

Ю. В. Придатченко, В. А. Львов, С. В. Єфименко

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

2. 1. Основні завдання аналітичної геометрії

Можна накреслити або уявити собі незлічену кількість різних ліній на площині та поверхонь у тривимірному геометричному просторі, однак, в науковому плані є важливими лише окремі їх різновиди, наприклад, прямі лінії, кола, еліпси, та площини, сфери, еліпсоїди. Лінії та поверхні, що належать до кожного з різновидів, є геометричними місцями точок, які задовольняють певну специфічну умову. Цю умову можна сформулювати або логічно (за допомогою слів), або аналітично (у вигляді рівняння).

2. 1. Означення. Рівнянням даного геометричного місця точок називають таке рівняння, яке

- а) пов'язує між собою координати геометричних точок;
- б) справджується для будь-якої точки, що належить до даного геометричного місця точок;
- в) не справджується для жодної точки, яка не належить до даного геометричного місця точок.

Два основоположні завдання аналітичної геометрії – пряме та обернене – полягають в тому щоб

- i) знайти рівняння геометричного місця точок, охарактеризованого логічно (за допомогою слів);
- ii) логічно охарактеризувати геометричне місце точок, координати яких задовольняють задане рівняння.

Пояснимо сказане на простих прикладах.

2. 2. Приклад. Знайти рівняння геометричного місця точок координатної площини XOY , рівновіддалених від точки $O(x_0, y_0)$ на відстань R .

Даний приклад ілюструє пряме завдання аналітичної геометрії, тобто, завдання i). В даному випадку воно виконується за допомогою наслідку 1.43, згідно з яким відстань d від точки O до довільної точки площини $P(x, y)$ визначається формулою

$$d(x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Із заданої специфічної умови $d(x, y) = R$ випливає загально відоме рівняння кола

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \quad (2.1)$$

Жодна точка, що не лежить на колі, рівнянню (2.1) не задовольняє.

2. 3. Приклад. Рівняння геометричного місця точок координатної площини XOY має вигляд $x = 1$. Охарактеризувати це місце точок.

Даний приклад ілюструє обернене завдання аналітичної геометрії,

тобто, завдання ii). Зі шкільного курсу математики відомо, що наведеному вище рівнянню задовольняють координати всіх точок прямої лінії, яка проходить паралельно до осі ординат на одиничній відстані до неї. Координати жодної іншої точки площини XOY цьому рівнянню не задовольняють.

2.4. Приклад. Рівняння геометричного місця точок тривимірного геометричного простору має вигляд $x = 1$. Охарактеризувати це місце точок.

Як показав попередній приклад, наведеному вище рівнянню задовольняють координати всіх точок прямої лінії на площині XOY , що проходить паралельно до осі ординат на одиничній відстані до неї. Однак, дане рівняння не є рівнянням цієї прямої лінії у тривимірному просторі, оскільки воно справджується не лише для її точок, а й для всіх точок площини, що проходить паралельно до площини XOY на одиничній відстані до неї. Отже, рівняння $x = 1$ є рівнянням площини у просторі.

Приклади 2.3 та 2.4 ілюструють важливість вимоги в) з означення 2.1.

2.5. Зауваження. Буває, що координати жодної точки геометричного простору не задовольняють задане рівняння; тоді кажуть, що це рівняння описує уявне місце точок. Прикладом такого рівняння є $x^2 + y^2 + z^2 = -1$. Буває також, що заданому рівнянню задовольняють

координати відокремлених точок. Наприклад, рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ є рівнянням точки, що лежить на початку координат. Для аналітичної геометрії найбільш важливими є рівняння, яким задовольняють всі точки певних ліній або поверхонь. Згідно з означенням 2.1, такі рівняння називають рівняннями цих ліній або поверхонь.

2.6. Означення. Якщо рівняння лінії (поверхні) є алгебраїчним рівнянням n -го порядку, то саму лінію (поверхню) називають кривою (поверхнею) n -го порядку; якщо рівняння є трансцендентним, то відповідну лінію (поверхню) називають трансцендентною кривою (поверхнею).

Оскільки при зсуві та повороті декартової системи координат відбуваються лінійні перетворення координат геометричних точок, порядок кривої (поверхні) при цих перетвореннях не змінюється. Інакше кажучи, порядок кривої (поверхні) є *інваріантним*¹ відносно зсуву та повороту декартової системи координат.

¹ Історично ця назва походить з латини, але широко застосовується і в англійській мові, яка згодом замінила латину в фізико-математичній літературі: invariant – такий, що не змінюється (*англ.*).

2. 2. Прямі лінії та площини

2.2.1. Прямі лінії на площині

Розглянемо деяку лінію (не обов'язково пряму) на площині (рис. 2.1).

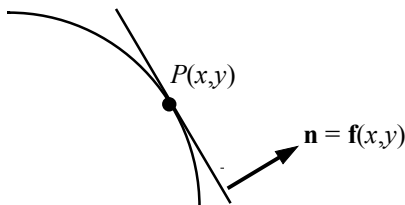


Рис. 2.1

Проведемо дотичну до цієї лінії в точці P з координатами (x, y) . Побудуємо вектор $\mathbf{n}$, перпендикулярний до дотичної. Цілком очевидно, що зміна координат точки дотику веде, взагалі кажучи, до зміни напрямку вектора $\mathbf{n}$, тобто, $\mathbf{n} = \mathbf{f}(x, y)$. І лише в одному випадку цей вектор буде сталим, а саме, коли лінія, до якої проведено дотичну, буде прямою. Таким чином, умова $\mathbf{n} = \text{const}$ є специфічною для прямої лінії. Але, визначивши напрямок перпендикулярного до прямої вектора $\mathbf{n}$, ще не можна отримати рівняння прямої, оскільки зазначену вище умову задовольняє безліч паралельних прямих. Щоб вибрати з цих прямих одну, треба поставити якусь додаткову вимогу – наприклад, щоб пряма проходила крізь фіксовану точку з радіус-вектором $\mathbf{r}_0$. Якщо $\mathbf{r}$ – радіус-вектор довільної точки прямої, то вектор $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ лежить на прямій (рис. 2.2), а тому він напрямлений перпендикулярно до $\mathbf{n}$. І навпаки, якщо $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \perp \mathbf{n}$, то точка з

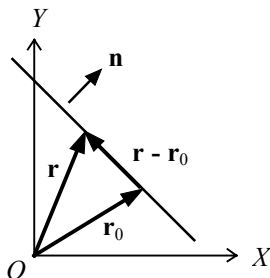


Рис. 2.2

радіус-вектором $\mathbf{r}$ лежить на обраній прямій. Критерієм перпендикулярності двох векторів є рівність нулю їх скалярного добутку, внаслідок чого *векторне рівняння прямої на площині* має вигляд

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (2.2)$$

Розкладемо вектори $\mathbf{r}$ та $\mathbf{n}$ по ортах прямокутної системи координат

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y, \quad \mathbf{n} = A\mathbf{e}_x + B\mathbf{e}_y, \quad (2.3)$$

підставимо ці розклади в рівняння (2.1) та позначимо $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n} \equiv -C$. Після цього одержимо так зване *загальне рівняння прямої на площині*:

$$Ax + By + C = 0, \quad (2.4)$$

Якщо напрямок прямої та фіксована точка на ній задані, то коефіцієнти A , B та C відомі, а отже, загальне рівняння (2.4) пов'язує між собою декартові координати x та y довільної точки прямої.

2.7. Зауваження. Те, що коефіцієнти A та B загального рівняння прямої на площині є координатами вектора нормалі, а коефіцієнт C визначається радіус-вектором фіксованої точки на прямій, дозволяє легко розв'язувати різноманітні задачі аналітичної геометрії, тому про це обов'язково слід пам'ятати.

При розв'язанні задач аналітичної геометрії буває зручно використовувати замість загального рівняння прямої на площині рівносильні до нього рівняння. Найбільш наочним за своїм змістом, і тому, "популярним" серед студентів є *рівняння з кутовим коефіцієнтом*, яке легко дістати із загального рівняння (2.4), поділивши обидві його частини на коефіцієнт B і перегрупувавши доданки. Рівняння з кутовим коефіцієнтом має вигляд

$$y = kx + b, \quad (2.5)$$

де кутовий коефіцієнт $k = -A/B$ дорівнює тангенсу кута нахилу даної прямої до осі абсцис, а коефіцієнт $b = -C/B$ дорівнює ординаті точки перетину прямої з віссю ординат (рис. 2.3).

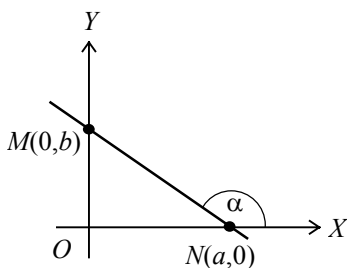


Рис. 2.3

Зі шкільного курсу математики відомо, що крізь дві точки на площині

можна провести лише одну пряму. Розглянемо дві точки $P_1(x_1, y_1)$ та $P_2(x_2, y_2)$ на прямій, рівняння якої має вигляд (2.5). Підставлення координат цих точок до рівняння перетворює його на тотожність, а отже,

$$y_1 \equiv kx_1 + b, \quad (2.6)$$

$$y_2 \equiv kx_2 + b. \quad (2.7)$$

З виразів (2.5) та (2.6) випливає, що

$$y - y_1 = k(x - x_1), \quad (2.8)$$

а з (2.6) та (2.7) виходить, що

$$y_1 - y_2 = k(x_1 - x_2) \quad (2.9)$$

прирівнявши відношення правих частин рівнянь (2.8) та (2.9) до відношення їх правих частин, знаходимо *рівняння прямої, що проходить крізь дві задані точки*

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} \quad (2.10)$$

В якості корисної вправи читачеві доцільно отримати із загального рівняння (2.4) так зване *рівняння прямої у відрізках*, яке має вигляд

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (2.11)$$

де $a = -A/B$. Назва цього рівняння стає зрозумілою, якщо звернутися до рис. 2.3: параметри a та b дорівнюють за абсолютною величиною довжинам відрізків, які відсікає дана пряма на осях координат.

Якщо пам'ятати про те, що коефіцієнти загального рівняння прямої є координатами вектора нормалі до неї, то легко знайти вираз для косинуса кута φ між двома прямими. При цьому слід пам'ятати, що кутом між прямими називають менший з двох доповняльних кутів, вказаних на рис. 2.4, а отже, кут між прямими вважають гострим, а його косинус – додатним. З рисунку 2.4. та означення скалярного добутку векторів випливає, що

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \quad (2.12)$$

де A_1, B_1 та A_2, B_2 – коефіцієнти загального рівняння першої та другої прямих (відповідно). Скалярний добуток у виразі (2.12) стоїть під знаком модуля, оскільки, на відміну від кута між прямими, кут між нормальми до них може бути як гострим, так і тупим.

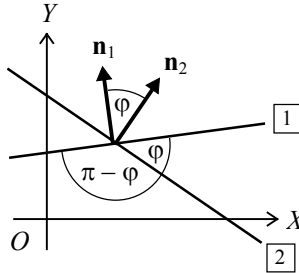


Рис. 2.4

При розв'язанні багатьох задач виникає потреба у знаходженні відстані d від точки з відомими координатами x_1, y_1 до прямої, заданої загальним рівнянням (2.4) з певними коефіцієнтами A, B, C . Це завдання легко виконати за допомогою рис. 2.5, який показує, що відстань d дорівнює

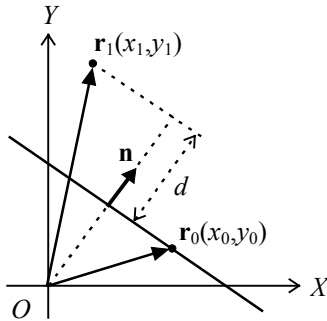


Рис. 2.5

різниці проєкцій² радіус-векторів $\mathbf{r}_1$ та $\mathbf{r}_0$ на напрямок вектора нормалі, тобто

$$d = \left| \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} - \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right| = \left| \frac{Ax_1 + By_1}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

Остаточний алгебраїчний вираз для відстані від точки до прямої записують у такому вигляді:

² Взагалі кажучи, взятих за абсолютною величиною.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (2.13)$$

Оскільки для виведення виразу (2.13) знадобилася спеціальна геометрична побудова, його доцільно запам'ятати, а не виводити наново при розв'язанні тієї чи іншої задачі.

2.2.2. Площини у тривимірному просторі

Рівняння площини можна отримати з міркувань цілком подібних до тих, що були використані в попередньому розділі. Дійсно, розташування площини у просторі стає цілком визначеним, якщо задано вектор нормалі $\mathbf{n}$ та радіус-вектор $\mathbf{r}_0$ однієї з точок площини. Розглянувши радіус-вектор $\mathbf{r}$ довільної точки на площині, доходимо висновку, що вектори $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ та $\mathbf{n}$ перпендикулярні один до одного, оскільки перший із них лежить на площині, а другий – за означенням – перпендикулярний до неї (рис. 2.6).

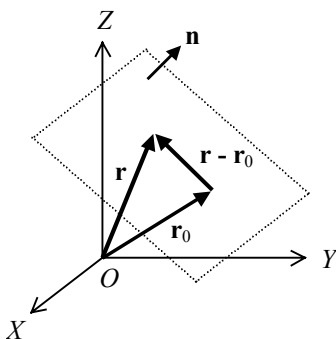


Рис. 2.6

Отже, *векторне рівняння площини у тривимірному просторі* має вигляд (2.2), але тепер вектори $\mathbf{n}$ та $\mathbf{r}$ мають бути розкладені не по двох, а по трьох ортах, тобто,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{n} = A\mathbf{e}_x + B\mathbf{e}_y + C\mathbf{e}_z. \quad (2.14)$$

Підставлення розкладів (2.14) у рівність (2.2) веде до наступного рівняння

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2.15)$$

де введено позначення $D \equiv -\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}$. Це рівняння називають *загальним рівнянням площини*.

Оскільки перші три коефіцієнти загального рівняння дорівнюють координатам вектора нормалі до площини, легко дійти низки важливих висновків.

2.8. Висновок. Якщо один з коефіцієнтів (A, B або C) загального рівняння площини дорівнює нулю, то вектор нормалі спрямований перпендикулярно до координатної осі (x, y або z , відповідно), а отже, площина проходить паралельно до цієї осі. Якщо, у додачу, дорівнює нулю ще й коефіцієнт D , площина містить у собі одну з координатних осей.

2.9. Висновок. Якщо два з коефіцієнтів (для визначеності, A та B) загального рівняння площини дорівнюють нулю, то вектор нормалі колінеарний, а площина – перпендикулярна до координатної осі.

2.10. Висновок. Якщо коефіцієнт D загального рівняння площини дорівнює нулю, то площина проходить крізь початок координат (за будь-яких величин трьох інших коефіцієнтів).

2.11. Висновок. Косинус кута φ між двома площинами дорівнює взятому за модулем косинусу кута між нормальми до них, тому

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \quad (2.16)$$

де сталі A_1, B_1, C_1 та A_2, B_2, C_2 є коефіцієнтами загального рівняння першої та другої площин (відповідно).

Поділивши обидві частини загального рівняння площини (2.15) на $-D$ і позначивши $D/A \equiv -a$, $D/B \equiv -b$ та $D/C \equiv -c$, дістаємо *рівняння площини у відрізках*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (2.17)$$

яке показує, що площина перетинає осі координат у точках $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ та $(0, 0, c)$, а отже, вона "відрізає" на них відрізки завдовжки a, b та c .

Зі шкільного курсу геометрії відомо, що крізь три точки у просторі можна провести одну-єдину площину. Виведемо рівняння площини, яка проходить крізь три задані точки з радіус-векторами $\mathbf{r}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{r}_2(x_2, y_2, z_2)$, та $\mathbf{r}_3(x_3, y_3, z_3)$. Для цього розглянемо радіус вектор довільної точки площини $\mathbf{r}(x, y, z)$ і зважимо на те, що вектори $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ та $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$ лежать у площині, про яку йдеться (подібно до вектора $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ на рис. 2.6), тобто, вони компланарні. Оскільки критерієм компланарності трьох векторів є рівність нулю їх мішаного добутку, векторне рівняння площини, що проходить крізь три задані точки, має вигляд

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0. \quad (2.18)$$

Використовуючи поняття визначника, запишемо це рівняння в декарто-

вих координатах:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.19)$$

При записі рівняння (2.19) був використаний вираз (1.38) для мішаного добутку векторів, заданих декартовими координатами.

2.2.3. Прямі лінії у тривимірному просторі

При виведенні векторного рівняння прямої лінії на площині (у розділі 2.2.1) був використаний той факт, що напрямок будь-якої прямої на площині цілком визначається завданням вектора нормалі до неї. На відміну від цього, у тривимірному просторі існує безліч прямих, нормальних до заданого вектора, а отже, слід використати інший спосіб завдання напрямку. Найбільш очевидний спосіб полягає у завданні *напрямого вектора* $\mathbf{s}$, тобто вектора, паралельного до даної прямої лінії. Крім того, щоб виділити із сімейства прямих, паралельних до прямого вектора одну (дану) пряму, слід поставити умову, що пряма має проходити крізь певну точку (з радіус-вектором $\mathbf{r}_0$). Вектор $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ лежить на прямій, тому він колінеарний із напрямним вектором. Векторний добуток колінеарних векторів дорівнює нулю, отже, рівняння прямої у просторі можна записати у формі векторного рівняння

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{s} = 0. \quad (2.20)$$

Розкладемо напрямний вектор по осях декартової системи координат:

$$\mathbf{s} = l\mathbf{e}_x + m\mathbf{e}_y + n\mathbf{e}_z. \quad (2.21)$$

Виразивши в декартових координатах векторний добуток (2.20), неважко отримати координатну форму векторного рівняння прямої у просторі. Але ще легше зробити це в інший спосіб, а саме, використати очевидний зв'язок між двома колінеарними векторами $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \lambda \mathbf{s}$, де λ – скаляр. З останньої рівності випливає, що

$$x - x_0 = \lambda l, \quad y - y_0 = \lambda m, \quad z - z_0 = \lambda n.$$

Завдяки цьому одержуємо рівняння

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \quad (2.22)$$

які називають *канонічними рівняннями прямої у просторі*. Фактично, формули (2.22) є системою двох алгебраїчних рівнянь першого порядку. Третє рівняння автоматично випливає з перших двох.

Коло пряма проходить паралельно до однієї з координатних осей (для визначеності, OZ), коефіцієнт n , який стоїть у знаменнику одного з

дробів у рівняннях (2.22) дорівнює нулю. В такому разі єдиний шлях "порятунку" системи рівнянь (2.22) полягає в тому, щоб покласти в ній $z = z_0$ і у такий спосіб запобігти діленню скінченного числа на нуль. Отже, рівняння прямої, що проходить паралельно до осі OZ мають вигляд

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \quad z = z_0. \quad (2.23)$$

Пряму у просторі можна задати не лише за допомогою напрямного вектора. Пряма цілком визначається, наприклад, завданням двох точок на ній. Позначимо радіус-вектори цих точок як $\mathbf{r}_1(x_1, y_1, z_1)$ та $\mathbf{r}_2(x_2, y_2, z_2)$. Канонічне рівняння прямої, яка проходить крізь першу точку, виглядає подібно до (2.22), а саме,

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}. \quad (2.24)$$

Оскільки вектор $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ лежить на даній прямій, його можна обрати в якості напрямного вектора, тобто покласти $x_2 - x_1 = l$, $y_2 - y_1 = m$ та $z_2 - z_1 = n$. Тому остаточне рівняння прямої, яка проходить крізь дві задані точки, має такий вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (2.25)$$

При розв'язанні багатьох задач аналітичної геометрії виникає така ситуація, коли пряма у просторі визначається як лінія перетину двох заданих площин, тобто задається загальними рівняннями цих площин

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (2.26)$$

які в такому випадку розглядаються як система рівнянь і називаються загальними рівняннями прямої.

Іноді буває потрібно записати канонічне рівняння прямої у просторі виходячи з відомих загальних рівнянь. Щоб виконати таке завдання, пов'яжемо коефіцієнти загальних рівнянь прямої з параметрами її канонічного рівняння. Для цього візьмемо до уваги, що коефіцієнти $A_{1,2}$

$B_{1,2}$ та $C_{1,2}$ рівнянь (2.26) водночас є координатами векторів нормалі $\mathbf{n}_{1,2}$ до площин, що перетинаються. Векторний добуток цих векторів є паралельним до лінії перетину, тому його можна обрати в якості напрямного вектора цієї лінії і записати $\mathbf{s}(l, m, n) = \mathbf{n}_1(A_1, B_1, C_1) \times \mathbf{n}_2(A_2, B_2, C_2)$. Згідно з виразами (1.36),

$$l = B_1C_2 - B_2C_1, \quad m = A_2C_1 - A_1C_2, \quad n = A_1B_2 - A_2B_1. \quad (2.27)$$

Координати заданої точки x_0, y_0, z_0 , що входять до канонічного рівняння

(2.22), легко визначити із системи загальних рівнянь (2.26), поклавши в ній $z = z_0 = 0$, та розв'язавши її відносно x та y . Над тим, що робити у випадку, коли пряма паралельно до осі OZ , читачеві доцільно поміркувати самостійно.

Кут φ між двома прямими лініями у просторі дорівнює куту α між напрямними векторами цих ліній s_1 та s_2 (якщо кут α гострий), або куту $\pi - \alpha$ (якщо кут α тупий). Тому

$$\cos \varphi = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}, \quad (2.28)$$

де l_1, m_1, n_1 та l_2, m_2, n_2 – координати векторів s_1 та s_2 , тобто коефіцієнти канонічних рівнянь першої та другої прямої (див. (2.22)).

2.12. Зауваження. Результати розділу 2.2 припускають таке узагальнення: щоб визначити підпростір вимірності N_2 у просторі вимірності N_1 необхідно задати $N_1 - N_2$ рівнянь. (В разі прямої на площині $N_1 = 2, N_2 = 1$, в разі площини у просторі або $N_1 = 3, N_2 = 2$, а в разі прямої у просторі $N_1 = 3, N_2 = 1$).

2.3. Криві другого порядку

Криві другого порядку – еліпс, гіпербола та парабола – відомі людям уже понад два тисячоліття. Їх відкриття приписують одному з учнів Платонівської академії – Менехму (IV ст. до н.е.). На його честь ці криві названі тріадою Менехма. Сторіччям пізніше інший грецький математик – Аполлоній присвятив цим кривим велику монографію з восьми книг. Саме Аполлоній назвав елементи тріади Менехма еліпсом, гіперболою та параболою і відкрив їх основні властивості, які й досі є предметом аналітичної геометрії.

З плином часу властивості кривих другого порядку набували дедалі більшого значення у зв'язку з розвитком оптики, механіки, балістики, космонавтики, тощо.

Сучасні математики, на відміну від своїх славнозвісних попередників, озброєні потужним аналітичним методом – методом координат, який дозволяє дуже стисло описати основні властивості кривих другого порядку. Скористаємось цим методом і ми.

2.3.1. Дослідження алгебраїчного рівняння другого порядку для двох декартових координат

Із шкільного курсу геометрії відомо, що в прямокутній декартовій системі координат на площині коло радіуса R з центром в точці з координатами (x_0, y_0) описується рівнянням

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (2.29)$$

Це рівняння є алгебраїчним рівнянням другого порядку відносно змінних x та y . Спробуємо з'ясувати, які ще криві можуть бути описані алгебраїчним рівнянням другого порядку, яке у загальному випадку можна записати у вигляді

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (2.30)$$

Без спеціального дослідження важко сказати, за яких значень коефіцієнтів a_{ij} , ($i, j = 1, 2, 3$) це рівняння зводиться, наприклад, до рівняння кола.

Отже, спробуємо спростити загальне рівняння (2.30) так, щоб зробити очевидними характерні особливості тієї кривої, яку воно описує. Зробимо це шляхом перетворення системи координат. Ступінь спрощення визначатиметься кількістю коефіцієнтів a_{ij} , які в новій системі координат перетворюються на нуль. Почнемо з повороту координатних осей на кут φ проти руху годинникової стрілки. Як відомо (див. 1.47), зв'язок старих координат (x, y) з новими (x', y') визначається формулами

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \quad (2.31)$$

$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$$

Замінивши у рівнянні (2.30) координати (x, y) їх виразами (2.31), знаходимо, що в новій системі координат це рівняння набуває вигляду

$$\tilde{a}_{11}x'^2 + 2\tilde{a}_{12}x'y' + \tilde{a}_{22}y'^2 + 2\tilde{a}_{13}x' + 2\tilde{a}_{23}y' + a_{33} = 0, \quad (2.32)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \sin \varphi \cos \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi, \\ \tilde{a}_{22} &= a_{11} \sin^2 \varphi - 2a_{12} \sin \varphi \cos \varphi + a_{22} \cos^2 \varphi, \\ \tilde{a}_{12} &= (a_{22} - a_{11}) \sin \varphi \cos \varphi + a_{12} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi), \\ \tilde{a}_{13} &= a_{13} \cos \varphi + a_{23} \sin \varphi, \\ \tilde{a}_{23} &= -a_{13} \sin \varphi + a_{23} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Зауважимо, що коефіцієнт a_{33} та сума коефіцієнтів $a_{11} + a_{22}$ залишилися після перетворення координат незмінними, тому ці вирази називають *інваріантами* повороту координатних осей. (Походження такої назви пояснено у розділі 2.1). Тут варто зазначити, що інваріантом будь-якого повороту системи координат є відстань між двома точками.

Розглянемо вираз для коефіцієнту $\tilde{a}_{12}$. Згідно з (2.33) цей коефіцієнт дорівнюватиме нулю коли

$$(a_{22} - a_{11}) \sin \varphi \cos \varphi + a_{12} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 0, \quad (2.34)$$

тобто коли

$$\operatorname{tg} 2\varphi = 2a_{12} / (a_{22} - a_{11}).$$

Оскільки тангенс може набувати значень від мінус до плюс нескінченності, кут, який задовольняє умову (2.34), існує за будь-яких значень коефіцієнтів a_{ij} . Таким чином, має місце наступна теорема.

2.13. Теорема. Завжди існує такий кут повороту прямокутної декартової системи координат, що в повернутій системі координат коефіцієнт $\tilde{a}_{12}$ рівняння (2.32) дорівнює нулю. В цій системі координат рівняння має вигляд

$$\tilde{a}_{11}x'^2 + \tilde{a}_{22}y'^2 + 2\tilde{a}_{13}x' + 2\tilde{a}_{23}y' + a_{33} = 0, \quad (2.35)$$

Для знаходження кута повороту φ замість рівняння (2.34) зручніше користуватись еквівалентним йому квадратним рівнянням для $t = \operatorname{tg} \varphi$, тобто, рівнянням

$$a_{12}t^2 + (a_{11} - a_{22})t - a_{12} = 0 \quad (2.36)$$

Дискримінант цього рівняння додатний, а два його корені t_1 та t_2 задають два взаємно перпендикулярних напрямки, тому за кут φ можна обрати

арктангенс будь-якого з коренів.

Рівняння (2.35) припускає подальше спрощення шляхом перенесення початку координат в певну точку (x_0, y_0) без зміни напрямку координатних осей, тобто заміни змінних

$$\begin{aligned}x' &= x'' + x_0 \\ y' &= y'' + y_0\end{aligned}\tag{2.37}$$

I. Припустимо, спочатку, що $\tilde{a}_{11} \neq 0$ та $\tilde{a}_{22} \neq 0$. Тоді рівняння (2.35) перетвориться на

$$\tilde{a}_{11}x''^2 + \tilde{a}_{22}y''^2 + 2(\tilde{a}_{13} + \tilde{a}_{11}x_0)x'' + 2(\tilde{a}_{23} + \tilde{a}_{22}y_0)y'' + \tilde{a}_{33} = 0,$$

де $\tilde{a}_{33} = a_{33} + 2\tilde{a}_{13}x_0 + 2\tilde{a}_{23}y_0$. Отже, коефіцієнти $\tilde{a}_{11}$ та $\tilde{a}_{22}$, є інваріантами перетворення (2.37). Поклавши $x_0 = -\tilde{a}_{13}/\tilde{a}_{11}$ та $y_0 = -\tilde{a}_{23}/\tilde{a}_{22}$, дістаємо рівняння

$$\tilde{a}_{11}x''^2 + \tilde{a}_{22}y''^2 + \tilde{a}_{33} = 0.\tag{2.38}$$

За певних припущень стосовно коефіцієнтів (див. нижче) рівняння другого порядку (2.38) задає криву на площині. Щоб підкреслити зв'язок такої кривої з цим рівнянням, її називають *кривою другого порядку*.

Дослідимо рівняння (2.38), перепозначивши в ньому $x'' \equiv x$, $y'' \equiv y$, та припустивши, що жоден з його коефіцієнтів не дорівнює нулю.

1⁰. Нехай $\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{22}$ та $\tilde{a}_{33}$ мають однаковий знак. Тоді ліва частина рівняння (2.38) є сумою доданків одного знаку, тому рівняння не має дійсних розв'язків, а отже, не справджується для жодної точки площини.

2⁰. Нехай $\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{22}$ мають один і той самий знак, а $\tilde{a}_{33}$ – протилежний. Тоді рівняння (2.38) рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\tag{2.39}$$

де $a^2 = -\tilde{a}_{33}/\tilde{a}_{11}$, $b^2 = -\tilde{a}_{33}/\tilde{a}_{22}$. Далі ми побачимо, що цьому рівнянню задовольняють координати всіх точок еліпса, і не задовольняють координати всіх інших точок. Тому рівняння (2.39) називають *канонічним рівнянням еліпса*. Коли $a = b$ воно описує коло з центром на початку координат.

3⁰. Нехай $\tilde{a}_{11}$ та $\tilde{a}_{22}$ мають протилежні знаки, наприклад, відношення $\tilde{a}_{33}/\tilde{a}_{11} < 0$, а відношення $\tilde{a}_{33}/\tilde{a}_{22} > 0$. Тоді рівняння (2.38) можна звести до вигляду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\tag{2.40}$$

де $a^2 = -\tilde{a}_{33}/\tilde{a}_{11}$, $b^2 = \tilde{a}_{33}/\tilde{a}_{22}$. У подальшому буде показано, що рівняння (2.40) є канонічним рівнянням гіперболи. Якщо ж, навпаки, $\tilde{a}_{33}/\tilde{a}_{11} > 0$, а $\tilde{a}_{33}/\tilde{a}_{22} < 0$, то легко дістати рівняння

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (2.41)$$

з $a^2 = \tilde{a}_{33}/\tilde{a}_{11}$, $b^2 = -\tilde{a}_{33}/\tilde{a}_{22}$. Рівняння (2.41) відрізняється від (2.40) лише перепозначенням координат $x \leftrightarrow y$, тому його називають рівнянням гіперболи, спряженої до тієї гіперболи, що описується рівнянням (2.40). Суть цієї назви буде пояснена при розгляді властивостей гіперболи (у зауваженні 2.39).

Тепер розглянемо випадок, коли у рівняння (2.38) коефіцієнт $\tilde{a}_{33} = 0$. Тоді, у додачу до вказаних вище випадків $1^0 - 3^0$, існують ще дві різні можливості.

4⁰. $\tilde{a}_{11}$ та $\tilde{a}_{22}$ мають однаковий знак. В цьому разі рівняння (2.38) справджується лише для початку координат (0,0).

5⁰. $\tilde{a}_{11}$ та $\tilde{a}_{22}$ мають протилежні знаки. Тоді рівняння (2.38) справджується для пари прямих $y = \pm \sqrt{-\tilde{a}_{11}/\tilde{a}_{22}} x$, що перетинаються на початку координат.

II. Повернемося до рівняння (2.35) і розглянемо випадок, коли у цьому рівнянні коефіцієнт $\tilde{a}_{11}$ або $\tilde{a}_{22}$ дорівнює нулю. Для визначеності, покладемо $\tilde{a}_{11} = 0$, $\tilde{a}_{22} \neq 0$ (якщо станеться навпаки, можна перепозначити $x \leftrightarrow y$).

Перенесемо початок координат до точки $(x_0, y_0) = (0, -\tilde{a}_{23}/\tilde{a}_{22})$. В нових координатах рівняння (2.35) виглядає як

$$\tilde{a}_{22}y''^2 + 2\tilde{a}_{13}x'' + \tilde{a}_{33} = 0, \quad (2.42)$$

де $\tilde{a}_{33} = a_{33} + 2\tilde{a}_{23}y_0$, та, щоб дане рівняння було рівнянням другого порядку, мусить бути $a_{22} \neq 0$.

Розглянемо різні можливості, які впливають з (2.42) у додачу до випадків $1^0 - 5^0$.

6⁰. $\tilde{a}_{13} \neq 0$. Виконаємо перетворення координат $x'' = x''' - \tilde{a}_{33}/2\tilde{a}_{13}$, $y'' = y'''$. У такий спосіб дістанемо рівняння $\tilde{a}_{22}y'''^2 = -2\tilde{a}_{13}x'''$, яке зазвичай переписують у вигляді

$$y^2 = 2px, \quad (2.43)$$

де $p = -\tilde{a}_{13} / \tilde{a}_{22}$. Далі ми побачимо, що (2.43) є канонічним рівнянням параболи.

7°. $\tilde{a}_{13} = 0$, $\tilde{a}_{22}$ та $\tilde{a}_{33}$ мають різні знаки. В цьому разі рівняння (2.42) визначає пару паралельних прямих: $y = \pm b$, де $b = \sqrt{-\tilde{a}_{33} / \tilde{a}_{22}}$.

8°. $\tilde{a}_{13} = 0$, $\tilde{a}_{22}$ та $\tilde{a}_{33}$ мають однакові знаки. В такому випадку рівняння (2.38) не має дійсних розв'язків, а отже, не справджується для жодної точки площини.

9°. $\tilde{a}_{13} = \tilde{a}_{33} = 0$. Рівняння (2.42) визначає пряму $y = 0$, що збігається з віссю абсцис.

2.14. Висновок. Алгебраїчне рівняння другого порядку для декартових координат на площині, залежно від значень його коефіцієнтів, може бути рівнянням еліпса або кола (випадок 2°), гіперболи (випадок 3°), параболи (випадок 6°), пари прямих (випадки 5°, 7°), прямої, що збігається з віссю абсцис (випадок 9°), точки на початку координат (випадок 4°). Крім того, це рівняння може не мати дійсних розв'язків, а отже, не визначати ніякого геометричного місця точок (випадки 1°, 8°).

2.15. Приклад. Скласти канонічне рівняння кривої, заданої загальним рівнянням:

$$32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0.$$

Складемо за коефіцієнтами загального рівняння квадратне рівняння (2.36) для тангенса кута повороту $\text{tg} \varphi \equiv t$ декартової системи координат

$$2t^2 + 3t - 2 = 0,$$

з якого виходить, що $\text{tg} \varphi = 1/2$ або $\text{tg} \varphi = -2$. Для визначеності, обираємо додатне значення кута та знаходимо значення $\sin \varphi = 1/\sqrt{5}$, $\cos \varphi = 2/\sqrt{5}$. Підставивши ці значення до формул (2.31) дістаємо:

$$x = \frac{2x' - y'}{\sqrt{5}}, y = \frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}.$$

Отже, вихідне рівняння набуває вигляду:

$$32\left(\frac{2x' - y'}{\sqrt{5}}\right)^2 + 52\left(\frac{2x' - y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}\right) - 7\left(\frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}\right)^2 + 180 = 0,$$

тобто

$$225x'^2 - 100y'^2 = 900.$$

Останнє рівняння легко перетворюється на канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{9} = -1.$$

2.16. Приклад. Скласти канонічне рівняння кривої, заданої загальним рівнянням:

$$25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$$

Рівняння для визначення кута φ в цьому випадку набуває вигляду

$$7t^2 - 7 = 0,$$

звідки $t = \pm 1$. Поклавши $\operatorname{tg} \varphi = 1$, дістаємо з (2.31) вирази

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}},$$

після чого записуємо вихідне рівняння у вигляді

$$\begin{aligned} & 25 \left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \right)^2 - 14 \left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \right) + 25 \left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \right)^2 \\ & + 64 \left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \right) - 64 \left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \right) - 224 = 0. \end{aligned}$$

Це рівняння спрощується до вигляду

$$18x'^2 + 32y'^2 - 64\sqrt{2}y' - 224 = 0.$$

Останнє рівняння містить у собі доданок першого степеня за координатою y' , для "знищення" якого слід зробити зсув системи координат за формулами (2.37), які у даному випадку набувають вигляду

$$x' = x'', \quad y' = y'' + 2.$$

Таким чином дістаємо рівняння

$$18x''^2 + 32y''^2 = 228,$$

що легко перетворюється на канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x''^2}{16} + \frac{y''^2}{9} = 1.$$

У наступному розділі буде показано, що спрощення загального алгебраїчного рівняння до канонічного вигляду дозволяє детально дослідити властивості кривих другого порядку.

2.3.2. Еліпс та його властивості

2.17. Означення. Назвемо канонічною системою координат ту прямокутну декартову систему, в якій рівняння кривої другого порядку має канонічний вигляд.

Виведемо геометричні властивості еліпса з його канонічного рівнян-

ня (2.39). Для цього зважимо на наступне.

- Канонічне рівняння еліпса зберігає свій вигляд при заміні
$$x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow -y. \quad (2.44)$$

Така зміна значень координат фактично відбувається при зміні напрямку обох осей декартової системи на протилежний, тому перетворення (2.44) називають *інверсією координат*³. Отже, канонічне рівняння еліпса є інваріантним відносно інверсії координат. Звідси випливає, що разом з точкою (x, y) на еліпсі обов'язково лежить і точка $(-x, -y)$, тобто, він є кривою, симетричною відносно початку канонічної системи координат. Якщо змінити знак лише однієї з двох координат, рівняння еліпса також не зміниться, а отже, він є симетричним відносно координатних осей.

2.18. Означення. Початок канонічної системи координат називають центром еліпса.

- В окремому випадку $a = b$ канонічне рівняння еліпса перетворюється на рівняння кола радіуса a .

- Підставивши до канонічного рівняння еліпса, спочатку, значення $y = 0$, а потім, $x = 0$, одержуємо рівняння $x^2/a^2 = 1$ та $y^2/b^2 = 1$, які визначають координати точок перетину еліпса з віссю абсцис та ординат, відповідно: $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$.

2.19. Означення. Точки перетину еліпса з осями канонічної системи координат називають вершинами еліпса.

2.20. Означення. Відрізки координатних осей $-a \leq x \leq a$ та $-b \leq y \leq b$ називають осями еліпса.

- Центр еліпса ділить кожну з його осей навпіл, довжини *півосей* еліпса a та b , взагалі кажучи, не дорівнюють одна одній.

- Оскільки для всіх точок еліпса $y = \pm b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, то при збільшенні координати x від нуля до a координата y або зменшується від b до нуля (верхній знак), або зростає від $-b$ до нуля (нижній знак).

З усього сказаного випливає, що еліпс нагадує за формою коло, сплюснуте (коли $b < a$) або розтягнуте (коли $b > a$) вздовж осі ординат. Еліпс з *великою віссю* $-a \leq x \leq a$ та *малою віссю* $-b \leq y \leq b$ зображений на рис. 2.7.

³ Це слово походить з латини, але широко застосовується і в сучасній науковій літературі: inversion – перевертання, обернення (*англ.*)

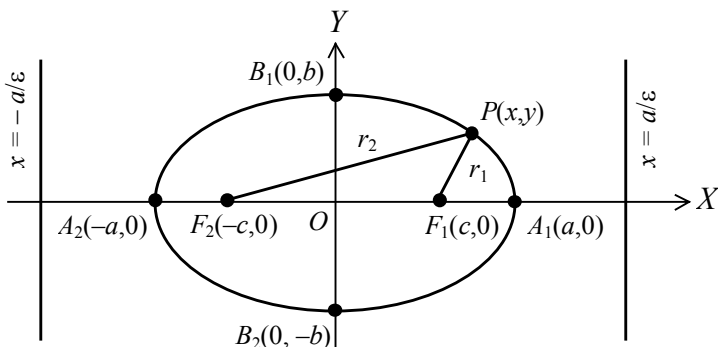


Рис. 2.7

З рисунку 2.7 очевидно, що еліпс може бути охарактеризований такими поняттями як розмір і форма. Характеристикою розміру еліпса можна вважати довжину його великої півосі a . Форму еліпса за традицією характеризують додатним параметром

$$\varepsilon = \sqrt{1 - b^2 / a^2} < 1, \quad (2.45)$$

який називають *ексцентриситетом* еліпса. Ексцентриситет зменшується до нуля, коли форма еліпса наближається до форми кола, і зростає, коли еліпс розтягується вздовж осі абсцис або сплескується вздовж осі ординат. А щоб зрозуміти етимологію назви цього параметру⁴, слід згадати шкільне означення еліпса.

2.21. Означення. Еліпс це геометричне місце точок, таких, що сума відстаней від них, до двох точок, названих фокусами⁵, дорівнює сталій величині.

2.22. Теорема. В канонічній системі координат фокусами еліпса є точки $F_1(a\varepsilon, 0)$ та $F_2(-a\varepsilon, 0)$ (див. рис. 2.7), тому ексцентриситет є мірою віддаленості фокусів від центру еліпса.

◀ Для доведення теореми розглянемо точку еліпса $P(x, y)$, зображену на рис. 2.7, і за допомогою формули (1.28) виразимо відстані r_1 та r_2 від цієї точки до фокусів:

$$r_1^2 = (x - a\varepsilon)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x + a\varepsilon)^2 + y^2. \quad (2.46)$$

З формули (2.45) виражаємо довжину малої півосі як

⁴ Ця назва походить з латини і може бути перекладена як "видалення з центру".

⁵ Давня історична назва, у перекладі з латини – вогнище. У сучасній мові наближається до понять *осередок*, *місце зібрання* (в оптиці – віх променів, що виходять з точки F_1 , відбиваються від еліпса і приходять в точку F_2).

$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad (2.47)$$

і підставляємо цей вираз до канонічного рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - \varepsilon^2)} = 1. \quad (2.48)$$

З рівняння (2.48) впливає вираз

$$y^2 = a^2(1 - \varepsilon^2) - x^2(1 - \varepsilon^2),$$

підставивши який до (2.46), розкривши дужки і звівши подібні доданки дістаємо:

$$r_1^2 = a^2 - 2a\varepsilon x + x^2\varepsilon^2, \quad r_2^2 = a^2 + 2a\varepsilon x + x^2\varepsilon^2.$$

врахувавши, що $\varepsilon x < a$, дістаємо арифметичне значення квадратного кореня з цих величин і доходимо висновку, що фокальні радіуси будь-якої точки еліпса пов'язані з її абсцисою, а також, піввіссю та ексцентриситетом еліпса, формулами

$$r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = a + \varepsilon x, \quad (2.49)$$

які й доводять, що сума відстаней від довільної точки еліпса до фокусів F_1 та F_2 дорівнює сталій величині $2a$. ►

2.23. Наслідок. Відстань між фокусами еліпса дорівнює $2a\varepsilon$, тому ексцентриситет дорівнює відношенню відстані між фокусами до довжини великої осі.

Якщо позначити $F_1F_2 = 2c$, то можна виразити ексцентриситет у вигляді відношення

$$\varepsilon = c / a. \quad (2.50)$$

2.24. Означення. Відстань від точки еліпса до його фокуса називають фокальним радіусом цієї точки.

Знайдені нами вирази (2.49) для фокальних радіусів точки еліпса допомагають розв'язати низку геометричних задач.

2.25. Означення. Директрисами⁶ еліпса називають дві прямі, які перетинають лінію великої осі еліпса під кутом у 90° на відстані a/ε від його центру (див. рис. 2.7).

2.26. Зауваження. При наближенні форми еліпса до кола ексцентриситет зменшується до нуля, а отже, директриси віддаляються від центра на нескінчену відстань. Тому для кола поняття директриси не означене.

Директриси задаються рівняннями $x = \pm a/\varepsilon$, з яких випливає, що вони не перетинають еліпса, оскільки його ексцентриситет менший від

⁶ Латинське слово, що перейшло до сучасної англійської мови: Direction – напрямок (англ.). Директриси паралельні до малої осі еліпса, а отже, вони задають напрямок як осей еліпса, так і осей канонічної системи координат.

одиниці.

2.27. Теорема. Відношення фокального радіуса кожної точки еліпса до відстані від цієї точки до односторонньої з фокусом директриси дорівнює ексцентриситету, тобто

$$r_{1,2} / d_{1,2} = \varepsilon \quad (2.52)$$

де $r_{1,2}$ – фокальні радіуси, $d_{1,2}$ – відповідні відстані до директриси.

◀ З виразів для фокальних радіусів (2.49), означенням директриси та рис. 2.7 випливає, що

$$\frac{r_{1,2}}{d_{1,2}} = \frac{a \mp \varepsilon x}{(a/\varepsilon) \mp x} = \varepsilon,$$

а це й треба було довести. ▶

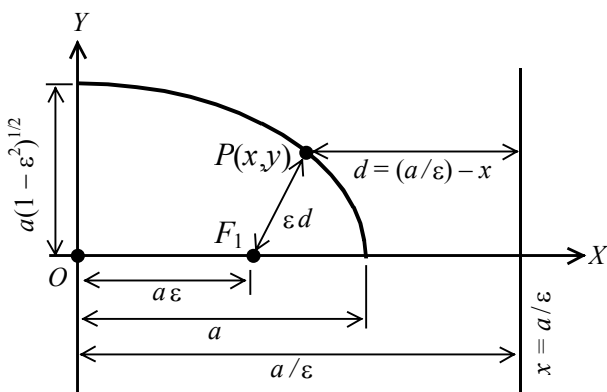


Рис. 2.8.

Тепер ми бачимо, що властивості еліпса описуються досить великою кількістю співвідношень. Запам'ятовування та використання цих співвідношень спрощується, якщо уважно подивитись на рис. 2.8. На цьому рисунку довжини всіх відрізків, що характеризують еліпс, виражені через два параметри – довжину великої півосі та ексцентриситет. Взаємне розташування фокусів, вершин та директриси еліпса стає очевидним, якщо запам'ятати, що його ексцентриситет менший від одиниці, а отже, $a\varepsilon < a < a/\varepsilon$.

2.28. Зауваження. Рівняння еліпса часто записують в параметричній формі, тобто, виражають координати точок еліпса через параметр $t \in [0, 2\pi]$ як

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases} \quad (2.51)$$

Смисл параметричних рівнянь (2.50) стає дуже наочним, якщо зважити на те, що їх застосовують у класичній механіці. При такому застосуванні параметром t зазвичай позначають час і подовжують інтервал його зміни на нескінченість. Тоді параметричні рівняння показують, як залежать від часу координати матеріальної точки, що рухається за еліптичною траєкторією (наприклад, навколо центру тяжіння).

2.3.3. Гіпербола та її властивості

Виведемо геометричні властивості гіперболи з її канонічного рівняння (2.40). Для цього зважимо на наступне.

- Канонічне рівняння гіперболи не змінюється при зміні знаку однієї або обох декартових координат. Звідси випливає, що разом з точкою (x, y) на гіперболі обов'язково лежать і точки $(-x, y)$, $(x, -y)$ та $(-x, -y)$ а отже, ця крива розташована симетрично відносно початку канонічної системи координат та кожної з її осей.

2.29. Означення. Початок канонічної системи координат називають центром гіперболи.

- Підставивши до канонічного рівняння гіперболи, спочатку, значення $y = 0$, а потім, $x = 0$, одержуємо рівняння $x^2/a^2 = 1$ та $y^2/b^2 = -1$, які показують, що гіпербола перетинає вісь абсцис у точках $A_1(a, 0)$ та $A_2(-a, 0)$, але не перетинає вісь ординат.

2.30. Означення. Точки перетину гіперболи з осями канонічної системи координат називають вершинами гіперболи.

2.31. Означення. Відрізок осі абсцис $-a \leq x \leq a$ називають дійсною віссю гіперболи, а відрізок осі абсцис $-b \leq x \leq b$ – її уявною віссю; якщо $a = b$ гіперболу називають рівнобічною.

- Центр гіперболи ділить її осі навпіл, довжини півосей гіперболи дорівнюють a та b .

- Оскільки $y = \pm b\sqrt{(x^2/a^2) - 1}$, то

а) абсциси всіх точок гіперболи перевищують a ;

б) при збільшенні координати x від a до нескінченості координата y або зростає від нуля до нескінченості (верхній знак), або зменшується від нуля до мінус нескінченості (нижній знак);

в) за великих значень координати x гіпербола асимптотично наближається до прямих $y = \pm(b/a)x$ (тому що $\pm b\sqrt{(x^2/a^2) - 1} \approx \pm(b/a)x$ коли

$x \gg a$).

Крива, яка має перелічені вище властивості, зображена на рис. 2.9. Частини кривої, що лежать праворуч та ліворуч від осі ординат називають *правою та лівою гілкою* гіперболи, відповідно.

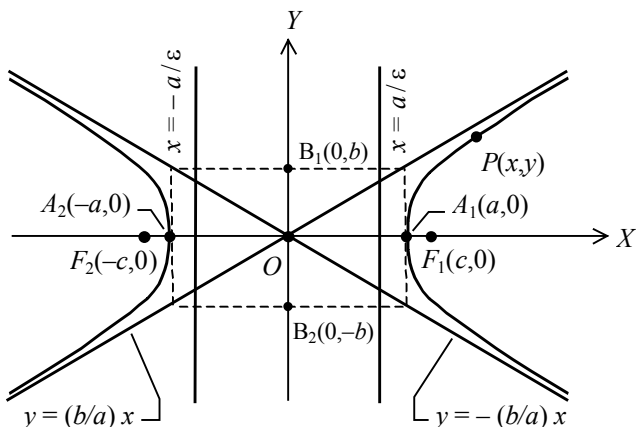


Рис. 2.9

2.32. Означення. Прямі $y = \pm \frac{b}{a}x$ називають асимптотами гіперболи.

Подібно до еліпса, гіпербола може бути однозначно охарактеризована завданням дійсної півосі та ексцентриситету, але ексцентриситет гіперболи означається не так як для еліпса, а згідно з рівністю

$$\varepsilon = \sqrt{1 + b^2 / a^2} > 1. \quad (2.53)$$

Рівність (2.53) можна тотожно перетворити на співвідношення

$$b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}, \quad (2.54)$$

яке дозволяє записати канонічне рівняння гіперболи у формі (2.48), виведеній нами раніше для еліпса. Отже, в алгебраїчному аспекті відмінність між гіперболою та еліпсом зводиться до відмінності в означенні (а отже, і у величині) ексцентриситету.

Пригадаємо шкільне означення гіперболи.

2.33. Означення. Гіпербола це геометричне місце точок, таких, що різниця відстаней від них, до двох точок, названих фокусами, дорівнює сталій величині.

2.34. Означення. Відстань від точки гіперболи до фокуса називають фокальним радіусом цієї точки.

2.35. Теорема. В канонічній системі координат фокусами гіперболи є точки $F_1(a\varepsilon, 0)$ та $F_2(-a\varepsilon, 0)$ (див. рис. 2.7), тому ексцентриситет є мірою віддаленості фокусів від центру гіперболи.

◀ Доведення даної теореми дуже подібне до доведення теореми 2.21, проведеного нами раніше для еліпса.

Розглянемо точку правої гілки гіперболи $P(x, y)$, зображену на рис. 9. Рисунок показує, що для фокальних радіусів цієї точки справедливі вирази (2.46). Так саме графічно можна упевнитись, що ці ж вирази справедливі і для точок лівої гілки. Візьмемо до уваги, що рівняння (2.48) справджується як для еліпса, так і для гіперболи. Завдяки цьому для гіперболи справедливі рівності $r_1^2 = a^2 - 2a\varepsilon x + x^2\varepsilon^2$ та $r_2^2 = a^2 + 2a\varepsilon x + x^2\varepsilon^2$, встановлені нами при доведенні теореми 2.21. Оскільки ексцентриситет гіперболи більший за одиницю, й окрім того, абсциси всіх точок правої гілки перевищують a , а всіх точок лівої гілки – менші за $-a$, то арифметичні значення квадратних коренів з правих частин наведених вище рівностей виражаються як

$$r_1 = \varepsilon x - a, \quad r_2 = \varepsilon x + a, \quad (2.55)$$

для точок правої гілки, та

$$r_1 = -\varepsilon x + a, \quad r_2 = -\varepsilon x - a, \quad (2.56)$$

для точок лівої гілки гіперболи. Отже, різниця відстаней від довільної точки гіперболи до фокусів F_1 та F_2 дорівнює сталій величині $2a$. ►

2.36. Наслідок. Відстань між фокусами гіперболи дорівнює $2a\varepsilon$, тому ексцентриситет дорівнює відношенню відстані між фокусами до довжини дійсної осі, тобто, рівність (2.50) справджується не лише для еліпса, а й для гіперболи.

2.37. Означення. Директрисами гіперболи називають дві прямі, які перетинають її дійсну вісь під кутом у 90° на відстані a/ε від центру (див. рис. 2.9).

Директриси задаються рівняннями $x = \pm a/\varepsilon$, з яких випливає, що вони не перетинають гіперболи, оскільки $|a/\varepsilon| < a$, а для всіх точок гіперболи $|x| > a$.

2.38. Теорема. Відношення фокального радіуса кожної точки гіперболи до відстані від цієї точки до односторонньої з фокусом директриси дорівнює ексцентриситету, тобто для гіперболи справедлива рівність (2.52).

◀ Доведення цієї теореми читачеві доцільно провести самостійно, продивившись перед тим доведення теореми 2.27. ►

Для розв'язання багатьох задач аналітичної геометрії корисно виразити довжини всіх відрізків, що характеризують гіперболу, через її дійсну піввісь та ексцентриситет (рис. 2.10).

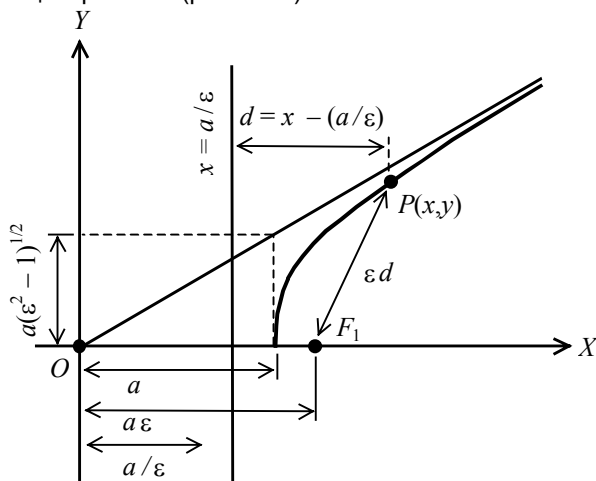


Рис. 2.10

2.39. Зауваження. Гіпербола, яка задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad (2.57)$$

називається *спряженою* з гіперболою, заданою канонічним рівнянням (2.40) і зображеною на рисунках 2.9 та 2.10. Спряжена гіпербола має за дійсну вісь відрізок $-b \leq x \leq b$ на осі ординат, а за уявну – відрізок $-a \leq x \leq a$ на осі абсцис. З рівнянь (2.40) та (2.50) випливає, що спряжені одна з одною гіперболи мають спільні асимптоти $y = \pm(b/a)x$.

2.3.4. Парабола та її властивості

Проаналізуємо властивості параболі, виходячи з її канонічного рівняння $y^2 = 2px$. Сталу p називають *параметром* параболі. Канонічне рівняння описує криву на площині, коли p та x – величини одного знаку. Для визначеності, вважатимемо, що обидві величини додатні. Оскільки канонічне рівняння параболі не інваріантне відносно інверсії координат, ця крива не має центру. Однак, дане рівняння не зміниться, якщо змінити лише знак ординати. Тому парабола складається з пар точок, розташованих симетрично до осі абсцис – $P_+(x; y)$ та $P_-(x; -y)$ – для яких справ-

джуються рівняння $y = \pm\sqrt{2px}$, відповідно. Кажуть, що вісь абсцис є *віссю параболу*, а точка $O(0;0)$ – її *вершиною*.

Пригадаємо означення параболу, відоме з шкільного курсу математики.

2.40. Означення. Параболою називають геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки (фокусу) та даної прямої (директриси).

Покажемо, як слід ввести поняття директриси та фокусу, щоб справділося означення 2.40.

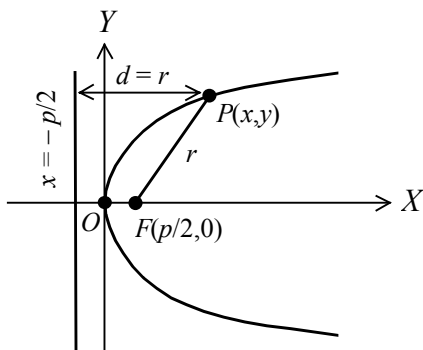


Рис. 2.11

З канонічного рівняння параболу випливає, що її вершина лежить на початку канонічної системи координат. Проведемо пряму, що перетинає лінію осі параболу під кутом 90° і лежить ліворуч від вершини на відстані $p/2$ від неї (рис. 2.11). Поставимо на осі параболу точку F , так, щоб вона лежала праворуч від вершини на відстані $p/2$ від неї. Позначимо відстань від довільної точки параболу $P(x,y)$ до прямої літерою d . З рисунка 2.11 випливає, що

$$d = x + p/2, \quad PF = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}.$$

Підставивши під радикал $y^2 = 2px$, розкривши дужки, і звівши подібні доданки, знаходимо, що

$$PF = \sqrt{x^2 + px + p^2/4} = x + p/2.$$

Отже, $PF = d$, тому проведена нами пряма є директрисою, а точка F – фокусом гіперболи.

2.41. Висновок. Відстань від фокусу параболу до директриси

дорівнює параметру параболі p , а вершина параболі лежить на середині цієї відстані, як показано на рис. 11. Фокальний радіус довільної точки параболі та відстань від неї до директриси задовольняють співвідношення

$$r = d = x + p/2. \quad (2.58)$$

2.42. Зауваження. Для еліпса та гіперболи $r/d = \varepsilon$. Якщо поширити це співвідношення і на параболу, то вийде що $\varepsilon = 1$, тобто, *ексцентриситет параболі дорівнює одиниці*.

2.43. Означення. Співвідношення $r/d = \varepsilon$ називають основною фокальною властивістю кривих другого порядку.

2.44. Висновок. Основну фокальну властивість можна вважати означальною рисою кривих другого порядку, тобто стверджувати, що еліпс, гіпербола та парабола разом складають такий клас кривих, для яких відношення фокального радіуса до відстані між фокусом і директрисою є сталою величиною.

2.3.5. Дотичні до кривих другого порядку

Для розв'язання фізичних та інженерних задачах буває необхідно знати рівняння прямої, яка дотикається до заданої кривої другого порядку у певній точці. Знайдемо це рівняння для кожного з трьох типів кривих другого порядку, починаючи з еліпса.

Розглянемо еліпс і пряму лінію, що лежать в одній площині. Якщо пряма дотикається до еліпса у заданій точці $P_0(x_0, y_0)$, то координати цієї точки задовольняють як рівняння еліпса, так і рівняння прямої, тобто, координати точки дотику є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - y_0 = k(x - x_0). \end{cases} \quad (2.59)$$

Перше рівняння системи є канонічним рівнянням еліпса, а друге – рівнянням прямої, що проходить крізь точку P_0 . Якщо дві функції дорівнюють одна одній, то їх диференціали також рівні між собою. Тому візьмемо диференціали обох частин першого рівняння системи (2.59) і прирівняємо їх один до одного:

$$\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} = 0. \quad (2.60)$$

Значення похідної dy/dx у точці P_0 дорівнює тангенсу кута нахилу прямої, що дотикається до еліпса в цій точці, тобто кутовому коефіцієнту k шуканої прямої. Отже, з рівняння (2.60) дістаємо вираз

$$k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

і підставляємо його до другого рівняння системи (2.59). У такий спосіб одержуємо рівність

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0),$$

яка по-суті вже розв'язує поставлену задачу про знаходження дотичної до еліпса в заданій точці. Однак, цю рівність можна спростити, спочатку тотожно перетворивши її на співвідношення

$$\frac{yy_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = -\frac{xx_0}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2},$$

а потім, врахувавши, що $(x_0^2/a^2) + (y_0^2/b^2) = 1$ (оскільки точка P_0 належить еліпсу). Після цього рівняння дотичної до еліпсу в точці з координатами (x_0, y_0) набуває простого вигляду

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \quad (2.61)$$

Виведемо тепер рівняння лінії, дотичної до гіперболи. Оскільки ця процедура дуже подібна до проведеної вище, опишемо її дуже стисло.

Точка дотику прямої до гіперболи задовольняє систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - y_0 = k(x - x_0). \end{cases} \quad (2.62)$$

Прирівнявши один до одного диференціали лівої та правої частин першого рівняння системи (2.62), знаходимо кутовий коефіцієнт прямої і представляємо її рівняння у формі

$$y - y_0 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} (x - x_0).$$

врахувавши, що $(x_0^2/a^2) - (y_0^2/b^2) = 1$ (оскільки точка P_0 належить гіперболі), запишемо рівняння прямої, дотичної до гіперболи в точці з координатами (x_0, y_0) , у вигляді

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \quad (2.63)$$

Нарешті, побудуємо рівняння дотичної до параболи. Пряма, яка дотикається до вершини параболи, є віссю ординат, для всіх точок якої $y = 0$, що і є шуканим рівнянням. Пряма, яка дотикається до параболи у будь-якій іншій точці, має кутовий коефіцієнт $k = dy/dx = p/y_0$, тому рів-

няння дотичної до параболи набуває вигляду: $y - y_0 = (p / y_0)(x - x_0)$,
 або $y_0(y - y_0) = p(x - x_0)$. Взявши до уваги, що $y_0^2 = 2px_0$, дістаємо
 співвідношення

$$yy_0 = p(x + x_0) \quad (2.64)$$

яке є шуканим рівнянням прямої, дотичної до параболи в точці з координатами (x_0, y_0) .

2.4. Поверхні другого порядку

Поняття поверхні матеріального тіла зрозуміле всім людям на побутовому рівні. Просторове положення кожної точки поверхні можна формально охарактеризувати значеннями трьох декартових координат. Той факт, що точка лежить саме на поверхні, а не в якійсь іншій ділянці простору, накладає певні умови на значення її координат. Поверхня, як і площина, є двовимірним підпростором тривимірного геометричного простору, тому накладені на координати її точок умови можна формалізувати одним рівнянням (див. зауваження 2.12).

2.4.5. Означення. Поверхнею другого порядку називають геометричне місце таких точок тривимірного простору, декартові координати яких задовольняють алгебраїчне рівняння другого порядку.

Загальне алгебраїчне рівняння другого порядку для трьох декартових координат має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} & a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz \\ & + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

Перетвореннями системи координат можна спростити рівняння (2.65) і з'ясувати два питання: а) за яких значень коефіцієнтів це рівняння має дійсні розв'язки, а отже, описує певне геометричне місце точок; б) які саме геометричні місця точок воно описує за тих чи інших значень коефіцієнтів. У такий спосіб можна побудувати загальну теорію поверхонь другого порядку, яка подібна до розглянутої у розділі 2.3 теорії кривих, але набагато більш громіздка. Тому ми не будемо її викладати послідовно, а ознайомимось лише з основними видами поверхонь та їх властивостями, виходячи з уже встановлених математиками канонічних рівнянь. З огляду на спрощений підхід до проблеми, ми, як і низка інших авторів, будемо надавати такі означення поверхонь другого порядку, які передбачають "прив'язку" до канонічних систем координат.

2.4.1. Циліндрична поверхня

2.4.6. Означення. Поверхню називають циліндричною, якщо існує така система координат, в якій її рівняння виглядає як канонічне рівняння кривої другого порядку.

2.4.7. Означення. Назвемо декартову систему координат *канонічною*, якщо площина XOY містить у собі криву, про яку йдеться в означенні 2.46.

Згідно з означеннями 2.46 та 2.47 в канонічній системі координат рівняння циліндричної поверхні має вигляд

$$f(x, y) = 0, \quad (2.66)$$

де функція f є лівою частиною канонічного рівняння кривої другого порядку.

2.48. Означення. Вісь OZ канонічної системи координат називають віссю циліндричної поверхні.

Система рівнянь

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = z_0 \end{cases} \quad (2.67)$$

визначає геометричне місце точок, що лежать на перерізі циліндричної поверхні горизонтальною площиною $z = z_0$ (рис. 2.12). Це геометричне місце точок є кривою другого порядку, розташованою у площині $z = z_0$. Перенесення площини у напрямку осі циліндричної поверхні не впливає на вигляд першого рівняння системи (2.67), а отже, перерізи циліндричної поверхні різними горизонтальними площинами не відрізняються ані за формою, ані за розміром.

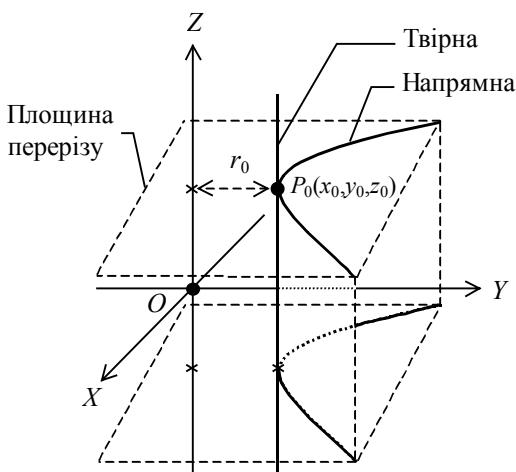


Рис. 2.12

2.49. Означення. Переріз циліндричної поверхні будь-якою площиною, перпендикулярною до його осі, називають напрямною кривою.

У канонічній системі координат напрямна крива циліндричної поверхні визначається системою двох рівнянь (2.67). З огляду на зауваження 2.12 це цілком природно, оскільки твірна є одновимірним підпростором тривимірного простору.

Нехай точка $P_0(x_0, y_0, z_0)$ приналежна напрямній кривій (2.67). Роз-

глянемо геометричне місце точок з координатами (x_0, y_0, z) , де $-\infty < z < \infty$. Відзначимо, по-перше, що, дане геометричне місце точок містить у собі точку P_0 , а по-друге, що відстань від будь-якої точки цього геометричного місця точок до осі циліндра є сталою і дорівнює величині $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Отже, дане геометричне місце точок є прямою лінією, що перетинає напрямну криву (2.67) й проходить паралельно до осі циліндра. Навіть більше, ця пряма цілком лежить на циліндричній поверхні. Останнє твердження випливає з того, що координати x_0, y_0 задовольняють канонічне рівняння поверхні (2.66), а координата z не входить до нього. Отже, координати (x_0, y_0, z) всіх точок прямої задовольняють рівняння поверхні.

2.50. Означення. Пряму, проведену на циліндричній поверхні паралельно до її осі, називають твірною (рис. 2.12).

Походження термінів "твірна" та "напрямна" стає зрозумілим, якщо уявити собі замість твірної прямої щойно пофарбовану струну, яка рухається над прозорою (невидимою) циліндричною поверхнею перебуваючи у контакті з нею. Сторонній спостерігач побачить, що напрямок руху твірної лінії визначається формою напрямної кривої, і що в наслідок такого руху утворюється пофарбована (видима) циліндрична поверхня.

2.51. Зауваження. Якщо напрямна крива є колом, еліпсом, гіперболою або параболою, то циліндричну поверхню називають коловим, еліптичним, гіперболічним або параболічним циліндром (відповідно).

2.4.2. Еліпсоїд та сфера

2.52. Означення. Поверхню називають тривісним еліпсоїдом (або просто еліпсоїдом), якщо існує така (канонічна) система координат, в якій рівняння цієї поверхні має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (2.68)$$

де a, b, c – сталі величини, які завжди можна вважати додатними.

Рівняння (2.68) інваріантне відносно інверсії координат, тому еліпсоїд є симетричним відносно початку канонічної системи координат $O(0,0,0)$ та кожної з її осей. Точку O називають *центром* еліпсоїда.

Розглянемо перерізи еліпсоїда горизонтальними площинами, що проходять на відстані h від його центру. Всі точки перерізів задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z = \pm h. \end{cases} \quad (2.69)$$

Поділивши обидві частини першого рівняння системи (2.69) на $1 - h^2 / c^2$, представимо його у вигляді канонічного рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a_h^2} + \frac{y^2}{b_h^2} = 1,$$

з півосями $a_h = a\sqrt{1 - h^2 / c^2}$, $b_h = b\sqrt{1 - h^2 / c^2}$.

Отже, перерізи еліпсоїда площинами $z = \pm h$ є еліпсами, півосі яких мають максимальну довжину, коли площини проходять крізь центр ($h = 0$), скорочуються, коли площини віддаляються від центру, та перетворюються на точки, коли $h = c$ (рис. 2.13). Горизонтальні площини, віддалені від центру на відстань $h > c$, не перерізають еліпсоїда.

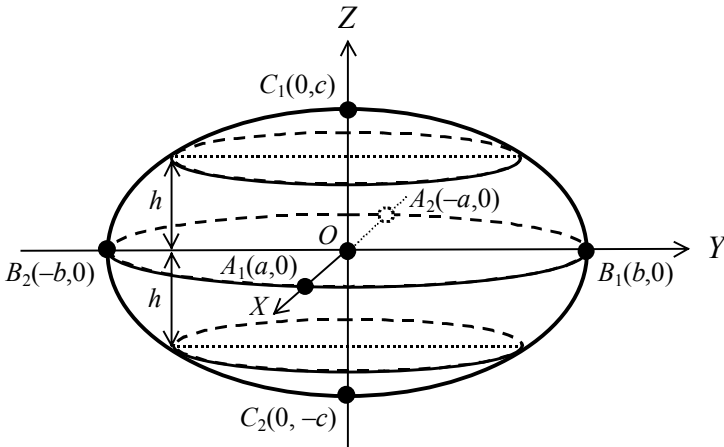


Рис. 2.13

У такий саме спосіб легко упевнитися, що перерізи еліпсоїда площинами $y = \pm h$ та $x = \pm h$ також є еліпсами, півосі яких мають максимальну довжину, коли площини проходять крізь центр ($h = 0$), скорочуються, коли площини віддаляються від центру, та перетворюються на точки, коли $h = b$ та $h = a$, відповідно, а отже, дані площини не перерізають еліпсоїда, коли $h > b$ та $h > a$, відповідно.

Точки $A(\pm a, 0, 0)$, $B(0, \pm b, 0)$ та $C(0, 0, \pm c)$ називають *вершинами* еліпсоїда, відрізки, що з'єднують протилежні вершини, – *осями* еліпсоїда, а

відрізки, що поєднують вершини з центром, – *півосями* (рис. 2.13).

Таким чином, всі перерізи еліпсоїда координатними площинами, та площинами, паралельними до них, є еліпсами. Саме цим і пояснюється назва даної поверхні. У практичних задачах серед усіх еліпсоїдів виділяють *еліпсоїди обертання*, тобто такі еліпсоїди, у яких дві з трьох осей мають однакову довжину: $a = b \neq c$, $b = c \neq a$ або $a = c \neq b$. Переріз еліпсоїда обертання однією з трьох координатних площин та будь-якою площиною, паралельною до неї, є колом; перерізи еліпсоїда обертання двома іншими координатними площинами та площинами, паралельними до них, є еліпсами.

Еліпсоїд, всі три осі якого мають однакову довжину, називають *сферою*. При цьому довжину осі називають, як відомо, діаметром, а довжину півосі – радіусом сфери. Не слід плутати поняття сфери, яка є поверхнею, з поняттям кулі, яка є тілом (або ділянкою простору) обмеженою цією поверхнею.

2.4.3. Однопорожнинний гіперболоїд

2.53. Означення. Поверхню називають однопорожнинним гіперболоїдом, якщо існує така (канонічна) система координат, в якій рівняння цієї поверхні має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2.70)$$

(сталі a, b та c вважають додатними).

Дослідимо форму даної поверхні перерізуючи її площинами, паралельними координатним. Розглянемо спочатку переріз площинами $z = \pm h$. Всі точки таких перерізів задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = \pm h. \end{cases} \quad (2.71)$$

Вчинивши так, як і при дослідженні еліпсоїда, легко дійти висновку, що за будь-якого значення параметра h ця система визначає еліпси з півосями $a_h = a\sqrt{1 + h^2/c^2}$, та $b_h = b\sqrt{1 + h^2/c^2}$, розташовані у площинах $z = \pm h$ (рис. 2.14). Півосі еліпсів набувають мінімальних значень $a_h = a$ та $b_h = b$, коли h дорівнює нулю, тобто, коли переріз лежить у координатній площині XOY . Мірою того, як горизонтальні площини, що перерізають поверхню, віддаляються від координатної площини, півосі еліпсів зростають.

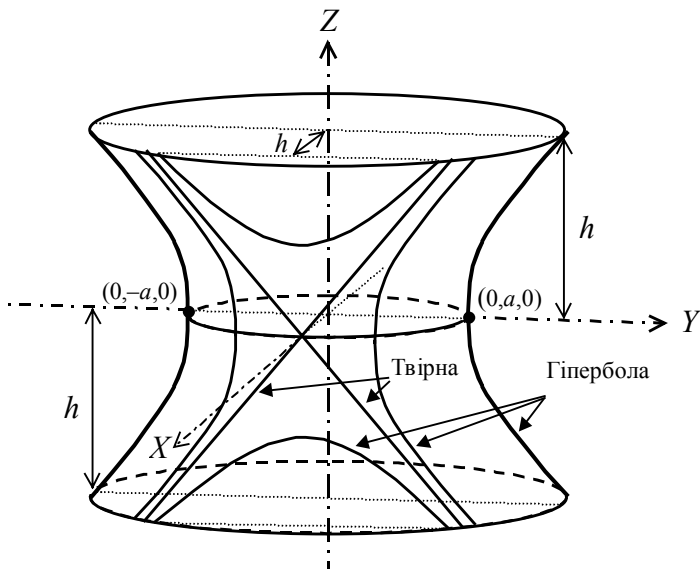


Рис. 2.14

Перерізі однопорожнинного гіперолоїда площинами $x = \pm h$ визначаються системою рівнянь

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}, \\ x = \pm h. \end{cases} \quad (2.72)$$

Якщо $h < a$, то перше рівняння цієї системи є канонічним рівнянням гіперболи

$$\frac{y^2}{b_h^2} - \frac{z^2}{c_h^2} = 1$$

з горизонтальною дійсною піввіссю завдовжки у $b_h = b\sqrt{1 - h^2/a^2}$, та уявною піввіссю завдовжки у $c_h = c\sqrt{1 - h^2/a^2}$ (рис. 2.14). Довжини півосей максимальні, коли $h = 0$, тобто коли переріз здійснюється координатною площиною YOZ і зменшуються, коли площини перерізів віддаляються від координатної площини. У граничному випадку $h \rightarrow a$ довжини півосей зменшуються до нуля, а перше рівняння системи (2.72) перетворюється на рівняння двох схрещених прямих $y = \pm(b/c)z$. Подальше від-

далення площин перерізів від координатної площини веде до того, що перше рівняння системи (2.72) перетворюється на рівняння гіперболи

$$\frac{z^2}{c_h^2} - \frac{y^2}{b_h^2} = 1$$

з вертикальною дійсною піввіссю завдовжки у $c_h = c\sqrt{(h/a)^2 - 1}$ та уявною піввіссю завдовжки у $b_h = b\sqrt{(h/a)^2 - 1}$ (рис. 2,14).

2.54. Зауваження. Серед усіх гіперболоїдів вирізняють так звані *гіперболоїди обертання*, переріз яких площиною, перпендикулярною до осі симетрії, є колом. Канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда обертання

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2.73)$$

виходить з (2.70), якщо покласти в останньому $a = b$.

2.55. Зауваження. Поряд з розглянутими вище прямими $y = \pm(b/c)z$, на однопорожнинному гіперболоїді лежить також сімейство прямих, що проходять паралельно до однієї з розглянутих і перетинають переріз $z = 0$. Це так звані *прямолінійні твірні* однопорожнинного гіперболоїда. У випадку гіперболоїда обертання наявність незліченої кількості прямолінійних твірних впливає з доведеної вище наявності перерізів $y = \pm(b/c)z$ та інваріантності рівняння (2.73) відносно всіх поворотів навколо осі OZ . Виходячи з рівняння (2.70), можна довести, що ця властивість притаманна й довільному однопорожнинному гіперболоїду.

Якщо уявити собі замість прямолінійної твірної щойно пофарбовану струну, яка рухається над прозорим (невидимим) однопорожнинним гіперболоїдом, перебуваючи у контакті з ним, то можна дійти висновку, що в наслідок такого руху гіперболоїд пофарбується (а отже, стане видимим, *утвориться*). Цим і пояснюється термін "прямолінійна твірна".

2.4.4. Двопорожнинний гіперболоїд

2.56. Означення. Поверхню називають двопорожнинним гіперболоїдом, якщо існує така (канонічна) система координат, в якій рівняння цієї поверхні має вигляд

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (2.74)$$

(сталі a, b та c вважають додатними). Можна сформулювати просте мнемонічне правило: канонічні рівняння гіперболоїдів відрізняються від рівняння еліпсоїда лише знаками перед доданками у лівій частині рів-

няння, причому кількість мінусів дорівнює кількості порожнин гіперboloїда.

Дослідимо форму двопорожнинного гіперboloїда, перерізуючи його площинами, паралельними координатним. Розглянемо спочатку переріз горизонтальними площинами $z = \pm h$. Всі точки таких перерізів задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = \pm h. \end{cases} \quad (2.75)$$

Вчинивши так, як і у попередньому розділі, легко дійти висновку, що коли $h > c$, система (2.75) визначає еліпси з півосями $a_h = a\sqrt{(h/c)^2 - 1}$, $b_h = b\sqrt{(h/c)^2 - 1}$, розташовані у площинах $z = \pm h$. Ці еліпси стягуються в точку, коли площини перерізів наближаються до координатної площини на відстань $h = c$, а при $h < c$ горизонтальні площини взагалі не перерізають двопорожнинного гіперboloїда (рис. 2.15).

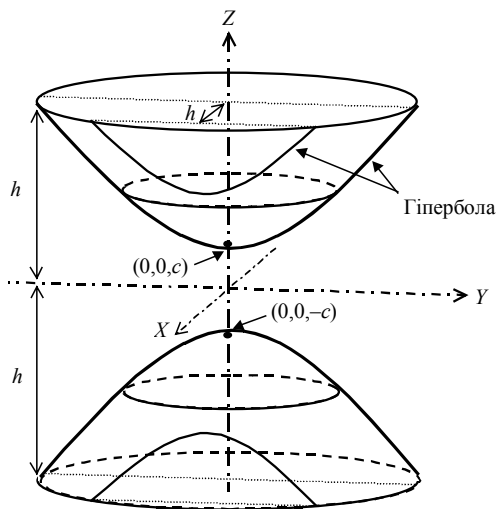


Рис. 2.15

Перерізи двопорожнинного гіперboloїда площинами $x = \pm h$ визначаються системою рівнянь

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{a^2}, \\ x = \pm h. \end{cases} \quad (2.76)$$

Перше рівняння цієї системи є канонічним рівнянням гіперболи

$$\frac{z^2}{c_h^2} - \frac{y^2}{b_h^2} = 1$$

з вертикальною дійсною піввіссю завдовжки у $c_h = c\sqrt{1 + h^2/a^2}$, та горизонтальною уявною піввіссю завдовжки у $b_h = b\sqrt{1 + h^2/a^2}$ (рис. 2.15). Довжини півосей мінімальні, коли $h = 0$, тобто коли переріз здійснюється координатною площиною YOZ і збільшуються, коли площини перерізів віддаляються від координатної площини.

Аналогічно можна упевнитися, що перерізи двопорожнинного гіперболоїда площинами $y = \pm h$ також є гіперболами.

Отже, двопорожнинний гіперболоїд огинає дві відокремлені одна від одної ділянки простору (порожнини), розташовані симетрично відносно координатної площини XOY канонічної системи координат (рис. 2.15).

2.57. Зауваження. Канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда обертання виходить з рівняння (2.74), якщо покласти в останньому $a = b$.

2.4.5. Конус другого порядку

2.58. Означення. Поверхню називають конусом другого порядку, якщо існує така (канонічна) система координат, в якій рівняння цієї поверхні має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (2.77)$$

(сталі a, b та c вважають додатними).

Дослідимо форму цієї поверхні за методом перерізів. Спочатку розглянемо перерізи конуса горизонтальними площинами $z = \pm h$. Всі точки таких перерізів задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}, \\ z = \pm h. \end{cases} \quad (2.78)$$

Система рівнянь (2.78) визначає еліпси з півосями та $a_h = ah/c$, $b_h = bh/c$, розташовані у площинах $z = \pm h$. Ці еліпси зменшуються за

розміром, коли площини перерізів наближаються до координатної площини, і перетворюються на точку, коли $h = 0$ (рис. 2.16). Цю точку називають *вершиною* конуса.

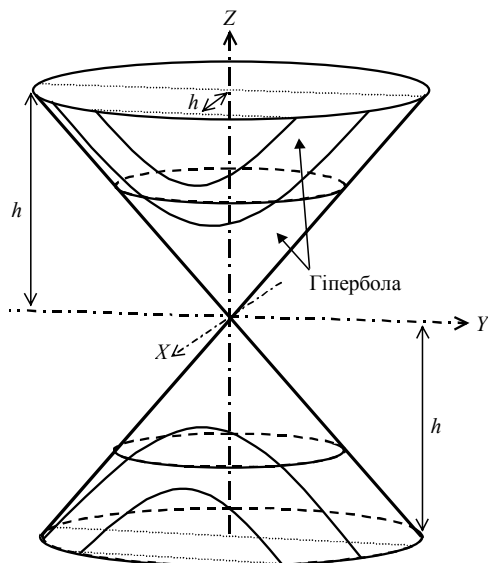


Рис. 2.16

Перерізи двопорожнинного гіперboloїда площинами $x = \pm h$ визначаються системою рівнянь

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{a^2}, \\ x = \pm h. \end{cases} \quad (2.79)$$

Перше рівняння цієї системи є канонічним рівнянням гіперболи

$$\frac{z^2}{c_h^2} - \frac{y^2}{b_h^2} = 1$$

з вертикальною дійсною піввіссю завдовжки у $c_h = c\sqrt{h^2/a^2}$, та горизонтальною уявною піввіссю завдовжки у $b_h = b\sqrt{h^2/a^2}$ (рис. 2.16). Довжини півосей зменшуються до нуля у граничному випадку $h \rightarrow 0$. Система рівнянь (2.79) показує, що коли переріз здійснюється координатною площиною YOZ , він являє собою дві прямі $z = \pm(c/b)y$, що перетинаються на

початку координат.

Аналогічно можна упевнитися, що перерізи двопорожнинного гіперболоїда площинами $y = \pm h$ також є гіперболами (коли $h \neq 0$), або схрещеними прямими (коли $h = 0$).

2.59. Зауваження. Розглянемо конус другого порядку, однопорожнинний гіперболоїд та двопорожнинний гіперболоїд з одними й тими ж параметрами a, b та c . При віддаленні від початку канонічної системи координат (тобто, коли $|x|/a \rightarrow \infty$, $|y|/b \rightarrow \infty$, та $|z|/c \rightarrow \infty$) як однопорожнинний, так і двопорожнинний гіперболоїд наближаються до конуса (перший – зовні, другий – з середини конуса), оскільки у зазначеному випадку можна знехтувати одиницею у канонічних рівняннях гіперболоїдів (2.70) та (2.74) порівняно з доданками x^2/a^2 , y^2/b^2 та z^2/c^2 , і описувати ці гіперболоїди наближенням рівнянням

$$(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \approx 0,$$

тобто рівнянням конуса. Цю ситуацію можна собі уявити дуже наочно: поверхні другого порядку не обмежені в певних напрямках; якщо дивитись на два зазначені вище гіперболоїди з відстані, яка зростає з часом до значень $r \gg \sqrt{a^2 + b^2}$, то настане така мить, коли око не зможе відрізнити їх від конуса другого порядку, оскільки область поблизу початку координат (в якій ці три поверхні істотно відрізняються одна від одної) виглядатиме як точка.

2.4.6. Еліптичний параболоїд

2.60. Означення. Поверхню називають еліптичним параболоїдом, якщо існує така (канонічна) система координат, в якій рівняння цієї поверхні має вигляд

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z. \quad (2.80)$$

Для визначеності, канонічну систему координат обирають так, щоб *параметри еліптичного параболоїда* були додатними, тобто

$$p > 0, \quad q > 0,$$

хоча, в разі необхідності, можна зробити інверсію координат і отримати рівняння вигляду (2.80) з від'ємними параметрами $p' = -p$ та $q' = -q$, яке буде рівнянням *тієї ж самої поверхні*. (Читачеві корисно обміркувати зроблене твердження самостійно).

Дослідимо форму еліптичного параболоїда. Спочатку розглянемо його переріз горизонтальною площиною $z = h$. Всі точки такого перерізу задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a_h^2} + \frac{y^2}{b_h^2} = 1, \\ z = h, \end{cases} \quad (2.81)$$

яка визначає еліпс з півосями в $a_h = \sqrt{2ph}$, та $b_h = \sqrt{2qh}$ завдовжки, розташований у площині $z = h$. Цей еліпс зменшуються за розміром, коли площина перерізу наближаються до координатної площини, і перетворюється на точку, коли $h = 0$ (рис. 2.17). Коли $h < 0$, горизонтальна площина не перерізає еліптичного параболоїда, а отже, він цілком розташований у півпросторі, що відповідає додатним значенням аплікати z канонічної системи координат. З огляду на сказане вище, початок координат називають *вершиною* гіперболічного параболоїда.

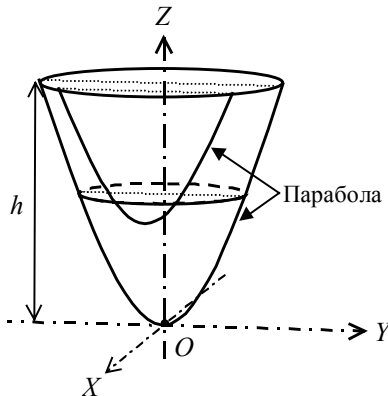


Рис. 2.17

Перерізи еліптичного параболоїда площинами $x = \pm h$ визначаються системою рівнянь

$$\begin{cases} y^2 = 2qz - qh^2 / p, \\ x = \pm h. \end{cases} \quad (2.82)$$

Система (2.82) визначає параболи з осями, напрямленими вздовж осі аплікат, і вершинами, розташованими в точках з координатами $(\pm h, 0, h^2 / 2p)$. Саме ця обставина пояснює назву даної поверхні.

2.4.6. Гіперболічний параболоїд

2.61. Означення. Поверхню називають гіперболічним параболоїдом, якщо існує така (канонічна) система координат, в якій рівняння цієї поверхні має вигляд

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z. \quad (2.83)$$

Канонічну систему координат обирають так, щоб *параметри гіперболічного параболоїда* були додатними, тобто

$$p > 0, \quad q > 0.$$

При інверсії координат канонічне рівняння перетвориться на рівняння вигляду (2.83) з від'ємними коефіцієнтами $p' = -p$ та $q' = -q$, яке буде рівнянням *тієї ж самої поверхні*.

Дослідимо форму гіперболічного параболоїда. Спочатку розглянемо його переріз горизонтальною площиною $z = h > 0$. Всі точки такого перерізу задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1, \\ z = h. \end{cases} \quad (2.84)$$

За кожного додатного значення параметра h система (2.84) визначає гіперболу з дійсною піввіссю в $a_h = \sqrt{2ph}$ завдовжки та уявною піввіссю в

$b_h = \sqrt{2qh}$ завдовжки. Таким чином, дійсна вісь напрямлена вздовж осі абсцис декартової системи. Осі гіперболи скорочуються, коли площа перерізу наближається до координатної площини. Один з перерізів гіперболічного параболоїда горизонтальною площиною показаний на рис.

2.18. Координатна площина XOY перерізає гіперболічний параболоїд вздовж двох прямих $y = \pm x\sqrt{q/p}$, схрещених на початку координат.

За від'ємних значень параметра h переріз гіперболічного параболоїда горизонтальною площиною $z = h$ визначається рівнянням

$$\frac{y^2}{2p|h|} - \frac{x^2}{2q|h|} = 1, \quad (2.85)$$

тобто рівнянням гіперболи з дійсною віссю паралельною до осі ординат. Довжина цієї осі зростає при віддалені площини перерізу від площини XOY . Дані перерізи не показані на рис. 2.18, щоб уникнути його ускладнення.

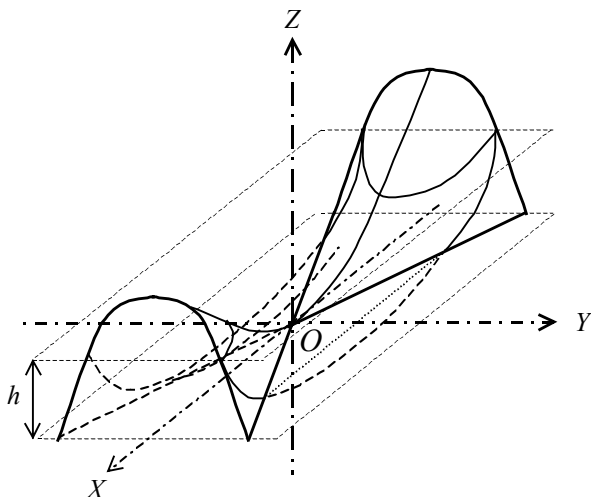


Рис. 2.18

Перерізи еліптичного параболоїда площинами $y = \pm h$ визначаються системою рівнянь

$$\begin{cases} x^2 = 2pz + ph^2 / q, \\ y = \pm h. \end{cases} \quad (2.86)$$

Перше рівняння цієї системи є рівнянням параболи з віссю, напрямленою вздовж осі аплікату, і вершиною, розташованою в точці з координатами $(0, \pm h, h^2 / 2q)$. Три перерізи такого типу показані на рис. 2.18, причому один з зображених перерізів проходить крізь початок координат.

Перерізи еліптичного параболоїда площинами $x = \pm h$ визначаються системою рівнянь

$$\begin{cases} y^2 = -2qz + qh^2 / p, \\ x = \pm h. \end{cases} \quad (2.87)$$

Отже, дані перерізи є параболою, гілки яких спрямовані донизу, а вершини знаходяться в точках $(\pm h, 0, h^2 / 2q)$. Два таких перерізи (розташовані симетрично до площини ZOY показані на рис. 2.18.

З рисунку 2.18 випливає, що гіперболічний параболоїд нагадує поверхню сідла для верхової їзди.