

Ю. В. Придатченко, В. А. Львов

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

1. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

1. 1. Попередні відомості

1.1.1. Уявлення про вектори та векторні простори

Всі люди мають інтуїтивне уявлення про простір, в якому вони живуть, та про відстані між фізичними тілами, що існують у цьому просторі. З іншого боку, з давніх часів дуже важливим завданням було визначення відстаней між тілами на поверхні землі та вимірювання розмірів тих чи інших ділянок землі – геометрія. Тому простір, в якому існує світ, часто називають *геометричним*.

Згідно із загальновідомим означенням, вектори у геометричному просторі – це напрямлені відрізки прямої лінії, сума яких визначається за правилом паралелограма. Саме так означається поняття вектора, наприклад, у шкільному курсі фізики, і вже в цьому курсі це геометричне за своєю суттю означення автоматично поширюється на велику кількість фізичних об'єктів різної природи – механічних сил та прискорень, напруженостей електричних та магнітних полів, магнітних моментів елементарних частинок, тощо – і при цьому завжди виходить, що сумою двох сил є третя сила, сумою прискорень у двох різних напрямках є прискорення в третьому напрямку, а сумою електричних полів, що утворюються двома електричними зарядами, є, знову ж таки, електричне поле, а не якась інша фізична величина. З огляду на це, а також на те, що при розв'язанні багатьох задач дуже зручно зображати векторні величини різної фізичної природи у вигляді напрямлених відрізків (стрілочок) на малюнках та графіках, фізики почали вживати уявлення про "простір сил", "простір механічних імпульсів", та інші.

Слід наголосити, однак, що поширення понять геометричного вектора та геометричного векторного простору на фізичні величини можливе лише в тому разі, коли цим величинам можна поставити у відповідність геометричні вектори. Тоді сума двох фізичних величин легко визначається шляхом додавання відповідних геометричних векторів за правилом паралелограма, а зміна фізичної величини в λ разів відображається зміною довжини відповідного геометричного вектора в таке ж число разів. Це робиться так легко і природно, що школярі, коли розв'язують задачу, наприклад, про човен в річці, навіть і не згадують про те, що вектор швидкості човна не є геометричним вектором, що його величина (яка дорівнює, припустимо, п'яти кілометрам на годину) лише умовно зображується стрілочкою завдовжки у п'ять клітинок шкільного зошиту, і що цим встановлюється відповідність між елементами простору швидкостей та геометричного простору.

Математики узагальнили та формалізували наші уявлення про геометричний простір, ввівши у розгляд поняття векторного простору, як сукупності елементів (названих векторами), для яких означені такі правила додавання і множення на число, що вони не виводять елементи за межі сукупності. Таким чином, складаючи будь-які два елементи сукупності, або помноживши будь-який елемент на число ми маємо одержати елемент приналежний до цієї ж сукупності; якщо ця вимога не виконана, сукупність елементів не є векторним простором. Якщо вдається встановити взаємно однозначну відповідність між елементами якогось векторного простору і геометричними векторами, цей простір називають *ізоморфним* (у перекладі з грецької, *подібним за будовою*) до геометричного простору.

Наведені вище міркування свідчать про виняткову важливість поняття геометричного вектора для ясного розуміння багатьох питань фізики і про можливість його математичного узагальнення. Отже, проаналізуємо це поняття більш докладно.

1.1.2. Геометричні вектори

Найбільш наочно поняття геометричного вектора виникає при математичному розгляді питання про положення точки на прямій лінії, площині та у геометричному просторі.

Спочатку розглянемо довільну точку P на прямій. Щоб математично охарактеризувати її положення, оберемо на цій прямій певну точку O й назвемо її початком координат. Зафіксуємо ще одну точку на прямій та позначимо її літерою I (див. рис. 1.1). Довжину відрізка між точками O та I вважатимемо одиницею виміру відстані від нульової точки до будь-якої іншої точки площини. Положення довільної точки P на прямій визначається числом x , модуль якого дорівнює довжині відрізка PO (в обраних одиницях). Вважатимемо x додатним, якщо точка P розташована з того ж боку від нульової точки, що й точка I . Якщо точки P та I розташовані з різних боків від нульової точки, вважатимемо x від'ємним. Число x називають *координатою* точки P на прямій.

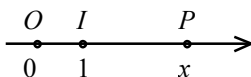


Рис. 1.1

1.1. Означення. Пряму з обраними на ній початком координат O та одиничним відрізком OI називають віссю координат.

Оскільки положення точки на прямій визначається шляхом вимірювання одного-єдиного числа x , *пряма є одновимірним простором*.

Тепер розглянемо довільну точку P на площині. Проведемо стрілку з точки O до точки P . Цю стрілку називають *радіус-вектором* $\mathbf{r}$ точки P . Точку O називають *початком* радіус-вектора, а P – *кінцем*. Існує взаємно однозначна відповідність між точками P та їх радіус-векторами. Просторове положення будь-якої точки на площині та її радіус-вектор можна визначити вимірявши два числа, наприклад, довжину відрізка OP та кут φ між цим відрізком та віссю координат (рис. 1.2). Тому *площина є двовимірним простором*.

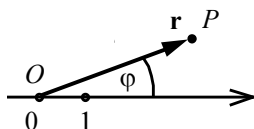


Рис. 1.2

Якщо розглянути замість точок на площині всю сукупність точок геометричного простору, то легко дійти висновку, що положення кожної точки та її радіус-вектора визначається трьома числами наприклад, довжиною і двома кутами φ та θ , які утворює радіус-вектор з двома осями, що перетинаються на початку координат (див. рис. 1.3). Отже, *геометричний простір є тривимірним простором*.

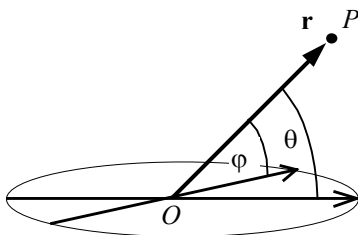


Рис. 1.3

Сформулюємо означення геометричного вектора як узагальнення поняття радіус-вектора точки.

1.2. Означення. Геометричними векторами називають напрямлені відрізки прямої лінії на площині або у тривимірному просторі.

Геометричний вектор графічно зображують стрілочкою, спрямованою від його початку до кінця. Ще раз підкреслимо, що можна встановити відповідність між геометричними векторами та певними фізичними величинами. У фізичній літературі ці величини також називають векторами та умовно зображують на рисунках стрілочками. У математичних формулах

вектори позначають або жирними літерами, або літерами зі стрілочками (наприклад, $\mathbf{r}$ або $\vec{r}$). Сукупність векторів певної фізичної природи називають простором. Кількість чисел – координат, – які повністю визначають вектор, називають вимірністю відповідного простору.

Отже, геометричний простір є тривимірним. В основних розділах теоретичної фізики часто вводяться в розгляд простори з вимірністю вищою за трійку. Необхідний для вивчення багатовимірних просторів математичний апарат розроблений у спеціальному розділі вищої математики, який має назву *лінійна алгебра*. Для осмислення аксіоматичної будови лінійної алгебри та наочної інтерпретації її основних результатів слід добре вивчити правила алгебраїчних дій з геометричними векторами, а для цього слід розглянути поняття матриці та її визначника.

1.1.3. Матриці

Математичне поняття “матриця” з’явилося у зв’язку з вивченням систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Розглянемо, наприклад, систему з трьох рівнянь:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y + z = 2, \\ x + 2y - z = 3. \end{cases} \quad (1.1)$$

Система (1.1) повністю характеризується коефіцієнтами, що стоять біля невідомих значень x , y , z , та правими частинами. Однак, треба записувати ці коефіцієнти таким чином, щоб завжди пам’ятати, в якому рівнянні та біля якого невідомого стоїть кожен з них. Для цього слід пронумерувати невідомі, тобто записати $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$. Коефіцієнти рівнянь (1.1) пронумеруємо за допомогою літер із двома індексами a_{ik} (перший індекс вказує на номер рівняння, другий збігається з номером змінної). Праві частини рівнянь позначимо як b_i , де i – номер рівняння. Тепер систему (1.1) можна переписати у такому вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (1.2)$$

Коефіцієнти систем (1.1) та (1.2) утворюють *матрицю* $\mathbf{A}$, яка має вигляд

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

а праві частини дорівнюють $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 3$. Величини a_{ik} називають

елементами матриці $\mathbf{A}$. Матрицю (1.3) називають *основною матрицею системи рівнянь* (1.2). Вона має три рядки та три стовпчики.

Якщо дописати в основну матрицю лінійної системи стовпчик із правих частин, вийде матриця $\mathbf{B}$, яку називають *розширеною матрицею системи рівнянь*. Наприклад, розширена матриця системи (1.1), (1.2) складається з трьох рядків та чотирьох стовпчиків і має такий вигляд:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Для інших систем кількість рівнянь та кількість невідомих принципово необмежені, тому кількість рядків m та стовпців n матриці може бути різною ($m, n = 2, 3, 4, \dots$), причому, взагалі кажучи, $m \neq n$.

1.3. Означення. Матрицю, що складається з m рядків та n стовпчиків називають матрицею порядку $m \times n$. Коли $m = n$, кажуть, що матриця квадратна, а число n називають її порядком.

Матриці використовують не лише в теорії лінійних алгебраїчних систем, а й у багатьох інших розділах математики та теоретичної фізики. Елементами матриці можуть бути не лише числа, а й функції та деякі інші математичні об'єкти.

1.1.4. Визначники

Розглянемо *квадратну* матрицю $\mathbf{A}$ порядку n , елементами якої є числа або числові функції. Такій матриці ставлять у відповідність певне число або числову функцію, яку позначають $\det \mathbf{A}$ і називають *визначником* матриці $\mathbf{A}$. Визначник матриці називають також її *детермінантом* і обчислюють за допомогою такої формули:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \overline{M}_k^i, \quad (1.5)$$

де $\overline{M}_k^i$ – визначник матриці порядку $n-1$, який одержують шляхом викреслення з матриці $\mathbf{A}$ рядка під номером i та стовпчика під номером k . Кожен визначник $\overline{M}_k^i$ знову розраховується за допомогою формули (1.5) і таким чином $\det \mathbf{A}$ виражається через визначники матриць порядку $n-2$. Отже, послідовне застосування формули (1.5) дозволяє виразити $\det \mathbf{A}$ через визначники матриць другого порядку, а для кожного такого визначника ця формула дає очевидний результат

$$\det \mathbf{A} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.6)$$

Вираз (1.6) містить у собі дуже розповсюджене позначення детермінанта у вигляді елементів відповідної матриці, розташованих між двома вертикальними лініями. Можна довести, що результат обчислення детермінанта не залежить від того, який номер рядка i обрати на кожному з етапів його обчислення.

1.4. Означення. Порядок квадратної матриці називають також порядком її визначника.

Застосуємо (1.5) та (1.6) для розрахунку детермінанта третього порядку. Поклавши, для визначеності, $i = 1$, одержуємо результат:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &\equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Формулу (1.5) можна вважати означенням поняття детермінанта. У подальшому, однак, ми надамо більш вишукане означення цього поняття, з якого виведемо формулу (1.5).

Використання визначників допомагає розв'язувати велику кількість важливих задач математики та теоретичної фізики, наприклад, знаходити розв'язки систем лінійних алгебраїчних рівнянь та частоти власних коливань фізичних систем. Наприклад, у випадку, коли $\det \mathbf{A} \neq 0$, розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \quad (1.7)$$

може бути записаний у такому вигляді:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\det \mathbf{A}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\det \mathbf{A}} \quad (1.8)$$

де $\det \mathbf{A}$ визначений формулою (1.6). Справедливість співвідношень (1.8) буде доведена при докладному розгляді систем лінійних рівнянь.

Попереднє ознайомлення з матрицями та визначниками другого та третього порядку дозволяє перейти до вивчення математичних дій з геометричними векторами – векторної алгебри.

1.2. Лінійні операції з геометричними векторами

1.2.1. Рівність геометричних векторів

Кожен геометричний вектор характеризується своєю довжиною та напрямком.

1.5. Означення. Довжину вектора називають його модулем, або абсолютною величиною.

Модуль вектора є скаляром. Якщо вектор позначений як $\mathbf{a}$ або $\vec{a}$, то його модуль позначають $|\mathbf{a}|$ або $|\vec{a}|$. Дуже часто використовують спрощене позначення $|\mathbf{a}| = a$, якого в багатьох випадках будемо дотримуватись і ми.

1.6. Означення. Вектор, модуль якого дорівнює одиниці, називають одиничним вектором або ортом.

1.7. Означення. Вектор, модуль якого дорівнює нулю, називають нульовим вектором або нулем у векторному просторі.

Нульовий вектор – єдиний вектор, який не має певного напрямку. Його позначають його символом $\mathbf{0}$ або $\vec{0}$.

1.8. Означення. Вектори, що лежать на паралельних прямих, називають колінеарними.

На рис. 1.4 наведені дві пари колінеарних векторів. Вектори першої пари фізики називають паралельними або співнапрямленими, а другої – антипаралельними або протилежно напрямленими.

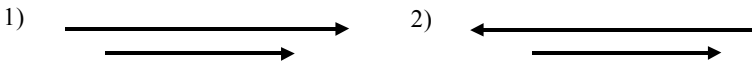


Рис. 1.4

1.9. Означення. Вектори, що лежать у паралельних площинах, називають компланарними.

1.10. Означення. Вектори дорівнюють один одному, якщо вони а) рівні за модулем, б) колінеарні, в) напрямлені в один бік (що відповідає першій парі векторів на рис. 1.4). Іншими словами, вектори рівні між собою, якщо збігаються, по-перше, їх довжини і, по-друге, напрямки.

З означення 1.10 випливає, що коли перенести у просторі вектор $\mathbf{a}$, який задовольняє певну рівність $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, не змінивши при цьому його напрямку, рівність не буде порушено. Отже, можна перенести початок вектора в будь-яку точку, не порушивши жодної з рівностей, які він задовольняє.

1.11. Означення. Вектори, рівність яких означена за допомогою 1.10 називають вільними.

Зі сказаного вище випливає, що всі вільні вектори, які можна сумістити шляхом паралельного перенесення у просторі формально можна вважати одним й тим самим вектором. Крім того, будь-які вільні вектори можна привести до спільного початку або, якщо треба, можна вважати, що всі вільні вектори мають спільний початок.

1.1.2. Зауваження. Два вектори завжди компланарні, оскільки після зведення до спільного початку через них завжди можна провести площину, але не кожен третій вектор буде компланарним із двома першими.

У фізиці іноді зустрічаються векторні величини, які не можна описувати вільними векторами. Прикладом такої величини є сила. Дійсно, результат дії сили на фізичне тіло залежить від того, до якої точки тіла прикладена сила. Для врахування цього факту вводять у розгляд фізичну величину, яка називається моментом сил і є вектором що ковзає вздовж свого напрямку, але не переноситься поперек нього. Надалі ми будемо розглядати лише вільні вектори.

1.2.2. Додавання геометричних векторів

Додавання векторів здійснюють за правилом трикутника або за правилом паралелограма. Правило трикутника вважатимемо за означення операції додавання векторів.

1.1.3. Означення. Сумою двох векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ вважають вектор $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, початок якого лежить на початку вектора $\mathbf{a}$, а кінець збігається з кінцем вектора $\mathbf{b}$ за умови, що початок вектора $\mathbf{b}$ збігається з кінцем вектора $\mathbf{a}$.

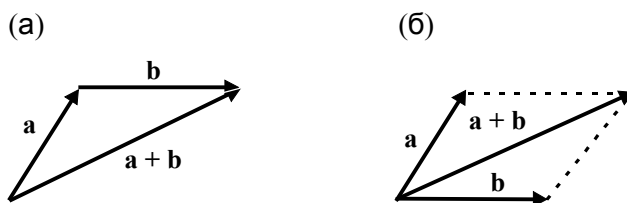


Рис. 1.5

Надане означення не дуже зручне для запам'ятовування. Доцільніше запам'ятати графічне зображення цього правила, наведене на рис. 1.5 (а). Друге правило – правило паралелограма – зображено на рис. 1.5 (б). Результат додавання векторів не залежить від того, яким із двох правил користатися.

Правило трикутника дозволяє знайти суму будь-якої кількості векто-

рів. Із цього правила випливають дві властивості операції додавання, а саме:

1°. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ – комутативність,

2°. $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{c}) + \mathbf{b}$ – асоціативність.

Доведення рівностей 1° та 2° читачеві доцільно провести самостійно, шляхом елементарних геометричних побудов.

1.2.3. Множення геометричного вектора на скаляр

1.14. Означення. Добутком вектора $\mathbf{a}$ на скаляр λ називають вектор, довжина якого дорівнює добутку модуля $\mathbf{a}$ на абсолютну величину λ , а напрямком збігається з напрямком $\mathbf{a}$, коли $\lambda > 0$ та є протилежним напрямку $\mathbf{a}$, коли $\lambda < 0$.

З означення випливає, що множення вектора на число -1 призводить до зміни напрямку вектора на протилежний, залишаючи сталим його модуль. Вектор, напрямком якого протилежний напрямку $\mathbf{a}$, позначають $-\mathbf{a}$. Отже, $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$.

Зважаючи на означення 1.14, легко дійти висновку, що для знаходження орта $\mathbf{e}_a$, напрямленого вздовж вектора $\mathbf{a}$, треба помножити цей вектор на скаляр $|\mathbf{a}|^{-1}$, тобто

$$\mathbf{e}_a = \mathbf{a} / |\mathbf{a}|. \quad (1.9)$$

Тепер можна означити операцію віднімання векторів.

1.15. Означення. Різницею $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ називають суму вектора $\mathbf{a}$ та вектора $-\mathbf{b}$. Таким чином, різниця двох векторів визначається за правилом трикутника, як показано на рис. 1.6.

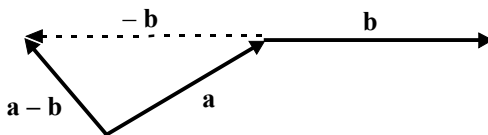


Рис. 1.6

Повернемося до розгляду операції множення вектора на скаляр. Ця операція має чотири основні властивості, які виконуються для будь-яких векторів та скалярів, а саме:

1°. $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{a} \lambda$ – комутативність,

2°. $\lambda(\mu \mathbf{a}) = (\lambda \mu) \mathbf{a}$ – асоціативність,

3°. $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ – дистрибутивність відносно скалярів,

4°. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ – дистрибутивність відносно векторів.

Доведення кожної з тотожностей 1° – 4° ґрунтується на означеннях 1.13 – 1.15 і складається з двох частин. По-перше, треба довести збіжність напрямків тих векторів, що стоять у лівій та правій частинах тотожності, а по-друге – рівність їх модулів.

Доведемо, наприклад, тотожність 3°.

(а) Спочатку будемо вважати, що числа λ та μ одного знаку. У такому разі з 1.14 випливає, що вектори $\lambda\mathbf{a}$ та $\mu\mathbf{a}$ напрямлені однаково. Звідси доходимо висновку, що

$(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}) \uparrow\uparrow \mathbf{a}$ та $(\lambda + \mu)\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$, коли $\lambda > 0$,

$(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}) \uparrow\downarrow \mathbf{a}$ та $(\lambda + \mu)\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$, коли $\lambda < 0$.

Отже, за будь-якого знаку числа λ напрямком вектора $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ збігається з напрямком вектора $(\lambda + \mu)\mathbf{a}$. Далі доводимо рівність модулів цих векторів:

$$|\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}| = |\lambda\mathbf{a}| + |\mu\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}| + |\mu||\mathbf{a}|,$$

$$|(\lambda + \mu)\mathbf{a}| = |\lambda + \mu||\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}| + |\mu||\mathbf{a}|.$$

(б) Тепер вважатимемо, що λ та μ відрізняються за знаком. Позначимо $\mu = -\mu'$. Тепер треба довести рівність векторів $(\lambda - \mu')\mathbf{a}$ та $\lambda\mathbf{a} - \mu'\mathbf{a}$. Для цього зважимо на те, що $\lambda\mathbf{a}$ та $\mu'\mathbf{a}$ напрямлені однаково, оскільки λ та μ' – одного знаку. Звідси випливає рівність напрямків векторів, про які йдеться. Дійсно,

$(\lambda\mathbf{a} - \mu'\mathbf{a}) \uparrow\uparrow \mathbf{a}$ та $(\lambda - \mu')\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$, коли $\lambda > \mu'$,

$(\lambda\mathbf{a} - \mu'\mathbf{a}) \uparrow\downarrow \mathbf{a}$ та $(\lambda - \mu')\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$, коли $\lambda < \mu'$.

Рівність модулів цих векторів стає очевидною з рівностей

$$|\lambda\mathbf{a} - \mu'\mathbf{a}| = \pm(|\lambda\mathbf{a}| - |\mu'\mathbf{a}|) = \pm(|\lambda||\mathbf{a}| - |\mu'||\mathbf{a}|),$$

$$|(\lambda - \mu')\mathbf{a}| = |\lambda - \mu'||\mathbf{a}| = \pm(|\lambda||\mathbf{a}| - |\mu'||\mathbf{a}|),$$

де верхній знак беремо, коли $\lambda > \mu'$, нижній – коли $\lambda < \mu'$.

Тотожність 1° просто констатує, що $\lambda\mathbf{a}$ та $\mathbf{a}\lambda$ є двома різними формами запису добутку вектора на число, введеного за означенням 1.14. Доведення тотожності 2° цілком подібне до того, яке було проведено вище. Доведення тотожності 4° потребує розгляду двох подібних трикутників: одного – зі сторонами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ та $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, а другого – зі сторонами $\lambda\mathbf{a}$, $\lambda\mathbf{b}$ та $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b})$. Цей розгляд читачеві доцільно провести у вигляді вправи, спрямованої на краще засвоєння навичок роботи з векторами.

1.2.4. Лінійні комбінації геометричних векторів

У попередньому розділі були означені правила, за якими треба виконувати операції додавання векторів та множення вектора на скаляр. Ці правила дозволяють побудувати вектор

$$\mathbf{l} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} + \dots + \lambda \mathbf{m}, \quad (1.10)$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ – числові коефіцієнти.

1.16. Означення. Вектор $\mathbf{l}$, заданий рівністю (1.10), називають лінійною комбінацією геометричних векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots, \mathbf{m}$.

Дуже важливим для практичних застосувань векторної алгебри та її узагальнення на випадок багатовимірних просторів відіграє поняття лінійної залежності або ж незалежності векторів.

1.17. Означення. Вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots, \mathbf{m}$ називають лінійно залежними, якщо існують такі числа $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$, які *не всі* дорівнюють нулю та задовольняють рівність

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} + \dots + \lambda \mathbf{m} = \mathbf{0}. \quad (1.11)$$

І навпаки, якщо вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots, \mathbf{m}$ задовольняють рівність (1.11) лише в тому випадку, коли *всі* числа $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ дорівнюють нулю, ці вектори називають лінійно незалежними.

Рівність (1.11), в якій принаймні один коефіцієнт не дорівнює нулю, називають умовою лінійної залежності векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots, \mathbf{m}$. Цю умову можна записати також у вигляді рівності $\mathbf{l} = \mathbf{0}$.

При першому ознайомленні з поняттям лінійної залежності векторів у більшості людей виникає запитання: що буде, коли вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots, \mathbf{m}$ лінійно залежні, причому лише один коефіцієнт (наприклад, α) не дорівнює нулю. Відповідь дуже проста: в цьому випадку $\mathbf{l} = \alpha \mathbf{a} = \mathbf{0}$, тобто, з необхідністю $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Можна зробити також інші важливі висновки стосовно лінійної залежності векторів і сформулювати їх у вигляді теорем.

1.17. Теорема. Будь-які вектори лінійно залежні, якщо серед них є нульовий вектор.

◀ Для доведення теореми розглянемо лінійну комбінацію (1.11) векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots, \mathbf{m}$. За умовою теореми один із векторів, наприклад, $\mathbf{c}$, дорівнює нулю. Надамо нульові значення всім коефіцієнтам лінійної комбінації, окрім γ . Тоді $\mathbf{l} = 0 \cdot \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{b} + \gamma \cdot \mathbf{0} + \dots + 0 \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0}$. Отже, справджується умова лінійної залежності векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{m}$, що й треба було довести. ▶

1.18. Теорема. Якщо два вектори $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ лінійно залежні, вони колінеарні.

◀ За умовою теореми $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0}$, де принаймні один із коефіцієнтів,

наприклад, β , не дорівнює нулю. Звідси випливає, що $\mathbf{b}$ є добутком вектора $\mathbf{a}$ на скаляр $(-\alpha/\beta)$. Згідно з означеннями 1.8 та 1.14 вектор $\mathbf{b}$ колінеарний з $\mathbf{a}$, отже, теорему доведено¹. ►

1.19. Теорема (обернена). Якщо два вектори колінеарні, вони лінійно залежні.

◄ За умовою теореми орти, що вказують напрямки векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$, пов'язані між собою рівністю $\mathbf{e}_a = \pm \mathbf{e}_b$. Оскільки $\mathbf{e}_a = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ та $\mathbf{e}_b = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|$, з цієї рівності випливає умова лінійної залежності $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$, з коефіцієнтами $\alpha = |\mathbf{a}|^{-1}$ та $\beta = \mp |\mathbf{b}|^{-1}$. Таким чином, теорему доведено. ►

1.20. Теорема. Якщо три вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, та $\mathbf{c}$ лінійно залежні, вони компланарні.

◄ За умовою теореми $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$, де принаймні один з коефіцієнтів (наприклад, γ) не дорівнює нулю. Тоді $\mathbf{c} = -(\alpha/\gamma)\mathbf{a} - (\beta/\gamma)\mathbf{b}$, причому можливі три випадки:

1) Ані α ані β не дорівнює нулю. В цьому разі вектори $\mathbf{c}$, $(-\alpha/\gamma)\mathbf{a}$ та $(-\beta/\gamma)\mathbf{b}$ утворюють трикутник, а отже, вони компланарні.

2) Або α або β дорівнює нулю. Для визначеності, нехай $\alpha = 0$. В такому разі вектор $\mathbf{c}$ колінеарний з $\mathbf{b}$ і ці два вектори можуть бути перенесені на одну лінію. Через цю лінію та вектор $\mathbf{a}$ можна провести площину, а отже, вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, та $\mathbf{c}$ – компланарні.

3) Як α так і β дорівнюють нулю. В цьому разі $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Нульовий вектор не має певного напрямку, тому його можна вважати компланарним з будь-якою парою векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$. Отже, вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, та $\mathbf{c}$ – компланарні. ►

1.21. Теорема. (обернена). Якщо три вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, та $\mathbf{c}$ компланарні, вони лінійно залежні.

◄ Для доведення теореми треба розглянути окремо дві можливості.

1) Серед векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, та $\mathbf{c}$ немає жодної колінеарної пари. Оскільки всі три вектора можуть бути перенесені до однієї площини, то в цьому разі можливо добрати числа α , β та γ таким чином, щоб вектори $\alpha\mathbf{a}$, $\beta\mathbf{b}$, та $\gamma\mathbf{c}$ утворили трикутник, як зображено на рис. 1.7 В такому разі справджується рівність (1.11), яка й доводить твердження теореми.

2) Два з трьох векторів (наприклад, $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$) є колінеарними. За теоремою

¹ Якщо $\alpha = 0$ то вектор $\mathbf{b}$ – нульовий, тому він не має певного напрямку і його можна вважати колінеарним з $\mathbf{a}$.

1.19 ці вектори лінійно залежні, тобто $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0}$, причому принаймні один із коефіцієнтів не дорівнює нулю. Тоді обираємо $\gamma = 0$ й знову одержуємо умову лінійної залежності трьох векторів (1.11).

Випадок, коли всі три вектори колінеарні не потребує окремого розгляду, оскільки зводиться до теореми 1.19. Отже, доведення теореми 1.21 завершено. ►

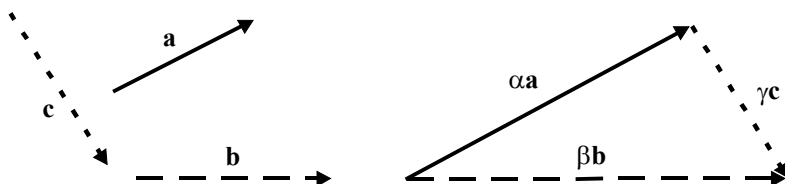


Рис. 1.7

1.22. Теорема. Будь-які чотири геометричні вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ та $\mathbf{d}$ є лінійно залежними.

◀ Доведення цієї теореми подібне до попереднього, з тією різницею, що замість трикутника, зображеного на рис. 1.7, треба побудувати паралелепіпед зі сторонами $\alpha \mathbf{a}$, $\beta \mathbf{b}$, та $\gamma \mathbf{c}$ і діагоналлю $\delta \mathbf{d}$. ►

1.3. Прямокутні системи координат

1.3.1. Координати геометричного вектора

Розглянемо сукупність геометричних векторів, які лежать у заданій площині. Оберемо на цій площині два *неколінеарних* вектора $\mathbf{e}_1$ та $\mathbf{e}_2$. З теореми 1.18 випливає, що вони лінійно незалежні. За теоремою 1.21 будь-який компланарний з ними вектор $\mathbf{a}$ є лінійно залежним від $\mathbf{e}_1$ та $\mathbf{e}_2$, тобто,

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{e}_1 + \gamma \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}. \quad (1.12)$$

З огляду на лінійну незалежність векторів $\mathbf{e}_1$ та $\mathbf{e}_2$, коефіцієнт α не може дорівнювати нулю, тому з рівності (1.12) можна виразити вектор $\mathbf{a}$ у вигляді лінійної комбінації

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2, \quad (1.13)$$

де $a_1 = -\beta/\alpha$ та $a_2 = -\gamma/\alpha$ – числові коефіцієнти.

1.23. Означення Будь-які два лінійно-незалежних вектори називаються

вають векторним *базисом* на площині.

Про вектор, представлений у вигляді (1.13), кажуть, що він розкладений по векторах базису $\mathbf{e}_1$ та $\mathbf{e}_2$.

Таким саме чином з теорем 1.20 та 1.22 випливає, що будь-який вектор $\mathbf{a}$ з геометричного простору може бути розкладений по трьох *некомпланарних* векторах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ та $\mathbf{e}_3$, тобто,

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3. \quad (1.14)$$

З огляду на теорему 1.20 вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ та $\mathbf{e}_3$ лінійно незалежні.

1.24. Означення Будь-які три лінійно-незалежних вектори називають векторним *базисом* у геометричному просторі.

1.25. Означення. Коефіцієнти a_k розкладів (3.1) та (3.2) називають координатами вектора $\mathbf{a}$ в обраному базисі.

Координати a_k заданого вектора залежать від того, у якому саме базисі його розкладено. Надалі, вивчаючи простори довільної вимірності, ми доведемо, що *в заданому базисі рівні вектори мають однакові координати*. І навпаки, *якщо в якомусь базисі відповідні координати двох векторів парами рівні, рівними є й самі вектори*. Отже, коли обрано конкретний базис, існує взаємно однозначна відповідність між векторами та їх координатами. Завдяки цьому виникає можливість визначати векторні величини та співвідношення між ними за допомогою звичайних чисел a_k та функцій цих чисел. Такий спосіб вивчення векторних величин називають *методом координат*. Він є надзвичайно цінним для фізики та інженерної справи, бо у врешті-решт результат дії більшості (якщо не всіх) фізичних приладів та технічних контролюючих пристроїв полягає у визначенні певних чисел (як у випадку, наприклад, цифрового вольтметра) або числових функцій скалярного аргументу (як у випадку осцилографа чи будь-якого приладу, до якого підключено самописець або персональний комп'ютер).

Оскільки операція множення вектора на скаляр дистрибутивна відносно векторів (див. розділ 1.2.3), то для будь-якого геометричного вектора справджується рівність $\lambda\mathbf{a} = \lambda a_1\mathbf{e}_1 + \lambda a_2\mathbf{e}_2 + \lambda a_3\mathbf{e}_3$, а тому координати вектора $\lambda\mathbf{a}$ дорівнюють λa_1 , λa_2 , λa_3 . Цей висновок може бути сформульований у вигляді теореми.

1.26. Теорема. Множення геометричного вектора на скаляр λ веде до зміни всіх його координат у λ разів.

Крім того, існує ще одна дуже корисна теорема.

1.27. Теорема. Координати суми геометричних векторів дорівнюють сумах відповідних координат векторів-доданків.

◀ Справедливість цієї теореми випливає з асоціативності додавання векторів та розкладів (1.13), (1.14). Для стислості запишемо лише рівності,

які доводять теорему для двох векторів на площині

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) + (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2) =$$

$$(a_1 + b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{e}_2 = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2. \blacktriangleright$$

Звернемо увагу на те, що означення поняття векторного базису, розгляд координат вектора та доведення теорем 1.26, 1.27 було подано вище без допомоги координатних осей, без конкретного вибору одиниці виміру відстані між геометричними точками та без виконання будь-яких графічних побудов. При цьому виявилось, що випадки двовимірного та тривимірного просторів цілком подібні. Тому вже зараз можна передбачити, що подібні поняття та теореми можуть бути поширені на випадок багатовимірних просторів, у яких графічні побудови принципово неможливі.

1.3.2. Прямокутна система координат на площині

За означенням 1.1 вісь координат це пряма лінія з обраною на ній нульовою точкою та одиницею виміру відстані між точками. Спрямуємо координатні осі OX та OY під кутом у 90° одну до одної і розташуємо початок координат O у точці їх перетину (див. рис. 1.8). Розглянемо два орти $\mathbf{e}_x$ та $\mathbf{e}_y$, приведені до спільного початку O та напрямлені вздовж осей OX та OY , відповідно.

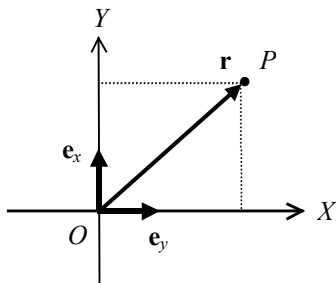


Рис. 1.8

1.28. Означення. Дві координатні осі OX та OY , які перетинаються у спільному початку координат O під прямим кутом одна до одної, називають прямокутною (ортогональною) системою координат на площині; вісь OX називають віссю абсцис, а вісь OY – віссю ординат.

Розклад радіус-вектора будь-якої точки на площині по ортах прямокутної системи координат має такий вигляд:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y, \quad (1.15)$$

Координати x та y називають також *проекціями* вектора $\mathbf{r}$ на осі OX та OY відповідно.

Кожній точці площини відповідає один-єдиний радіус-вектор і, навпаки, кожен радіус-вектор вказує певну точку. Тому координати x, y радіус-вектора називають також координатами точки, яку він вказує. Записом $P(x, y)$ відзначають той факт, що точка P має координати x, y .

Дуже часто виникає потреба у знаходженні координат вектора $\mathbf{a}$, початок якого лежить у точці P_1 , а кінець – у точці P_2 . Цю задачу легко розв'язати за допомогою правила трикутника, з якого випливає, що $\mathbf{a} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ (див. рис. 1.9).

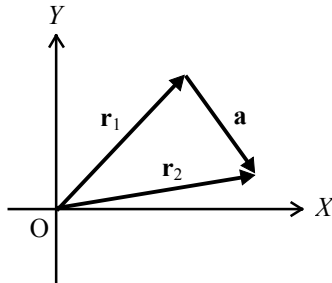


Рис. 1.9

Розкладаємо радіус-вектори по осях прямокутної системи координат та враховуємо, по-перше, асоціативність операції додавання векторів (у даному випадку – ортів), по-друге, дистрибутивність множення вектора на скаляр:

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = x_2 \mathbf{e}_x + y_2 \mathbf{e}_y - (x_1 \mathbf{e}_x + y_1 \mathbf{e}_y) = (x_2 - x_1) \mathbf{e}_x + (y_2 - y_1) \mathbf{e}_y.$$

Таким чином, розклад вектора $\mathbf{a}$ по осях прямокутної системи має вигляд $\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y$, де $a_x = x_2 - x_1$ та $a_y = y_2 - y_1$ – координати вектора $\mathbf{a}$ у прямокутній системі координат. Сформулюємо одержаний результат у вигляді теореми.

1.29. Теорема. Координати вектора, спрямованого із точки P_1 до точки P_2 , дорівнюють різницям координат цих точок.

Для прямокутної системи координат на площині справедливі також теореми 1.26 та 1.27.

1.3.3. Прямокутна система координат у просторі

Прямокутна система координат у тривимірному просторі складається з трьох осей OX , OY та OZ , які спрямовані під кутом 90° відносно одна одної та перетинаються у спільному початку координат. Таку систему ще називають декартовою на честь відомого вченого Рене Декарта (Картезіуса), який жив у 1596–1650 рр. і вславився науковими працями з мате-

матики, механіки, оптики та філософії. Осі OX , OY та OZ називають віссю абсцис, віссю ординат та віссю аплікату, відповідно.

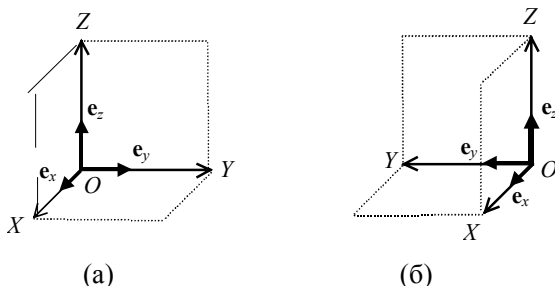


Рис. 1.10

З декартовою системою пов'язана трійка парами перпендикулярних ортів e_x , e_y , e_z . Надалі треба відрізнати так звані *праві* та *ліві* трійки ортів та відповідно *праві та ліві системи координат*. Праву трійку ортів та відповідну декартову систему координат зображено на рис. 1.10 (а). Ознакою правої системи є те, що вона задовольняє правилу гвинта: якщо головка гвинта обертається навколо осі OZ у напрямку від e_x до e_y , то орт e_z вказує напрямок поступального руху гвинта. У лівій системі орт e_z спрямований у протилежний бік. Ліву систему координат зображено на рис. 1.10 (б). Зміна напрямку будь-якого одного орта правої системи на 180° змінює саму систему на ліву (і навпаки). Праву систему можна перетворити на ліву (і навпаки) також шляхом переставлення або перепозначення будь-яких двох осей (наприклад, $OX \leftrightarrow OY$). На відміну від цього, *сумісне* обертання всіх трьох ортів системи на будь-який кут *не* веде до зміни її типу з правого на лівий, або навпаки.

Існує домовленість, згідно з якою завжди, коли не обумовлено протилежне, використовуються праві системи координат. Ми також будемо додержуватись цієї домовленості.

Для прямокутної системи координат у просторі справедливі теореми 1.26 та 1.27.

Оскільки декартові координати називають також проекціями на осі OX , OY та OZ , ці теореми можна сформулювати у формі таких тверджень:

а) проекції вектора $\lambda \mathbf{a}$ на осі декартової системи координат дорівнюють λa_i , де $a_i = a_x, a_y, a_z$ – проекції на ці осі вектора $\mathbf{a}$;

б) проекції суми векторів на осі декартової системи координат дорівнюють сумам відповідних проекцій векторів-доданків.

1.4. Скалярний добуток двох векторів

1.4.1. Означення скалярного добутку векторів

Поняття скалярного добутку двох векторів часто використовується у фізиці та аналітичній геометрії. Припустимо, наприклад, що треба розрахувати механічну роботу A , яку виконує сила тяжіння, коли пересуває фізичне тіло вздовж похилої площини на відстань l (див рис. рис. 1.11).

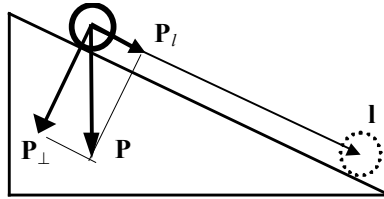


Рис. 1.11

Для розв'язання цієї задачі розглянемо вектор $\mathbf{l} = l\mathbf{e}$, де $\mathbf{e}$ – орт вздовж напрямку руху тіла, та вектор $\mathbf{P}$, який дорівнює силі ваги. Розкладемо $\mathbf{P}$ на паралельну та перпендикулярну до $\mathbf{l}$ складові: $\mathbf{P} = P_{\parallel}\mathbf{e} + \mathbf{P}_{\perp}$. Як відомо із шкільного курсу фізики, перпендикулярна

складова сили ніякої роботи не виконує, тому $A = lP_{\parallel} = |\mathbf{l}||\mathbf{P}|\cos(\hat{\mathbf{l}\mathbf{P}})$, де

$\hat{\mathbf{l}\mathbf{P}}$ – кут між $\mathbf{l}$ та $\mathbf{P}$. Можна навести й інші подібні приклади: енергія магнітного моменту у зовнішньому магнітному полі дорівнює добутку величин моменту, поля та косинуса кута між напрямками моменту та поля; густина енергії електричного поля у діелектрику пропорційна добутку величин напруженості електричного поля, електричної індукції та косинуса кута між напруженістю поля та індукцією. Поняття скалярного добутку виникло внаслідок математичного узагальнення таких прикладів.

1.30. Означення. Скалярним добутком двох векторів називають скаляр, який дорівнює добутку модулів цих векторів та косинуса кута між ними.

Скалярний добуток геометричних векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ позначають $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ або просто $\mathbf{ab}$. Ми будемо додержуватися другого з цих позначень. Отже, згідно з означенням 1.30

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\hat{\mathbf{ab}}) \quad (1.16)$$

Використовуючи вираз (1.16) слід мати на увазі, що при визначенні кута між векторами їх зводять до спільного початку, тому цей кут не переви-

щує 180° .

Тепер можна сказати, що механічна робота, яку виконує діюча на фізичне тіло сила, дорівнює скалярному добутку вектора цієї сили на вектор переміщення тіла у просторі, тобто $A = \mathbf{P} \cdot \mathbf{I}$, енергія магнітного моменту $\mathbf{m}$ у зовнішньому магнітному полі $\mathbf{H}$ дорівнює скалярному добутку $-\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}$; густина внутрішньої енергії електричного поля у діелектрику дорівнює $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/8\pi$, де $\mathbf{E}$ – вектор напруженості поля всередині діелектрика, $\mathbf{D}$ – вектор електричної індукції.

1.4.2. Проектування вектора на вісь

За допомогою рис. 1.8 та формули (1.15) легко переконатися в тому, що проекція x вектора $\mathbf{r}$ на вісь прямокутної системи координат дорівнює відстані від початку координат до основи перпендикуляру, який опущено на вісь з кінця вектора $\mathbf{r}$ (по-суті, ми вже скористалися з цього факту, коли розглянули роботу сили тяжіння за допомогою рис. 11). Узагальнимо поняття проекції вектора на вісь. Для цього розглянемо геометричний вектор $\mathbf{a}$, вісь OL та орт $\mathbf{e}_l$, напрямлений вздовж цієї осі. Зазвичай кажуть, що $\mathbf{e}_l$ є ортом осі OL .

1.31. Означення. Проекцією вектора $\mathbf{a}$ на вісь OL називають скаляр a_l , який а) за абсолютною величиною дорівнює відстані між перпендикулярами, опущеними на вісь із початку та кінця цього вектора б) є додатним, коли кут між вектором та ортом осі гострий, в) є від'ємним, коли кут між вектором та ортом осі тупий.

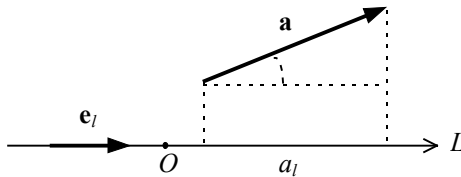


Рис. 1.12

Проста геометрична побудова (рис. 1.12) показує, що

$$a_l = |\mathbf{a}| \cos(\hat{\mathbf{a}\mathbf{e}_l}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{e}_l| \cos(\hat{\mathbf{a}\mathbf{e}_l}). \quad (1.17)$$

Порівняння математичних виразів (1.17) з означенням скалярного добутку (1.16) дозволяє зробити важливі висновки.

1.32. Висновок. Щоб знайти проекцію вектора на ось, достатньо обчислити скалярний добуток цього вектора на орт осі, тобто

$$a_l = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_l \quad (1.18)$$

1.33. Наслідок. З виразів (1.18) та (1.9) безпосередньо випливає,

що проекція вектора **a** на напрямок вектора **b** визначається формулами

$$a_b = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} / |\mathbf{b}| \quad (1.19)$$

1.34. Наслідок. З означення скалярного добутку (1.16) випливає, що косинус кута між двома векторами дорівнює скалярному добутку ортів, які вказують напрямки цих векторів, тобто

$$\cos(\widehat{\mathbf{ab}}) = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b. \quad (1.20)$$

У подальшому нам знадобляться співвідношення, які безпосередньо випливають з (1.19) і мають такий вигляд:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| b_a = |\mathbf{b}| a_b \quad (1.21)$$

Оскільки орт будь-якої осі можна вважати ортом деякого базису, то проекція вектора на вісь є однією з його координат у цьому базисі. Тому теореми 1.26 та 1.27, сформульовані для координат, справедливі також і для проекцій. Вони дозволяють стверджувати, що

а) проекція вектора $\lambda \mathbf{a}$ на будь-яку вісь дорівнює λa_i , де a_i – проекція на цю вісь вектора **a**;

б) проекція суми векторів на будь-яку вісь дорівнює сумам відповідних проекцій векторів-доданків, тобто

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})_i = a_i + b_i. \quad (1.22)$$

Встановлені вище співвідношення (1.21) між скалярним добутком векторів та їх проекціями дозволяють перейти до розгляду властивостей скалярного добутку.

1.4.3. Властивості скалярного добутку векторів

Зазначимо п'ять основних властивостей скалярного добутку векторів.

1.35. Властивість. Скалярний добуток дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли вектори-співмножники перпендикулярні один до одного, або хоч один з них є нульовим вектором.

1.36. Властивість. Скалярний добуток є комутативним, тобто $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ для будь-яких векторів **a** та **b**.

1.37. Властивість. Скалярний добуток є асоціативним, відносно числа, тобто $\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \lambda \mathbf{b}$ для будь-якого числа λ та будь-яких векторів **a** та **b**.

1.38. Властивість. Скалярному добутку притаманна дистрибутивність, тобто $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ для будь-яких векторів **a**, **b** та **c**.

1.39. Властивість. Скалярний добуток двох рівних векторів не може бути від'ємним, тобто $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$, причому $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ лише в тому разі, коли $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Властивості 1.35 – 1.37 та 1.39 випливають безпосередньо з означення скалярного добутку. Для доведення властивості 1.38 використовує-

мо співвідношення (1.21) та (1.22), записавши на їх основі такі рівності:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (a + b)_c |\mathbf{c}| = a_c |\mathbf{c}| + b_c |\mathbf{c}| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

Використання властивостей скалярного добутку дуже спрощує розрахунки, які доводиться виконувати для розв'язання багатьох математичних та фізичних задач. Наприклад, з властивості 1.35, і з того, що нульовий вектор можна вважати перпендикулярним до будь-якого іншого, випливає, що *рівність нулю скалярного добутку двох векторів є критерієм їх перпендикулярності*. Цей критерій дуже зручно використовувати для встановлення факту перпендикулярності векторів, заданих за допомогою декартових координат.

1.4.4. Символи Кронекера та запис скалярного добутку векторів у декартових координатах

Розглянемо всі можливі скалярні добутки ортів декартової системи координат:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \equiv \delta_{ij}, \quad i, j = x, y, z. \quad (1.23)$$

Оскільки орти декартової системи координат парами перпендикулярні, з властивості 1.35 випливає, що скаляри δ_{ij} задовольняють такі рівності:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad (1.24)$$

1.40. Означення. Двоїндексні величини δ_{ij} , які задовольняють рівності (1.23), називають символами Кронекера²

Надане означення 1.40 поширюється і на той випадок, коли індекси набувають числових значень $i, j = 1, 2, 3 \dots n$. В такому разі, за означенням 1.3, символи Кронекера є елементами квадратної матриці порядку n .

Розрахуємо скалярний добуток векторів, які розкладено по ортах декартової системи³:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z) \cdot (b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z) = \sum_i a_i \mathbf{e}_i \cdot \sum_j b_j \mathbf{e}_j$$

Врахуємо послідовно дистрибутивність скалярного добутку, його асоціативність зі скаляром, та рівності (1.23):

² На честь німецького математика, який жив у 1823 – 1891 рр.

³ Нижче ми вдалися до розповсюдженого у фізичній літературі правила запису сум, згідно з яким інтервали зміни індексів не вказують, якщо ці індекси набувають всіх можливих для них значень (у даному випадку, x, y, z).

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i \sum_j \mathbf{e}_i \cdot b_j \mathbf{e}_j = \sum_i a_i \sum_j b_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum_i a_i \sum_j b_j \delta_{ij}.$$

Візьмемо до уваги означення символів Кронекера (1.24), з якого випливає, що

$$\sum_j b_j \delta_{ij} = b_i, \quad (1.25)$$

і дістанемо вкрай простий та важливий вираз:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i b_i = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1.26)$$

1.4.1. Зауваження. Коли відомі декартові проекції двох геометричних векторів, їх скалярний добуток слід обчислювати за допомогою виразу (1.26), а використовувати для цього означення (1.16) – недоцільно.

Вкажемо на деякі корисні наслідки рівності (1.26) та означення скалярного добутку (1.16).

1.4.2. Наслідок. Довжину геометричного вектора, заданого декартовими проекціями, слід обчислювати за допомогою формули

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.27)$$

1.4.3. Наслідок. Рівність (1.27) дає змогу знайти відстань d від точки з координатами (x_1, y_1, z_1) до точки з координатами (x_2, y_2, z_2) .

Вважаючи, що $\mathbf{a} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, де $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ – радіус-вектори точок, знаходимо, що

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1.28)$$

1.4.4. Наслідок. Кут між будь-якими векторами $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ легко знайти за їх координатами, послідовно застосовуючи формули (1.20), (1.9), (1.26) та (1.27):

$$\cos(\hat{\mathbf{a}\mathbf{b}}) = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (1.29)$$

1.4.5. Наслідок. Орти $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ та $\mathbf{e}_z$ мають координати $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ та $(0, 0, 1)$ відповідно. Почергово підставляючи ці трійки координат до (1.29), одержуємо вирази для так званих *напрямних косинусів вектора* $\mathbf{a}$

$$\cos(\hat{\mathbf{a}\mathbf{e}_j}) = \frac{a_j}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, j = x, y, z, \quad (1.30)$$

які визначають напрямок вектора відносно осей декартової системи координат.

1.5. Векторний добуток геометричних векторів

1.5.1. Орієнтовані трійки геометричних векторів

У розділі 1.3.1 було введене в розгляд поняття правої та лівої трійки ортів декартової системи координат. Це поняття природним чином поширюється й на інші геометричні вектори.

1.46. Означення. Впорядковану трійку приведених до спільного початку некомпланарних векторів $\{a_1, a_2, a_3\}$ геометричного простору називають правоорієнтованою (або просто *правою*), якщо вона задовольняє правилу гвинта: коли гвинт найкоротшим шляхом обертається від вектора a_1 до вектора a_2 то його поступальний рух здійснюється під гострим кутом до вектора a_3 . Якщо ж при найкоротшому повороті гвинта від вектора a_1 до вектора a_2 його поступальний рух здійснюється під тупим кутом до вектора a_3 , то трійку векторів $\{a_1, a_2, a_3\}$ називають лівоорієнтованою (або *лівою*).

1.47. Зауваження. Якщо вектор a_3 перпендикулярний до векторів a_1 та a_2 , то за вказаного в означенні 1.46 напрямку обертання гвинта напрямком вектора a_3 або збігається з напрямком поступального руху гвинта (коли трійка векторів права), або є протилежним до нього (коли трійка векторів ліва).

1.48. Зауваження. Із наданого зараз означення випливає, що орієнтованість трійки векторів змінюється на протилежну, при переставленні двох векторів між собою, та при інверсії напрямку одного з них. При так званому *циклічному переставленні* векторів трійки

$$\{a_1, a_2, a_3\} \rightarrow \{a_3, a_1, a_2\} \rightarrow \{a_2, a_3, a_1\} \rightarrow \{a_1, a_2, a_3\}$$

її орієнтованість не змінюється.

1.49. Приклад. Зазвичай орти декартової системи позначають таким чином, щоб трійка векторів $\{e_x, e_y, e_z\}$ була правою. Тоді трійки векторів $\{e_y, e_x, e_z\}$ та $\{-e_x, e_y, e_z\}$ є лівими, а трійка $\{e_z, e_x, e_y\}$ – правою.

1.5.2. Означення та властивості векторного добутку

1.50. Означення. Вектор $\mathbf{c}$ називають векторним добутком вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$, якщо він задовольняє трьом умовам:

а) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin \alpha$, де α – кут між $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$;

б) вектор $\mathbf{c}$ спрямований перпендикулярно до площини векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$;

в) вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ та $\mathbf{c}$ утворюють праву трійку (рис. 1.13).

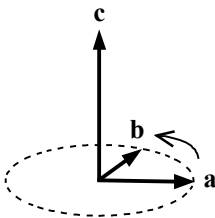


Рис. 1.13

Існує два позначення векторного добутку: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ або $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Ми будемо додержуватись першого з цих позначень, оскільки друге використовується у книжках з фізики для комутатора двох математичних величин (частіше за все, матриць або операторів).

Вкажемо основні властивості векторного добутку геометричних векторів.

1°. Векторний добуток дорівнює нулю у двох випадках: а) коли хоч один із векторів-співмножників дорівнює нульовому вектору; б) коли вектори-співмножники колінеарні.

2°. Модуль векторного добутку двох геометричних векторів дорівнює площі паралелограма S , сторони якого збігаються з векторами-співмножниками.

3°. Векторний добуток є *антикомутативним*, тобто $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

4°. Векторний добуток є *асоціативним* відносно скаляра, тобто $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \lambda\mathbf{b}$ для будь-якого скаляра λ .

5°. Векторному добуткові притаманна *дистрибутивність*, тобто $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ та $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.

1.51. Зауваження. Властивості 1°, 3° та 4°, впливають безпосередньо з означення 1.50; властивість 2° випливає з рис. 1.14 та відомої

формули для площі паралелограма $S = |\mathbf{a}|h = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\alpha$; доведення властивості 5° буде подано пізніше (див. наслідок 1.65).

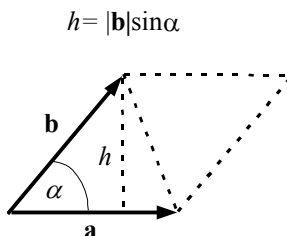


Рис. 1.14

1.52. Зауваження. Оскільки, нульовий вектор можна вважати колінеарним з будь-яким іншим, рівність нулю векторного добутку по суті є формальним критерієм колінеарності векторів. Застосування цього критерію спрощує розв'язання багатьох задач аналітичної геометрії та фізики.

1.53. Зауваження. Коли вектори-співмножники є розмірними геометричними або фізичними величинами, то розмірність їх векторного та скалярного добутків дорівнює добутку розмірностей векторів-співмножників. Оскільки геометричні вектори мають розмірність довжини, розмірність їх добутку збігається з розмірністю площі. На відміну від цього, розмірність суми векторів дорівнює розмірності векторів-додадків. Із сказаного випливає, що а) модуль векторної величини має таку ж розмірність як і сама величина; б) не можна додавати величини, що відрізняються за розмірністю.

1.54. Зауваження. У математичному аналізі та фізиці часто розглядають поняття *вектора площадки* $\mathbf{S}$, побудованої на двох векторах $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$, зведених до спільного початку: $\mathbf{S} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

1.55. Приклад. Зважаючи на те, що орти $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ та $\mathbf{e}_z$ декартової системи координат попарно ортогональні, а векторний добуток – антикомутативний, легко вивести наступну "таблицю векторного множення" ортів правої трійки:

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_x, \quad (1.31)$$

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = \mathbf{0}.$$

Цю таблицю не обов'язково запам'ятовувати – краще потренуватися у її виведенні з означення векторного добутку.

1.6. Мішаний добуток та подвійний векторний добуток геометричних векторів

1.6.1. Означення та властивості мішаного добутку

Векторний добуток геометричних векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ є вектором. Розглянемо скалярний добуток цього вектора та вектора $\mathbf{c}$, скориставшись означеннями скалярного та векторного добутків:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos \beta = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| |\mathbf{c}| \sin \alpha \cos \beta, \quad (1.32)$$

де α – кут між векторами $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$, β – кут між вектором $\mathbf{c}$ та вектором $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

1.56. Означення. Число $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ називають мішаним добутком векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ та $\mathbf{c}$.

Мішаний добуток не є принципово новим математичним поняттям, бо процедура його обчислення зводиться до знаходження скалярного та векторного добутків. Незважаючи на це, вивчення мішаного добутку як окремого математичного об'єкту є дуже доцільним, оскільки він часто зустрічається при розгляді різноманітних задач, і має низку властивостей, що спрощують їх розв'язання. Розглянемо ці властивості та їх наслідки.

1.57. Властивість. Мішаний добуток векторів правої трійки є додатним, а лівої – від'ємним.

◀ У математичному виразі для мішаного добутку (1.32) кут α не перевищує 180° , тому його синус не може бути від'ємним і знак мішаного добутку визначається знаком $\cos \beta$. Якщо трійка $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ – права, то вектор $\mathbf{c}$ лежить по той самий бік від площини векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$, що й вектор $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, а тому для векторів правої трійки кут β – гострий, а його косинус – додатний. У випадку лівої трійки вектори $\mathbf{c}$ та $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ лежать по різні боки від площини векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$, тому для векторів лівої трійки кут β – тупий, а його косинус – від'ємний. ▶

1.58. Властивість. Мішаний добуток $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ векторів правої трійки $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ дорівнює об'єму V паралелепіпеда, побудованого на векторах-співмножниках, зведених до спільного початку.

◀ Впливає із формули (1.32) та рис. 1.15. Властивість 1.57 забезпечує виконання нерівності $V > 0$. ▶

$$V = SH$$

$$S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|, \quad H = |\mathbf{c}| \cos \beta$$

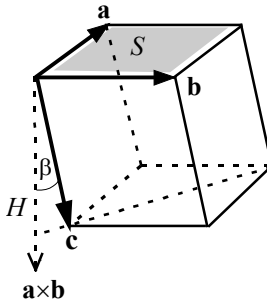


Рис. 1.15

1.59. Зауваження. Іноді буває зручно користуватися поняттям *орієнтованого паралелепіпеду*, як такого паралелепіпеду, що побудований на орієнтованій трійці векторів. При цьому, паралелепіпед побудований на правій трійці векторів називають *додатним*, з огляду на знак мішаного добутку цих векторів. Паралелепіпед, побудований на лівій трійці векторів називають *від'ємним* і умовно приписують йому від'ємний об'єм. Завдяки цьому, властивості 1.57 та 1.58 вдається сформулювати разом: мішаний добуток трьох некомпланарних векторів дорівнює об'єму орієнтованого паралелепіпеду, побудованого на векторах-співмножниках.

1.60. Наслідок. Добуток $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ дорівнює об'єму цього ж паралелепіпеду з тією різницею, що тепер величину V виражено через площу грані, побудованої на векторах $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$, та перпендикулярну до неї висоту. Звідси випливає, що при розв'язанні задач векторної алгебри можна використовувати такі рівності:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \equiv (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \equiv abc. \quad (1.33)$$

Друга з цих рівностей є спрощеним позначенням мішаного добутку векторів.

1.61. Властивість. Для мішаного добутку справедливі рівності

$$abc = cab = bca = -acb = -bac = -cba, \quad (1.34)$$

які випливають з (1.33), комутативності скалярного та антикомутативності векторного добутку векторів.

1.62. Властивість. Мішаний добуток дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли вектори-співмножники компланарні.

◀ Коли один з векторів нульовий, його можна вважати компланарним з двома іншими, що і доводить твердження теореми. Проведемо доведення для трьох ненульових векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$.

Необхідність: нехай виконана умова $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Доведемо, що $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ компланарні. Припустимо обернене. Тоді, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = V \neq 0$, що суперечить умові.

Достатність: нехай вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ – компланарні. Тоді, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{c}$, а отже, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$. ▶

1.63. Властивість. Мішаний добуток є асоціативним відносно скаляра λ , тобто

$$\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \lambda \mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \lambda \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \lambda \mathbf{c}.$$

◀ Впливає з асоціативності скалярного та векторного добутків відносно скаляра. ▶

1.64. Властивість. Мішаний добуток є дистрибутивним, тобто для будь-яких векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ і $\mathbf{d}$ справедливі рівності

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \times \mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \times \mathbf{d} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{d} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \times (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{d}.$$

◀ $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \times \mathbf{d} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$. Отже, перша з наведених вище рівностей безпосередньо випливає з доведеної нами раніше дистрибутивності скалярного добутку. Звідси ж випливають і дві інші рівності, якщо записати $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{d} = [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})] \times \mathbf{d}$ та $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \times [\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d})]$. ▶

1.65. Наслідок. Дистрибутивність векторного добутку. Доведемо, що $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

◀ Критерієм рівності векторів є рівність їх координат, а отже, подана векторна рівність рівносильна до трьох скалярних рівностей

$$[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}]_j = (\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c})_j, j = x, y, z.$$

Доведемо першу з них

$$\begin{aligned} [(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}]_x &= [(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}] \cdot \mathbf{e}_x = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_x + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_x \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{e}_x = (\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c})_x. \end{aligned}$$

Дві інші рівності доводяться аналогічно. Рівність $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ не потребує окремого доведення з огляду на антикомутативність векторного добутку. ▶

1.6.2. Вираження векторного та мішаного добутків за допомогою декартових координат

Розглянемо два вектори, розкладені по ортах декартової системи координат:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z, \mathbf{b} = b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z.$$

Зважаючи на дистрибутивність векторного добутку та його асоціативність відносно скаляра маємо

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_x b_y \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y + a_x b_z \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z + a_y b_x \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x + a_y b_z \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z + a_z b_x \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x + a_z b_y \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y.$$

Використовуючи "таблицю векторного множення" декартових ортів (1.31), одержуємо вирази

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{e}_z + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{e}_y + (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{e}_x, \quad (1.35)$$

з якого випливає, що

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_x &= (a_y b_z - a_z b_y), \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_y &= (a_z b_x - a_x b_z), \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z &= (a_x b_y - a_y b_x). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Безпосередньою перевіркою легко упевнитися, що векторний добуток (1.35) виражається за допомогою визначника, тобто

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (1.37)$$

Скалярний добуток вектора $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ та вектора $\mathbf{c}$ дорівнює, як ми вже знаємо, сумі попарних добутків декартових координат векторів-співмножників, тому для мішаного добутку векторів справедливі формули

$$abc = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_x c_x + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_y c_y + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z c_z.$$

Зважаючи на (1.36) бачимо, що ці формули відрізняються від (1.35) лише заміною декартових ортів на координати вектора $\mathbf{c}$. Зробивши таку ж заміну у виразі (1.37), доходимо висновку, що

$$abc = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (1.38)$$

1.6.3. Подвійний векторний добуток та тотожність Лагранжа

1.6.6. Означення. Подвійним векторним добутком векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ називають вектор типу $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ або $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

За означенням векторного добутку 1.50 вектор $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ ортогональний до вектора $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, тобто, лежить у площині векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$, і тому може бути представлений у вигляді їх лінійної комбінації. У подальшому ми доведемо, що коефіцієнти цієї лінійної комбінації дорівнюють $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ та $-\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, а отже,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \quad (1.39)$$

Вектор $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ лежить у площині векторів $\mathbf{b}$ та $\mathbf{c}$ і може бути розкладений по цих векторах за формулою

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (1.40)$$

Більшість студентів запам'ятовує формулу (1.40) "фонетично", як фразу "абц дорівнює бац мінус цаб".

У подальшому ми доведемо також справедливості *тотожності Лагранжа*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix} \quad (1.41)$$

яка часто використовується для виконання розрахунків, наприклад, в електродинаміці.

* * *

Проілюструємо важливість поняття подвійного векторного добутку простою, але дуже типовою задачею електродинаміки: електрон, імпульс $\mathbf{p}$ якого відомий, рухається в зовнішньому магнітному полі $\mathbf{H}$; треба знайти повздовжню та поперечну по відношенню до поля складову імпульсу.

Для розв'язання задачі покладемо у співвідношенні (1.39) $\mathbf{a} = \mathbf{p}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{H}$.

Одержимо

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{p}H^2.$$

Звідси знаходимо вирази

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_l + \mathbf{p}_t, \quad \mathbf{p}_l = \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{H})\mathbf{H}}{H^2}, \quad \mathbf{p}_t = -\frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}}{H^2}.$$

Вектор $\mathbf{p}_l$ спрямований вздовж магнітного поля, $\mathbf{p}_t$ – перпендикулярно до нього.

1.7. Перетворення декартової системи координат

1.7.1. Зсув декартової системи координат

Розглянемо прямокутні системи координат XYZ та $X'Y'Z'$, відповідні осі яких парами паралельні. Взаємне положення таких систем зручно характеризувати вектором трансляції $\mathbf{t}$, що спрямований з точки O до точки O' , як зображено на рис. 6.1 (вісь OZ перпендикулярна площині рисунку).

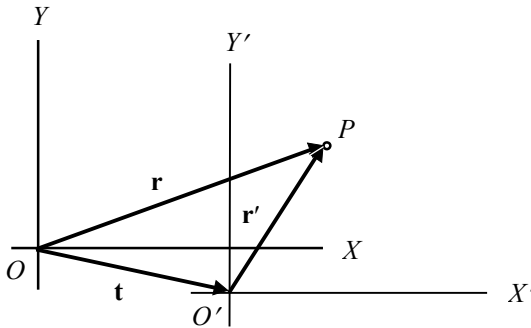


Рис. 1.16

Розглядаючи трикутник OPP , доходимо висновку, що

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{t}. \quad (1.42)$$

Знайдемо, як пов'язані координати точки P у системі XYZ з її ж координатами у системі $X'Y'Z'$.

Для цього запишемо

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{e}'_x + y'\mathbf{e}'_y + z'\mathbf{e}'_z,$$

$$\mathbf{t} = x_0\mathbf{e}_x + y_0\mathbf{e}_y + z_0\mathbf{e}_z.$$

Врахуємо, що $\mathbf{e}'_j = \mathbf{e}_j$, (оскільки осі двох систем парами паралельні), і підставимо розклади векторів по ортах у рівність (1.42). Одержимо

$$x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y + z'\mathbf{e}_z = (x - x_0)\mathbf{e}_x + (y - y_0)\mathbf{e}_y + (z - z_0)\mathbf{e}_z.$$

З рівності векторів випливає рівність відповідних координат у базисі $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Таким чином,

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0, \quad z' = z - z_0. \quad (1.43)$$

Формули (1.43) дозволяють, між іншим, здійснити перехід від нерухо-

мої системи координат до системи, що рухається зі сталою швидкістю v . Вибір нерухомої системи зручно здійснити таким чином, щоб у початковий момент часу $\tau = 0$ обидві системи збіглися. Тоді, якщо швидкість рухомої системи значно менша за швидкість світла у вакуумі, $x_0 = v_x \tau$, $y_0 = v_y \tau$, $z_0 = v_z \tau$ (у будь-який момент часу τ).

1.7.2. Поворот декартової системи координат

Розглянемо дві прямокутні системи координат – XYZ та $X'Y'Z'$, які мають спільний початок координат, але відрізняються за напрямком осей у просторі.

Радіус-вектор $\mathbf{r}$ кожної точки P простору можна розкласти по ортах будь-якої з цих систем:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = x'\mathbf{e}'_x + y'\mathbf{e}'_y + z'\mathbf{e}'_z. \quad (1.44)$$

Знайдемо зв'язок між координатами x, y, z точки P в системі XYZ та її ж координатами x', y', z' в системі $X'Y'Z'$, розглянувши скалярні добутки $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}'_i$ ($i = x, y, z$). Оскільки $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij}$, з формул (6.3) випливає, що

$$\begin{aligned} x' &= a_{xx}x + a_{xy}y + a_{xz}z, \\ y' &= a_{yx}x + a_{yy}y + a_{yz}z, \\ z' &= a_{zx}x + a_{zy}y + a_{zz}z, \end{aligned} \quad (1.45)$$

де $a_{ik} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k$ – елементи матриці повороту системи $X'Y'Z'$ відносно системи XYZ .

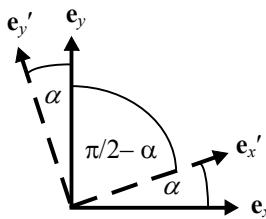


Рис. 1.17

Для роз'яснення результату (1.45) розглянемо систему $X'Y'Z'$, яку повернуто відносно XYZ на кут α навколо осі Z (рис. 1.17). У такому разі $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}'_z$, $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y$. Тому $a_{xz} = a_{yz} = a_{zx} = a_{zy} = 0$. Отже, $z' = z$, $y' = a_{yx}x + a_{yy}y$, $x' = a_{xx}x + a_{xy}y$.

Далі врахуємо, що

$$a_{xx} = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}'_x = \cos \alpha, a_{xy} = \mathbf{e}'_x \cdot \mathbf{e}_y = \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha,$$

$$a_{yy} = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}'_y = \cos \alpha, a_{yx} = \mathbf{e}'_y \cdot \mathbf{e}_x = \cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin \alpha$$

і одержуємо остаточний результат:

$$z' = z, \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha. \quad (1.46)$$

Якщо розв'язати вирази (1.46) як систему алгебраїчних рівнянь для невідомих x, y, z , або просто замінити в цих виразах α на $-\alpha$, неважко знайти, що

$$z = z', \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \quad x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha. \quad (1.47)$$

Перетворення (1.47) називають *оберненими* відносно перетворень (1.46).