ Доведемо дане твердження за методом математичної індукції.

1) Оскільки, вектори системи $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,k}}$ лінійно незалежні, серед них нема нульового вектора, а отже, в якості першого вектора ортонормованої системи можна обрати $\mathbf{e}_1 = |\mathbf{x}_1|^{-1} \mathbf{x}_1$.

2) Припустимо, що вдалося побудувати ортонормовану систему векторів $\{\mathbf{e}_s\}_{s=\overline{1,m}}$ ($1 < m < k$). Доведемо, що з векторів $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,k}}$ можна побудувати орт $\mathbf{e}_{m+1}$ перпендикулярний до всіх ортів системи $\{\mathbf{e}_s\}_{s=\overline{1,m}}$.

Будемо шукати його у вигляді $\mathbf{e}_{m+1} = \alpha \mathbf{l}_{m+1}$, де

$$\mathbf{l}_{m+1} = \mathbf{x}_{m+1} - \sum_{s=1}^m (\mathbf{x}_{m+1} \cdot \mathbf{e}_s) \mathbf{e}_s.$$

Оскільки всі вектори $\{\mathbf{e}_s\}_{s=\overline{1,m}}$ є лінійними комбінаціями векторів $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,m}}$, то й $\mathbf{e}_{m+1}$ є лінійною комбінацією векторів $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,m+1}}$. Тепер зазначимо, що а) якщо $\alpha \neq 0$, то вектор $\mathbf{e}_{m+1} \neq \mathbf{0}$ (рівність його нулю вказувала б на існування нетривіальної нульової комбінації $\mathbf{l}_{m+1}$ лінійно незалежних векторів $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,m+1}}$); б) завжди можна обрати $\alpha = |\mathbf{l}_{m+1}|^{-1}$, щоб було $|\mathbf{e}_{m+1}| = 1$, тобто щоб $\mathbf{e}_{m+1}$ був ортом; в) $\mathbf{e}_{m+1} \cdot \mathbf{e}_s = 0, (s = \overline{1,m})$, тому що

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{m+1} \cdot \mathbf{e}_s &= |\mathbf{l}_{m+1}|^{-1} \left\{ \mathbf{e}_{m+1} \cdot \mathbf{e}_f - \sum_{s=1}^m (\mathbf{e}_{m+1} \cdot \mathbf{e}_s) (\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_f) \right\} = \\ &= |\mathbf{l}_{m+1}|^{-1} \left\{ \mathbf{e}_{m+1} \cdot \mathbf{e}_f - \sum_{s=1}^m (\mathbf{e}_{m+1} \cdot \mathbf{e}_s) \delta_{sf} \right\} = |\mathbf{l}_{m+1}|^{-1} \left\{ \mathbf{e}_{m+1} \cdot \mathbf{e}_f - \mathbf{e}_{m+1} \cdot \mathbf{e}_f \right\} = 0. \end{aligned}$$

Із тверджень а)–в) випливає, що існує ортонормована система $\{\mathbf{e}_s\}_{s=\overline{1, m+1}}$, а отже, логічну схему математичної індукції завершено. ►

2.30. Означення. Базис у просторі $\mathcal{E}_n$ називають ортонормованим, якщо його вектори утворюють ортонормовану систему.

2.31. Теорема. У будь-якому просторі Евкліда $\mathcal{E}_n$ існує ортонормований базис.

◀ В $\mathcal{E}_n$, як і в кожному просторі вимірності n , існує n лінійно незалежних векторів. Згідно зі щойно доведеною властивістю, із цих векторів можна утворити ортонормовану систему $\{\mathbf{e}_s\}_{s=\overline{1, n}}$, яка за означеннями 1.43 та 2.30 є ортонормованим базисом. ►

• Процес ортогоналізації

2.32. Означення. Процесом ортогоналізації називають процес (алгоритм) побудови ортонормованої системи $\{\mathbf{e}_i\}_{i=\overline{1, k}}$ з наданих лінійно незалежних векторів $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1, k}}$.

Суть процесу ортогоналізації вже фактично було пояснено в ході доведення теореми 2.31. Із сказаного там безпосередньо випливає, що орти системи $\{\mathbf{e}_i\}_{i=\overline{1, k}}$ слід будувати один за одним, за допомогою наступних співвідношень:

$$\mathbf{e}_1 = |\mathbf{x}_1|^{-1} \mathbf{x}_1; \quad \mathbf{e}_2 = |\mathbf{l}_2|^{-1} \mathbf{l}_2; \quad \mathbf{e}_3 = |\mathbf{l}_3|^{-1} \mathbf{l}_3; \dots \quad \mathbf{e}_k = |\mathbf{l}_k|^{-1} \mathbf{l}_k,$$

де

$$\mathbf{l}_j = \mathbf{x}_j - \sum_{s=1}^{j-1} (\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{e}_s) \mathbf{e}_s, \quad (j = \overline{2, k}).$$

Наведена схема ортогоналізації пояснюється так: оскільки система векторів $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1, k}}$ лінійно незалежна, то а) в ній немає нульового вектора, а значить, за орт $\mathbf{e}_1$ можна взяти вектор $|\mathbf{x}_1|^{-1} \mathbf{x}_1$; б) вектор $\mathbf{x}_2$ не паралельний до $\mathbf{x}_1$, тому існує ненульовий вектор $\mathbf{l}_2 = \mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1$, перпендикулярний до $\mathbf{e}_1$, а тому, в якості $\mathbf{e}_2$ можна взяти $|\mathbf{l}_2|^{-1} \mathbf{l}_2$, і так надалі. Процесу ортогоналізації можна надати простий геометричний зміст, проілюстрований рис. 3.

2.33. Зауваження.

Виходячи з конкретної системи лінійно незалежних векторів, за допомогою процесу ортогоналізації можна побудувати різні ортонормовані системи, по-різному нумеруючи вектори вихідної системи. Це ж саме стосується й ортонормованих базисів у просторі Евкліда. Оскільки, в просторі Евкліда вимірності $n \geq 2$ існують різні системи лінійно незалежних векторів, в цьому просторі, взагалі кажучи, існує безліч ортонормованих базисів.

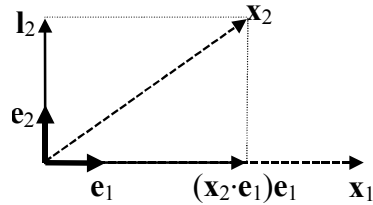


Рис. 3

§ 17. Матриця Грама

• Вираз скалярного добутку через координати векторів-співмножників

Розглянемо довільний базис $\{\mathbf{e}_i\}_{i=\overline{1, n}}$ у просторі Евкліда. Будь-які вектори $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ цього простору можна розкласти в цьому базисі: $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j$. Враховуючи аксіоми 2) і 3) із означення 2.13, маємо

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x^i \mathbf{e}_i) \cdot (y^j \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) x^i y^j.$$

2.34. Означення. Матрицю, елементами якої є скалярні добутки g_{ij} векторів базису називають *матрицею Грама* базису $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,n}$ і в зв'язку з її назвою позначають літерою Γ . Отже,

$$\Gamma = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

де введено позначення

$$g_{ij} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j.$$

Враховуючи введені позначення, одержуємо два еквівалентних вирази скалярного добутку векторів $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g_{ij} x^i y^j = \langle x | \Gamma | y \rangle, \quad (2.7)$$

де, як і раніше, символами $\langle x |$ та $| y \rangle$ позначено координатний рядок та стовпчик вектора $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$, відповідно.

• **Приклади матриць Грама і формул для обчислення скалярного добутку векторів**

2.35. Приклад. Матриця Грама ортонормованого базису дорівнює одиничній матриці, тобто

$$\Gamma = (\delta_{ij}) = E, \text{ а вирази (2.7) набувають вигляду}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \delta_{ij} x^i y^j = \langle x | E | y \rangle = x^i y^i = \langle x | y \rangle.$$

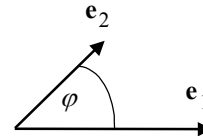


Рис. 4

2.36. Приклад. Матриця Грама косокутного базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ на площині в очевидний спосіб пов'язана з довжинами e_1, e_2 векторів базису та кутом φ між ними (рис. 4):

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1)^2 & e_1 e_2 \cos \varphi \\ e_1 e_2 \cos \varphi & (e_2)^2 \end{pmatrix}.$$

Формули (2.6) набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (e_1)^2 & e_1 e_2 \cos \varphi \\ e_1 e_2 \cos \varphi & (e_2)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} \\ &= x^1 y^1 (e_1)^2 + (x^1 y^2 + x^2 y^1) e_1 e_2 \cos \varphi + x^2 y^2 (e_2)^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.37. Приклад. Матриця Грама косокутного базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ у тривимірному просторі геометричних векторів виражається в термінах довжин цих векторів e_1, e_2, e_3 та кутів α, β та γ між $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}_3$ та $\mathbf{e}_2$ і $\mathbf{e}_3$, відповідно

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1)^2 & e_1 e_2 \cos \alpha & e_1 e_3 \cos \beta \\ e_1 e_2 \cos \alpha & (e_2)^2 & e_2 e_3 \cos \gamma \\ e_1 e_3 \cos \beta & e_2 e_3 \cos \gamma & (e_3)^2 \end{pmatrix}.$$

Формули (2.6) у даному випадку можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (e_1)^2 & e_1 e_2 \cos \alpha & e_1 e_3 \cos \beta \\ e_1 e_2 \cos \alpha & (e_2)^2 & e_2 e_3 \cos \gamma \\ e_1 e_3 \cos \beta & e_2 e_3 \cos \gamma & (e_3)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} \\ &= x^1 y^1 (e_1)^2 + x^2 y^2 (e_2)^2 + x^3 y^3 (e_3)^2 + (x^1 y^2 + x^2 y^1) e_1 e_2 \cos \alpha \\ &\quad + (x^1 y^3 + x^3 y^1) e_1 e_3 \cos \beta + (x^2 y^3 + x^3 y^2) e_2 e_3 \cos \gamma. \end{aligned} \quad (2.9)$$

• Зв'язок між матрицями Грама різних базисів

Розглянемо два базиси $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,n}$ та $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1,n}$ з матрицями Грама $\Gamma = (g_{ij})$ та $\Gamma' = (g'_{ij})$, відповідно. Нехай $T = (t_i^j)$ матриця переходу від нештрихованого базису до штрихованого, тобто $\mathbf{e}'_i = t_i^j \mathbf{e}_j$. В такому разі, за означенням матриці Грама,

$$g'_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = t_i^k \mathbf{e}_k \cdot t_j^l \mathbf{e}_l = t_i^k t_j^l (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l) = t_i^k t_j^l g_{kl}.$$

Таким чином, зв'язок між матрицями Грама двох різних базисів визначається співвідношенням

$$\Gamma' = T^T \Gamma T, \quad (2.10)$$

де T^T – транспонована матриця переходу.

Виходячи із означення 2.34 та зважаючи на співвідношення (2.10), можна встановити основні властивості матриці Грама.

2.38. Властивість. Матриця Грама будь-якого базису є симетричною матрицею, тобто $g_{ij} = g_{ji}$, або, що те ж саме, $\Gamma = \Gamma^T$.

◀ Впливає з виразів (2.6) та комунікативності скалярного добутку ▶

2.39. Властивість. Визначник матриці Грама $|\Gamma'| \equiv g'$ будь-якого базису $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1,n}$ дорівнює квадрату визначника матриці переходу від деякого ортонормованого базису до $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1,n}$.

◀ Згідно із властивістю 2.29 вихідний базис $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1,n}$ завжди може бути ортогоналізований шляхом утворення лінійних комбінацій базисних векторів, тому, існує матриця переходу T^{-1} від цього базису до ортонормованого, а отже, існує і матриця T переходу від ортонормованого базису до $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1,n}$. Оскільки, матриця Грама ортонормованого базису є одиничною матрицею, з (2.10) випливає, що матриця Грама вихідного базису задовольняє співвідношення $\Gamma' = T^T T$. З теорії визначників відомо, що $|T^T T| = |T^T| |T|$, а також, $|T^T| = |T|$. Таким чином приходимо до висновку, що $|\Gamma'| = |T^T T| = |T|^2$. ▶

2.40. Властивість. Визначник матриці Грама будь-якого базису є додатним.

◀ Безпосередньо випливає з попередньої властивості, коли врахувати, що матриця переходу є невиродженою (неособливою), тобто $|T| \neq 0$ (див. властивість 1.57). ▶

2.41. Наслідок. З указаної зараз властивості випливає, що матриця Грама невироджена, а тому існує матриця Γ^{-1} обернена до неї. Оскільки, матриця Грама симетрична, обернена матриця також є симетричною. Визначник оберненої матриці є додатним:

$$|\Gamma^{-1}| = |\Gamma|^{-1} > 0.$$

• Ортогональні матриці

2.42. Означення. Матриця переходу від одного ортонормованого базису до іншого ортонормованого базису називається ортогональною.

2.43. Властивість. Якщо матриця T ортогональна, то $T^T = T^{-1}$, або, що те ж саме, $T^T T = T T^T = E$.

◀ Якщо два базиси ортонормовані, то їх матриці Грама дорівнюють одиничній матриці. В такому разі співвідношення (2.10) набуває вигляду $E = T^T E T$, а отже, $T^T T = E$. Тепер пригадаємо, що матрицею, оберненою до матриці T , за означенням називають матрицю T^{-1} , яка задовольняє рівність $T^{-1} T = E$, звідки і випливає подана властивість. ($T T^T = E$, оскільки, як відомо, $T^{-1} T = T T^{-1}$). ▶

2.44. Властивість. Визначник ортогональної матриці дорівнює ± 1 .

◀ З попередньої властивості випливає, що $|T^T T| = |E| = 1$, а за відомими теоремами з теорії визначників $|T^T T| = |T|^2$. Отже, $|T|^2 = 1$, звідки стає очевидною вказана властивість.

2.45. Властивість. Столпчики $|\mathbf{t}_j\rangle$ та рядочки $\langle \mathbf{t}_i|$ ортогональної матриці T задовольняють співвідношення $\langle \mathbf{t}_i | \mathbf{t}_j \rangle = \delta_{ij}$.

◀ Дані співвідношення є векторною формою запису матричної рівності $T^T T = E$. Останнє стає очевидним, коли зважити на те, що цю матричну рівність можна записати у вигляді співвідношення між елементами матриці: $t_i^k t_j^k = \delta_{ij}$. ▶

§ 18. Лінійна залежність та незалежність векторів у просторі Евкліда

2.46. Означення. Матрицею Грама системи векторів $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,k}}$ називають матрицю Γ з елементами $g_{ij} = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$, $(i, j = \overline{1, k})$.

2.47. Теорема. (Критерій лінійної залежності векторів в n -вимірному просторі Евкліда).

Для того, щоб вектори системи $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,k}}$ були лінійно залежними, необхідно й достатньо, щоб визначник матриці Грама цієї системи дорівнював нулю.

2.48. Теорема. (Критерій лінійної незалежності векторів в n -вимірному просторі Евкліда).

Для того, щоб вектори системи $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,k}}$ були лінійно незалежними, необхідно й достатньо, щоб визначник матриці Грама цієї системи не дорівнював нулю.

◀ Необхідність теореми 2.47: нехай вектори системи лінійно залежні. Тоді існує нетривіальна лінійна комбінація цих векторів, яка дорівнює нульовому вектору, тобто $\alpha^i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$. Скалярний добуток цієї лінійної комбінації на вектор $\mathbf{x}_j$ системи $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,k}}$ дорівнює нулю, а отже $\alpha^i g_{ij} = 0, \forall j$. Остання рівність є умовою лінійної залежності рядків матриці Грама. Якщо рядки матриці лінійно залежні, її визначник, як відомо, дорівнює нулю. ▶

◀ Необхідність теореми 2.48: нехай вектори системи $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,k}}$ лінійно незалежні. Сукупність всіх лінійних комбінацій векторів цієї системи є простором вимірності $k \leq n$, який називають лінійною оболонкою векторів системи (справедливість цього твердження читачеві корисно провести самостійно, виходячи з означення лінійного простору). За означенням 1.43 система $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,k}}$ є базисом лінійної оболонки. За властивістю 2.40 матриця Грама будь-якого базису є додатною, а отже, не дорівнює нулю ▶.

Достатність поданих вище теорем легко доводиться від супротивного.

• Узагальнення нерівності Коші – Буняковського

Розглядання критеріїв лінійної залежності та незалежності векторів дозволяє сформулювати таке

Твердження: визначник Грама будь-якої системи векторів невід’ємний ($\Gamma \geq 0$), причому дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли вектори системи лінійно залежні

Наведемо приклад, який показує, що подане твердження можна вважати узагальненням нерівності Коші – Буняковського.

2.49. Приклад. Розглянемо систему двох векторів. Для такої системи

$$|\Gamma| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 \end{vmatrix} \geq 0.$$

Розкриваючи визначник, одержуємо нерівність

$$(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2)^2 \leq (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2),$$

що збігається з нерівністю (2.3).

§ 19. Взаємні базиси

• Означення взаємного базису, приклади

Розглянемо два базиси $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,n}$ та $\{\mathbf{e}^j\}_{j=1,n}$ в n -вимірному просторі Евкліда.

2.50. Означення. Базис $\{\mathbf{e}^j\}_{j=1,n}$ називають взаємним до базису $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,n}$ якщо виконуються такі співвідношення:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j. \quad (2.11)$$

Наведемо приклади для геометричних векторів на площині.

2.51. Приклад. Базисом взаємним до базису $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$ є базис $\mathbf{e}^1 = \mathbf{i}, \mathbf{e}^2 = \mathbf{j}$, тобто обидва базиси співпадають.

◀ Справді, в цьому разі

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^1 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}^2 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}^1 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0. \blacktriangleright$$

2.52. Приклад. Розглянемо ортогональний базис, що складається з векторів $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ довільної довжини (рис. 5). Взаємний до нього базис складається з векторів $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$, напрямки яких збігаються з напрямками $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ (відповідно), а довжини e^1, e^2 визначаються рівностями $e^1 = 1 / e_1, e^2 = 1 / e_2$.

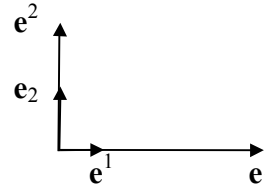


Рис. 5

◀ Дійсно, в такому разі $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^1 = e_1 e^1 = e_1 / e_1 = 1$, $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}^2 = e_2 e^2 = e_2 / e_2 = 1$, а $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}^1 = 0$, оскільки $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}^2, \mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}^1$. ▶

2.53. Приклад. Розглянемо косокутний базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, що складається з векторів довільної довжини (рис. 6). Будемо шукати вектори взаємного базису у вигляді розкладу по векторах вихідного базису:

$$\mathbf{e}^1 = \alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}^2 = \gamma \mathbf{e}_1 + \delta \mathbf{e}_2. \quad (2.12)$$

Коефіцієнти розкладу є координатами векторів взаємного базису у вихідному базисі. Із співвідношень (2.11) випливає, що

$$\begin{aligned}\alpha(e_1)^2 + \beta(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) &= 1, & \alpha(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) + \beta(e_2)^2 &= 0, \\ \gamma(e_1)^2 + \delta(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) &= 0, & \gamma(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) + \delta(e_2)^2 &= 1.\end{aligned}$$

Ці формули еквівалентні матричному рівнянню

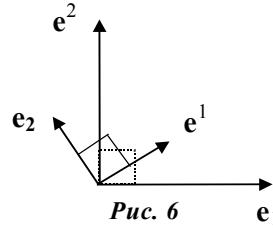
$$\begin{pmatrix} (e_1)^2 & (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \\ (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) & (e_2)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.13 \text{ a})$$

Перший множник в лівій частині рівняння (2.13

а) є матрицею Грама Γ базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

Оскільки, визначник матриці Грама будь-якого базису не дорівнює нулю, рівняння має розв'язок

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \frac{1}{|\Gamma|} \begin{pmatrix} (e_2)^2 & -(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \\ -(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) & (e_1)^2 \end{pmatrix},$$



який дозволяє записати такі вирази для векторів взаємного базису (2.12)

$$\mathbf{e}^1 = \frac{1}{|\Gamma|} [(e_2)^2 \mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2], \quad \mathbf{e}^2 = \frac{1}{|\Gamma|} [(e_1)^2 \mathbf{e}_2 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_1]$$

• Властивості взаємних базисів

2.54. Властивість. Для кожного базису існує один-єдиний взаємний базис.

◀ Розглянемо базис $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,n}$ у просторі Евкліда. Будь-який вектор $\mathbf{e}^j$ цього простору можна розкласти по векторах базису: $\mathbf{e}^j = \alpha^{jk} \mathbf{e}_k$. Щоб вектори $\mathbf{e}^j$ утворювали базис взаємний до розглядуваного, вони повинні задовольняти співвідношення (2.11), тобто

$$\delta_i^j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \alpha^{jk} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \alpha^{jk} g_{ik},$$

або

$$g_{ik} \alpha^{jk} = \delta_i^j. \quad (2.13 \text{ б})$$

Оскільки, базис $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,n}$ заданий, співвідношення (2.13 б) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь для координат α^{jk} векторів $\mathbf{e}^j$ у цьому базисі, причому, коефіцієнти системи g_{ik} є відомими елементами матриці Грама цього базису. Оскільки, визначник матриці Грама не дорівнює нулю, то за теоремою Крамера існує один-єдиний розв'язок $\alpha^{jk} = t^{jk}$ системи рівнянь (2.13 б). Цьому розв'язку відповідає єдина добірка векторів $\mathbf{e}_0^j = t^{jk} \mathbf{e}_k$, яка є базисом, взаємним до розглядуваного. ►

2.55. Властивість. Якщо базис $\{\mathbf{e}^j\}_{j=1,n}$ є взаємним до базису $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,n}$, то й навпаки, базис $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,n}$ є взаємним до $\{\mathbf{e}^j\}_{j=1,n}$.

◀ Впливає з симетрії співвідношень (2.11) відносно переставлення $\mathbf{e}_i \leftrightarrow \mathbf{e}^j$. ►

2.56. Властивість. Матриця Грама будь-якого даного базису є матрицею переходу від взаємного йому базису до даного базису.

◀ Нехай, як і раніше, g_{ij} є елементами матриці Грама, а t_{ik} – елементами матриці переходу. Тоді, $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = t_{ik} \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_j = t_{ik} \delta_j^k = t_{ij}$. ►

2.57. Властивість. $g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j$.⁵

◀ Згідно попередній властивості, $\mathbf{e}^i = g^{ik} \mathbf{e}_k$, тому

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = (g^{ik} \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}^j = g^{ik} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}^j) = g^{ik} \delta_k^j = g^{ij}. \text{ ►}$$

2.58. Властивість. Нехай Γ є матрицею Грама базису $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,n}$. Тоді матриця Грама взаємного базису Γ' є оберненою по відношенню до Γ .

⁵ Підкреслимо, що ця рівність відрізняється від позначення $g_{ij} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$, введеного у (2.6), та від означення (2.11) взаємних базисів, а тому, потребує доведення.

◀ Нехай, як і раніше, матриця $T = (t_{ij})$ є матрицею переходу від $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,n}$ до взаємного базису $\{\mathbf{e}^j\}_{j=1,n}$, а матриця $T^{-1} = (\tilde{t}_{ij})$ – матрицею зворотного переходу. Тоді за властивістю 2.56, $\Gamma = T$, $\Gamma' = T^{-1}$. Отже, $\Gamma' = \Gamma^{-1}$. ▶

2.59. Властивість. Нехай базис $\{\mathbf{e}^i\}_{i=1,n}$ є взаємним до $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,n}$ а базис $\{\mathbf{e}'^i\}_{i=1,n}$ – взаємним до $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1,n}$. Якщо матриця $T = (t_{ik})$ є матрицею переходу від $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,n}$ до $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1,n}$, то матриця переходу від $\{\mathbf{e}^i\}_{i=1,n}$ до $\{\mathbf{e}'^i\}_{i=1,n}$ дорівнює T^{-1} .

◀ Позначимо матрицю переходу від $\{\mathbf{e}^i\}_{i=1,n}$ до $\{\mathbf{e}'^i\}_{i=1,n}$ як $\tilde{T} = (\tilde{t}_i^k)$. Тоді $\mathbf{e}_i = t_i^k \mathbf{e}'_k$, $\mathbf{e}^j = \tilde{t}_m^j \mathbf{e}'^m$. З означення взаємного базису випливає, що

$$\delta_i^j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = t_i^k \tilde{t}_m^j \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}'^m = t_i^k \tilde{t}_m^j \delta_k^m = t_i^k \tilde{t}_k^j = \tilde{t}_k^j t_i^k,$$

тобто $\tilde{T}T = E$. Отже, $\tilde{T} = T^{-1}$. ▶

Наведемо повне зведення формул перетворення базисних векторів поряд з еквівалентними формулами перетворення вектор-стовпчиків

$$|\mathbf{e}^*\rangle = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}^n \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{e}_*\rangle = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}$$

та вектор-рядочків

$$\langle \mathbf{e}_*| = (\mathbf{e}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n), \quad \langle \mathbf{e}^*| = (\mathbf{e}^1 \quad \cdots \quad \mathbf{e}^n)$$

Ці формули мають наступний вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^i &= g^{ij} \mathbf{e}_j, & |\mathbf{e}^*\rangle &= \Gamma^{-1} |\mathbf{e}_*\rangle, \\ \mathbf{e}_i &= g_{ij} \mathbf{e}^j, & \langle \mathbf{e}_*| &= \langle \mathbf{e}^*| \Gamma, \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^i &= \tilde{t}_j^i \mathbf{e}^j, & |\mathbf{e}^*\rangle &= T^{-1} |\mathbf{e}^*\rangle, \\ \mathbf{e}'_i &= t_i^j \mathbf{e}_j, & \langle \mathbf{e}'_*| &= \langle \mathbf{e}_*| T,\end{aligned}\tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_i &= \tilde{t}_i^j \mathbf{e}'_j, & \langle \mathbf{e}_*| &= \langle \mathbf{e}'_*| T^{-1}, \\ \mathbf{e}^i &= t_j^i \mathbf{e}^{'j}, & |\mathbf{e}^*\rangle &= T |\mathbf{e}^*\rangle.\end{aligned}\tag{2.16}$$

• Координати вектора у взаємних базисах

Координати вектора $\mathbf{x}$ у базисі $\{\mathbf{e}_i\}_{i=\overline{1,n}}$ будемо, як і в попередніх розділах, позначати символом x^i і подавати у вигляді вектор-стовпчика $|x^*\rangle$, а у базисі $\{\mathbf{e}^i\}_{i=\overline{1,n}}$ – символом x_i і об'єднувати у вектор-рядочок $\langle x_*|$. Тоді розклад вектора $\mathbf{x}$ по векторах базису виглядатиме як

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}^i,\tag{2.17}$$

або

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{e}_* | x^* \rangle \quad \mathbf{x} = \langle x_* | \mathbf{e}^* \rangle.\tag{2.18}$$

Утворивши скалярні добутки правих та лівих частин рівностей (2.17), і врахувавши, що $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i$, одержуємо дуже зручні формули для визначення координат векторів

$$x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i, \quad x^i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^i,\tag{2.19}$$

та *формули Гібса*⁶ для розкладу вектора $\mathbf{x}$ по векторах базису. Ці формули мають такий вигляд

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}^i, \quad \mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^i) \mathbf{e}_i.\tag{2.20}$$

⁶ Д.У.Гібс – американський фізик-теоретик (1839–1903 рр.).

Встановимо зв'язок між координатами вектора у базисі $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,n}$ та базисі взаємному до нього. З (2.19) і (2.20) безпосередньо випливає, що $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^i = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i)$, тобто,

$$x^i = g^{ij} x_j. \quad (2.21a)$$

У такий же спосіб знаходимо, що

$$x_i = g_{ij} x^j. \quad (2.22a)$$

Ці ж формули часто записують у вигляді матричних співвідношень

$$|x^*\rangle = \Gamma^{-1} |x_*\rangle, \quad (2.21b)$$

$$|x_*\rangle = \Gamma |x^*\rangle. \quad (2.22b)$$

Формули (2.17), (2.18), (2.21) та (2.22) ведуть до наступних виразів для скалярного добутку двох векторів:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^i y_i = x_i y^i = g_{ij} x^i y^j = g^{ij} x_i y_j, \quad (2.23a)$$

або еквівалентних до них матричних співвідношень:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \langle y_* | x^* \rangle = \langle x_* | y^* \rangle = \langle x^* | \Gamma | y^* \rangle = \langle y_* | \Gamma | x_* \rangle. \quad (2.23b)$$

Дуже важливими для розв'язання широкого кола задач є формули, що пов'язують між собою координати одного й того ж вектора у двох різних базисах. Одну з таких формул вже було знайдено нами (див. (1.10) у §12). Інші можуть бути знайдені у такий точно спосіб і записані у двох еквівалентних виглядах:

$$x'^i = t_i^j x_j, \quad x''^i = \tilde{t}_j^i x^j, \quad (2.24a)$$

або

$$\langle x'_* | = \langle x_* | T, \quad |x''^* \rangle = T^{-1} |x^* \rangle. \quad (2.24b)$$

Корисно порівняти вирази (2.24) з формулами перетворення базисних ортів (2.15), які зараз доцільно переписати у такому порядку

$$\mathbf{e}''^i = \tilde{t}_j^i \mathbf{e}^j, \quad \mathbf{e}'_i = t_i^j \mathbf{e}_j, \quad (2.25a)$$

$$|\mathbf{e}''^* \rangle = T^{-1} |\mathbf{e}^* \rangle, \quad \langle \mathbf{e}'_* | = \langle \mathbf{e}_* | T. \quad (2.25b)$$

Порівняння веде до такого висновку: координати x_i перетворюються при заміні базису однаково (коваріантно) з ортами $\mathbf{e}_i$. У той же час, якщо орти $\mathbf{e}_i$ перетворюються на $\mathbf{e}'_i$ за допомогою елементів матриці T , то координати x^i перетворюються на x'^i за допомогою елементів оберненої матриці T^{-1} . Тому кажуть, що величини x^i перетворюються контраваріантно з ортами $\mathbf{e}_i$.

2.60. Означення. Величини x_i називають *коваріантними*, а x^i – *контраваріантними* координатами вектора $\mathbf{x}$.

2.61. Означення. Базис $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,n}$ називають *контраваріантним*, а взаємний до нього базис $\{\mathbf{e}^i\}_{i=1,n}$ – *коваріантним*.

Згідно з виразами (2.17), контраваріантні координати є коефіцієнтами розкладу вектора у контраваріантному базисі, а коваріантні – у коваріантному, що і пояснює логіку даних означень.

2.62. Зауваження. Якщо контраваріантний базис $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,n}$ є ортонормованим, то він співпадає з коваріантним базисом $\{\mathbf{e}^i\}_{i=1,n}$, а отже, контраваріантні координати вектора в ортонормованому базисі не відрізняються від відповідних коваріантних координат: $x^i = x_i$.

2.63. Зауваження. Дотепер ми не згадували про такі важливі математичні об'єкти як тензори, але зараз, для читачів, знайомих з поняттям тензора, відзначимо, що коваріантні координати вектора утворюють коваріантний тензор першого рангу, а контраваріантні координати – контраваріантний тензор першого рангу. Елементи матриці Грама (g_{ij}) утворюють два рази коваріантний метричний тензор, а елементи оберненої матриці (g^{ij}) складають два рази контраваріантний тензор. Символи Кронекера утворюють одиничний тензор або один раз коваріантний і один раз контраваріантний метричний тензор.

§ 20. Унітарний простір

У цьому розділі ми дамо означення скалярного добутку у комплексному векторному просторі та ознайомимося з його основними властивостями. При цьому, ми не будемо доводити наявність цих властивостей, оскільки доведення цілком подібні до тих, що були подані вище при розгляді простору Евкліда. Домовимося у подальшому позначати операцію комплексного спряження лінією над символом, яким позначено число або числова функція, наприклад, число, комплексно спряжене до числа α позначатимемо $\overline{\alpha}$.

2.64. Означення. Комплексний n -вимірний простір називають *унітарним* (або *ермітовим*) і позначають U_n , коли в ньому визначена операція скалярного добутку, тобто, будь-яким векторам $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ поставлено у відповідність комплексне число $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ і при цьому є виконаними наступні вимоги (аксіоми):

- 1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U_n \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \overline{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}},$
- 2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in U_n \quad (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z},$
- 3) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U_n, \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \alpha \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \alpha (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}),$
- 4) $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \left(\mathbf{x} \in U_n \right) \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0.$

Якщо порівняти подані аксіоми з аксіомами, що визначають поняття скалярного добутку у дійсному лінійному просторі, то легко помітити дві відмінності: по-перше, числа α у випадку унітарного простору є комплексними, а по-друге, змінено першу аксіому: добуток $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ дорівнює $\overline{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}}$, а не $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$, як це було у дійсному просторі. Завдяки цій зміні добуток елементу унітарного простору самого на себе є дійсним числом $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \overline{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}})$, а отже, є змістовною четверта

аксіома (якби число $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ могло бути комплексним, його не можна було б вважати ані додатним, ані від'ємним).⁷

2.65. Наслідок. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in U_n \quad \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$.

2.66. Наслідок. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U_n, \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \mathbf{x} \cdot \alpha \mathbf{y} = \overline{\alpha} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$.

2.67. Наслідок. $\forall \mathbf{x} \in U_n \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{0} = 0$.

• Приклади унітарних просторів

2.68. Приклад. Множина вектор-стовпчиків утворених з n комплексних чисел стає унітарним простором, якщо означити скалярний добуток стовпчиків $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^* \end{pmatrix}$ та $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y^* \end{pmatrix}$ у такий спосіб:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} \langle x^* | y^* \rangle = x^j \bar{y}^j.$$

2.69. Приклад. У просторі неперервних на відрізьку $[a, b]$ комплексних функцій $(f, g, \dots)$ дійсної змінної ξ , скалярним добутком можна вважати інтеграл від добутку двох функцій, тобто

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(\xi) \overline{g(\xi)} d\xi.$$

Завдяки загальновідомим властивостям інтеграла означений у такий спосіб скалярний добуток задовольняє вимогам 1) – 4) означення **2.64**.

2.70. Приклад. Розглянемо простір геометричних векторів на площині, у якому операція додавання векторів виконується за правилом трикутника, а операцію добутку вектора на число

⁷ Інший шлях поширення визначальних аксіом дійсного простору Евкліда на комплексний лінійний простір полягає в тому, щоб в обох просторах замінити четверту аксіому на менш жорстку вимогу: якщо $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ для *будь-якого* вектора $\mathbf{x}$, то звідси випливає, що $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. В цьому разі комплексний лінійний простір називають комплексним простором Евкліда, а дійсний – псевдоевклідовим простором. У таких просторах існують вектори з від'ємним скалярним квадратом, завдяки чому їх геометрія значно відрізняється від геометрії Евкліда.

поширено на випадок комплексних чисел, причому, добутком вектора $\mathbf{a}$ з декартовими координатами a_x, a_y на комплексне число $\alpha + i\beta$ є вектор $\mathbf{b}$ з координатами $b_x = \alpha a_x - \beta a_y, b_y = \alpha a_y + \beta a_x$. Неважко перевірити, що в такому разі є виконаними всі аксіоми з означення лінійного простору. Скалярний добуток у цьому просторі можна означити виходячи з властивості **2.9**, тобто записати:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} a_x b_x + a_y b_y.$$

При цьому, всі вимоги до скалярного добутку опиняються виконаними автоматично. З точки зору застосувань у фізиці дуже зручним є запис скалярного добутку у так званих *циркулярних координатах* $a_{\pm} = a_x \pm ia_y$ та $b_{\pm} = b_x \pm ib_y$. У цих координатах

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_+ b_- = a_- b_+.$$

Підкреслимо, що введення в розгляд циркулярних координат стало можливим лише завдяки поширенню поняття добутку числа і вектора на випадок комплексних чисел.

• Властивості унітарного простору

Поняття, що стосуються унітарних просторів та властивості цих просторів дуже близькі за змістом до понять і властивостей притаманних просторам Евкліда і досить докладно розглянутих вище. Тому, зараз ми лише нагадаємо їх у конспективній формі.

2.71. Означення. Довжина вектора $\mathbf{x} \in U_n$ є дійсним числом, яке визначається за формулою $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \geq 0$.

2.72. Означення. Величина кута φ між векторами $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U_n$ визначається із рівняння

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|}.$$

Отже, тригонометричні функції кута φ можуть набувати комплексних значень.

2.73. Властивість. Для будь-яких векторів $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U_n$ справджується нерівність

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}) \geq (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})(\overline{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}).$$

2.74. Означення. Вектори $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ називаються ортогональними один до одного, коли $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

2.75. Властивість. Нульовий вектор це єдиний вектор, ортогональний до будь-якого вектора.

2.76. Означення. Систему векторів $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1, \overline{k}}$ у просторі вимірності $n \geq k$ називають ортонормованою, коли $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = \delta_{ij}$.

2.77. Властивість. До будь-якої системи лінійно незалежних векторів в унітарному просторі є застосовним процес ортогоналізації, описаний у § 16.

2.78. Властивість. В n -вимірному унітарному просторі існує ортонормований базис.

2.79. Означення. Матрицею Грама базису $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1, \overline{n}}$ в унітарному просторі називають матрицю з елементами $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$.

2.80. Властивість. Якщо $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j$, то

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g_{ij} x^i \bar{x}^j = \langle x^* | \Gamma | \bar{y}^* \rangle.$$

(Тут використані такі ж позначення, як і раніше, при розгляді простору Евкліда).

2.81. Властивість. Якщо $T = (t_j^i)$ матриця переходу від нештрихованого базису до штрихованого, то

$$g'_{ij} = t_i^k \bar{t}_j^l g_{kl},$$

або, $\Gamma' = T^T \Gamma \bar{T}$, що є те ж саме.

2.82. Означення. Матрицю $A = (a_{ik})$ називають ермітовською, якщо $A = \bar{A}^T$, тобто $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$.

2.83. Властивість. Матриця Грама базису в унітарному просторі є ермітовською матрицею.

2.84. Властивість. Визначник матриці Грама будь-якого базису $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1,n}$ в U_n пов'язаний з визначником матриці переходу від деякого ортонормованого базису $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,n}$ до $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1,n}$ співвідношенням $|\Gamma| = |T| |\overline{T}|$.

2.85. Властивість. Визначник матриці Грама будь-якого базису в унітарному просторі є додатним.

2.86. Властивість. Якщо T – матриця переходу від одного ортонормованого базису в U_n до іншого ортонормованого базису, то $T^{-1} = \overline{T}^T$, або, що те ж саме, $T^T \overline{T} = \overline{T} T^T = E$.

2.87. Означення. Матриця A що задовольняє умову $A^T \overline{A} = E$ називається унітарною.

2.88. Властивість. Визначник унітарної матриці є комплексним числом за модулем рівним одиниці: $|T| |\overline{T}| = 1$.