

Частина 1

Векторні простори

§ 1. Вступні зауваження

. Поняття вектора є одним з тих наукових понять, що вже давно перейшли зі спеціальних математичних, фізичних та технічних видань до повсякденного вжитку широкими верствами населення. Згідно із загальновідомим означенням, вектори – це напрямлені відрізки прямої лінії на площині або у тривимірному геометричному просторі, сума яких визначається за правилом паралелограма. Саме так означається поняття вектора, наприклад, у шкільному курсі фізики, і вже в цьому курсі це геометричне за своєю суттю означення автоматично поширюється на велику кількість фізичних об'єктів різної природи – механічних сил та прискорень, напруженостей електричних та магнітних полів, магнітних моментів елементарних частинок, тощо – і при цьому завжди виходить, що сумою двох сил є третя сила, сумою прискорень у двох різних напрямках є прискорення в третьому напрямку, а сумою електричних полів, що утворюються двома електричними зарядами, є, знову ж таки, електричне поле, а не якась інша фізична величина. (Згадайте відомий досвід зі шкільного курсу фізики, в якому перевіряється, що сума двох сил є силою. Схему цього досвіду наведено на Рис. 1).

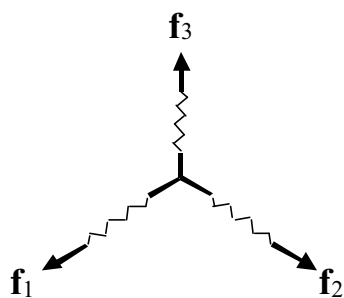


Рис. 1.

Три пружинні динамометри підключено до спільної точки. Сили $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_3$, що діють на динамометри, підбрано так, щоб зображена механічна система перебувала в рівновазі. В цьому разі

$$\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_3,$$

Оскільки при розв'язанні багатьох задач дуже зручно

зображати векторні величини різної фізичної природи у вигляді напрямлених відрізків (стрілочок) на малюнках та графіках, фізики, по аналогії з геометричним простором, почали вживати уявлення про "простір сил", "простір механічних імпульсів", та інші. Математики узагальнили всі ці уявлення, ввівши у розгляд поняття векторного простору, як сукупності елементів (названих векторами), для яких означені такі правила додавання і множення на число, які не виводять елементи за межі сукупності. Таким чином, складаючи будь-які два елементи сукупності, або помноживши будь-який елемент на число ми маємо одержати елемент приналежний до цієї ж сукупності; якщо ця вимога не виконана, сукупність елементів не є векторним простором.

Щоб пояснити, чому до означення векторного простору включено вказану вище вимогу, згадаємо відомий приклад двох вулиць з одnobічним рухом, які перетинаються під прямим кутом (Рис. 2). Припустимо, що на перехресті вулиць стоїть інспектор ДАІ і підраховує кількість автомашин, які проходять по кожній з них за одиницю часу. Нехай по першій

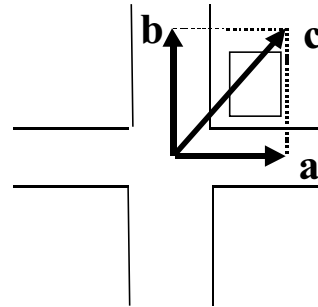


Рис. 2.

вулиці за одиницю часу проходить a машин, а по другій – b машин. Потоки машин, що проходять *крізь перехрестя* за одиницю часу відповідають означенню геометричного вектора: кожен з них можна зобразити у вигляді відрізка прямої лінії довжиною a або b , відповідно, напрямленого вздовж відповідної вулиці. В такому разі можна скласти ці вектори і отримати вектор сумарного потоку $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, який дорівнює за величиною $\sqrt{a^2 + b^2}$, і утворює діагональ прямокутника, побудованого на векторах $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$. Як легко помітити за допомогою Рис. 1, якщо машини утворюють потік $\mathbf{c}$, вони мають врізатися у споруду, побудовану на розі вулиць. Отже, сума потоків автомашин не завжди є потоком автомашин, і цей факт

не можна ігнорувати (наприклад, вході комп'ютерних розрахунків спрямованих на оптимізацію дорожнього руху у великих містах).

Тепер слід зазначити, що наведене вище означення векторного простору можна вважати вичерпним лише для тих векторних просторів, елементам яких можна поставити у відповідність вектори геометричного простору – математики називають такі простори *ізоморфними* (у перекладі з грецької, *подібними за будовою*) до геометричного простору. Дійсно, якщо простір ізоморфний до геометричного, сума його елементів легко визначається шляхом додавання відповідних геометричних векторів за правилом паралелограма, а множення елемента на число λ виконується шляхом зміни довжини відповідного геометричного вектора в λ разів. Це робиться так легко і природно, що школярі, коли розв'язують задачу, наприклад, про човен в річці, навіть і не згадують про те, що вектор швидкості човна не є геометричним вектором, що його величина (яка дорівнює, припустимо, п'яти кілометрам на годину) лише умовно зображується стрілочкою завдовжки у п'ять клітинок шкільного зошиту, і що цим встановлюється відповідність між елементами простору швидкостей та геометричного простору.

Між тим, в ході математичних досліджень було помічено, що поняття векторного простору можна поширити і на такі сукупності математичних об'єктів, які в жодному разі неможливо ототожнити з геометричними векторами. Для цього лише потрібно, щоб існувала аналогія між математичними діями, що виконуються з цими об'єктами, та операціями додавання геометричних векторів і множення їх на скаляр, яким притаманні такі основні властивості

а) комутативність додавання векторів: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$;

б) асоціативність додавання векторів: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$;

в) асоціативність множення вектора на число:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{a}) ;$$

г) дистрибутивність множення вектора на число відносно вектора:

$$\alpha \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha \cdot \mathbf{a} + \alpha \cdot \mathbf{b} ;$$

д) дистрибутивність множення вектора на число відносно числа:

$$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{a}.$$

Ці властивості легко доводяться за допомогою простих геометричних побудов і саме вони покладені в основу загального аксіоматичного означення векторного простору.

§ 2. Поняття вектора, означення векторного простору

В лінійній алгебрі вектор означається як елемент певної множини – *векторного простору*, який називають також *лінійним простором*. Сукупність математичних або фізичних об'єктів можна вважати векторним простором лише тоді, коли для неї є виконаними десять вимог, справедливості яких у кожному конкретному випадку перевіряють математичним або експериментальним шляхом.

1.1. Означення. Множину $\mathcal{L}$ будемо називати векторним (або лінійним) простором, а її елементи – векторами (позначати вектори будемо жирними латинськими літерами), якщо:

I. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L} \exists! \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{L}$.¹

II. $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}, \forall \alpha \in \mathbb{R}(\text{або } \mathbb{C}) \exists! \alpha \cdot \mathbf{x} \in \mathcal{L}$.²

III.

1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L} \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x},$

2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{L} \quad (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}),$

3) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\text{або } \mathbb{C}) \quad (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x}),$

4) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}, \forall \alpha \in \mathbb{R}(\text{або } \mathbb{C}) \quad \alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y},$

¹ Тут і надалі використовуються символи математичної логіки та традиційні позначення теорії множин, розтлумачені у Додатку 1.

² $\mathcal{R}$ – множина дійсних чисел, $\mathcal{C}$ – множина комплексних чисел. Якщо $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ то кажуть, що $\mathcal{L}$ – *дійсний векторний простір*, або просто *векторний простір*, якщо ж $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, то $\mathcal{L}$ називають *комплексним векторним простором*.

- 5) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ (або } \mathbb{C}) \quad (\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x},$
 6) $\exists \mathbf{0} \in \mathcal{L}: \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L} \quad \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ ($\mathbf{0}$ називають нейтральним елементом, або нульовим вектором),
 7) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L} \exists -\mathbf{x} \in \mathcal{L}: \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ($(-\mathbf{x})$ називають оберненим елементом до елемента $\mathbf{x}$, або оберненим вектором до вектора $\mathbf{x}$),
 8) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L} \quad 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}.$

1.2. Зауваження. Операції додавання векторів та множення вектора на число називають лінійними операціями з векторами.

1.3. Зауваження. Суму векторів $\mathbf{x}$ та $(-\mathbf{y})$ називають різницею векторів $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ і позначають $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.

1.4. Зауваження. Аксиоми 1) – 5) є аналогом властивостей а) – д) операцій з геометричними векторами. Необхідність включення до означення 1.1 додаткових аксіом 6) – 7) пов'язана з тим, що елементи лінійного простору не завжди можна ототожнювати з геометричними векторами і зображати у вигляді стрілочок, тому нейтральний елемент простору неможливо означити геометрично, як точку, а протилежний $(-\mathbf{x})$ – як стрілочку напрямлену проти стрілочки, що зображає елемент $\mathbf{x}$. Отже, наявність нейтрального та протилежного елементу висувається у вигляді додаткових формальних вимог і перевіряється після того, як обрано для розгляду конкретну сукупність математичних об'єктів та означені правила лінійних операцій з ними.

§ 3. Приклади векторних просторів

1.5. Приклад. Множина всіх геометричних векторів – напрямлених відрізків з точкою прикладання – з означенням додавання векторів за правилом паралелограма (або трикутника) і множення вектора на дійсне число, як відповідної зміни його довжини, а можливо і напрямку (якщо це число від'ємне) утворює дійсний векторний простір.

1.6. Приклад. Множина сил, які можуть діяти на матеріальну точку, з інтерпретацією сили, як геометричного вектора, з означеннями суми сил і добутку дійсного числа на силу, наданими у попередньому прикладі, утворює дійсний векторний простір.

1.7. Приклад. Множина дійсних чисел з традиційним означенням їх суми та добутку утворює дійсний векторний простір. Саме це дає можливість інтерпретувати дійсні числа як геометричні вектори на числовій осі.

1.8. Приклад. Множина комплексних чисел із звичайно означеними операціями додавання комплексних чисел та множення комплексного числа на дійсне число утворює дійсний векторний простір. Саме це дає можливість інтерпретувати комплексні числа як геометричні вектори на комплексній площині.

1.9. Приклад. Множина комплексних чисел із звичайними означеннями суми та добутку комплексних чисел утворює комплексний векторний простір. В цьому окремому випадку в означенні **1.1** векторного простору слід покласти $\mathcal{L} = \mathbb{C}$.

1.10. Приклад. Множина матриць одного й того ж порядку $m \times n$ із дійсними (комплексними) елементами є дійсним (комплексним) простором по відношенню до звичайних операцій додавання матриць та множення матриці на дійсне (комплексне) число. Отже, матриці можна розглядати як вектори, причому нульовим вектором слід вважати матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю. Такий розгляд зазвичай використовують у квантовій механіці, коли описують квантові стани фізичної системи за допомогою вектор-стовпчиків (матриць порядку $n \times 1$) та вектор-рядків (матриць порядку $1 \times n$).

1.11. Приклад. Множина всіх функцій однієї змінної ξ визначених і неперервних на відрізку $[\xi_1, \xi_2]$ є дійсним векторним простором, а самі функції можна розглядати як вектори. Зроблене твердження стає очевидним, якщо зважити на те, що а) сума двох функцій неперервних на $[\xi_1, \xi_2]$ також є функцією неперервною на цьому відрізку; б) добуток функції неперервної на $[\xi_1, \xi_2]$ та дійсного числа α є функцією неперервною на цьому відрізку; в) всі вісім аксіом п. III є виконаними; г) роль нуля відіграє функція $f(\xi) \equiv 0$.

1.12. Приклад. Множина поліномів $\mathcal{P}(\xi)$ степені не вищої за n є дійсним або комплексним простором, залежно від того, поліноми з дійсними чи з комплексними коефіцієнтами ми розглядаємо. Перевірка зробленого твердження виконується цілком подібно до попереднього. Специфіка цього прикладу полягає в тому, що сумою двох поліномів степені n може бути поліном більш низької степені, а отже, множина поліномів степені n не є простором.

1.13. Приклад. Множина, що містить у собі лише нульовий елемент утворює простір, який називають нульовим простором. Дійсно, єдиний елемент цього простору з необхідністю є нульовим і протилежним собі самому, і цим "автоматично" визначаються операції додавання і множення на скаляр: $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, які задовольняють всім аксіомам.

З наведених прикладів випливає, що в різних векторних просторах сума векторів та добуток вектора на скаляр визначаються по-різному. І дійсно ж, сума геометричних векторів – це не те ж саме, що сума матриць однакового порядку, а сума матриць – не те ж саме, що сума функцій, означених і неперервних на певному відрізку.

1.14. Зауваження. Означення векторного простору передбачає, що існують не лише конкретні правила дій, за якими слід виконувати лінійні операції, а й поняття рівності елементів простору. Наприклад, дві матриці вважають рівними, коли попарно рівні *всі відповідні* елементи. Щодо геометричних векторів, то для них існує *три різних визначення рівності*, кожне з яких відповідає певному колу фізичних або технічних задач.

Перше: рівні вектори мають а) рівну величину; б) однаковий напрямок; в) спільну точку прикладання. При такому означенні, множина всіх геометричних векторів утворює *простір прикладених векторів*.

Друге: рівні вектори а) є рівними за величиною; б) мають однаковий напрямок; в) лежать на одній прямій. При такому

означенні, множина всіх геометричних векторів утворює *простір ковзаючих векторів*.

Третє: рівні вектори мають а) рівну величину; б) однаковий напрямок. За цього означення множина всіх геометричних векторів утворює *простір вільних векторів*.

У фізиці зустрічаються всі три типи векторних просторів. Так, в задачах про механічну рівновагу твердого тіла або деформування пружного тіла часто має значення, до яких саме точок тіла прикладені сили. Отже, ці сили належать до простору прикладених векторів.

Розв'язання задач про обертання (або рівновагу) твердого тіла з однією нерухомою точкою зводиться до розгляду моментів сил, які не змінюються при перенесенні точок прикладання сил вздовж їх напрямків. У цьому випадку сили належать до простору ковзаючих векторів.

У задачах про поступальний рух твердого тіла має значення лише головний вектор сил, який належить до простору вільних векторів.

§ 4. Найважливіші наслідки з означення векторного простору

1.15. Наслідок. У векторному просторі існує лише один нульовий вектор.

◀ Доведемо це твердження від оберненого. Нехай існує два нульових вектора $\mathbf{0}_1$ та $\mathbf{0}_2$. Тоді,

$$\mathbf{0}_1 = \{6\} = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \{1\} = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \{6\} = \mathbf{0}_2. \blacktriangleright$$

(У фігурних дужках вказані номери аксіом п. III означення 1.1, на підставі яких здійснюються алгебраїчні перетворення).

1.16. Наслідок. Для кожного вектора у векторному просторі існує лише один протилежний.

◀ Доводимо від оберненого. Нехай існують два протилежні вектори $(-\mathbf{x}_1)$ та $(-\mathbf{x}_2)$. Тоді

$$\begin{aligned}
(-\mathbf{x}_1) &= \{6\} = (-\mathbf{x}_1) + \mathbf{0} = \{7\} = (-\mathbf{x}_1) + [\mathbf{x} + (-\mathbf{x}_2)] = \{2\} \\
&= [(-\mathbf{x}_1) + \mathbf{x}] + (-\mathbf{x}_2) = \{1\} = [\mathbf{x} + (-\mathbf{x}_1)] + (-\mathbf{x}_2) \quad \blacktriangleright \\
&= \{6\} = \mathbf{0} + (-\mathbf{x}_2) = \{1\} = (-\mathbf{x}_2) + \mathbf{0} = \{6\} = (-\mathbf{x}_2).
\end{aligned}$$

1.17. Наслідок. Нульовий вектор є протилежним до себе самого.

◀ Цей наслідок випливає з рівностей $\mathbf{0} + (-\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (див $\{7\}$.) та

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \text{ (див. } \{6\}\text{).} \blacktriangleright$$

1.18. Наслідок. Вектором, протилежним до $(-\mathbf{x})$, є вектор $\mathbf{x}$.

◀ Справедливість даного твердження випливає з рівностей:

$$\mathbf{0} = \{7\} = \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \{1\} = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x}. \blacktriangleright$$

1.19. Наслідок. $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

◀ Доведення:

$$\begin{aligned}
0 \cdot \mathbf{x} &= \{6\} = 0 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{0} = \{7\} = 0 \cdot \mathbf{x} + [\mathbf{x} + (-\mathbf{x})] = \{2\} = (0 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x}) - \mathbf{x} \quad \blacktriangleright \\
&= (0 + 1)\mathbf{x} - \mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x} = \{8\} = \mathbf{x} - \mathbf{x} = \{7\} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

1.20. Наслідок. $(-1) \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

◀ Доведення:

$$\begin{aligned}
(-1) \cdot \mathbf{x} &= \{6\} = (-1) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{0} = \{7\} = (-1) \cdot \mathbf{x} + [\mathbf{x} + (-\mathbf{x})] = \{2\} \\
&= [(-\mathbf{x}) + \mathbf{x}] - \mathbf{x} = \{5\} = (-1 + 1)\mathbf{x} - \mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{0} - \mathbf{x} = \{1\} \quad \blacktriangleright \\
&= -\mathbf{x} + \mathbf{0} = \{6\} = -\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

1.21. Наслідок. $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Доведення читачеві корисно провести самостійно.

1.22. Наслідок. $\alpha \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ тоді й лише тоді, коли хоч один із співмножників в лівій частині рівності дорівнює нулю.

◀ Цей наслідок випливає з наслідків 1.19 та 1.21. ▶

§ 5. Лінійно залежні та лінійно незалежні вектори

Розглянемо систему (сукупність) векторів, що належать до лінійного простору $\mathcal{L}$: $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,k}} \equiv \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$.

1.23. Означення. Оскільки у просторі $\mathcal{L}$ означені лінійні операції, є визначеною величина

$$\mathbf{L} \equiv \sum_{i=1}^k \alpha^i \mathbf{x}_i \equiv \alpha^i \mathbf{x}_i, \quad \alpha^i \in \mathbb{R} \text{ або } \mathbb{C},$$

яку називають *лінійною комбінацією векторів системи* $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,k}}$.

Верхній індекс, що нумерує коефіцієнти лінійної комбінації α , не треба плутати з показником степені. Індекс, який зустрічається в деякому математичному виразі двічі (один раз – зверху, а другий – знизу) називають *німим*. Існує домовленість, згідно якої навіть при відсутності символу суми за значеннями німого індексу виконується підсумовування. Цю домовленість називають *домовленістю Ейнштейна*. Величина суми не залежить від того, якою літерою позначено німий індекс, чим і пояснюється його назва.

1.24. Означення. Лінійна комбінація системи векторів називається *тривіальною*, якщо всі її коефіцієнти дорівнюють нулю.

1.25. Зауваження. З наслідку 1.19 випливає, що тривіальна лінійна комбінація дорівнює нульовому вектору.

1.26. Означення. Вектори системи $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,k}}$ називаються *лінійно залежними*, якщо існує нетривіальна лінійна комбінація цих векторів, яка не дорівнює нульовому вектору.

1.27. Зауваження. В математичній літературі часто зустрічається еквівалентна форма означення лінійної залежності: вектори $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,k}}$ називають лінійно залежними, коли $\exists j (1 \leq j \leq k): \alpha^j \neq 0$ та $\alpha^i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$.

1.28. Означення. Вектори системи $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,k}}$ називаються лінійно незалежними, якщо лише тривіальна лінійна комбінація цих векторів дорівнює нульовому вектору.

1.29. Зауваження. Існує еквівалентна форма означення лінійної незалежності: вектори $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,k}}$ називаються лінійно незалежними, якщо з рівності $\alpha^i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ випливає, що $\alpha^j = 0, \forall j (1 \leq j \leq k)$.

§ 6. Приклади лінійно залежних та лінійно незалежних векторів

1.30. Приклад. Нульовий вектор утворює систему лінійно залежних векторів $\{\mathbf{0}\}$.

◀ Щоб упевнитися в цьому, досить утворити хоч одну нетривіальну лінійну комбінацію, яка дорівнює нулю. Такою комбінацією є $1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. ▶

1.31. Приклад. Вектор $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ утворює систему лінійно незалежних векторів $\{\mathbf{x}\}$.

◀ Будь-яка лінійна комбінація векторів $\{\mathbf{x}\}$ має вигляд $\mathbf{L} = \alpha \cdot \mathbf{x}$. Оскільки $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, з умови лінійної залежності $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ випливає, що $\alpha = 0$. Отже, єдина нульова лінійна комбінація векторів $\{\mathbf{x}\}$ – тривіальна. ▶

1.32. Приклад. Два колінеарні геометричні вектори утворюють систему лінійно залежних векторів $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} (\mathbf{x}_1 \parallel \mathbf{x}_2)$.

◀ Із шкільного курсу геометрії відомо, що колінеарні вектори завжди пов'язані між собою рівністю $\mathbf{x}_1 = \alpha \cdot \mathbf{x}_2$, причому $\alpha \geq 0$, коли вектори напрямлені в один бік і $\alpha \leq 0$, коли вони напрямлені в різні боки (нульовий вектор не має певного напрямку). Переписавши

рівність у вигляді $1 \cdot \mathbf{x}_1 - \alpha \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, переконуємося в тому, що існує нетривіальна ($\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$) лінійна комбінація векторів системи.►

1.33. Приклад. Два неколінеарні геометричні вектори утворюють систему лінійно незалежних векторів $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}(\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2)$.

◄ Припустимо протилежне: нехай вектори системи $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}(\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2)$ лінійно залежні. Тоді існує нетривіальна лінійна комбінація $\alpha^1 \mathbf{x}_1 + \alpha^2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$. Оскільки один з коефіцієнтів (для визначеності, α^1) не дорівнює нулю, вектори системи пов'язані рівністю $\mathbf{x}_1 = -(\alpha^2 / \alpha^1) \mathbf{x}_2$, з якої випливає, що вони колінеарні, всупереч вихідному припущенню.►

§ 7. Властивості лінійно залежних та лінійно незалежних векторів

1.34. Властивість. Критерій лінійної залежності векторів: для того, щоб вектори системи $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,k}} (k \geq 2)$ були лінійно залежними, необхідно і достатньо, щоб хоч один з векторів системи був лінійною комбінацією інших.

◄ **Необхідність.** Нехай вектори $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,k}}$ лінійно залежні. Тоді існує нетривіальна лінійна комбінація цих векторів, яка дорівнює нульовому вектору: $\alpha^i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$. Вектори сукупності завжди можна пронумерувати таким чином, що $\alpha^1 \neq 0$. В такому разі $\mathbf{x}_1 = -(\alpha^j / \alpha^1) \mathbf{x}_j (j = \overline{2,k})$.

Достатність. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $\mathbf{x}_1 = -\alpha^j \mathbf{x}_j (j = \overline{2,k})$. В такому разі існує нетривіальна лінійна комбінація, яка дорівнює нульовому вектору:►

1.35. Властивість. Якщо до системи векторів $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,k}}$ входить нульовий вектор, ці вектори лінійно залежні.

◀ Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $\mathbf{0} = \mathbf{x}_1$. Тоді існує нетривіальна лінійна комбінація, яка дорівнює нульовому вектору:

$$1 \cdot \mathbf{x}_1 + 0 \cdot \mathbf{x}_1 + 0 \cdot \mathbf{x}_2 + \dots + 0 \cdot \mathbf{x}_k = \mathbf{0}. \blacktriangleright$$

1.36. Властивість.³ Якщо будь-яка підсистема векторів системи $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,k}}$ лінійно залежна, то і вся система лінійно залежна.

◀ Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що вектори лінійно-залежної підсистеми мають номери від 1 до $s < k$. Тоді існує нетривіальна лінійна комбінація векторів підсистеми $\alpha^j \mathbf{x}_j = \mathbf{0} \ (j = \overline{1,s})$. Побудуємо нетривіальну лінійну комбінацію векторів всієї системи, яка дорівнює нульовому вектору:

$$\alpha^j \mathbf{x}_j + \sum_{m=s+1}^k 0 \cdot \mathbf{x}_m = \mathbf{0}.$$

Існування цієї лінійної комбінації доводить наведене твердження. ▶

1.37. Властивість. Будь-яка підсистема векторів лінійно незалежної системи $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,k}}$ сама є лінійно незалежною.

◀ Припустимо протилежне. Тоді, згідно властивості 1.36, система $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,k}}$ є лінійно залежною, всупереч вихідній умові. ▶

§ 8. Вимірність векторного простору

1.38. Означення. Під вимірністю векторного простору будемо розуміти максимальну кількість лінійно незалежних векторів, які можна знайти в цьому просторі.

³ Властивість 1.35 є окремим випадком Властивості 1.36.

Іншими словами, в n -вимірному просторі обов'язково існують системи n лінійно незалежних векторів, а будь-які $n + 1$ векторів – лінійно залежні.

Дуже важливим (в тому числі, для теоретичної фізики) є випадок, коли векторний простір має *нескінченну* вимірність. Це означає, що коли можливо знайти в такому просторі систему N лінійно незалежних векторів, в ньому завжди знайдеться вектор, який не буде лінійною комбінацією векторів цієї системи. На щастя, знання та навички, здобуті при вивченні просторів скінченної вимірності, дозволяють успішно розв'язувати і задачі, в яких використовується поняття нескінченно вимірного простору. Тому надалі ми будемо здебільшого розглядати векторні простори скінченної вимірності n і позначати їх $\mathcal{L}_n$.

1.39. Приклад. В нульовому просторі немає лінійно незалежних векторів (див. приклад 1.30), тому умовно вважають, що вимірність нульового простору дорівнює нулю.

1.40. Приклад. Множина всіх геометричних векторів на прямій лінії є одновимірним простором. Всі геометричні вектори на площині утворюють двовимірний простір. Множина всіх геометричних векторів, що вивчаються у шкільному курсі стереометрії є тривимірним простором.

1.41. Приклад. Простір матриць порядку $n \times 1$ (див. приклад 1.10) має вимірність n і називається *n -вимірним арифметичним простором*.

◀ Це буде доведено при розгляді прикладу 1.45. ▶

1.42. Приклад. Простір функцій однієї змінної ξ , означених і неперервних на відріжку $[\xi_1, \xi_2]$, є нескінченновимірним векторним простором.

◀ Щоб упевнитися в цьому, розглянемо систему $N + 1$ степеневих функцій $f_i(\xi) = \xi^i, 0 \leq i \leq N$, N – будь-яке додатне ціле число.⁴ Лінійна комбінація цих функцій (векторів) є поліномом

$$\mathcal{P}_N = \sum_{i=0}^N \alpha^i \xi^i.$$

Нульовим вектором у просторі поліномів є поліном, всі коефіцієнти якого дорівнюють нулю (див. приклад 1.12), і іншого нульового вектора немає (наслідок 1.15). Отже, жодна з *нетривіальних* лінійних комбінацій $\alpha^i f_i(\xi)_{i=0, \overline{N}}$ не дорівнює нулю, а тому система $N + 1$

функцій $\{f_i(\xi)\}_{i=0, \overline{N}}$ лінійно незалежна. Таким чином, вимірність простору функцій однієї змінної ξ , означених і неперервних на відрізьку $[\xi_1, \xi_2]$, перевищує *будь-яке* число N , тобто є нескінченною.

§ 9. Базис у скінченновимірному векторному просторі

1.43. Означення. Базисом в n -вимірному векторному просторі називають *впорядковану* систему n лінійно незалежних векторів цього простору.

1.44. Приклад. У тривимірному просторі геометричних векторів найчастіше використовують для розв'язання конкретних задач базис утворений попарно перпендикулярними векторами одиничної довжини $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ та $\mathbf{k}$. Ці вектори задовольняють означенню базису, тому що а) їх кількість дорівнює вимірності простору; б) вони утворюють *впорядковану* сукупність переставлення двох з них $\mathbf{i} \leftrightarrow \mathbf{j}$, $\mathbf{i} \leftrightarrow \mathbf{k}$, або $\mathbf{j} \leftrightarrow \mathbf{k}$ перетворює так звану "праву" трійку векторів на "ліву", і навпаки⁵; в) вони лінійно незалежні: будь-яка лінійна комбінація векторів $\mathbf{j}$ та $\mathbf{k}$ є вектором, який обов'язково належить площині $(\mathbf{j}, \mathbf{k})$, а значить, $\mathbf{i}$ не є лінійною комбінацією $\mathbf{j}$ та $\mathbf{k}$; у такий саме спосіб

⁴ В цьому прикладі ξ^i слід розуміти як ξ у степені i .

⁵ Поняття "правої" та "лівої" системи векторів буде докладно розглянуто в Частині III.

переконуємося, що жоден з цих векторів не є лінійною комбінацією двох інших і критерій лінійної залежності не виконується.

1.45. Приклад. В якості базису в арифметичному просторі, що складається з матриць порядку $n \times 1$ зручно використовувати вектори⁶

$$|e_1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |e_2\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, |e_{n-1}\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |e_n\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Згідно правил додавання матриць і множення матриці на число, довільний вектор арифметичного простору

$$|x\rangle \equiv \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-1} \\ x^n \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів $|e_i\rangle$:

$$|x\rangle = x^i |e_i\rangle = x^1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

⁶ З методичною ціллю нижче застосовано позначення векторів арифметичного простору, вперше запропоновані Полем Діраком. Зручність цих позначень полягає в тому, що вектор-стовпчик $|x\rangle$ важко переплутати з вектор-рядочком $\langle x| \equiv (x^1 \ x^2 \ \dots \ x^{n-1} \ x^n)$, а добуток $\langle x|y\rangle$, який є числом, з добутком $|y\rangle\langle x|$, який є матрицею порядку n . Позначення Дірака широко застосовуються у сучасній літературі з квантової механіки, квантової оптики, фізики твердого тіла, тощо.

Вектор $|x\rangle$ дорівнює нульовому вектору

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

коли всі коефіцієнти x^i дорівнюють нулю (див. приклад 1.10). Звідси випливає, що вектори $|e_i\rangle$ лінійно незалежні, а система векторів $|x\rangle, |e_i\rangle$ лінійно залежна. Отже, вимірність простору матриць порядку $n \times 1$ дорівнює n , причому вектори $|e_i\rangle$ утворюють базис в цьому просторі.

1.46. Приклад. Сукупність всіх дійсних матриць порядку 2×2 є чотиривимірним простором. В якості базису можна обрати матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

* * *

У подальшому будемо позначати систему базисних векторів в n -вимірному просторі як $\{\mathbf{e}_i\}_{i=\overline{1,n}}$, або подавати у вигляді матриць-рядка $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \equiv (\mathbf{e}_i) \equiv \langle \mathbf{e} |$. (Лінійні операції з матрицями, елементами яких є вектори, виконуються за тими ж правилами, що й операції з числовими матрицями). Надалі, якщо не вказано інше, будемо вважати, що всі індекси, які будуть зустрічатися, набувають значень від 1 до n .

§ 10. Координати вектора

Розглянемо систему векторів $\{\mathbf{x}, \{\mathbf{e}_i\}\}$, що складається з довільного вектора простору $\mathcal{L}_n$ і базису у цьому просторі. Ця система містить $n+1$ вектор і тому є лінійно залежною. Це значить, що існує нетривіальна лінійна комбінація векторів системи, яка дорівнює

нульовому вектору: $\alpha \mathbf{x} + \alpha^i \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$. Якби коефіцієнт α дорівнював нулю, звідси випливало б, що існує нетривіальна комбінація векторів базису, яка дорівнює нулю, що неможливо з огляду на лінійну незалежність базисних векторів. Таким чином, α не дорівнює нулю, і довільний вектор $\mathbf{x}$ простору $\mathcal{L}_n$ може бути представлений у вигляді лінійної комбінації векторів базису:

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i, \quad (1.3)$$

де $x^i = -\alpha^i \mathbf{e}_i / \alpha$. Вираз (1.3) називають *розкладом вектора $\mathbf{x}$ по векторах базису*.

1.47. Означення. Коефіцієнти розкладу вектора по векторах базису $\{\mathbf{e}_i\}$ називають *координатами* цього вектора в базисі $\{\mathbf{e}_i\}$, тобто x^i – i -та координата вектора $\mathbf{x}$ в базисі $\{\mathbf{e}_i\}$.

Координати вектора $\mathbf{x}$ можна подати у вигляді вектор-стовпчика (1.1), який в такому разі називають координатним стовпчиком цього вектора. Отже, розклад (1.3) можна записати у вигляді

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{e} | x \rangle = (\mathbf{e}_i) (x^i). \quad (1.4)$$

Добуток $\langle \mathbf{e} | x \rangle$ є вектором, оскільки елементами матриці-рядочка $\langle \mathbf{e} |$ є вектори. (На відміну від цього, добуток $\langle y | x \rangle$ числової матриці-рядочка $\langle y |$ на координатний стовпчик $|x \rangle$ є числом).

§ 11. Основні властивості координат вектора

1.48. Властивість. В заданому базисі $\{\mathbf{e}_i\}$ кожному вектору відповідає один і лише один координатний стовпчик.

◀ Для доведення прямого твердження припустимо протилежне: нехай

$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ та $\mathbf{x} = \bar{x}^i \mathbf{e}_i$. Тоді $\sum_i (x^i - \bar{x}^i) \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$. Оскільки базисні

вектори лінійно незалежні, $x^i - \bar{x}^i = 0, \forall i$, а отже, $x^i = \bar{x}^i, \forall i$.

Доведення оберненого твердження є тривіальним.►

1.49. Зауваження. У різних базисах одному й тому ж вектору відповідають різні координатні стовпчики.

Тепер ми бачимо, що в заданому базисі існує *взаємно однозначна відповідність* між векторами, та координатними стовпчиками, а тому будь-яка рівність, що є справедливою для векторів, справджується також для відповідних координатних стовпчиків.⁷ Звідси випливають наступні наслідки.

1.50. Наслідок. Критерій рівності векторів: два вектори $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ та $\mathbf{y} = y^i \mathbf{e}_i$ дорівнюють один одному тоді й лише тоді, коли $x^i = y^i, \forall i$. (Іншими словами, якщо вектори рівні, вони мають однакові координати в заданому базисі, і навпаки, якщо відповідні координати векторів однакові, ці вектори дорівнюють один одному).

1.51. Наслідок. Координатний стовпчик суми векторів дорівнює сумі координатних стовпчиків векторів-доданків: $|x + y\rangle = |x\rangle + |y\rangle$.

1.52. Наслідок. Координатний стовпчик добутку вектора на число дорівнює добутку координатного стовпчика даного вектора на це число: $|\alpha x\rangle = \alpha |x\rangle$.

1.53. Наслідок. Для лінійної залежності векторів системи $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1, \overline{k}}$ необхідно і достатньо, щоб їх координатні стовпчики були лінійно залежними.

⁷ За термінологією, яка застосовується в теорії груп та квантовій механіці, кажуть, що координатні стовпчики здійснюють *зображення* будь-якого векторного простору в арифметичний простір.

1.54. Наслідок. Для лінійної незалежності векторів системи $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1,k}$ необхідно і достатньо, щоб їх координатні стовпчики були лінійно незалежними.

§ 12. Заміна базису

Розглянемо два базиси $\{\mathbf{e}_i\}$ та $\{\mathbf{e}'_i\}$ у просторі $\mathcal{L}_n$. Надзвичайно важливою з практичної точки зору є така задача: за відомими координатами $|x\rangle$ вектора $\mathbf{x}$ у базисі $\{\mathbf{e}_i\}$ знайти координати $|x'\rangle$ цього ж самого вектора у базисі $\{\mathbf{e}'_i\}$. Щоб розв'язати цю задачу, скористуємося тим, що кожен з векторів штрихованого базису, як і будь-який вектор простору $\mathcal{L}_n$, може бути розкладений в базисі $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\mathbf{e}'_i = t_i^j \mathbf{e}_j, \quad | \quad (1.5)$$

де t_i^j — j -та координата i -го штрихованого базисного вектора в нештрихованому базисі.

1.55. Означення. Квадратну матрицю $\mathbf{T}$ з елементами t_i^j називають *матрицею переходу* від базису $\{\mathbf{e}_i\}$ до базису $\{\mathbf{e}'_i\}$:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_1^1 & \cdots & t_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ t_1^n & \cdots & t_n^n \end{pmatrix}.$$

Порядок матриці переходу вочевидь дорівнює вимірності простору. Співвідношення (1.5) між векторами двох різних базисів зручно подати у матричній формі:

$$|\mathbf{e}'\rangle = |\mathbf{e}\rangle \mathbf{T}. \quad | \quad (1.6)$$

Зазначимо найважливіші властивості матриці переходу.

1.56. Властивість. j -й стовпчик матриці переходу є координатним стовпчиком $|t_j\rangle$ базисного вектора $\mathbf{e}'_j$ у базисі $\{\mathbf{e}_i\}$.

◀ Впливає з означення 1.43. ▶

1.57. Властивість. Матриця переходу є невиродженою (неособливою) матрицею.

◀ Матрицю $\mathbf{T}$ з елементами t_i^j називають *невиродженою* (неособливою) коли існує *обернена* матриця $\mathbf{T}^{-1}$ з елементами $\tilde{t}_i^j = A_i^j / \det \mathbf{T}$ (A_i^j – алгебраїчне доповнення елемента t_i^j , $\det \mathbf{T}$ – визначник матриці переходу). Отже, щоб довести дане твердження, досить довести, що визначник матриці переходу не дорівнює нулю. Для цього згадаємо, що необхідна і достатня умова рівності детермінанта нулю полягає в лінійній залежності стовпчиків відповідної матриці. Для $\det \mathbf{T}$ ця умова не виконана, оскільки з лінійної незалежності базисних векторів $\{\mathbf{e}'_j\}$, наслідку 1.53 та властивості 1.56 впливає лінійна незалежність стовпчиків $|t_j\rangle$ матриці $\mathbf{T}$. ▶

1.58. Властивість. Послідовне перетворення базисів $\langle \mathbf{e}' | = \langle \mathbf{e} | \mathbf{T}_1$, $\langle \mathbf{e}'' | = \langle \mathbf{e}' | \mathbf{T}_2$ рівносильне перетворенню $\langle \mathbf{e}'' | = \langle \mathbf{e} | \mathbf{T}$ з матрицею $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2$.

◀ Доведення цього твердження читачеві корисно провести самостійно, виходячи з виразу (1.6). ▶

1.59. Властивість. Оборнена заміна базису $\{\mathbf{e}'_i\} \rightarrow \{\mathbf{e}\}$ здійснюється за допомогою матричної рівності

$$\langle \mathbf{e} | = \langle \mathbf{e}' | \mathbf{T}^{-1}. \quad (1.7)$$

◀ Доведення: з (1.6) впливає, що $\langle \mathbf{e} | \mathbf{T} = \langle \mathbf{e}' |$, а отже, $\langle \mathbf{e} | \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} = \langle \mathbf{e}' | \mathbf{T}^{-1}$. Зваживши на те, що $\mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} = E$, де E – одинична матриця, одержуємо рівність (1.7). ▶

Тепер у нас є все необхідне, щоб розв'язати поставлену задачу про співвідношення між координатами $|x\rangle$ та $|x'\rangle$ вектора $\mathbf{x}$ у двох різних базисах. У першому базисі $\mathbf{x} = \langle \mathbf{e} | x \rangle$, а у другому $\mathbf{x} = \langle \mathbf{e}' | x' \rangle$.

Таким чином,

$$\langle \mathbf{e} | x \rangle = \langle \mathbf{e}' | x' \rangle. \quad | \quad (1.8)$$

У той самий час, з (1.7) виходить, що

$$\langle \mathbf{e} | x \rangle = \langle \mathbf{e}' | \mathbf{T}^{-1} | x' \rangle. \quad (1.9)$$

Порівнявши вирази (1.8) та (1.9) знаходимо шукане співвідношення:

$$|x'\rangle = \mathbf{T}^{-1} |x\rangle. \quad | \quad (1.10)$$

Результат (1.1) може бути поданий у вигляді теореми.

1.60. Теорема. Перетворення координат вектора здійснюється за допомогою матриці *оберненої* до матриці переходу $\mathbf{T}$.

1.61. Теорема. Нехай задано певний базис $\{\mathbf{e}_i\}$. Кожна невідроджена матриця $\mathbf{T}$ є матрицею переходу від цього базису до деякого базису $\{\mathbf{e}'_i\}$. (В окремому випадку, коли $\mathbf{T}$ – одинична матриця, $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}'_i, \forall i$).

◀ Доведення теореми базується на тому, що детермінант невідродженої матриці не дорівнює нулю, а отже, її стовпчики лінійно незалежні і їх можна вважати координатними стовпчиками лінійно незалежних векторів $\{\mathbf{e}'_i\}$, про які йдеться в умові теореми. ▶

1.62. Зауваження. Формули (1.5), (1.6) можна розглядати, з одного боку, як співвідношення між векторами двох *заданих* базисів ("пасивна" точка зору, або точка зору "*alias*"), а з іншого боку, як *правило*, за яким базис $\{\mathbf{e}_i\}$ перетворюється на базис $\{\mathbf{e}'_i\}$, причому це правило формалізується матрицею $\mathbf{T}$

("активна" точка зору або точка зору "*alibi*"). Точка зору *alibi* впритул підводить нас до поняття *лінійного оператора*⁸, яке часто зустрічається в різних розділах математики та фізики.

§ 13. Приклади застосування методу координат у фізиці

У попередньому розділі ми упевнилися в тому, що коли обрано конкретний базис, існує взаємно однозначна відповідність між векторами та їх координатами x^i . Завдяки цьому, виникає можливість задавати векторні величини та знаходити співвідношення між ними за допомогою звичайних чисел x^i та функцій цих чисел. Такий спосіб вивчення векторних величин називають *методом координат*. Він є надзвичайно цінним для фізики та інженерної справи, бо врешті-решт результат дії більшості (якщо не всіх) фізичних приладів та технічних контролюючих пристроїв полягає у визначенні певних чисел (як у випадку, наприклад, цифрового вольтметра) або числових функцій скалярного аргументу (як у випадку осцилографа чи будь-якого приладу, до якого підключено самописець). В тих випадках, коли ці числа перетворюються при переході від однієї системи відліку до іншої за допомогою співвідношень $x'^i = a^i_j x^j$, подібних до (1.10), їх можна вважати координатами вектора x . Не буде перебільшенням сказати, що у фізиці поняття координати є первинним, а поняття вектора похідним від нього. Для пояснення цієї думки наведемо конкретні приклади з різних галузей фізики.

• Механіка

Вектори фазового простору. Розглянемо механічну систему, що описується декартовими або кутовими координатами $q \equiv \{q^i\}_{i=1,S}$ та відповідними імпульсами $p \equiv \{p^i\} = \partial L / \partial \dot{q}^i$, де $L(q, \dot{q})$ –

⁸ Найважливіші відомості з теорії лінійних операторів можна знайти, наприклад, у книжці *Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре.* – М., 1971.

функція Лагранжа (різниця кінетичної та потенціальної енергій системи), $\dot{q} = dq / dt$, S – кількість ступенів свободи. Фізичний стан системи повністю характеризується вектором $\mathbf{x}$ з координатами x^i , означеними у такий спосіб:

$$x^i = \begin{cases} q^i, & 1 \leq i \leq S, \\ p^i, & S+1 \leq i \leq 2S. \end{cases}$$

Множина всіх векторів $\mathbf{x}$ утворює $2S$ -вимірний *фазовий простір* механічної системи. У конкретному випадку системи N незв'язаних матеріальних точок вимірність фазового простору дорівнює $6N$.

4-вектори. Важливими поняттями релятивістської механіки є поняття 4-радіус-вектора та 4-імпульса матеріальної точки (елементарної частинки), які *означаються* як вектори з координатами $x^i = (ct, x, y, z)$ та $p^i = (\mathcal{E}/c, p^x, p^y, p^z) \equiv (\mathcal{E}/c, \mathbf{p})$, відповідно. (Тут x, y, z – координати радіус-вектора частинки в геометричному просторі, t – момент часу в який визначається її просторове положення, $\mathcal{E}$ та $\mathbf{p}$ – енергія та звичайний імпульс частинки, c – швидкість світла). Ці вектори широко застосовуються, наприклад, у фізиці високих енергій, оскільки вони дуже спрощують описання процесів зіткнення елементарних частинок. Спрощення пов'язане з тим, що в таких процесах зберігається (лишається сталою) величина $p^2 \equiv p^i p_i$, де $p_i = (\mathcal{E}/c, -\mathbf{p})$. Дійсно, враховуючи відомі релятивістські формули для енергії та імпульсу частинки з масою спокою m та швидкістю $\mathbf{v}$

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad v \equiv |\mathbf{v}|,$$

легко помітити, що за будь-яких значень швидкості частинки $p^2 = m^2 c^2 = \text{const}$, а тому, як би не відбувалося зіткнення даної частинки з іншою частинкою, її 4-імпульс змінитися не може.

• Електродинаміка

Для спрощення рівнянь електродинаміки часто вводять до розгляду поняття 4-потенціала та 4-струму. Ці величини означаються як вектори з координатами $A^i = (\varphi, A^x, A^y, A^z) \equiv (\varphi, \mathbf{A})$ та $j^i = (c\rho, j^x, j^y, j^z) \equiv (c\rho, \mathbf{j})$, відповідно. Координати цих векторів мають наступний фізичний зміст: $\mathbf{A}$ – векторний потенціал, пов’язаний з магнітним полем $\mathbf{H}$ рівністю

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A};$$

φ – скалярний потенціал, який визначається з рівняння

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi;$$

ρ – густина електричного заряду, $\mathbf{j}$ – густина струму.

За допомогою 4-потенціалу та 4-струму вдається спростити запис законів електродинаміки. Наприклад, закон збереження заряду у підручниках із загальної фізики звичайно подають у вигляді рівняння неперервності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0,$$

а в курсі теоретичної фізики часто записують еквівалентне до нього рівняння

$$\frac{\partial j^i}{\partial t^i} = 0,$$

яке є стислим записом закону збереження заряду.

Підкреслимо, що в усіх наведених вище прикладах простий фізичний зміст мають координати векторів, а самі вектори слід розглядати як суто формальні поняття, введення яких у розгляд спрощує математичне описання механічних систем.

• Квантова теорія

Серйозне вивчення квантової теорії в її сучасному формулюванні можливе лише після ознайомлення з повним університетським курсом лінійної алгебри. Оскільки вище було викладено лише початкові розділи цього курсу, зараз можна лише *спробувати* охарактеризувати в загальних рисах місце поняття векторного простору у загальній будові квантової механіки.

В основі квантової механіки лежить поняття стаціонарного стану фізичної системи, як такого її стану, який характеризується певними значеннями фізичних величин. Серед цих величин найважливішою є енергія, тому для визначеності будемо говорити про стаціонарні *енергетичні стани* і вважатимемо, що енергія системи може набувати лише дискретних значень E_n , $n = 1, 2, 3, \dots$. Дозволені значення енергії називають енергетичними рівнями фізичної системи. Квантова теорія вивчає системи як з обмеженою так і з нескінченною кількістю рівнів.

Згідно з основними постулатами квантової механіки кожному енергетичному стану можна поставити у відповідність *вектор стану*, причому для векторів стану є справедливим *принцип суперпозиції*, за яким лінійні комбінації векторів стану також є векторами станів. Таким чином, вектори стану утворюють векторний простір $\mathcal{L}$.

Далі, всі енергетичні стани розділяються на два типи. Якщо фізична система знаходиться в енергетичному стані першого типу, можна стверджувати, що в результаті вимірювання її енергії буде одержано одне з дозволених значень енергії E_n . (Вектори станів першого типу звичайно позначають символом $|n\rangle$). Натомість, для станів другого типу існує імовірність одержання декількох із дозволених значень енергії. З формального точки зору різниця між станами двох типів пояснюється таким чином. Вектори $|n\rangle$ енергетичних станів

першого типу утворюють базис у просторі $\mathcal{L}$. Це означає, що довільний вектор простору може бути поданий у вигляді розкладу за векторами базису:

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle.$$

Вектори $|\psi\rangle$, для яких розклад містить більше одного доданка, відповідають станам другого типу. Імовірність отримання в результаті вимірювання значення енергії E_n дорівнює квадрату модуля відповідного коефіцієнта розкладу: $P_n = |c_n|^2$. Отже, сума всіх величин $|c_n|^2$ обов'язково має дорівнювати одиниці.