Розділ 1. Диференціальні рівняння та математичне моделювання

1.1. Поняття математичного моделювання

Поняття математичного моделювання трактується різними авторами по своєму. Ми будемо його пов’язувати з нашою спеціалізацією – прикладна математика. Під математичним моделюванням ми будемо розуміти метод дослідження процесів або явищ шляхом побудови їхніх математичних моделей і дослідження цих процесів. В основу методу покладемо адекватність між змінними складеного рівняння і досліджуваного процесу. Зрозуміло, що на практиці ці процеси не будуть абсолютно ідентичні. Але можна удосконалювати математичну модель, яка більш точно буде описувати цей процес. Треба пам’ятати, що в останньому випадку, як правило, математичні рівняння ускладнюються. А це означає, що їх моделювання на ЕОМ потребує більше часу.

Схема таких досліджень починається з постановки задачі і закінчується проведенням ефективного обчислювального експерименту. Її умови можна записати в такій формі:

а) постановка задачі;
б) побудова математичної моделі та перевірка її адекватності;
в) узагальнення та теоретичне дослідження даного класу задач;
г) розробка алгоритмічного забезпечення для розв'язування досліджуваних задач;
д) створення програмного забезпечення;
е) проведення обчислювального експерименту;
ж) впровадження цих результатів у виробництво.

Розглянемо питання використання диференціальних рівнянь в деяких предметних областях.

1.2. Диференціальні рівняння в екології

Екологія вивчає взаємовідношення людини і, взагалі, живих організмів з навколишнім середовищем. Основним об’єктом дослідження в екології є еволюція популяцій (сукупність одного виду рослин, тварин, чи мікроорганізмів, які населяють протягом тривалого часу певну територію).

Опишемо математично процес розмноження чи вимирання популяцій. Нехай $x(t)$ – кількісний стан популяції в момент t, A – число, яке відповідає кількості народжених, B – умираючих в одиницю часу. Тоді швидкість зміни координати $x(t)$ задається формулою

$$\frac{dx}{dt} = A - B. \tag{1.1}$$

В (1.1) A і B можуть залежати від x. Наприклад,

$$A = ax, B = bx, \tag{1.2}$$

де a – коефіцієнт народжуваності, b – смертності.

Підставляючи (1.2) в (1.1), отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = (a-b)x. \tag{1.3}$$

Розв'язок диференціального рівняння (1.3) запишемо у вигляді

$$x(t) = x_0 e^{(a-b)(t-t_0)}. \tag{1.4}$$

З розв'язку (1.4) видно, що при $a > b$ популяція виживаюча, а при $a < b$ – вимираюча.

Рівняння (1.3) в деяких випадках береться нелінійним

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \ (a > 0, b > 0). \tag{1.5}$$

Це рівняння Бернулі при $n = 2$ і його розв'язок можна записати в такому вигляді

$$x(t) = \frac{x_0 \frac{a}{b}}{x_0 + (\frac{a}{b} - x_0)e^{-a(t-t_0)}}. \tag{1.6}$$

З формули (1.6) видно, що при $t \to \infty, x(t) \to \frac{a}{b}$. При цьому можливі випадки

$$\frac{a}{b} = x_0, \ \frac{a}{b} > x_0, \text{ та } \frac{a}{b} < x_0.$$

Рівняння (1.5) описує еволюцію популяцій деяких бактерій.

Можна говорити і про більш складні рівняння, системи рівнянь.

Розглянемо більш детально двохвидову модель «хижак-жертва», яка була побудована для виявлення коливань рибних уловів в Адріатичному морі.

Нехай $x(t)$ – число великих риб-хижаків, y – число малих риб-жертв в момент часу t. Тоді число риб-хижаків буде рости до того часу, поки у них буде їжа. Якщо корму не буде вистачати, то кількість риб-хижаків буде зменшуватися і тоді, починаючи з деякого моменту, буде рости число риб-жертв. Модель такого прикладу має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax + bxy \\ \frac{dy}{dt} = cx - dxy \end{cases}, \tag{1.7}$$

де a, b, c, d – додатні константи.

В (1.7) доданок bxy виражає залежність приросту великих риб від числа малих, $-dxy$ – зменшення числа малих риб від великих.

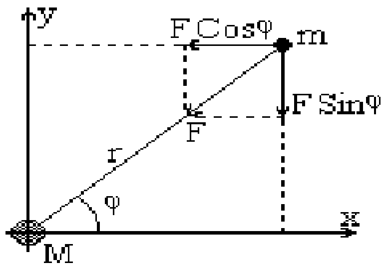
1.3. Закони Кеплера руху планет

Згідно закону всесвітнього тяжіння два тіла, які знаходяться на віддалі r один від одного, і які мають маси m і M притягаються з силою

$$F = \gamma \frac{m \cdot M}{r^2}, \tag{1.8}$$

де γ – константа тяжіння.

Опишемо рух планети з масою m навколо Сонця маси M. Вплив інших планет на них не будемо враховувати (Мал. 1.1).



Мал. 1.1

Припустимо, що Сонце знаходиться в початку координат, а планета має положення $x(t), y(t)$ в момент часу t. Використавши другий закон Ньютона запишемо

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -FCos\varphi = -\gamma \dfrac{mM}{r^2} Cos\varphi \\ m\ddot{y} = -FSin\varphi = -\gamma \dfrac{mM}{r^2} Sin\varphi \end{cases}. \tag{1.9}$$

Враховуючи, що $Cos\varphi = \dfrac{x}{r}, Sin\varphi = \dfrac{y}{r}, z = \sqrt{x^2 + y^2}$, і позначаючи $k = \gamma \cdot M$, прийдемо до системи

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{kx}{(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}} \\ \ddot{y} = -\dfrac{ky}{(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}} \end{cases}. \tag{1.10}$$

Без обмеження загальності візьмемо початкові умови

$$x = a, y = 0, \dot{x} = 0, \dot{y} = V_0 \text{ при } t = 0. \tag{1.11}$$

Перейдемо до полярних координат

$$x = rCos\varphi, y = rSin\varphi,$$

$$\begin{cases} \dot{x} = rCos\varphi - rSin\varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{y} = rSin\varphi - rCos\varphi \cdot \dot{\varphi} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{r}Cos\varphi - 2\dot{r}Sin\varphi \cdot \dot{\varphi} - rSin\varphi \cdot \ddot{\varphi} - rCos\varphi \cdot \varphi^2 \\ \ddot{y} = \ddot{r}Sin\varphi - 2\dot{r}Cos\varphi \cdot \dot{\varphi} - rCos\varphi \cdot \ddot{\varphi} - rSin\varphi \cdot \varphi^2 \end{cases}.$$

Підставляючи отримані вирази в (1.10) будемо мати

$$\begin{cases} \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)Cos\varphi - \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)Sin\varphi = -\dfrac{kCos\varphi}{r^2} \\ \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)Sin\varphi + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)Cos\varphi = -\dfrac{kSin\varphi}{r^2} \end{cases}.$$

Помножимо перше рівняння на $Cos\varphi$, друге на $Sin\varphi$ і складемо

$$4\ddot{r} - r\varphi^2 = -\frac{k}{r^2}. \tag{1.12}$$

Помножимо перше рівняння на $-Sin\varphi$, друге на $Cos\varphi$ і складемо

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0. \qquad (1.13)$$

Перепишемо у нових змінних умови (1.11)

$$r = a, \varphi = 0, \dot{r} = 0, \dot{\varphi} = \frac{V_0}{a}. \qquad (1.14)$$

Рівняння (1.13) запишемо у вигляді

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0. \qquad (1.15)$$

Звідки маємо

$$r^2\dot{\varphi} = C_1. \qquad (1.16)$$

Константа C_1 має цікаву геометричну інтерпретацію. З курсу математичного аналізу відомо, що площа сектора обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} r^2 d\varphi. \qquad (1.17)$$

Звідки

$$dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi, \qquad \text{або } \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}.$$

Вираз $\frac{dS}{dt}$ означає секторну швидкість. З (1.16) випливає, що вона є постійною. Це означає, що радіус-вектор “замітає” за рівні проміжки часу рівні площі.

1-й закон Кеплера: кожна із планет рухається по плоскій кривій відносно Сонця так, що радіус-вектор, який зв’язує Сонце і планету, “замітає” рівні площі за рівні проміжки часу.

Задачу Коші (1.12)-(1.14) можна розв’язати. Розв’язок має еліпсоїдальну форму, на основі цього робиться наступний висновок.

2-й закон Кеплера: траєкторії планет рухаються по еліпсам, в одному з фокусів яких знаходиться Сонце.

З аналізу траєкторій випливає таке твердження.

3-й закон Кеплера: квадрати періодів обертання планет пропорційні кубам великих осей їх орбіт.

1.4. Диференціальні рівняння закону попиту і пропозиції в економічних дослідженнях

Попит і пропозиція – економічні категорії товарного виробництва. Попит – представлена на ринку потреба в товарах, пропозиція – продукт, який є на ринку чи може бути доставлений на нього.

Нехай $p(t)$ – ціна, наприклад, на фрукти, $\frac{dp}{dt}$ – тенденція формування ціни. Тоді, як попит так і пропозиція будуть функціями введених величин. Як показує практика, ці функції можуть бути різними. Часто попит q і пропозиція S задаються лінійними залежностями, наприклад

$$q = 4p' - 2p + 39,$$

$$S = 44p' + 2p - 1$$

залежностями. Для того, щоб попит відповідав пропозиції необхідно $(p = S)$

$$4p' - 2p + 39 = 44p' + 2p - 1.$$

Звідки

$$\begin{gathered} 40p' + 4p - 40 = 0, \\ 4dp = -4(p - 10), \\ \frac{10dp}{p - 10} = -dt,\ p = ce^{-\frac{1}{10}t} + 10. \end{gathered} \tag{1.18}$$

Припустимо, що в момент $t = 0$ 1кг фруктів коштував $p(0) = 1$ крб. Тоді $1 = c - 10$, $c = -9$. Отже

$$p = -9e^{\frac{1}{10}t} + 10. \tag{1.19}$$

Це закон зміни ціни, щоб між попитом і пропозицією була рівновага.

1.5. Найпростіші рівняння руху частинок в електромагнітних полях

Швидкість зміни імпульсу частинки

$$\vec{p} = m\vec{V}$$

дорівнює силі Лоренца, яка діє на неї

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V}) = Ze(\vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}]), \tag{1.20}$$

де Z – зарядове число, e – заряд частинки, $\vec{E}$ – вектор напруженості прискорюючого поля, $\vec{B}$ – вектор магнітної індукції, $\vec{V}$ – вектор швидкості частинки,

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}, \vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix},$$

$m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m_0$ – динамічна маса, m_0 – маса спокою, $\gamma = \dfrac{m}{m_0}$ – приведена енергія частинки,

$$\left[\vec{V}, \vec{B}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ V_x & V_y & V_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \left(V_y B_z - V_z B_y\right) i - \left(V_x B_z - V_z B_x\right) j + \left(V_x B_y - V_y B_x\right) k$$

– векторний добуток двох векторів.

З (1.20) маємо

$$m_0 \gamma \frac{d\vec{V}}{dt} + m_0 \vec{V} \frac{d\gamma}{dt} = Ze\left(\vec{E} + \left[\vec{V}, \vec{B}\right]\right). \tag{1.21}$$

Рівняння (1.21) не враховує власного поля пучка (кулонівських сил). Систему (1.21) перепишемо в скалярній формі

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{Ze}{m_0\gamma}\left[E_x + \dfrac{dy}{dt}B_z - \dfrac{dz}{dt}B_y - \dfrac{m_0}{Ze}\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d\gamma}{dt}\right] \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{Ze}{m_0\gamma}\left[E_y + \dfrac{dz}{dt}B_z - \dfrac{dx}{dt}B_z - \dfrac{m_0}{Ze}\dfrac{dy}{dt}\dfrac{d\gamma}{dt}\right] \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{Ze}{m_0\gamma}\left[E_z + \dfrac{dx}{dt}B_y - \dfrac{dy}{dt}B_x - \dfrac{m_0}{Ze}\dfrac{dz}{dt}\dfrac{d\gamma}{dt}\right] \end{cases}. \qquad (1.22)$$

Визначимо

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\vec{V}^T\vec{V}}{c^2}}} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{\vec{V}^T\vec{V}}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2)\frac{\vec{V}^T}{c^2}\frac{d\vec{V}}{dt},$$

тобто

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2}\vec{V}^T\left(\frac{Ze}{m_0}\left(\vec{E} + \left[\vec{V},\vec{B}\right]\right) - \frac{1}{\gamma}\vec{V}\frac{d\gamma}{dt}\right).$$

Так як $\vec{V}^T \cdot \left[\vec{V},\vec{B}\right] = 0$, то визначаємо $\dfrac{d\gamma}{dt}$

$$\frac{d\gamma}{dt}\left(1 + \frac{\gamma^2\vec{V}^T\vec{V}}{c^2}\right) = \frac{\gamma^2 Ze}{m_0c^2}\vec{V}^T \cdot \vec{E}.$$

Отже

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{Ze}{m_0c^2}\left(\frac{dx}{dt}E_x + \frac{dy}{dt}E_y + \frac{dz}{dt}E_z\right) \qquad (1.23)$$

Підставляючи (1.23) в (1.22), отримаємо рівняння руху.

Але в ці складні рівняння ще входять компоненти електромагнітного поля, які визначаються рівняннями Максвела

$$\begin{cases} rot\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}, div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ rot\vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{j}, div\vec{B} = 0 \end{cases}. \qquad (1.24)$$

Тут ε_0, μ_0 – електрична і магнітна сталі, ρ – об’ємна густина заряду, $\vec{j}$ – вектор густини струму.

Система рівнянь (1.24) – це рівняння в частинних похідних з складними граничними умовами. Задача заключається не тільки в моделюванні рівнянь руху, а й в розрахунках оптимальних систем прискорюючих і фокусуючих заряджені частинки.

1.6. Використання диференціальних рівнянь в біології і математичних дослідженнях

Біологія. Необхідно знайти залежність площі S молодого листка, що має форму круга, від часу t. Відомо, що швидкість зміни площі $\frac{dS}{dt}$ в момент t пропорційна площі листка, довжині його обводу та косинусу кута між падаючим на листок сонячним променем і вертикаллю листка. Маємо модель

$$\frac{dS}{dt} = k \cdot S \cdot S^{\frac{1}{2}} \cdot Cos\varphi(t), \tag{1.25}$$

де $\varphi(t) = at + b \geq 0$, a, b – const, $\varphi \leq \pi$, k – коефіцієнт пропорційності. Розв'язуючи рівняння (1.25), ми отримаємо таку залежність

$$S(t) = \left(c + \frac{k}{2a} \cdot Sin(at + b)\right)^{-2}, \tag{1.26}$$

c – довільна стала.

Математика. Обчислити невласний інтеграл

$$I(a) = \int_0^\infty e^{-x^2 - 2ax} dx, \tag{1.27}$$

залежний від параметра a.

Знайдемо похідну

$$\frac{dI}{da} = -2x \int_0^\infty e^{-x^2-2ax} dx = -(2x + 2a) \int_0^\infty e^{-x^2-2ax} dx + 2a \int_0^\infty e^{-x^2-2ax} dx =$$

$$= + \int_0^\infty e^{-x^2-2ax} d(-x^2 - 2ax) + 2aI(a) = e^{-x^2-2ax}\Big|_0^\infty + 2aI(a) = 2aI(a) - 1.$$

Отримали диференціальне рівняння

$$\frac{dI}{da} = 2aI(a) - 1. \tag{1.28}$$

При цьому відомо

$$I(0) = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{1.29}$$

Розв'язуючи задачу Коші (1.28),(1.29), отримаємо

$$I(a) = e^{a^2} \left[I(a) - \int_0^a e^{-t^2} dt \right] = e^{a^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^a e^{a^2 - t^2} dt. \tag{1.30}$$

1.7. Побудова диференціальних рівнянь з заданими параметричними сімействами кривих

Припустимо, що задано однопараметричне сімейство кривих

$$\varphi(x, y(x), c) = 0. \tag{1.31}$$

Задача полягає в тому, щоб знайти диференціальне рівняння, розв'язками якого являються криві (1.31). Вважаючи, що функція (1.31) має повну похідну за x запишемо

$$\varphi'_x(x,y,c)+\varphi'_y(x,y,c)\frac{dy}{dx}=0. \tag{1.32}$$

Тоді з (1.31) та (1.32) як з системи рівнянь, вилучаємо сталу c і отримаємо шукане диференціальне рівняння першого порядку.

Якщо ж задано n - параметричне сімейство кривих

$$\varphi(x,y(x),c_1,..,c_n)=0, \tag{1.33}$$

то до (1.33) додаються такі співвідношення

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dx}\varphi(x,y,c_1,..,c_n)=\varphi'_x(x,y,c_1,..,c_n)+\varphi'_y(x,y,c_1,..,c_n)\frac{dy}{dx}=0,\\
\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x,y,c_1,..,c_n)=\frac{d}{dx}\left[\varphi'_x(x,y,c_1,..,c_n)+\varphi'_y(x,y,c_1,..,c_n)\frac{dy}{dx}\right]=\\
=\varphi''_{xx}(x,y,c_1,..,c_n)+2\varphi''_{xy}(x,y,c_1,..,c_n)\frac{dy}{dx}+\varphi''_{yy}(x,y,c_1,..,c_n)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\\
+\varphi'_x(x,y,c_1,..,c_n)\frac{d^2y}{dx^2}=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{d^n}{dx^n}\varphi(x,y,c_1,..,c_n)=\frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\varphi(x,y,c_1,..,c_n)\right]=0.
\end{gathered} \tag{1.34}$$

З (1.33) та (1.34), як з системи рівнянь, кількість яких $(n+1)$, вилучаються сталі $c_1,c_2,...,c_n$, а отримане таким чином співвідношення між $x,y,y',..,y^{(n)}$

$$F\left(x,y,y',..,y^{(n)}\right)=0 \tag{1.35}$$

і буде шуканим диференціальним рівняння n-го порядку.

В (1.32) та (1.34) $\varphi'_x(\cdot),\varphi'_y(\cdot),\varphi''_{xx}(\cdot),\varphi''_{xy}(\cdot),\varphi''_{yy}(\cdot),-$ означають частинні похідні відповідних порядків за вказаними змінними. При цьому припускаємо, що такі похідні існують, тобто функції (1.32) та (1.34) є диференційовними відповідну кількість разів.

Аналогічно поступають і при складанні систем рівнянь.

<u>Приклад 1.1</u>. Знайти диференціальне рівняння першого порядку, розв'язками якого буде однопараметричне сімейство

$$e^{x+cy}=2x+3y. \tag{1.36}$$

<u>Розв'язання.</u> Продиференціюємо за x праву частину нашого співвідношення в припущенні, що $y=y(x)$.

$$e^{x+cy}\left(1+c\frac{dy}{dx}\right)=2+3\frac{dy}{dx}\quad . \tag{1.37}$$

Враховуючи (1.36), рівність (1.37) перепишемо таким чином

$$(2x+3y)\left(1+c\frac{dy}{dx}\right)=2+3\frac{dy}{dx}. \tag{1.38}$$

З (1.38) знаходимо c

$$c = \frac{1}{y'}\left[\frac{2+3y'}{2x+3y} - 1\right]$$

і підставивши в (1.36) отримаємо шукане диференціальне рівняння

$$e^{x + \frac{x}{y'}\left[\frac{2+3y'}{2x+3y} - 1\right]} = 2x + 3y. \tag{1.39}$$

Приклад 1.2. Знайти диференціальне рівняння другого порядку, розв'язками якого буде двопараметричне сімейство

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}. \tag{1.40}$$

Розв'язання. Згідно описаного вище алгоритму, складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} \\ y' = 3c_1 e^{3x} - 3c_2 e^{-3x} \\ y'' = 9c_1 e^{3x} + 9c_2 e^{-3x} \end{cases}. \tag{1.41}$$

З якої, вилучивши c_1 і c_2, знаходимо шукане диференціальне рівняння

$$y'' - 9y = 0. \tag{1.42}$$

Розділ 2. Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані відносно похідної

2.1. Поняття диференціального рівняння, його порядок

Означення 2.1. Рівняння вигляду

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \tag{2.1}$$

називається диференціальним рівнянням (наявність похідних тут обов'язкова).

Означення 2.2. Найбільший порядок похідної, яка входить в диференціальне рівняння (2.1) називається порядком диференціального рівняння.

Означення 2.3. Функція $y(x)$ називається розв'язком (або інтегралом) диференціального рівняння (2.1), якщо вона n-раз неперервно диференційовна на деякому інтервалі $(a,b) = I$ і задовольняє диференціальному рівнянню (2.1) $\forall\ x \in I$.

Приклад 2.1. $y'' + 3xy' + 2y = x^2$ – диференціальне рівняння другого порядку.

При $n = 1$ диференціальне рівняння (2.1) називається диференціальним рівнянням першого порядку і записується таким чином

$$F(x, y, y') = 0 \quad . \tag{2.2}$$

Диференціальне рівняння (2.2) називається розв'язаним відносно похідної, якщо його можна представити у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad . \tag{2.3}$$

Припускаємо, що $f(x,y)$ однозначна і неперервна в деякій області D змінних x,y. Цю область називають областю визначення диференціального рівняння (2.3).

Якщо в деякій області функція $f(x,y)$ перетворюється в ∞, то в цій області розглядають диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)} \quad .$$

Множину таких точок, а також тих, в яких $f(x,y)$ не визначена, але може бути довизначена до неперервності, будемо приєднувати до області визначення диференціального рівняння (2.3).

Поряд з (2.3) будемо розглядати еквівалентне диференціальне рівняння, записане в диференціалах

$$dy - f(x,y)dx = 0\,, \qquad (2.4)$$

або в більш загальному виді

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \ . \qquad (2.5)$$

Інколи розглядатимемо диференціальне рівняння в симетричній формі

$$\frac{dx}{X(x,y)}=\frac{dy}{Y(x,y)} \quad . \qquad (2.6)$$

Функції $M(x,y)$, $\mathrm{N(x,y)}$, $\mathrm{X(x,y)}$, $\mathrm{Y(x, y)}$ будемо вважати неперервними в деякій області.

<u>Означення 2.4.</u> Розв’язком диференціального рівняння (2.3) на інтервалі I назвемо функцію $y=\varphi(x)$, визначену і неперервно диференційовну на I, яка не виходить з області означення функції $f(x,y)$ і яка перетворює диференціальне рівняння (2.3) в тотожність $\forall\ x\in I$, тобто

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}\equiv f(x,y(x)), \quad \mathrm{x}\in\mathrm{I}\,.$$

В цьому випадку $y=\varphi(x)$ називається розв’язком, записаним в явній формі (вигляді).

Процес знаходження розв’язку диференціального рівняння називається інтегруванням.

Не завжди можна отримати розв’язок в явному вигляді.

<u>Означення 2.5.</u> Будемо говорити, що рівняння

$$\Phi(x,y)=0 \qquad (2.7)$$

визначає в неявній формі розв’язок диференціального рівняння (2.3), якщо воно визначає $y=y(x)$, яка є розв’язком диференціального рівняння (2.3).

При цьому на розв’язках диференціального рівняння (2.3) виконується

$$\Phi'_x(x,y)+\Phi'_y(x,y)\frac{dy}{dx}=\Phi'_x(x,y)+\Phi'_y(x,y)f(x,y)\equiv 0\,, \ \mathrm{x}\in\mathrm{I} \ . \qquad (2.8)$$

<u>Означення 2.6.</u> Будемо говорити, що співвідношення

$$x=\varphi(t), \ \mathrm{y}=\psi(\mathrm{t}) \qquad (1.9)$$

визначають розв’язок диференціального рівняння (2.3) в параметричній формі на інтервалі (t_0,t_1), якщо

$$\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \equiv f(\varphi(t), \psi(t)), \quad \mathrm{t} \in (\mathrm{t}_0, \mathrm{t}_1) \quad . \tag{2.10}$$

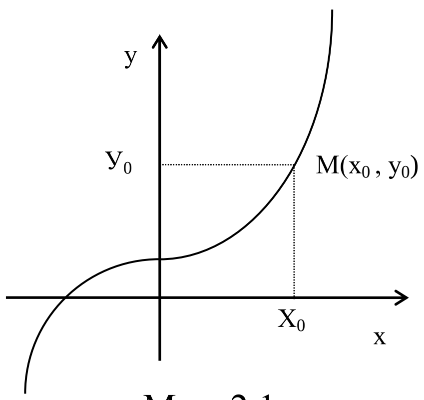
2.2. Задача Коші

Розглянемо диференціальне рівняння (2.3). Задача Коші заключається в тому, щоб серед всіх розв'язків диференціального рівняння (2.3) знайти такий $y = y(x)$, який проходить через задану точку

$$y(x_0) = y_0 \quad . \tag{2.11}$$

Тут x_0 - початкове значення незалежної змінної, y_0 - функції.

Розв'язати задачу Коші з геометричної точки зору означає (мал. 2.1): знайти серед усіх інтегральних кривих диференціального рівняння (2.3) ту, яка проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$.



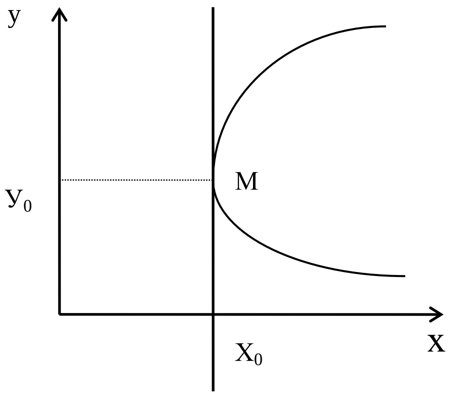
Мал. 2.1.

Означення 2.7. Будемо говорити, що задача Коші (2.3), (2.11) має єдиний розв'язок, якщо $\exists$ число *h>0*, що на відрізку $|x - x_0| \le h$ визначений розв'язок $y = y(x)$ такий, що $y(x_0) = y_0$ і не існує другого розв'язку, визначеного в цьому ж інтервалі $|x - x_0| \le h$ і не співпадаючого з розв'язком $y = y(x)$ хоча б в одній точці інтервалу $|x - x_0| \le h$, відмінній від точки $x = x_0$.

Якщо задача Коші (2.3), (2.11) має не один розв'язок або ж зовсім його не має, то говорять, що в точці (x_0, y_0) порушується єдиність розв'язку задачі Коші.

При постановці задачі Коші ми припускаємо, що x_0, y_0 - обмежені числа, а диференціальне рівняння (2.3) в точці (x_0, y_0) задає деякий напрямок поля, який не паралельний осі ОY.

Якщо права частина диференціального рівняння (2.3) в точці М приймає нескінченне значення, необхідно розглянути диференціальне рівняння (2.3) і знайти розв'язок $x = x(y)$ (мал. 2.2).



Мал. 2.2

Якщо ж в точці М права частина диференціального рівняння (2.3) має невизначеність, наприклад, типу $\frac{0}{0}$, тоді звичайна постановка задачі Коші не має змісту, так як через точку М не проходить жодна інтегральна крива. В цьому випадку задача Коші ставиться так: знайти розв'язок $y = y(x)$ (або $x = x(y)$), який примикає до точки М.

В деяких випадках треба шукати розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє умовам $y \to y_0 \neq \infty$ при $x \to \infty$; $y \to \infty$ при $x \to x_0 \neq \infty$ і т.д.

<u>Теорема Пікара</u> (без доведення). Припустимо, що функція $f(x, y)$ в диференціальному рівнянні (2.3) визначена і неперервна в обмеженій області

$$D = \{x, y : |x - x_0| \le a; |y - y_0| \le b\} \ (a > 0, b > 0)$$

і, отже, вона є обмеженою

$$|f(x, y)| \le M, \quad \forall (x, y) \in D \quad (M > 0); \tag{2.12}$$

функція $f(x, y)$ має обмежену частинну похідну по *y* на *D*

$$\left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| \le K, \ (x, y) \in D \quad (K > 0) \quad . \tag{2.13}$$

При цих умовах задача Коші (2.3), (2.11) має єдиний неперервно-диференційовний розв'язок в інтервалі

$$|x - x_0| \le h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}. \qquad (2.14$$

<u>Зауваження 2.1.</u> В сформульованій теоремі умову (2.13) можна послабити (замінити) на те, щоб функція $f(x, y)$ по змінній *y* задовольняла умові Ліпшіца, тобто

$$\left|f(x, y^{(1)}) - f(x, y^{(2)})\right| \le L\left|y^{(1)} - y^{(2)}\right| \qquad \forall (x, y^{(1)}) \text{ і } (x, y^{(2)}) \in D \ . \tag{2.15}$$

Тут *L>0* - найменша константа, яка задовольняє (2.15) і називається константою Ліпшіца .

<u>Теорема Пеано</u> (про існування розв'язку). Якщо функція $f(x, y)$ є неперервною на *D*, то через кожну точку $(x_0, y_0) \in D$ проходить, по крайній мірі, одна інтегральна крива.

Якщо функція диференційовна і задовольняє (2.13), то вона задовольняє умові Ліпшіца, з $L=K$.

Функція може зодовольняти умові Ліпшіца, але не бути диференційовною і, отже, не буде задовольняти (2.13). Наприклад, $y=|x|$ $(\mathrm{L}=1)$.

2.3. Поняття загального розв'язку, форми його запису

На прикладах можна переконатися, що диференціальне рівняння (2.3) має нескінченну множину розв'язків, яка залежить від деякого параметру c

$$y=u(x,c). \tag{2.16}$$

Це сімейство і називається загальним розв'язком диференціального рівняння (2.3). При кожному c (2.16) дає інтегральну криву.

Для розв'язування задачі Коші (2.3), (2.11) параметр c можна знайти з рівняння $y_0=u(x_0,c)$.

Дамо точне визначення загального розв'язку. Припустимо, що на D виконуються умови теореми Пікара.

<u>Означення 2.8.</u> Функцію

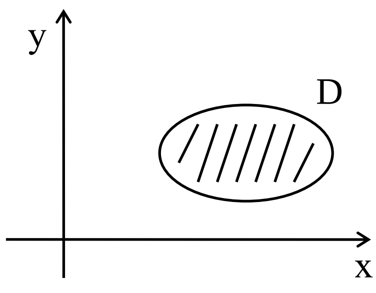
$$y=\varphi(x,c), \tag{2.17}$$

визначену в деякій області змінних x і c, і яка має неперервну частинну похідну за x будемо називати загальним розв'язком диференціального рівняння (2.3) в області D, якщо рівняння (2.17) можна розв'язати відносно c в області D

$$c=\psi(x,y) \tag{2.18}$$

і функція (2.17) є розв'язком диференціального рівняння (2.3) при всіх значеннях довільної сталої c, які визначаються формулою (2.18), коли $(x,y)\in D$.

Суть означення 2.8 в наступному. Припустимо, що задано сімейство кривих F на області D, яке залежить від одного параметра c. Якщо будь-яка крива із F є інтегральною кривою диференціального рівняння (2.3) і всі криві із F в сукупності покривають D, то F є розв'язком диференціального рівняння (2.3) в області D (мал. 2.3).



Мал. 2.3

Для розв'язування задачі Коші константу c можна знайти згідно (2.18)

$$c_0=\psi(x_0,y_0)\ .$$

Інколи в формулі (2.17) роль c грає y_0, тоді говорять, що розв'язок представлений у формі Коші

$$y=y(x,x_0,y_0)\ . \tag{2.19}$$

Приклад 2.2. Знайти розв’язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x},\ \mathrm{y}(\mathrm{x}_0)=\mathrm{y}_0$$

у формі Коші.

Розв’язання. Загальний розв’язок $y=c\,x,\ 0<x<\infty,\ -\infty<y<+\infty.$ В указаній області виконуються умови теореми Пікара. Звідки $c=\dfrac{y}{x},\quad c_0=\dfrac{y_0}{x_0},\quad y=\dfrac{y_0}{x_0}x$ – розв’язок в формі Коші.

В більшості випадків при інтегруванні диференціального рівняння (2.3) ми отримуємо загальний розв’язок в неявній формі

$$\Phi(x,y,c)=0\ \ (\text{або}\ \psi(x,y)=c)\ , \tag{2.20}$$

який називається загальним інтегралом диференціального рівняння (2.3).

Означення 2.9. Будемо називати співвідношення (2.20) загальним розв’язком в неявній формі або загальним інтегралом в області *D*, якщо співвідношенням (2.20) визначається загальний розв’язок (2.17) диференціального рівняння (2.3) в області *D*.

З означення випливає, що (2.18) - загальний інтеграл диференціального рівняння (2.3) в області *D*.

Інколи при інтегруванні отримуємо сімейство інтегральних кривих, залежне від c, в параметричній формі.

$$\begin{cases} x=\varphi(t,c) \\ y=\psi(t,c) \end{cases}. \tag{2.21}$$

Таке сімейство інтегральних кривих будемо називати загальним розв’язком диференціального рівняння (2.3) в параметричній формі.

Якщо в (2.21) виключити *t*, то отримаємо загальний розв’язок в неявній або явній формі.

2.4. Частинні і особливі розв’язки. Знаходження кривих, підозрілих на особливість розв’язку, по диференціальному рівнянню

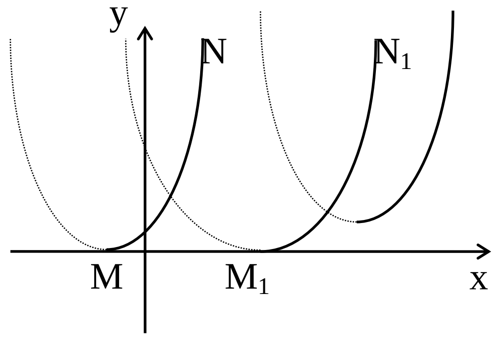
Означення 2.10. Розв’язок, який складається з точок єдиності розв’язку задачі Коші називається частинним і його можна отримати з загального при фіксованому c.

Розв’язок задачі Коші, який задовольняє теоремі Пікара, є частинний розв’язок.

Означення 2.11. Розв’язок, в кожній точці якого порушується єдиність розв’язку задачі Коші, будемо називати особливим.

Геометрично особливому розв’язку відповідають інтегральні криві, які не містяться в загальному розв’язку. Тому особливий розв’язок не може існувати всередині області *D* існування загального розв’язку. Його не можна отримати з формули загального розв’язку ні при яких числових значеннях c, включаючи $\pm\infty$. Його можна отримати з загального розв’язку лише при $c=c(x)$.

Існують ні частинні ні особливі розв’язки. Їх можна отримати шляхом склеювання кусків частинних і особливих розв’язків.



Мал. 2.4

Приклад 2.2. Знайти особливий розв'язок диференціального рівняння

$$y' = 2\sqrt{y}\,.$$

Розв'язання. При $y > 0$ маємо $\dfrac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$, $y=(x+c)^2$, $x+c \geq 0$.

Отримали загальний розв'язок в області $-\infty < x < \infty,\ 0 < y < \infty,$ в якій виконуються умови теореми Пікара. Але розв'язком буде $y = 0$, який ми отримуємо при $c = -x$. Він не міститься в загальному розв'язку при жодному фіксованому c. Отже, згідно означення $y(x) \equiv 0$ – особливий розв'язок.

Якщо $f(x, y)$ неперервна на *D*, то умови підозрілі на особливий розв'язок – необмеженість похідної $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$. Знайшовши таку криву в подальшому треба переконатися :

1) вона є інтегральною кривою;
2) перевірити, що в кожній її точці порушується єдиність розв'язку.

В прикладі 2.2. $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{y}} \equiv \infty$ при $y \equiv 0$. Оскільки $y = 0$ – розв'язок і через нього проходять інтегральні криві з загального розв'язку, то $y \equiv 0$ - особливий розв'язок.

Приклад 2.3. Розглянемо диференціальне рівняння

$$y' = 2\sqrt{y} + 1.$$

Розв'язання. Знайдемо при $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$. Очевидно, що $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \infty$ при $y \equiv 0$. Але $y \equiv 0$ не є розв'язком диференціального рівняння, тому і не є особливим розв'язком.

Припустимо, що диференціальне рівняння має однопараметричне сімейство інтегральних кривих $\Phi(x, y, c) = 0$. Нехай це сімейство має обвідну, тобто лінію, яка в кожній точці дотикається сімейства і ні на якому участку не співпадає ні з одною кривою сімейства. Тоді ця обвідна і буде особливим розв'язком. Дійсно через довільну її точку проходить по крайній мірі два розв'язки : обвідна і сам розв'язок.

2.5. Два означення інтегралу. Теореми про загальний вигляд інтегралу та залежність двох інтегралів одного диференціального рівняння

Нехай

$$y = \varphi(x, c) \tag{2.22}$$

загальний розв'язок диференціального рівняння (2.3) в області *D*, в якій виконуються умови теореми Пікара. Тоді на *D* рівняння (2.22) можна розв'язати відносно c

$$\psi(x, y) = c \ . \tag{2.23}$$

Функція $\psi(x, y)$ приймає постійні значення на довільному частинному розв'язку з *D*, причому значення постійної визначається частинним розв'язком

$$\psi(x, \varphi(x, c)) = c \ . \tag{2.24}$$

<u>Означення 2.12</u> (перше означення інтегралу). Функція $\psi(x, y)$, визначена на *D* і яка не зводиться до константи, називається інтегралом диференціального рівняння (2.3) в області *D*, якщо на довільному частинному розв'язку з *D* ця функція приймає постійні значення.

Припустимо, що $\psi(x, y)$ - диференційовна функція. Тоді на довільному частинному розв'язку

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = 0 \quad , \tag{2.25}$$

або

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}f(x, y)dx = 0 \ . \tag{2.26}$$

При цьому $\frac{\partial\psi}{\partial y} \neq 0$ на *D*, так як в противному $\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$. А це означає, що поле диференціального рівняння (2.3) в відповідній точці не задано.

<u>Означення 2.13</u> (друге означення інтегралу). Функція $\psi(x, y)$, визначена і неперервна з частинними похідними в області *D* і така, що $\frac{\partial\psi}{\partial y} \neq 0$ в області *D*, називається інтегралом диференціального рівняння (2.3) в області *D*, якщо повний її диференціал, взятий в силу диференціального рівняння (2.3), тотожно дорівнює нулю в області *D*.

З (2.26) випливає, що

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}f(x, y) \ . \tag{2.27}$$

Функція, яка є інтегралом в смислі означення 2.12 буде інтегралом і в смислі означення 2.13. Навпаки не завжди так.

Якщо диференціальне рівняння (2.3) має один інтеграл, то воно має безліч інтегралів.

<u>Теорема 2.1</u> (про загальний вигляд інтегралу). Якщо $\psi_1(x, y)$ інтеграл диференціального рівняння (2.3) в області *D* і функція $\psi_1(x, y)$ диференційовна в *D*, а $\Phi(z)$ - довільна функція визначена і неперервно-диференційовна в області зміни функції $\psi_1(x, y)$ коли $(x, y) \in D$, то

$$\psi(x,y)=\Phi(\psi_1(x,y)) \qquad (2.28)$$

є інтегралом диференціального рівняння (2.3) в області *D*.

Доведення. Обчислимо $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{d\Phi}{d\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x},\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{d\Phi}{d\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\ ,$$

причому $\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\neq 0$ в області *D*. Маємо

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=\frac{d\Phi}{d\psi_1}\quad \mathrm{d}\psi_1\equiv 0 \qquad (2.29)$$

оскільки $d\psi_1\equiv 0$, так як $\psi_1(x,y)$ – інтеграл диференціального рівняння (2.3). З (2.29) випливає, що $\psi(x,y)$ - інтеграл диференціального рівняння (2.3) згідно означення.

Теорема 2.2 (про залежність двох інтегралів). Нехай $\psi_1(x,y)$ і $\psi_2(x,y)$ – два інтеграли диференціального рівняння (2.3). Тоді існує неперервно диференційовна функція *F* така, що

$$\psi_2(x,y)=F(\psi_1(x,y))\ . \qquad (2.30)$$

Доведення. Оскільки $\psi_1(x,y)$ і $\psi_2(x,y)$ інтеграли, то

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y}\underbrace{f(x,y)dx}_{dy}=0\\[2ex] \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\psi_2}{\partial y}\underbrace{f(x,y)dx}_{dy}=0\end{cases}. \qquad (2.31)$$

З (2.31) випливає, що

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial y}\end{vmatrix}=0\ . \qquad (2.32)$$

З функціонального аналізу відомо, що з умови (2.32) випливає (2.30).

Приклад 2.4. Обчислити повний диференціал функції $\psi(x,y)=x\ +y^2$ на розв'язках диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx}=x^4y+y^3x\,.$$

Розв'язання. Згідно (2.25), (2.26) маємо

$$d\psi(x,y)=d(x^2+y^2)=2xdx+2ydy=2xdx+2y(x^4y+y^3x)dx=$$
$$=(2x+2x^4y^2+2y^4x)dx\,.$$

Приклад 2.5. Перевірити, чи є $\psi(x,y)=e^{2x}+2e^{-y}=c$ інтегралом диференціального рівняння $\dfrac{dy}{dx}=e^{2x+y}$.

Розв'язання. Дійсно,

$$d\psi(x,y) = d(e^{2x} + 2e^{-y}) =$$
$$= 2e^{2x}dx - 2e^{-y}dy = 2e^{2x}dx + 2e^{-y}(e^{2x+y})dx = 2e^{2x}dx - 2e^{2x}dx \equiv 0 .$$

2.6. Інтегровні типи диференціальних рівнянь першого порядку, розв′язаних відносно похідної

Неповні рівняння.

а) Диференціальне рівняння, яке не містить шуканої функції має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \ , \quad x \in (a,b) . \tag{2.33}$$

Припустимо, що *f(x)* являється неперервною функцією на (a,b). Тоді функція

$$y = \int f(x)dx + c \tag{2.34}$$

є загальним розв`язком диференціального рівняння (2.33) в області

$$a < x < b, \ -\infty < y < + \ \infty. \tag{2.35}$$

Особливих розв’язків диференціальне рівняння (2.33) не має.

Разом з диференціальним рівнянням (2.33) розглянемо початкові умови

$$y(x_0) = y_0 \ . \tag{2.36}$$

Проінтегруємо диференціальне рівняння (2.34) від $x_0 \in (a,b)$ до *x*

$$y = \int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau + c .$$

Знаходимо c з умови (2.36)

$$y = \int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau + y_0 \tag{2.37}$$

– загальний розв′язок диференціального рівняння (2.33) в формі Коші.

Якщо *f(x)* – неперервна на (a,b) за виключенням точки $\xi \in (a,b)$, в якій $f(\xi)$ приймає нескінченне значення, то замість диференціального рівняння (2.33) будемо розглядати рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x)} . \tag{2.33′}$$

Пряма $x = \xi$ є розв′язком диференціального рівняння (2.33′) і ми цей розв′язок повинні приєднати до розв′язку диференціального рівняння (2.33). Цей розв′язок може бути частинним або особливим в залежності від того зберігається чи порушується в будь-якій його точці єдиність. Якщо $x = \xi$ – частинний розв′язок, то його часто можна отримати з загального при нескінченних значеннях *c*, якщо ж він є особливим, то його отримують з загального при $c = c(y)$.

Рівняння, яке не містить незалежної змінної має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = f(y) . \tag{2.38}$$

Припускаємо, що функція $f(y)$ визначена і неперервна на інтервалі (c,d). Замість (2.38) розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}. \tag{2.39}$$

Диференціальне рівняння (2.39) не містить шуканої функції і воно розв′язується аналогічно диференціальному рівнянню (2.33).

Якщо $f(y) \neq 0$, $y \in (c,d)$, то

$$x = \int \frac{1}{f(y)} dy + c \tag{2.40}$$

– загальний розв′язок диференціального рівняння (2.39) в області

$$c < y < d, \quad -\infty < x < +\infty.$$

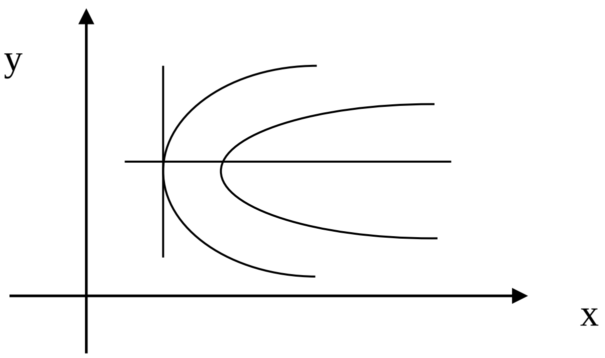
Аналогічно

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(\tau)} d\tau + x_0 \tag{2.41}$$

– загальний інтеграл в формі Коші.

Якщо $f(y)$ неперервна на (c,d) і приймає нульове значення при $y = \eta \in (c,d)$, то ми повинні розглядати диференціальне рівняння (2.38). Розв′язок $y = \eta$ буде частинним, якщо в кожній його точці зберігається єдиність і особливим, якщо в кожній його точці порушується єдиність. Якщо $y = \eta$ частинний розв′язок, то ми його отримуємо при нескінченних значеннях $c\ (\pm\infty)$, якщо особливий, то при $c = c(x)$.

Якщо $f(y)$ в точці $y = \overline{\eta}$ перетворюється в нескінченність $(\overline{\eta} \in (c,d))$, то розглядаємо диференціальне рівняння (2.39), яке має неперервну праву частину на (c,d). При цьому диференціальне рівняння на (c,d) має єдиний розв′язок (мал. 2.5).



Мал. 2.5

<u>Приклад 2.6</u>. Розв′язати диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}.$$

<u>Розв'язання</u>. Область визначення $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (-\infty, +\infty)$, $y \neq 0$. Оскільки в точці $y = 0$ дотичні паралельні осі OY, то розв′язок в площині (x, y) єдиний

$$2ydy = dx,\ y^2 = x + c.$$

б) **Рівняння з відокремлюваними змінними**.

Розглянемо рівняння в диференціалах виду

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0, \tag{2.42}$$

де $X(x), Y(y)$ – неперервні функції своїх аргументів.

Диференціальне рівняння (2.42) називається рівнянням з відокремленими змінними. Його можна переписати таким чином

$$d\left(\int X(x)dx + \int Y(y)dy\right) = 0.$$

Звідки маємо загальний розв′язок в квадратурах

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = c. \tag{2.43}$$

Якщо треба записати розв′язок задачі Коші, то записують так

$$\int_{x_0}^{x} X(\tau)d\tau + \int_{y_0}^{y} Y(\tau)d\tau = c.$$

З умови (2.36) визначають $c = 0$. Отже

$$\int_{x_0}^{x} X(\tau)d\tau + \int_{y_0}^{y} Y(\tau)d\tau = 0 \tag{2.44}$$

– розв′язок задачі Коші (2.36), (2.42). При даних припущеннях особливих розв′язків диференціальне рівняння (2.42) не має.

Рівняння вигляду

$$m(x)n(y)dx + m_1(x)n_1(y)dy = 0 \tag{2.45}$$

називають рівнянням з відокремлюваними змінними.

Припустимо, що $m_1(x)n(y) \neq 0$, тоді розділимо обидві частини рівняння (2.45) на $m_1(x)n(y)$, отримаємо

$$\frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = 0. \tag{2.46}$$

Аналогічно записуємо

$$\int \frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \int \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = c \tag{2.47}$$

– загальний розв′язок диференціального рівняння (2.45) і

$$\int_{x_0}^{x} \frac{m(\tau)}{m_1(\tau)}d\tau + \int_{y_0}^{y} \frac{n_1(\tau)}{n(\tau)}d\tau = 0 \tag{2.48}$$

–розв′язок задачі Коші (2.36), (2.45). При діленні на $n(y)m_1(x)$ ми можемо загубити розв′язки, які визначаються рівняннями $n(y) = 0$, $m_1(x) = 0$. Дійсно, нехай $n(b) = 0$, то

$$m(x)n(b)dx + m_1(x)n_1(b)dy = 0$$

отже $y = b$ – розв′язок диференціального рівняння (2.45). Аналогічно $x = a$ $(m_1(a) = 0)$. Якщо ці розв′язки не входять в (2.47) при деяких c, то вони представляють собою особливі розв′язки диференціального рівняння (2.45).

З розв′язку $y=b$ ми повинні виключити точку $x=a$, так як в точці (a,b) диференціальне рівняння (2.45) не визначає нахил поля y'. По тій же причині з розвязку $x=a$ виключається точка $y=b$.

Таким чином, розв′язки $x=a(y\neq b)$ і $y=b\ (x\neq a)$ примикають до точки (a,b) і можуть бути особливими. Других особливих розв′язків не має.

Приклад 2.7. Знайти загальний розв′язок диференціального рівняння

$$xy(1+x^2)dy-(1+y^2)dx=0.$$

Розв′язання. Розділяючи змінні отримаємо

$$\frac{y}{1+y^2}dy-\frac{1}{x(1+x^2)}dx=0.$$

Оскільки $\dfrac{1}{x(1+x^2)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1+x^2}$, то задане рівняння перепишемо в такому вигляді

$$\frac{y}{1+y^2}dy-\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx=0.$$

Отже $\displaystyle\int\frac{y}{1+y^2}dy-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{xdx}{1+x^2}=c$, $\dfrac{1}{2}\ln\left[(1+x^2)(1+y^2)\right]-\ln x=c$,

$$(1+x^2)(1+y^2)=c_1x^2.$$

Очевидно, що $x=0$ є частинним розв'язком нашого рівняння і його треба додати до отриманого загального розв'язку.

в) **Однорідні і узагальнено-однорідні диференціальні рівняння.**

Розглянемо рівняння в диференціалах (2.5), в якому функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$ є однорідними функціями однієї і тієї ж степені однорідності m.

Означення 2.14. Функція $f(x,y)$ називається однорідною функцією виміру m, якщо

$$f(tx,ty)=t^m f(x,y). \tag{2.49}$$

Якщо (2.49) виконуються при $t\geq 0$, то функція $f(x,y)$ називається додатньо однорідною.

Однорідне рівняння завжди можна звести до рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{2.50}$$

в якому функція $\varphi(\cdot)$ однорідна функція нульового виміру.

Однорідні рівняння завжди інтегруються в квадратурах заміною

$$y=zx. \tag{2.51}$$

При цьому рівняння (2.5) приводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. Дійсно

$$M(x,zx)dx+N(x,zx)(zdx+xdz)=0,$$

$$x^m M(1,z)dx+x^m N(1,z)(zdx+xdz)=0,$$

$$\big(M(1,z)+zN(1,z)\big)dx+xN(1,z)dz=0,$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{N(1,z)}{M(1,z)+zN(1,z)}dz=0\,,$$

$$\ln x+\int\frac{N(1,z)}{M(1,z)+zN(1,z)}dz=\ln c\,,\quad x=ce^{\phi(z)}\,,$$

$$x=ce^{\phi(\frac{y}{x})}\,, \tag{2.52}$$

де $\phi(z)=\int\frac{N(1,z)}{M(1,z)+zN(1,z)}dz$.

При відокремленні змінних ми могли загубити розв′язки $z=z_i$, де z_i- корені рівняння

$$M(1,z)+N(1,z)z=0\,. \tag{2.53}$$

Отже півпрямі $y=z_i x,\ (x\neq 0)$ примикають до початку координат. Ці розв′язки можуть міститися в формулі загального розв′язку, але можуть бути і особливими. Особливими можуть бути також півосі осі $OY: x=0\ (y\neq 0)$. Других особливих розв′язків диференціальне рівняння (2.5) не має.

Рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right) \tag{2.54}$$

зводиться до однорідного. Якщо $c_1=c=0$, то це однорідне рівняння.

Припустимо, що хоч одне з чисел c_1, c не дорівнюють 0. Можливі два випадки.

Перший – $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a & b\end{vmatrix}\neq 0.$ Проводимо заміну

$$x=\xi+\alpha, y=\eta+\beta\,, \tag{2.55}$$

де ξ,η – нові змінні, α,β – параметри. Тоді

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta+a_1\alpha+b_1\beta+c_1}{a\xi+b\eta+a\alpha+b\beta+c}\right). \tag{2.56}$$

Параметри α,β вибираємо згідно системи

$$\begin{cases}a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0\\ a\alpha+b\beta+c=0\end{cases}. \tag{2.57}$$

Так як $\Delta\neq 0$, то система (2.57) має єдиний розв′язок. Таким чином, ми прийшли до однорідного диференціального рівняння

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a\xi+b\eta}\right). \tag{2.58}$$

Другий – $\Delta=0$. В цьому випадку $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=k$, тобто $a_1=ka, b_1=kb$. Тому

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{k(ax+by)+c_1}{ax+by+c}\right)=f_1(ax+by)\,. \tag{2.59}$$

Заміною $t=ax+by$ диференціальне рівняння (2.59) приводимо до рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dt}{dx} = a + bf_1(t)\,. \tag{2.60}$$

Приклад 2.8. Знайти загальний розв′язок диференціального рівняння

$$(x^2 + xy + y^2)dx + x^2dy = 0\,.$$

Розв'язання. Це однорідне рівняння, $m = 2$. Зробимо заміну

$$y = zx, dy = zdx + xdz, \quad (1 + z + z^2)dx - (xdz + zdx) = 0\,,$$

$$(1 + z^2)dx - xdz = 0,\ \frac{dx}{x} - \frac{dz}{1 + z^2} = 0\,,\ \ln x - arctg\, z = c\,.$$

Отже, $\ln x - arctg\, z = c$ – загальний розв′язок нашого рівняння.

Диференціальне рівняння (2.5) називається узагальнено-однорідним, якщо існує таке число k, при якому ліва частина цього диференціального рівняння стає однорідною функцією від величин x, y, dx, dy в припущенні, що останні мають відповідно виміри: перший, k-ий, нульовий , $(k-1)$-ий. При $k = 1$ маємо просто однорідне рівняння.

В цьому випадку диференціальне рівняння (2.5) заміною

$$y = zx^k \tag{2.61}$$

зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. При $k = 0$ рівняння (2.5) є рівнянням з розділеними змінними. Особливі розв′язки таких рівнянь досліджуються аналогічно.

Приклад 2.8. Розв′язати узагальнено-однорідне диференціальне рівняння

$$(Ax^2y^2 + Bxy + C)dx - x^2dy = 0\,.$$

Розв'язання. Знайдемо число k для даного випадку

$$2 + 2k = 1 + k = 0 = 2 + k - 1, \quad k = -1\,.$$

Отже

$$y = \frac{z}{x}\,,\ dy = \frac{xdz - zdx}{x^2}\,,$$

$$(Az^2 + Bz + C)dx - (xdz - zdx) = 0,\ [Az^2 + (B+1)z + C]dx - xdz = 0.$$

Звідки

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dz}{Az^2 + (B+1)z + c} = C,$$

– загальний розв′язок нашого рівняння, записаний в квадратурах.

г) **Лінійні рівняння першого порядку**.

Диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x) \tag{2.62}$$

називається лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

При $g(x) = 0$ воно називається однорідним

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{2.63}$$

так як його ліва частина лінійна і однорідна відносно y і $\frac{dy}{dx}$. Рівняння (2.62) при $g(x) \neq 0$ називається неоднорідним. Диференціальне рівняння (2.63) інтегрується в квадратурах, так як воно являється диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0.$$

Звідки

$$y = ce^{-\int p(x)dx}. \tag{2.64}$$

Якщо $y(x_0) = y_0$, то

$$y = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau}. \tag{2.65}$$

Загальні властивості розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь:

– Якщо $p(x)$ та $g(x)$ неперервні, то згідно теореми Пікара розв′язок задачі Коші для диференціального рівняння (2.63) існує і є єдиним;
– Лінійне диференціальне рівняння (2.63) не має особливих розв′язків;
– ІК однорідного диференціальне рівняння (2.63) не можуть перетинати вісь OX, так як в противному випадку порушувалися б умови єдиності розв′язку задачі Коші;
– Диференціальне рівняння (2.63) є інваріантно відносним перетворення $x = \varphi(t), (\varphi'(t) \neq 0)$;

Дійсно, скориставшись формулою $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\varphi'(t)}$ отримаємо лінійне рівняння в змінних y, t

$$\frac{dy}{dt} + P(\varphi(t))\varphi'(t)y = g(\varphi(t))\varphi'(t).$$

– Диференціальне рівняння (2.63) є інваріантним відносно заміни

$$y = \alpha(x)z + \beta(x) \tag{2.66}$$

де z – нова змінна, $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – неперервні функції, $\alpha(x) \neq 0$ на (a, b). Тоді нове рівняння в змінних z, x є лінійним

$$z' + \frac{\alpha'(x) + p(x)\alpha(x)}{\alpha(x)} z = \frac{g(x) - \beta'(x) - p(x)\beta(x)}{\alpha(x)}.$$

Якщо $y_1(x)$ – частинний розв′язок диференціального рівняння (2.63), то

$$y(x) = Cy_1(x), \tag{2.67}$$

де C - константа, є загальним його розв′язком.

Справедлива теорема.

<u>Теорема 2.</u>**3.** (про структуру загального розв′язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння) Якщо $y_1(x)$ – частинний розв′язок неоднорідного диференціального рівняння (2.62), а (2.64) – загальний розв′язок лінійного однорідного диференціального рівняння (2.63), то сума

$$y = y_1(x) + ce^{-\int p(x)dx} \qquad (2.68)$$

є загальним розв′язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння (2.62).

Теорема доводиться безпосередньою підстановкою (2.68) в рівняння (2.62).

Якщо відомо два частинних розв′язки диференціального рівняння (2.62), то загальний його розв′язок записується без квадратур

$$y = y_1(x) + c(y_2(x) - y_1(x)). \qquad (2.69)$$

Розглянемо два методи інтегрування неоднорідного диференціального рівняння (2.62).

<u>Метод Лагранжа</u> (варіації довільної сталої).

Розв′язок шукаємо у вигляді

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx}. \qquad (2.70)$$

Підставивши (2.70) в (2.62), отримаємо

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx} + c(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)) + p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx} = g(x).$$

Звідки $c'(x) = g(x)e^{\int p(x)dx}$, $c(x) = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + c$. Остаточно маємо

$$y = e^{-\int p(x)dx}[\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + c] \qquad (2.71)$$

– загальний розв’язок диференціального рівняння (2.62), який записаний через дві квадратури. Довільна стала входить завжди в загальний розв’язок лінійно.

<u>Метод Ейлера</u> полягає в тому, що ліва частина диференціального рівняння (2.62) представляється у вигляді точної похідної шляхом домноження на деяку функцію $\mu = \mu(x)$ Визначимо $\mu(x)$. $(\mu y)' = \mu' y + \mu y' = \mu(y' + p(x)y)$. звідки $\mu' = \mu p(x)$, тобто $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$(функція $\mu(x)$ називається інтегрувальним множником). Тому

$$\left[e^{\int p(x)dx}y\right]' = g(x)e^{\int p(x)dx}. \qquad (2.72)$$

Звідки $e^{\int p(x)dx}y = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + c$. З останнього співвідношення отримуємо формулу (2.71).

Загальний розв’язок при умові $y(x_0) = y_0$ можна записати в Формі Коші

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}\left[\int_{x_0}^{x} g(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(x)dx}dx + y_0\right]. \qquad (2.73)$$

<u>Приклад 2.10.</u> Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$y' + xy = 0.$$

<u>Розв'язання</u>. Це лінійне однорідне диференціальне рівняння. Згідно формулі (2.64) $y = ce^{-\int xdx} = ce^{-\frac{x^2}{2}}$.

Приклад 2.11. Розв'язати диференціальне рівняння $y' + xy = x$.

Розв'язання. За формулою (2.71)

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[\int xe^{\frac{x^2}{2}}dx + c\right] = 1 + ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

д) **Рівняння Бернуллі.**

Це рівняння має вигляд

$$y' + p(x)y = q(x)y^n. \tag{2.74}$$

Рівняння (2.74) завжди інтегрується в квадратурах шляхом підстановки

$$y^{1-n} = z. \tag{2.75}$$

Так як $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$, то домножимо (2.74) на $(1-n)y^{-n}$

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} + (1-n)p(x)y^{1-n} = q(x).$$

Отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x), \tag{2.76}$$

яке вже є лінійним.

При $0 < n < 1$ рівняння Бернуллі має особливий розв'язок $y(x) \equiv 0$. При $n > 1$ розв'язок $y(x) \equiv 0$ міститься в загальному розв'язку при $c = \infty$. При $n < 0$ $y(x) \equiv 0$ не є розв'язком диференціального рівняння (2.74)

Приклад 2.12. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' - y = (1+x)y^2.$$

Розв'язання. Це є рівняння Бернуллі при $n = 2$. Згідно алгоритму

$$-y^{-2}y' + \frac{1}{y} = -(1+x), \quad \frac{1}{y} = z, \quad \frac{dz}{dx} + z = -(1+x).$$

Отже

$$\frac{1}{y} = z = e^{-x}\left[\int(-1-x)e^x dx + c\right] = ce^{-x} - x$$

– загальний розв′язок нашого рівняння.

Відомо, що диференціальне рівняння

$$m'(y)y' + p(x)m(y) = q(x)$$

зводиться до лінійного заміною $z = m(y)$.

2.7. Рівняння Рікатті

Рівняння Рікатті має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x), \tag{2.77}$$

де *P(x), Q(x), R(x)* – визначені та неперервні на *(a,b)* скалярні функції. Причому *R(x)≠ 0* і *P(x)≠0*, так як при цьому диференціальне рівняння (2.77) вироджується в рівняння Бернуллі або лінійне відповідно.

При таких припущеннях відносно функцій *P(x), Q(x), R(x)* диференціальне рівняння (2.77) має єдиний розв'язок при $y(x_0)=y_0$. Тому диференціальне рівняння особливих розв'язків не має.

Властивості диференціального рівняння (2.77):

а) диференціальне рівняння (2.77) інваріантно відносно перетворення

$$x=\varphi(t) \quad (\varphi'(t)\neq 0); \tag{2.78}$$

б) диференціальне рівняння (2.77) інваріантно відносно дробно–лінійного перетворення

$$y=\frac{\alpha(x)z+\beta(x)}{\gamma(x)z+\delta(x)}, \tag{2.79}$$

де $\alpha(x),\beta(x),\gamma(x),\delta(x)$ будь-які неперервно-диференційовані функції на (*a*,*b*), які задовольняють умові $\alpha(x)\delta(x)-\beta(x)\gamma(x)\neq 0$, z – нова незалежна змінна.

Заміною $y=\alpha(x)z+\beta(x)$ диференціальне рівняння (2.77) приводиться до рівняння вигляду

$$\frac{dz}{dx}=\pm z^2+a(x). \tag{2.80}$$

При змінних $P(x), Q(x), R(x)$ диференціальне рівняння (2.77) інтегрується тільки в деяких випадках, а саме:

$$y'=\varphi(x)\left(ay^2+by+c\right), \quad a,b,c \text{ – константи.} \tag{2.81}$$

Це диференціальне рівняння з розділеними змінними;

$$y'=a\frac{y^2}{x^2}+b\frac{y}{x}+c\ , \quad a,b,c\text{ – константи.} \tag{2.82}$$

Це однорідне диференціальне рівняння;

$$y'=a\frac{y^2}{x}+b\frac{y}{x}+c\,, \quad a,b,c \text{ – константи.} \tag{2.83}$$

Це диференціальне рівняння, яке зводиться до диференціального рівняння (2.81) заміною $y=z\sqrt{x}$;

$$y'=ay^2+\frac{b}{x}y+\frac{c}{x^2} \tag{2.84}$$

– інтегрується, так як є узагальнено–однорідним при $k=-1$. Заміна $y=\dfrac{z}{x}$.

Тут a,b,c – постійні, такі, що $a^2+c^2\neq 0$.

Побудова загального розв'язку диференціального рівняння (2.77) у випадках, якщо відомі частинні лінійно-незалежні розв'язки.

А. Відомо один частинний розв'язок $y_1(x)$.

<u>Твердження 2.1.</u> Якщо відомо один частинний розв'язок $y=y_1(x)$ диференціального рівняння (2.77), то воно зводиться до рівняння Бернуллі при *n*=2.

<u>Доведення.</u> Зробимо заміну

$$y=y_1(x)+z\,. \tag{2.85}$$

Підставимо (2.85) в (2.77)

$$y_1' + z' = P(x)(y_1^2 + 2y_1 z + z^2) + Q(x)(y_1 + z) + R(x).$$

Звідки

$$z' - \left(2P(x)y_1(x) + Q(x)\right)z = P(x)z^2. \qquad (2.86)$$

Далі підстановкою $u = \frac{1}{z}$ диференціальне рівняння (2.86) зводимо до лінійного

$$u' + \left(2P(x)y_1(x) + Q(x)\right)u = -P(x). \qquad (2.87)$$

Тому, при відомому одному частинному розв'язку диференціальне рівняння (2.87) інтегрується через дві квадратури. Постільки $z = \frac{1}{v}$, то

$$y = y_1(x) + \frac{1}{u}. \qquad (2.88)$$

Дослідимо структуру загального розв'язку диференціального рівняння (2.87). Так як $u = A(x)c + B(x)$, то

$$y = y_1(x) + \frac{1}{A(x)c + B(x)}. \qquad (2.89)$$

Тобто загальний розв'язок – це дробно-раціональна функція змінної c.

Б. Відомо два частинні розв'язки диференціального рівняння (2.87) $y_1(x)$, $y_2(x)$.

Твердження 2.2. Якщо відомо два частинні розв'зки диференціального рівняння (2.87), то загальний розв'язок записується через одну квадратуру.

Дійсно, при заміні (2.88) $u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}$ є частинним розв'язком лінійного рівняння (2.87). Але загальний розв'язок диференціального рівняння (2.87) знаходиться через одну квадратуру

$$u = ce^{-\int(2P(x)y_1(x) + Q(x))dx} + \frac{1}{y_2 - y_1}. \qquad (2.90)$$

В. Відомо три частинні розв'зки диференціального рівняння (2.87) $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння Рікатті в цьому випадку знаходиться без квадратур. Дійсно, якщо $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ – частинні розв'язки диференціального рівняння (2.77) ,то $u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}$, $u_2 = \frac{1}{y_3 - y_1}$ – частинні розв'язки лінійного рівняння (2.87). А в цьому випадку його розв'язок знаходиться без квадратур

$$u = c\left(u_2(x) - u_1(x)\right) + u_1(x) = c\left(\frac{1}{y_3 - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1}\right) + \frac{1}{y_2(x) - y_1(x)}. \qquad (2.91)$$

Підставляючи в (2.88) знайдемо розв'язок диференціального рівняння (2.77).

2.8. Рівняння в повних диференціалах

Означення 2.15. Рівняння (2.5) називається рівняння в повних диференціалах, якщо його ліва частина представляє собою повний диференціал деякої функції $U(x, y)$, тобто

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=dU(x,y)=0\,. \qquad (2.92)$$

Загальний інтеграл диференціального рівняння (2.5) має вигляд

$$U(x,y)=c\,. \qquad (2.93)$$

Особливих розв'язків в цьому випадку диференціальне рівняння (2.5) не має.

<u>Приклад 2.13</u>. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$xdx+ydy=0,$$

<u>Розв'язання</u>. $U(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}, \quad \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=c$ – загальний інтеграл.

Припустимо, що функції $M(x,y),\ N(x,y)$ – неперервно–диференційовані.

<u>Теорема 2.4</u>. Для того, щоб диференціальне рівняння (2.5) було рівнянням в повних диференціалах необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\,. \qquad (2.94)$$

<u>Доведення</u>. *Необхідність.* Нехай диференціальне рівняння (2.5) є рівнянням в повних диференціалах $M(x,y)dx+N(x,y)dy=dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy$. Звідси

$$\frac{\partial U}{\partial x}=M(x,y), \qquad \frac{\partial U}{\partial y}=N(x,y). \qquad (2.95)$$

А це означає, що виконується (2.94).

Достатність. Нехай умова (2.94) виконується. Покажемо, що існує $U(x,y)$, яка задовольняє диференціальне рівняння (2.92) або ж (2.95). Розглянемо перше рівняння з системи (2.95)

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=M(x,y). \qquad (2.96)$$

Рівняння (2.96) задовольняє функція

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\varphi(y)\,, \qquad (2.97)$$

де $\varphi(y)$ – довільна функція, яку виберемо так, щоб виконувалося друге рівняння системи (2.95)

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\varphi'(y)=N(x,y).$$

Останнє співвідношення запишемо таким чином $\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx+\varphi'(y)=N(x,y).$

Використавши (2.94), отримаємо

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dx+\varphi'(y)=N(x,y),\ \ N(\tau,y)\Big|_{x_0}^{x}+\varphi'(y)=$$

$$=N(x,y)-N(x_0,y)+\varphi'(y)=N(x,y)\,,$$

$$\varphi'(y)=N(x_0,y)\,.$$

Отже $\varphi(y)=\int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy+c_1,\ U(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy+c_1.$

Теорема доведена.

Покладаючи $c_1=0$, тоді загальний інтеграл диференціального рівняння (2.5) буде $U(x,y)=c$, тобто

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy=c\,. \tag{2.98}$$

Якщо при побудові функції $U(x,y)$ взяти спочатку друге рівняння системи (2.95), то отримаємо

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y} N(x,y)dy=c\,. \tag{2.99}$$

В формулах (2.98), (2.99) точки x_0,y_0 вибирають довільно, але так , щоб інтеграли мали зміст. Якщо точки x_0,y_0 вибрані вдало, то задача інтегрування спрощується.

<u>Приклад 2.14</u> Розв’язати диференціальне рівняння

$$(x^3+y)dx+(x-y)dy=0.$$

<u>Розв'язання</u>. Тут $M(x,y)=x^3+y,\ \ N(x,y)=x-y\,,\ \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=1.$ Використовуємо формулу (2.98) при $x_0=y_0=0.$ Знайдемо $\int\limits_{0}^{x}\left(x^3+y\right)dx+\int\limits_{0}^{y}(0-y)dy=c.$ Отже, $\frac{x^4}{4}+xy-\frac{y^2}{2}=c$ – загальний інтеграл.

Формули (2.98), (2.99) дають можливість розв’язувати задачу Коші з умовами $y(x_0)=y_0$, якщо точка (x_0,y_0) лежить в області визначення диференціального рівняння . Для цього достатньо взяти в (2.98), (2.99) *c=0*

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy=0\,, \tag{2.100}$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y} N(x,y)dy=0\,. \tag{2.101}$$

Цей розв’язок буде єдиний.

2.9. Інтегрувальний множник. Теореми про існування, неєдиність та загальний вигляд інтегрувального множника

Розглянемо диференціальне рівняння (2.5), яке не є рівнянням в повних диференціалах.

В багатьох випадках диференціальне рівняння (2.5) можна домножити на функцію $\mu(x,y)$, після чого воно стане диференціальним рівнянням в повних диференціалах. Функцію $\mu(x,y)$ називають інтегрувальним множником, а $U(x,y)$ – відповідним йому інтегралом диференціального рівняння (2.5), тобто

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=dU(x,y)=0. \qquad (2.102)$$

Звідки

$$U(x,y)=c, \qquad (2.103)$$

отже

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu\, M)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu\, N),\ \ \frac{\partial\mu}{\partial y}M+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial x}N+\mu\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Маємо

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu \qquad (2.104)$$

– це рівняння в частинних похідних першого порядку відносно функції $\mu(x,y)$. В загальному випадку знайти $\mu(x,y)$ з рівняння (2.104) важко.

Розглянемо випадки , коли $\mu(x,y)$ можна визначити з (2.104).

А. $\quad \mu=\mu(x) \quad \left(\frac{\partial\mu}{\partial y}=0\right), \quad N\frac{d\mu}{dx}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu.$

При $N\neq 0$ маємо диференціальне рівняння

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}. \qquad (2.105)$$

Для існування інтегрувального множника в такій формі необхідно, щоб

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\psi(x), \qquad (2.106)$$

тоді $\frac{\mu'}{\mu}=\psi(x)$, тобто

$$\mu=ce^{\int\psi(x)dx}. \qquad (2.107)$$

Для простоти візьмемо $c=1$, будемо мати

$$\mu=e^{\int\psi(x)dx}. \qquad (2.108)$$

Б. $\mu=\mu(y) \quad \left(\frac{\partial\mu}{\partial x}=0\right)$. Маємо $-M\frac{d\mu}{dy}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$. Звідки $\frac{\mu'}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$.

Якщо $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\psi(y)$, то

$$\mu=e^{\int\psi(y)dy}. \qquad (2.109)$$

В. $\mu=\mu(\omega(x,y))$, де $\omega(x,y)$ – відома функція. Тоді рівняння (2.104) приймає вигляд

$$N\frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu(\omega).$$

Якщо $N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}\neq 0$, то

$$\frac{\frac{d\mu}{d\omega}}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}}. \tag{2.110}$$

При умові, якщо

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}}=\psi(\omega), \tag{2.111}$$

то диференціальне рівняння (2.110) можна проінтегрувати і знайти

$$\mu=e^{\int\psi(\omega)d\omega}\equiv f(\omega)=f(\omega(x,y)). \tag{2.112}$$

Знаючи інтегрувальний множник ми можемо знайти всі особливі розв’язки. Так як $\mu(Mdx+Ndy)=dU$, то $Mdx+Ndy=\frac{1}{\mu}dU$, тобто диференціальне рівняння (2.5) перепишемо так

$$\frac{1}{\mu}dU=0. \tag{2.113}$$

Звідки $dU=0$ дає інтеграл $U(x,y)=c$. А рівняння $\frac{1}{\mu(x,y)}=0$ може дати особливі розв’язки. Для їх знаходження потрібно:

- знайти криві, на яких $\mu(x,y)$ приймає нескінченні значення;
- перевірити, чи є ці криві розв’язками диференціального рівняння (2.5);
- перевірити єдиність в кожній точці цих кривих.

Якщо ж $\mu(x,y)$ обмежена функція , то особливих розв’язків немає.

Теорема 2.5 (про існування інтегрального множника). Якщо диференціальне рівняння (2.5) має загальний інтеграл $U(x,y)=c$, для якого існують частинні похідні другого порядку , то це рівняння має інтегрувальний множник.

Доведення. Так як $U(x,y)$ інтеграл , то $dU=0$ в силу (2.5), тобто

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=0,$$

де dx і dy зв’язані диференціальним рівнянням (2.5). Так , що dx і dy задовольняють системі рівнянь

$$\begin{cases}\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=0\\ Mdx+Ndy=0\end{cases}. \tag{2.114}$$

Підставивши в одне з рівнянь dy, тобто виключаючи його і в силу довільності dx будемо мати з (2.114)

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial x} & \dfrac{\partial U}{\partial y} \\ M & N \end{vmatrix} = 0, \text{ тобто } \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{N} = \mu(x, y). \qquad (2.115)$$

Звідки $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \mu M$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \mu N$, тому

$$\mu(Mdx + Ndy) = \mu Mdx + \mu Ndy = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = dU = 0.$$

Теорема доведена.

<u>Теорема 2.6</u> (про неєдиність інтегрувального множника). Якщо $\mu_0(x, y)$ інтегрувальний множник диференціального рівняння (2.5), а $U_0(x, y)$ відповідний йому інтеграл, то

$$\mu = \mu_0 \varphi(U_0), \qquad (2.116)$$

де φ – будь-яка неперервно–диференційована функція не рівна тотожньо нулю, також є інтегрувальним множником диференціального рівняння (2.5).

<u>Доведення.</u> Дійсно, помножимо диференціальне рівняння (2.5) на μ, отримаємо

$$\mu_0 \varphi(U_0)(Mdx + Ndy) = \varphi(U_0)dU_0 = d\int \varphi(U_0)dU_0 = 0.$$

Тобто ліва частина є повним диференціалом функції $\int \varphi(U_0)dU_0$, а це означає, що функція μ, визначена співвідношенням (2.116), є інтегрувальним множником.

<u>Теорема 2.7</u> (про загальний вигляд інтегрувального множника). Два будь-яких інтегрувальних множника μ_1 і μ_0 диференціального рівняння (2.5) зв'язані співвідношенням

$$\mu_1 = \mu_0 \varphi(U_0). \qquad (2.117)$$

<u>Доведення.</u> Нехай μ_1 і μ_0 – інтегрувальні множники, яким відповідають інтеграли U_0 і U_1, тобто

$$\begin{cases} \mu_0(Mdx + Ndy) = dU_0 \\ \mu_1(Mdx + Ndy) = dU_1 \end{cases}.$$

Поділимо перше рівняння на друге, отримаємо $\dfrac{\mu_1}{\mu_0} = \dfrac{dU_1}{dU_0}$. Але два інтеграли диференціального рівняння (2.5) залежні, тобто $U_1 = \Phi(U_0)$, де $\Phi(\cdot)$ – диференційована функція. Маємо

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{\Phi'(U_0)dU_0}{dU_0} = \Phi'(U_0) = \varphi(U_0).$$

Терема доведена.

Приклад 2.14 Розв'язати диференціальне рівняння

$$(1+x^2y)dx+x^2(x+y)dy=0$$

методом інтегрувального множника знаючи, що $\mu=\mu(x)$.

Розв'язання. Оскільки $\mu=\mu(x)$, то

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{x^2-3x^2-2xy}{x^2(x+y)}=-\frac{2}{x},$$

$$\mu=e^{-2\int\frac{dx}{x}}=e^{-2\ln x}=\frac{1}{x^2}.$$

Помноживши наше рівняння на отриманий інтегральний множник, отримаємо рівняння

$$(\frac{1}{x^2}+y)dx+(x+y)dy=0$$

ліва частина якого є повний диференціал. Знаходимо

$$U(x,y)=\int(x+y)dy+\varphi(x)=xy+\frac{y^2}{2}+\varphi(x).$$

Тоді $\frac{\partial U}{\partial x}=y+\varphi'(x)=\frac{1}{x^2}+y$, $\varphi'(x)=\frac{1}{x^2}$, $\varphi(x)=-\frac{1}{x}+c$. Остаточно маємо

$$U(x,y)=xy+\frac{y^2}{2}-\frac{1}{x}=c_1.$$

Розділ 3. Диференціальні рівняння першого порядку, не розв′язяні відносно похідної

3.1. Основні поняття та означення. Теорема про достатні умови існування і єдиності розв'язку

Диференціальне рівняння першого порядку, не розв'язане відносно похідної має вигляд

$$F(x,y,y')=0. \tag{3.1}$$

Найбільш часто зустрічаються диференціальні рівняння першого порядку n-ого степеня

$$y'^n+a_1(x,y)y'^{n-1}+..+a_{n-1}(x,y)y'+a_n(x,y)=0. \tag{3.2}$$

Означення 3.1. Функція $y=y(x)$, визначена і неперервно диференційовна на (a,b), називається розв'язком диференціального рівняння (3.1), якщо вона після підстановки в (3.1) перетворює це диференціальне рівняння в тотожність

$$F(x,y(x),y'(x))\equiv 0,\ x\in(a,b).$$

Означення 3.2. Будемо говорити, що рівняння $\Phi(x,y)$ визначає розв'язок диференціального рівняння (3.1) в неявній формі, якщо воно визначає y як функцію x і вона є розв'язком диференціального рівняння (3.1).

<u>Означення 3.3.</u> Говорять, що співвідношенням $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t_0<t<t_1$, визначається розв'язок диференціального рівняння (3.1) в параметричній формі, якщо

$$F\left(\varphi(t),\psi(t),\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}\right)\equiv 0,\ t_0<t<t_1.$$

Криві на площині (x,y), які відповідають розв'язкам, будемо називати інтегральними кривими.

Задача Коші – задача знаходження розв'язків, які задовольняють умові $y(x_0)=y_0$.

<u>Означення 3.4.</u> Говорять, що задача Коші для диференціального рівняння (3.1) з початковими умовами (x_0,y_0) має єдиний розв'язок, якщо через точку (x_0,y_0) в достатньо малому околі її проходить стільки інтегральних кривих, скільки напрямків поля визначає диференціальне рівняння в цій точці. В противному – не єдиний розв'язок.

<u>Теорема 3.1.</u> (про існування і єдиність розв'язку задачі Коші).

Якщо функція $F(x,y,y')$ задовольняє наступним умовам:

а) є визначеною і неперервною разом зі своїми частинними похідними в деякому замкнутому околі точки (x_0,y_0,y'_0);

б) $F(x_0,y_0,y'_0)=0$;

в) $F'_{y'}(x_0,y_0,y'_0)\neq 0$,

то диференціальне рівняння (3.1) має єдиний розв'язок $y=y(x)$, визначений і неперервно–диференційовний в околі точки $x=x_0$, який задовольняє умові $y(x_0)=y_0$ і такий, що $y'(x_0)=y'_0$.

(Теорема без доведення).

Припустимо, що розв'язуючи диференціальне рівняння (3.1) відносно y', ми знайдемо дійсні розв'язки

$$y'=f_k(x,y),\ k=1,2,..,m, \tag{3.3}$$

де $f_k(x,y)$ визначені в області D так, що ми маємо m диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно y'. Припустимо, що в будь якій точці $(x,y)\in D$ напрямки поля, визначені кожним диференціальним рівнянням (3.3), різні. Так що інтегральні криві різних рівнянь не можуть дотикатися один одного на D.

Нехай кожне диференціальне рівняння (3.3) на D має загальний інтеграл

$$\Psi_k(x,y)=c,\ k=1,..,m. \tag{3.4}$$

<u>Означення 3.5.</u> Сукупність інтегралів (3.4) будемо називати загальним інтегралом диференціального рівняння (3.1) в області D.

Інколи замість співвідношення (3.4) записують

$$(\Psi_1(x,y)-c)\ldots(\Psi_m(x,y)-c)=0. \tag{3.5}$$

Якщо поле на D не задовольняє сказаному вище, тобто існує хоча б одна точка (x_0,y_0), в якій значення хоча б двох функцій $f_k(x,y)$ співпадали, то інтегральні криві, які відповідають диференціальному рівнянню, дотикаються один одного в точці (x_0, y_0). Тому, крім інтегральних кривих диференціального рівняння (3.3), будуть ще склеєні інтегральні криві. Всі вони будуть входити в (3.4) або (3.5).

В загальному випадку диференціальне рівняння (3.1) не вдається розв'язати відносно y' в елементарних функціях. В цих випадках шукають однопараметричне сімейство інтегральних кривих у вигляді

$$\Phi(x, y, c) = 0, \tag{3.6}$$

яке називається загальним інтегралом диференціального рівняння (3.1).

Якщо сімейство інтегральних кривих задано у вигляді

$$y = \varphi(x, c), \tag{3.7}$$

то воно називається загальним розв'язком диференціального рівняння (3.1).

Зауважимо, що в (3.6) можуть входити і розв'язки диференціального рівняння виду (3.3), коли y' – комплексні. Ми таких диференціальних рівнянь не будемо розглядати, тому відповідні їм розв'язки треба виключати.

Сімейство інтегральних кривих, знайдене в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(t, c) \\ y = \psi(t, c) \end{cases} \tag{3.8}$$

будемо називати загальним розв'язкам диференціального рівняння в параметричній формі.

<u>Означення 3.6.</u> Розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння (3.1) будемо називати частинним розв'язком, якщо в кожній його точці задача Коші має єдиний розв'язок.

<u>Означення 3.7.</u> Розв'язок $y = y(x)$ називається особливим розв'язком, якщо в кожній його точці порушується єдиність розв'язку задачі Коші.

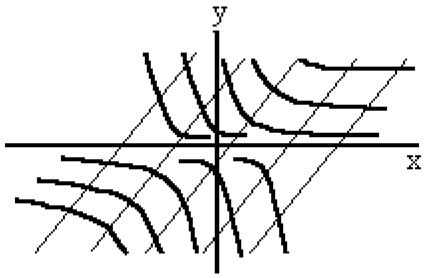
Аналогічно диференціальним рівнянням, розв'язаним відносно y', диференціальне рівняння (3.1) може мати розв'язки, які є ні частинними ні особливими.

Аналіз частинних і особливих розв'язків для цих рівнянь більш складний. Зауважимо, що в випадку (3.3) розв'язок $y = y(x)$ буде особливим, якщо він буде особливим хоча б для одного з диференціальних рівнянь (3.3).

<u>Приклад 3.1.</u> Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'^2 + (y^2 - 1)y' - y^2 = 0. \tag{3.9}$$

<u>Розв'язання</u>. З (3.9) маємо: $y' = 1, y' = -y^2$. Тоді $y = x + c, y = \dfrac{1}{x + c}$ – загальний інтеграл. Його можна записати таким чином $(y - x - c)\left(y - \dfrac{1}{x - c}\right) = 0$. Цей загальний інтеграл є накладка двох сімейств інтегральних кривих (мал. 3.1).



Мал. 3.1

Розв’язок задачі Коші для диференціального рівняння (3.9) в кожній точці площини (x, y) є єдиним. В точці (x_0, y_0) ми маємо два напрямки поля: $y_0' = 1,\ y_0' = {y_0}^2$. І через цю точку проходить дві інтегральні криві

$$y = x + y_0 - x_0, \tag{3.10}$$

$$y = \frac{1}{x + \frac{1}{y_0} - x_0}, \text{ якщо } y_0 \neq 0 \tag{3.11}$$

і $y = x - x_0$, та $y = 0$, якщо $y_0 = 0$.

Розв’язки (3.10),(3.11) – частинні розв’язки при фіксованих x_0, y_0. Особливих розв’язків немає.

3.2. Знаходження кривих, підозрілих на особливий розв’язок

Припустимо, що диференціальне рівняння (3.1) представлено в формі (3.3). При дослідженні на особливий розв’язок рівнянь виду (3.3) ми вище прийшли до висновку, що ці розв’язки можливі на тих кривих, на яких $\frac{\partial f_k}{\partial y}$ є необмеженою. Але переходити від диференціального рівняння (3.1) до рівнянь (3.3) – недоцільно при визначені особливих розв’язків, так як $\frac{\partial f_k}{\partial y} = \frac{\partial y'}{\partial y}$.

Дійсно, припустимо, що існують похідні $\frac{\partial F}{\partial y}$ та $\frac{\partial F}{\partial y'}$,тоді

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} = 0.$$

Звідки

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}. \tag{3.12}$$

Припустимо, що $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, тоді $\frac{\partial y'}{\partial y}$ буде необмеженою при умові

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{3.13}$$

Таким чином, криві, підозрілі на особливий розв’язок будуть визначатися з системи

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0 \\ \dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}=0 \end{cases}. \tag{3.14}$$

Розв’язком системи (3.14)

$$R(x,y)=0 \tag{3.15}$$

є дискримінантна крива. Якщо вона задовольняє диференціальне рівняння (3.1) і в кожній точці порушується єдиність, то це буде особливий розв’язок.

<u>Приклад 3.2.</u> Дослідити на особливі розв'язки диференціальне рівняння

$$F(x,y,y') = y'^2 + 2P(x,y)y' + Q(x,y) = 0. \tag{3.16}$$

<u>Розв'язання</u>. Знаходимо дискримінантну криву, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y'^2 + 2P(x,y)y' + Q(x,y) = 0 \\ 2y' + 2P(x,y) = 0 \end{cases}.$$

Маємо

$$R(x,y) = P^2(x,y) - Q(x,y) = 0. \tag{3.17}$$

Співвідношення (3.17) – дискримінантна крива рівняння (3.16). А на ній ми маємо не два, а один напрямок поля $y' = -P(x,y)$. В той же час – через неї може проходити не одна інтегральна крива.

3.3. Загальний метод введення параметру

Розглянемо диференціальне рівняння (3.1). Припустимо, що воно допускає параметризацію

$$x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v),\ y' = \eta(u,v) \tag{3.18}$$

так, що $F(\varphi(u,v),\psi(u,v),\eta(u,v)) \equiv 0$ при всіх значеннях параметрів u і v.

Використовуючи (3.18) і співвідношення $dy = y'dx$ ми завжди диференціальне рівняння (3.1) можемо привести до диференціального рівняння, яке розв'язане відносно похідної

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv,\ \ dy = \frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv.$$

Тому

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv = \eta(u,v)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv\right).$$

Візьмемо, наприклад, u за незалежну змінну, v – за залежну, тоді прийдемо до диференціального рівняння

$$\frac{dv}{du} = f(u,v). \tag{3.19}$$

Якщо

$$v = w(u,c) \tag{3.20}$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (3.19), то загальний розв'язок диференціального рівняння (3.1) можна отримати в параметричній формі

$$x = \varphi(u, w(u,c)), \ y = \psi(u, w(u,c)). \tag{3.21}$$

Розглянемо деякі частинні випадки.

A. Диференціальні рівняння, розв'язані відносно шуканої функції.

Це рівняння має вигляд

$$y = \varphi(x, y'). \tag{3.22}$$

За параметри u і v можна взяти x і y'. Позначимо $y' = p$, тоді

$$y = \varphi(x, p), \ dy = pdx. \tag{3.23}$$

Маємо

$$dy = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial p}dp = pdx.$$

Звідки

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{dp}{dx} = p. \tag{3.24}$$

Нехай $p = w(x,c)$ – загальний розв'язок диференціального рівняння (3.24), тоді $y = \varphi(x, w(x,c))$ – загальний розв'язок диференціального рівняння (3.22).

Диференціальне рівняння (3.24) може мати особливий розв'язок $p = \gamma(x)$, тоді диференціальне рівняння (3.22) може мати особливий розв'язок $y = \varphi(x, \gamma(x))$.

B. Випадок, коли диференціальне рівняння розв'язане відносно незалежної змінної.

Це рівняння має вигляд

$$x = \varphi(y, y'). \tag{3.25}$$

Інтегрується воно аналогічно диференціальному рівнянню (3.22). Покладемо $y' = p$. Тоді

$$x = \varphi(y, p), dy = pdx.$$

Використовуючи співвідношення $dy = pdx$, отримаємо

$$dy = p\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial p}dp\right).$$

Звідки

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dp}{dy}. \tag{3.26}$$

Якщо $p = w(y,c)$ – загальний інтеграл диференціального рівняння (3.26), то

$$x = \varphi(y, w(y,c)) \tag{3.27}$$

– загальний інтеграл диференціального рівняння (3.25).

Якщо $p = \gamma(y)$ – особливий розв'язок диференціального рівняння (3.26), то $x = \varphi(y, \gamma(y))$ – може бути особливим розв'язком диференціального рівняння (3.25).

Розглянемо тепер більш прості випадки, коли рівняння можна проінтегрувати.

C. Рівняння Лагранжа.

Це рівняння має вигляд

$$y = \varphi(y')x + \psi(y'). \tag{3.28}$$

Воно інтегрується в квадратурах. Покладемо $y' = p, x = x$. Тоді

$$y = \varphi(p)x + \psi(p), dy = pdx. \tag{3.29}$$

З (3.29) маємо

$$\varphi(p)dx + (\varphi'(p)x + \psi'(p))dp = pdx,$$

$$(\varphi(p) - p)dx + (\varphi'(p)x + \psi'(p))dp = 0. \tag{3.30}$$

Диференціальне рівняння (3.30) лінійне по x

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}. \tag{3.31}$$

Нехай $x = A(p)c + B(p)$ – розв'язок диференціального рівняння (3.31). Тоді загальний розв'язок рівняння Лагранжа запишемо в параметричній формі

$$\begin{cases} x = A(p)c + B(p) \\ y = \varphi(p)(A(p)c + B(p)) + \psi(p) \end{cases}. \tag{3.32}$$

Особливі розв'язки можуть бути там, де

$$\varphi(p) - p = 0, \tag{3.33}$$

тобто

$$y = p_i x + \psi(p_i), \tag{3.34}$$

де p_i – корені рівняння (3.33).Розв'язок (3.34) може бути частинним або особливим.

D. Рівняння Клеро.

Це рівняння – частинний випадок рівняння Лагранжа, коли $\varphi(y') = y'$

$$y = y'x + \psi(y'). \tag{3.35}$$

Покладемо $y' = p$, тоді

$$\begin{cases} y = px + \psi(p) \\ dy = pdx \end{cases}. \tag{3.36}$$

Використовуючи $dy = pdx$, отримаємо $pdx + (x + \psi'(p))dp = pdx$. Звідки

$$(x + \psi'(p))dp = 0. \tag{3.37}$$

Рівняння (3.37) розпадається на два

$$dp = 0, \ \ x + \psi'(p) = 0. \tag{3.38}$$

Перше рівняння (3.38) дає $p = c$, підставляючи його в (3.35) будемо мати загальний розв’язок

$$y = cx + \psi(c). \tag{3.39}$$

Друге – $x = -\psi'(p)$, разом з (3.35) утворює параметричний розв’язок

$$\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = -p\psi(p) + \psi(p) \end{cases}. \tag{3.40}$$

Розв’язок (3.40) є особливим, так як він співпадає з обвідною. Дійсно

$$\begin{cases} y = cx + \psi(c) \\ 0 = x + \psi'(c) \end{cases},$$

звідки

$$\begin{cases} x = -\psi'(c) \\ y = -c\psi'(c) + \psi(c) \end{cases}. \tag{3.41}$$

Дискримінантна крива (3.41) співпадає з розв’язком (3.40).

Приклад 3.3. Розв’язати рівняння Лагранжа

$$y = xy'^2 + y'^2.$$

Розв'язання. Покладемо $y' = p$. Маємо $y = xp^2 + p^2$, $dy = pdx$,

$$p^2dx + 2pxdp + 2pdp = pdx, \ \left(p^2 - p\right)\frac{dx}{dp} + 2px + 2p = 0.$$

Отримали лінійне рівняння

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = \frac{2}{1-p}.$$

Його розв’язок

$$x = \frac{c_1}{(p-1)^2} - 1, \tag{3.42}$$

$$y = \frac{c_1 p^2}{(p-1)^2} \tag{3.43}$$

– загальний розв’язок нашого рівняння в параметричній формі. Або, виключаючи p, отримаємо

$$y = \left(\sqrt{x+1} + c\right)^2, \ \left(c = \sqrt{c_1}\right). \tag{3.44}$$

Знайдемо ті розв’язки, яким відповідають

$$p^2 - p = 0, \ p_1 = 0, \ p_2 = 1, \ y_1 = 0, \ y_2 = x + 1.$$

Перший розв’язок – особливий, другий – частинний.

Приклад 3.4. Розв'язати рівняння

$$y = y'x - \frac{1}{4}y'^2.$$

Розв'язання. Це рівняння Клеро. Його загальний розв’язок $y = cx - \frac{1}{4}c^2$.

Запишемо дискримінантну криву

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}c \\ y = \frac{1}{4}c^2 \end{cases}.$$

Звідки $y = x^2$ – особливий розв’язок, так як через цей розв’язок проходить ще розв’язок, який міститься в загальному при $c(x) = 2x$.

3.4. Неповні рівняння

а) Диференціальні рівняння, які містять тільки похідну.

Це рівняння вигляду

$$F(y') = 0. \tag{3.45}$$

Рівняння (3.45) може мати скінчену або нескінчену кількість дійсних розв’язків

$$y' = k_i, i = 1,2,..., \qquad (3.46)$$

де k_i – деякі числа, які задовольняють рівняння $F(k_i) = 0$.

Інтегруємо (3.46)

$$y = k_i x + c, \quad i = 1,2,... \qquad (3.47)$$

Так як $k_i = \frac{y-c}{x}$, то

$$F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0 \qquad (3.48)$$

– загальний інтеграл диференціального рівняння (3.45).

Таким чином, при таких припущеннях інтегральні криві диференціального рівняння (3.45) є системою прямих ліній, які можна записати у вигляді (3.48). При цьому в (3.48) можуть входити комплексні розв’язки диференціального рівняння.

<u>Приклад 3.5.</u> Розв’язати диференціальне рівняння

$$y'^3 - 1 = 0 .$$

<u>Розв'язання</u>. Згідно (3.48) $\left(\frac{y-c}{x}\right)^3 - 1 = 0$ – загальний інтеграл. Однак у нього, крім дійсного розв’язку $y = x + c$, входять розв’язки комплексних диференціальних рівнянь $y' = \frac{-1 \pm \sqrt{3} \cdot i}{2}$.

б) <u>Диференціальні рівняння, які не містять шуканої функції.</u>

Такі рівняння мають вигляд

$$F(x, y') = 0 . \qquad (3.49)$$

Якщо (3.49) можна розв’язати відносно похідної

$$y' = f_k(x), k = 1,2,..., \qquad (3.50)$$

то

$$y = \int f_k(x)dx + c, k = 1,2,... \qquad (3.51)$$

є загальним інтегралом диференціального рівняння (3.49).

Якщо ж розв’язати відносно y' не можна, а допускається параметризація

$$F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0, \qquad (3.52)$$

тобто

$$x = \varphi(t), y' = \psi(t). \qquad (3.53)$$

Тоді загальний розв’язок знаходять в параметричній формі

$$dy = \psi(t)\varphi'(t)dt,$$

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c \end{cases}. \qquad (3.54)$$

Якщо диференціальне рівняння (3.49) має вигляд

$$x = \varphi(y'), \qquad (3.55)$$

тоді це рівняння легко параметризується $y' = \varphi(t)$. В частинному випадку $y' = t$. Загальний розв'язок запишеться в формі

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int t\varphi'(t)dt + c \end{cases}. \tag{3.56}$$

Приклад 3.6. Зайти загальний розв'язок рівняння

$$x = e^{y'} - y'.$$

Розв'язання. Вводимо параметризацію $y' = t$, тоді

$$x = e^t - t,\ dy = tdx,\ dy = t(e^t - 1)dt.$$

Маємо

$$\begin{cases} x = e^t - t \\ y = (t-1)e^t - \dfrac{t^2}{2} + c \end{cases}$$

– загальний розв'язок в параметричній формі.

в) Диференціальні рівняння, які не містять незалежної змінної.

Це рівняння вигляду

$$F(y, y') = 0. \tag{3.57}$$

Якщо рівняння (3.57) розв'язане відносно y', тобто

$$y' = f_k(y),\ k = 1,2,\ldots, \tag{3.58}$$

то

$$\int \frac{dy}{f_k(y)} = x + c,\ k = 1,2,\ldots \tag{3.59}$$

є загальним інтегралом диференціального рівняння (3.57). Особливими розв'язками можуть бути криві $y = b_i$, де b_i – корені рівняння $f_k(b) = 0,\ k = 1,2,\ldots$ (або $F(b,0) = 0$).

Якщо не можна диференціальне рівняння (3.57) розв'язати відносно y', але воно допускає параметризацію

$$y = \varphi(t), y' = \psi(t), \tag{3.60}$$

то

$$\begin{cases} x = \int \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + c \\ y = \varphi(t) \end{cases} \tag{3.61}$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (3.57) в параметричній формі.

Приклад 3.7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'^2 + y^2 = 1.$$

Розв'язання. Введемо параметризацію $y' = Sin\,t, y = Cos\,t$,

$$dy = Sin\,tdx,\ dx = -\frac{Sin\,t}{Sin\,t}dt.$$

Звідки

$$\begin{cases} x = -t + c \\ y = Cos\,t \end{cases}$$

– загальний розв’язок нашого рівняння в параметричній формі.
г) Узагальнено однорідні рівняння.

Диференціальне рівняння назвемо узагальнено однорідним, якщо ліва частина є однорідною функцією аргументів x, y, y', яким відповідають величини 1-го, k-го і $(k-1)$ виміру, тобто

$$F\left(tx, t^k y, t^{k-1} y'\right) = t^m F(x, y, y'). \tag{3.62}$$

Зробимо заміну

$$x = e^t,\ y = ze^{kt}, \tag{3.63}$$

де t – нова незалежна змінна, z – нова шукана функція. Маємо

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{e^t} = \frac{dy}{dt}e^{-t}.$$

Тобто $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}$. З іншої сторони

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\left(ze^{kt}\right)e^{-t} = \left(\frac{dz}{dt}e^{kt} + kze^{kt}\right)e^{-t} = \left(\frac{dz}{dt} + kz\right)e^{(k-1)t}. \tag{3.64}$$

Підставимо (3.63),(3.64) в диференціальне рівняння (3.1)

$$F\left(e^t, ze^{kt}, \left(\frac{dz}{dt} + kz\right)e^{(k-1)t}\right) = e^{mt}F\left(1, z, \frac{dz}{dt} + kz\right) = 0.$$

Отримане рівняння

$$F\left(1, z, \frac{dz}{dt} + kz\right) = 0 \tag{3.65}$$

не містить незалежної змінної t.

Розділ 4. Диференціальні рівняння вищих порядків

4.1. Основні поняття та означення. Динамічна інтерпретація диференціальних рівняння другого порядку. Консервативні системи

Диференціальне рівняння *n*-го порядку не розв'язане відносно старшої похідної має вигляд

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{4.1}$$

а розв’язане відносно $y^{(n)}$ має форму

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{4.2}$$

Частинний випадок цих рівнянь – це лінійне рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x). \tag{4.3}$$

Означення 4.1. Функція $y=y(x)$ визначена і n раз неперервно–диференційовна на (a,b), називається розв'язком диференціального рівняння (4.1), якщо вона на (a,b) перетворює це рівняння в тотожність

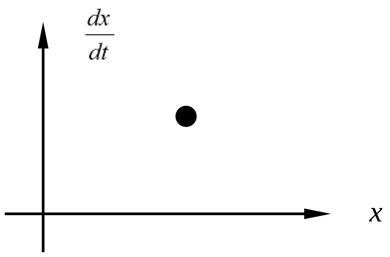
$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \equiv 0,\ x \in (a,b). \tag{4.4}$$

Будь-якому розв'язку диференціального рівняння (4.1) відповідає на площині (x,y) деяка крива, яку будемо називати інтегральною.

Розглянемо нелінійне диференційне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, \frac{dx}{dt}) \qquad (4.5)$$

і представимо рівняння (4.5) як рівняння руху частинки з одиничною масою при дії сили $f(x, \frac{dx}{dt})$. Значення x і $\frac{dx}{dt}$ в момент t характеризують стан системи на площині $(x, \frac{dx}{dt})$ (мал. 4.1). Ця площина називається площиною стану або фазовою площиною. Кожному новому стану відповідає нова точка на площині. Траєкторія зображаючої точки називається фазовою траєкторією, швидкість – фазовою швидкістю.



Мал. 4.1

Від диференціального рівняння (4.5) можна перейти до системи

$$\frac{dx}{dt} = y, \ \frac{dx}{dt} = f(x, y). \qquad (4.6)$$

Можна показати, що система (4.5), як і більш загальна

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \frac{dy}{dt} = Y(x, y), \qquad (4.7)$$

де $X(x, y), Y(x, y)$– неперервні функції разом з своїми частинними похідними в деякій області *D*, мають ту властивість, що якщо *x(t), y(t)* – розв'язки системи, то і $x = x(t + c)$, $y = y(t + c)$, де *c* – довільна константа, теж розв'язок.

Система (4.7) називається автономною або стаціонарною.

Якщо система (4.7) задана на всій площині, то фазові траєкторії покриють всю площину і не будуть перетинатися одна з одною. Якщо в деякій точці (x_0,y_0) $X(x_0,y_0) = Y(x_0,y_0) = 0$, то така точка називається особливою. В подальшому ми будемо розглядати тільки ізольовані особливі точки, тобто такі, в деякому малому околі яких немає інших особливих точок.

В реальних динамічних системах енергія розсіюється. Розсіювання (дисипація) енергії проходять в зв'язку з наявністю тертя. В деяких системах проходить повільне розсіювання енергії і ним можна знехтувати. Для таких систем має місце закон збереження енергії: сума кінетичної і потенціальної енергій постійна. Такі системи називають консервативними**.**

Розглянемо консервативну систему

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0. \qquad (4.8)$$

Від (4.8) перейдемо до наступної системи

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -\frac{f(x)}{m}. \qquad (4.9)$$

Виключаємо з (4.9) t

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f(x)}{my},\ mydy=-f(x)dx. \qquad (4.10)$$

Припустимо, що при $t=t_0$: $x(t_0)=x_0, y(t_0)=y_0$ і проінтегруємо (4.10) від t_0 до t

$$\frac{1}{2}my^2-\frac{1}{2}my_0^2=-\int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau. \qquad (4.11)$$

Звідки

$$\frac{1}{2}my^2+\int_0^x f(\tau)d\tau=\frac{1}{2}my_0^2+\int_0^{x_0} f(\tau)d\tau. \qquad (4.12)$$

Так як $\frac{1}{2}my^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ є кінетична енергія, а $V(x)=\int_0^x f(\tau)d\tau$ –потенціальна, $E=\frac{1}{2}my_0^2+V(x_0)$ – повна енергія, то (4.12) виражає закон збереження енергії.

$$\frac{1}{2}my^2+V(x)=E. \qquad (4.13)$$

Співвідношення (4.13) задають інтегральні криві на площині. Вони будуть різні і залежать від E.

Ми дали механічну інтерпретацію диференціального рівняння другого порядку.
Зупиняємося на геометричній інтерпретації.

Розглянемо

$$F(x,y,y',y'')=0 \qquad (4.14)$$

і перепишемо його у вигляді

$$F\left(x,y,y',(1+y'^2)^{3/2}\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right)=F_1\left(x,y,y',\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right). \qquad (4.15)$$

Оскільки $\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ – кривизна кривої, то диференціальне рівняння другого порядку являє собою зв'язок між координатами, кутом нахилу дотичної та кривизною в кожній точці інтегральної кривої.

4.2. Задача Коші. Достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші

Розглянемо диференціальне рівняння (4.2) і поставимо задачу Коші: серед всіх розв'язків диференціального рівняння (4.2) знайти такий $y=y(x)$, який задовольняє умовам

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{n-1}, \qquad (4.16)$$

де x_0, y_0, $y_0', \ldots, y_0^{n-1}$–задані числа, x_0 – початкове значення незалежної змінної, $y_0, y_0^1, \ldots y_0^{n-1}$ –початкові данні.

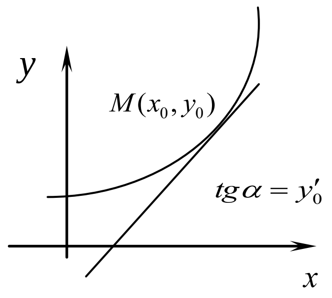
Для диференціального рівняння другого порядку

$$y''(x)=f(x,y,y') \qquad (4.17)$$

задача Коші заключається в тому, щоб знайти такий розв'язок диференціального рівняння (4.17), який би задовольняв умовам

$$y(x_0) = y_0\,,\; y'(x_0) = y'_0\,. \qquad (4.18)$$

Геометрично задача Коші полягає в тому, щоб знайти таку криву *y=y(x)*, яка задовольняє диференціальне рівняння (4.17), проходить через точку $M(x_0,y_0)$ і має заданий напрямок дотичної $tg\alpha = y'_0$ (мал. 4.2)



Мал. 4.2

Механічний зміст задачі Коші

$$x'' = f(x,t,x')\,,\; x(t_0) = x_0\,,\; x'(t_0) = V_0 \qquad (4.19)$$

полягає в тому, щоб знайти ту траєкторію механічної системи, яка є розв'язком диференціального рівняння (4.19) і має в t_0 фіксовані положення x_0 і швидкість V_0.

Розглянемо питання єдиності та існування розв'язку задачі Коші (4.2), (4.16). Єдиність для диференціального рівняння (4.2) не означає, що через точку $M(x_0,y_0)$ проходить тільки одна інтегральна крива. Наприклад, для диференціального рівняння (4.17) єдиність розуміється в тому сенсі, що через точку $M(x_0,y_0)$ проходить єдина інтегральна крива (мал. 4.2) з заданим нахилом дотичної, а через точку $M(x_0,y_0)$ можуть проходити і інші інтегральні криві, які мають інші нахили дотичних.

Необхідні умови існування розв′язку задачі Коші (4.2), (4.16) – права частина (4.2) неперервна в околі початкових даних.

Сформулюємо без доведення теорему про достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші.

<u>Теорема 4.1</u> (теорема Пікара). Розглянемо задачу Коші (4.2), (4.16) Припустимо, що функція $f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$ визначена в деякій замкненій обмеженій області

$$R{:}\; |x - x_0| \le a\,,\; |y - y_0| \le b\,,\; |y' - y'_0| \le b\,,\; |y'' - y''_0| \le b\,,\ldots,\; \left|y^{(n-1)} - y_0^{n-1}\right| \le b \qquad (4.20)$$

(*a,b* – дійсні додатні числа) і задовольняє в цій області умовам:

1) Функція $f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$ є неперервною за своїми аргументами і, отже, обмеженою

$$\left|f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})\right| \le M,\;\; (x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}) \in R \qquad (4.21)$$

(тут $M>0$ – константа);

2) Функція $f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$ має обмежені частинні похідні за змінними $y, y',\ldots,y^{(n-1)}$, тобто

$$\left|\frac{\partial f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})}{\partial y^{(l)}}\right| \le K\,,\; l=0,1,2,\ldots,(n-1);\; (x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}) \in R, \qquad (4.22)$$

де K – константа.
При цих припущеннях диференціальне рівняння (4.2) має єдиний розв'язок, який задовольняє умовам (4.16) і є неперервним разом з своїми похідними до n-го порядку включно на інтервалі

$$|x - x_0| < h = \min\left\{a, \frac{b}{\max\limits_R \left(M, |y'|, |y''|, ..., |y^{(n-1)}|\right)}\right\}. \tag{4.23}$$

З теореми випливає, що для поліноміальної правої частини диференціального рівняння (4.2) розв'язок задачі Коші з довільними початковими умовами існує і є єдиним.

4.3. Загальний розв'язок та загальний інтеграл, частинний та особливий розв'язки. Проміжні та перші інтеграли

Загальним розв'язком диференціального рівняння (4.2) називається сімейство розв'язків, яке залежить від n довільних констант $c_1, ..., c_n$

$$y = \varphi(x, c_1, ..., c_n). \tag{4.24}$$

Геометрично воно представляє сімейство інтегральних кривих на площині (x,y), залежне від n параметрів $c_1, ..., c_n$, причому рівняння цього сімейства розв'язано відносно y.

Розглянемо область D в просторі $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, в кожній точці якої виконуються умови теореми про існування і єдиність розв′язку задачі Коші.

Означення 4.2. Функцію (4.24), визначену в деякій області змінних $x, c_1, ..., c_n$ і яка має частинні похідні по x до n-го порядку включно, будемо називати загальним розв'язком диференціального рівняння (4.2) в області D, якщо система рівнянь

$$\begin{cases} y = \varphi(x, c_1, ..., c_n) \\ y' = \varphi'(x, c_1, ..., c_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, c_1, ..., c_n) \end{cases} \tag{4.25}$$

розв'язується відносно $c_1, c_2, ..., c_n$ в області D

$$\begin{cases} c_1 = \psi_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_n = \psi_n(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \end{cases} \tag{4.26}$$

і якщо функція (4.24) є розв'язком диференціального рівняння (4.2) при всіх значеннях $c_1, ..., c_n$, які визначаються формулами (4.26), коли точка $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \in D$.

Для розв'язування задачі Коші необхідно (4.16) підставити в (4.26) і визначити

$$\begin{cases} c_1^{(0)} = \psi_1(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{n-1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n^{(0)} = \psi_n(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{n-1}) \end{cases}.$$

Розв'язок задачі Коші запишеться у вигляді $y = \varphi(x, c_1^{(0)}, \ldots, c_n^{(0)})$. Якщо розв'язок можна представити у вигляді $y = \varphi(x, x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$, то така форма запису називається формою Коші.

В більшості випадків розв'язок диференціального рівняння (4.2) отримуємо у вигляді

$$\Phi(x,y,c_1,\ldots,c_n)=0, \tag{4.27}$$

який називається загальним інтегралом.

Означення 4.3. Будемо називати (4.27) загальним інтегралом диференціального рівняння (4.2) в області D, якщо це співвідношення визначає загальний розв'язок $y = \varphi(x, c_1, \ldots, c_n)$ диференціального рівняння (4.2) в області D.

Означення 4.4. Розв'язок, що визначається співвідношеннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t, c_1, \ldots c_n) \\ y = \psi(t, c_1, \ldots c_n) \end{cases}, \tag{4.28}$$

називають загальним розв'язком в параметричній формі.

Означення 4.5. Якщо розв′язок диференціального рівняння (4.2) складається тільки з точок єдиності розв′язку задачі Коші, то такий розв′язок будемо називати частинним.

Наприклад, при конкретних $c_1, \ldots, c_n$ розв′язок буде частинним.

Означення 4.6. Розв′язок, в кожній точці якого порушується єдиність розв′язку задачі Коші, будемо називати особливим розв′язком.

Рівняння n – го порядку може мати сімейство особливих розв′язків, залежних від довільних констант, кількість яких може досягати *(n-1)*.

Приклад 4.1. Знайти особливі розв′язки рівняння

$$y'' = 2\sqrt{y'}.$$

Розв'язання. Вводимо заміну $y' = z$, z – нова змінна. Маємо

$$z' = 2\sqrt{z}. \tag{4.29}$$

Звідки

$$z = (x + c_1)^2,\ x > -c_1,$$

$$y' = (x + c_1)^2,\ x > -c_1,\ y = \frac{1}{3}(x + c_1)^3 + c_2,\ x > -c_1.$$

Рівняння (4.29) має особливий розв′язок $z = 0$, тобто $y' = 0$. Тому $y = c$ – сімейство особливих розв′язків.

Інтегруючи диференціальне рівняння (4.2) ми приходимо до рівнянь, які не містять вищих похідних, але містять відповідну кількість констант

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-k)}, c_1, \ldots, c_k) = 0,\ 1 \le k \le n. \tag{4.30}$$

Співвідношення (4.30) називається проміжним інтегралом диференціального рівняння (4.2) k – го порядку і представляє собою диференціальне рівняння *(n-k)* порядку, яке містить k довільних сталих.

При *k=1* співвідношення

$$\Phi_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)}, c_1) = 0 \tag{4.31}$$

називається першим інтегралом.

Якщо існує один перший інтеграл, то диференціальне рівняння (4.2) зводиться до інтегрування диференціального рівняння *(n-1)* – го порядку.

Якщо відомо два перших інтеграли

$$\begin{cases} \Phi_1^{(1)}(x, y, y', ..., y^{(n-1)}, c_1) = 0 \\ \Phi_2^{(2)}(x, y, y', ..., y^{(n-1)}, c_2) = 0 \end{cases}, \tag{4.32}$$

то виключаючи з них $y^{(n-1)}$, приходимо до проміжного інтегралу другого порядку

$$\Phi_2(x, y, y', ..., y^{(n-2)}, c_1, c_2) = 0. \tag{4.33}$$

Знання *k* незалежних перших інтегралів дозволяє понизити порядок диференціального рівняння на *k* одиниць.

Якщо ми маємо *n* перших інтегралів, то виключаючи з них $y', ..., y^{(n-1)}$ ми знайдемо загальний інтеграл

$$\Phi(x, y, c_1, ..., c_n) = 0. \tag{4.34}$$

4.4. Крайова задача

Крім задачі Коші існують такі, в яких умови задаються в різних точках. Такі умови називають крайовими або граничними. А відповідна задача – крайовою.

Для рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y') \tag{4.35}$$

самі простіші граничні умови мають вигляд

$$y(a) = A,\ y(b) = B. \tag{4.36}$$

Знаходиться розв′язок на [*a*, *b*], який задовольняє умовам (4.36). Геометрично – на площині *(x, y)* розв'язати задачу Коші означає знайти інтегральні криві диференціального рівняння (4.35), які проходять через точки (*a, A), (b, B).*

В більш загальній постановці для диференціального рівняння другого порядку крайові умови можуть мати вигляд

$$\begin{cases} h_1 y(a) + h_2 y'(a) = A \\ h_3 y(b) + h_4 y'(b) = B \end{cases}, \tag{4.37}$$

де h_1, h_2, h_3, h_4, A, B числа, $|h_1| + |h_2| \neq 0, |h_3| + |h_4| \neq 0$.

<u>Приклад 4.2.</u> Розв′язати крайову задачу

$$y'' + y = 0,$$
$$y(0) = 0,\ y(\pi) = 1.$$

Розв'язання. Маємо загальний розв′язок нашого рівняння $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Згідно крайовим умовам

$$\begin{aligned} &c_1 1 + c_2 0 = 0, \\ -&c_1 1 + c_2 0 = 1. \end{aligned}$$

Оскільки система не сумісна, то крайова задача не має розв′язку, тобто поставлена не коректно.

Якщо $y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$, то $c_1 = 0$, c_2 – будь-яка стала. Тобто крайова задача має безліч розв′язків $y = c_2 \sin x$.

Тобто крайова задача може не мати розв′язку, мати безліч розв′язків, мати єдиний розв′язок.

Приклад 4.3. Розв′язати крайову задачу

$$y'' = 6x,\ y(0) = 0,\ y'(1) = 0.$$

Розв'язання. Маємо $y' = 3x^2 + c_1$, $y = x^3 + c_1 x + c_2$. Звідки $c_2 = 0, c_3 = -3$. $y = x^3 - 3x$ – єдиний розв′язок.

Необхідно відмітити, що крайові умови можуть мати інший вигляд, наприклад

$$y(a) = y(b),\ y'(a) = y'(b).$$

4.5. Інтегрування і пониження порядку диференціальних рівнянь з вищими похідними

4.5.1. Диференціальні рівняння, які містять n-у похідну від шуканої функції і незалежну змінну

а). Розглянемо диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = f(x). \tag{4.38}$$

Так як $\left(y^{(n-1)}\right)' = f(x)$, то

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + c_1.$$

Аналогічно $y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)dxdx + c_1(x - x_0) + c_2$, …..,

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x} \dots \int_{x_0}^{x}}_{n\,раз} f(x)dx..dx + c_1\left(\frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + c_2\left(\frac{(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!}\right) + \dots + c_n. \tag{4.39}$$

Остання формула дає загальний розв'язок в області

$$a < x < b, -\infty < y < \infty, -\infty < y' < \infty, -\infty < y'' < \infty, \dots, -\infty < y^{(n-1)} < \infty.$$

Формулу (4.39) легко використати для знаходження розв'язків задачі Коші з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}. \tag{4.40}$$

Цей розв′язок представляється у вигляді

$$y=\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x} f(x)dx..dx+y_0^{n-1}\left(\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\right)+y_0^{n-2}\left(\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}\right)+\ldots+y_0 \,. \quad (4.41)$$

Функція

$$y_1=\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x} f(x)dx\ldots dx$$

є частинним розв′язком диференціального рівняння (4.38) з початковими умовами

$$y_1(x_0)=0, y_1'(x_0)=0, \ldots y_1^{(n-1)}(x_0)=0,$$

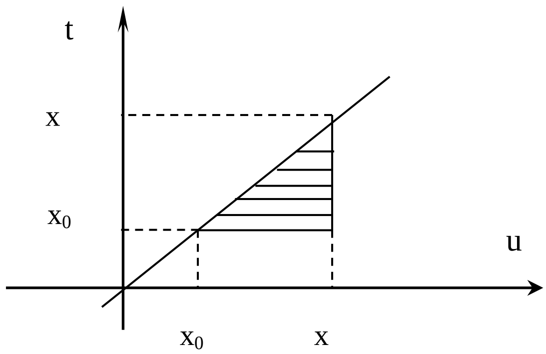
яким відповідають константи $c_1=c_2=\ldots=c_n=0$.

Для обчислення $y_1(x)$ використовують формулу Коші

$$y_1(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt \,. \quad (4.42)$$

Дійсно, інтеграл

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)dxdx=\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{u} f(t)dt\right)du=\int_{x_0}^{x}du\int_{x_0}^{u} f(t)dt$$



можна розглядати як повторний інтеграл в заштрихованій області (мал. 4.1).

Мал. 4.1

Міняючи порядок інтегрування, отримаємо

$$\int_{x_0}^{x}du\int_{x_0}^{u} f(t)dt=\int_{x_0}^{x} f(t)dt\int_{t}^{x}du=\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)dt \,.$$

Аналогічно обчислюємо

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)dxdxdx=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{u} f(t)(u-t)dtdu=\int_{x_0}^{x}du\int_{x_0}^{u} f(t)(u-t)dt=$$

$$=\int_{x_0}^{x} f(t)dt\int_{t}^{x}(u-t)du=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f(t)(u-t)^2\,dt \;.. \text{ і. т. д.}$$

Приходимо до формули (4.42). Таким чином, розв′язок (4.41) записується у вигляді

$$y_1(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt+y_0^{n-1}\left(\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\right)+y_0^{n-2}\left(\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}\right)+\ldots+y_0$$

Загальний розв′язок диференціального рівняння (4.38) можна також записати через невизначений інтеграл

$$y=\int\ldots\int f(x)dx..dx+c_1\left(\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\right)+c_2\left(\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}\right)+\ldots+c_n\,. \quad (4.43)$$

Приклад 4.4. Розв′язати рівняння

$$y''=6x\,.$$

Розв'язання. Послідовно знаходимо $y'=3x^2+c_1,\ y=x^3+xc_1+c_2$.

б). Розглянемо випадок

$$F\left(x,y^{(n)}\right)=0 \quad (4.43)$$

в якому співвідношення (4.43) не можна розв'язати відносно $y^{(n)}$ в елементарних функціях або вирази для $y^{(n)}$ будуть досить складними.

Припустимо, що диференціальне рівняння (4.43) допускає параметризацію

$$y^{(n)}=\phi(t), x=\varphi(t), \quad (4.44)$$

де $\varphi(t)$ та $\phi(t)$ такі, що $F(\varphi(t),\phi(t))\equiv 0$.

Проводимо обчислення

$$dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx=\phi(t)\varphi'(t)dt,$$

$$y^{(n-1)}=\int\phi(t)\varphi'(t)dt+c_1\equiv\phi_1(t,c_1).$$

Аналогічно обчислюємо

$$y^{(n-2)}=\int\phi_1(t,c_1)\varphi'(t)dt+c_2\equiv\phi_2(t,c_1,c_2).$$

Остаточно маємо

$$\begin{cases} y=\phi_n(t,c_1,c_2..c_n) \\ x=\varphi(t) \end{cases} \quad (4.45)$$

– загальний розв′язок в параметричній формі.

Відмітимо два випадки, в яких диференціальне рівняння (4.43) легко параметризується

I. $x=\varphi(y^{(n)})$, (4.46)

$y^{(n)}=\phi(t),\ x=\varphi(\phi(t))$ (зокрема можна ввести таку параметризацію $y^{(n)}=t,\ x=\varphi(t)$);

II. $P\left(x,y^{(n)}\right)+Q\left(x,y^{(n)}\right)=0$, (4.47)

де P і Q-однорідні функції виміру k і m відповідно.

Покладемо

$$y^{(n)}=tx \quad (4.48)$$

і розв′яжемо рівняння (4.47) відносно x через t: $x=\varphi(t)$.
Підставляючи $x=\varphi(t)$ в (4.48), отримаємо

$$\begin{cases} y^{(n)} = t\varphi(t) \\ x=\varphi(t) \end{cases}. \qquad (4.49)$$

Далі вищеописаним способом знаходимо загальний розв'язок в параметричній формі.

Приклад 4.5. Розв'язати рівняння

$$e^{y''}+y''=x.$$

Розв'язання. Зробимо заміну

$$\begin{cases} y''=t \\ x=e^t+t \end{cases},$$

$$dy'=y''dx=t(e^t+1)dt,$$

$$y'=(t-1)e^t+\frac{t^2}{2}+c_1,$$

$$dy=y'dx=\left[(t-1)e^t+\frac{t^2}{2}+c_1\right](e^t+1)dt.$$

Остаточно маємо

$$\begin{cases} y=\left(\frac{t}{2}-\frac{3}{4}\right)e^{2t}+\left(\frac{t^2}{2}+c_1-1\right)e^t+\frac{t^3}{6}+c_1t+c_2 \\ x=e^t+t \end{cases}.$$

4.5.2. Інтегрування диференціальних рівнянь, які не містять шуканої функції і $(k-1)$-ї похідної

Розглянемо диференціальне рівняння

$$F\left(x,y^{(k)},\dots,y^{(n)}\right)=0, \qquad (4.50)$$

в якому є $y^{(k)}$.

Введемо нову змінну

$$y^{(k)}=z, \qquad (4.51)$$

отримаємо

$$F\left(x,z,z',z'',\dots,z^{(n-k)}\right)=0, \qquad (4.52)$$

тобто ми понизили порядок диференціального рівняння (4.50) на k одиниць. Припустимо, що ми розв'язали диференціальне рівняння (4.52) і визначили

$$z=\omega(x,c_1,\dots,c_{n-k}). \qquad (4.53)$$

Тоді рівняння

$$y^{(k)}=\omega(x,c_1,\dots,c_{n-k}) \qquad (4.54)$$

інтегруємо і отримаємо загальний розв'язок

$$y=\varphi(x,c_1,\dots,c_n). \qquad (4.55)$$

Якщо замість загального розв'язку (4.53) можна знайти загальний інтеграл

$$\Omega(x,z,c_1,\dots,c_{n-k})=0,$$

то отримаємо диференціальне рівняння $\Omega\left(x, y^{(k)}, c_1,\ldots,c_{n-k}\right)=0$ типу (4.43).

Розглянемо два частинних випадки відносно диференціального рівняння (4.50).

а). Диференціальне рівняння вигляду

$$F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right)=0. \tag{4.56}$$

Якщо диференціальне рівняння (4.56) можна розв′язати відносно $y^{(n)}$

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}), \tag{4.57}$$

то поклавши $y^{(n-1)}=z$ перейдемо до рівняння $z' = f(z)$.

Якщо $z=\omega(x,c_1)$ – загальний розв′язок останнього рівняння, то остаточно маємо рівняння вигляду (4.38) $y^{(n-1)}=\omega(x,c_1)$.

Припустимо, що диференціальне рівняння (4.55) не можна записати в вигляді (4.57), але воно допускає параметризацію

$$y^{(n-1)}=\varphi(t), y^{(n)}=\phi(t). \tag{4.58}$$

То з співвідношення $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$ знаходимо $dx=\dfrac{\varphi'(t)dt}{\phi(t)}$.

Звідки

$$\begin{cases} x=\displaystyle\int\frac{\varphi'(t)dt}{\phi(t)}+c_1 \\ y^{(n-1)}=\varphi(t) \end{cases}. \tag{4.59}$$

Диференціальне рівняння (4.59) вигляду (4.44) і його розв'язки можна отримати в параметричній формі.

б). Диференціальне рівняння вигляду

$$F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right)=0. \tag{4.60}$$

Нехай диференціальне рівняння (4.60) можна розв′язати відносно $y^{(n)}$

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)}). \tag{4.61}$$

Позначимо $y^{(n-2)} = z$ і перейдемо до диференціального рівняння

$$z'' = f(z). \tag{4.62}$$

Помножимо (4.62) на $2z'dx$

$$2z'z''dx=2z'f(z)dx.$$

Звідки $d(z')^2 = 2f(z)dz$. Отже

$$(z')^2 = 2\int f(z)dz+c_1,$$

з якого визначимо

$$z'=\pm\sqrt{2\int f(z)dz+c_1}.$$

Останнє диференціальне рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Знайшовши з нього

$$z=\varphi(x,c_1,c_2)$$

ми остаточно переходимо до диференціального рівняння вигляду (4.38)

$$y^{(n-2)}=\varphi(x,c_1,c_2). \tag{4.63}$$

Припустимо, що диференціальне рівняння (4.60) не можна розв'язати відносно $y^{(n)}$ але для нього можлива параметризація $y^{(n-2)} = \varphi(t), y^{(n)} = \phi(t)$.
Запишемо співвідношення

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx, dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx.$$

Помножимо першу рівність на $y^{(n-1)}$

$$y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = y^{(n)}y^{(n-1)}dx,$$

після чого отримаємо

$$d(y^{(n-1)})^2 = 2y^{(n)}y^{(n-1)} = 2y^{(n)}dy^{(n-2)}.$$

Звідки

$$d(y^{(n-1)})^2 = 2\phi(t)\varphi'(t)dt.$$

Отже, маємо

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\phi(t)\varphi'(t)dt + c_1} \equiv \psi_1(t, c_1).$$

Приєднавши до останньої рівності $y^{(n-2)} = \varphi(t)$ ми отримаємо а).

4.5.3. Пониження порядку диференціальних рівнянь, які не містять незалежної змінної

Ці диференціальні рівняння мають вигляд

$$F\left(y, y', .., y^{(n)}\right) = 0 \tag{4.64}$$

і їх порядок можна понизити на одиницю заміною $y' = z$.
При цьому y стає незалежною зміною, а z – шуканою функцією. Обчислюємо

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy}z\right)\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2z}{dy^2}z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)z,$$

…..

$$y^{(n)} = \omega_n(z, \frac{dz}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}})$$

і остаточно прийдемо до диференціального рівняння $(n-1)$ порядку

$$F\left(y, z, \frac{dz}{dy}z, \ldots, \omega_n(z, \frac{dz}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}})\right) = 0. \tag{4.65}$$

Якщо $z = \varphi(y, c_1, \ldots, c_{n-1})$ – розв′язок диференціального рівняння (4.65), то

$$y' = \varphi(y, c_1, \ldots, c_{n-1}). \tag{4.66}$$

Інтегруємо диференціальне рівняння (4.66) і знайдемо загальний інтеграл.

Особливі розв'язки можуть появлятися при інтегруванні диференціального рівняння (4.66). При переході до диференціального рівняння (4.65) ми можемо загубити розв′язки $y = const$. Для їх знаходження необхідно розв’язати рівняння $F(b, 0, \ldots, 0) = 0$. Якщо $b = b_i$ – розв′язок останнього рівняння, то $y = b_i$ – роз′вязок диференціального рівняння (4.64).

Приклад 4.6. Розв′язати рівняння

$$4y''\sqrt{y}=1 \quad .$$

Розв'язання. Вводимо змінну $y'=z$, $y''=\frac{dz}{dy}z$, тоді

$$4\frac{dz}{dy}z\sqrt{y}=1,\ z^2=\sqrt{y}+c_1.$$

Звідки $z=\pm\sqrt{\sqrt{y}+c_1}$, отже, $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\sqrt{y}+c_1}$, $x+c_2=\pm\int\frac{dy}{\sqrt{\sqrt{y}+c_1}}$

– загальний інтеграл рівняння.

4.5.4. Однорідні диференціальні рівняння відносно шуканої функції і її похідних

Так називаються диференціальні рівняння вигляду

$$F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=0 \qquad (4.67)$$

в яких $F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)$ є однорідною функцією відносно $y,y',\ldots,y^{(n)}$, тобто для всіх t маємо

$$F\left(x,ty,ty',\ldots,ty^{(n)}\right)=t^m F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right).$$

Шляхом заміни $\frac{y'}{y}=z$ диференціальне рівняння (4.67) можна понизити на один порядок. Обчислюємо

$$y'=yz,\ y''=y'z+yz'=y(z^2+z'),\ldots,y^{(n)}=y\omega_n(z,z',\ldots,z^{(n-1)}).$$

Тому диференціальне рівняння (4.67) прийме вигляд

$$y^m F\left(x,1,z,z^2+z',\ldots,\omega_n(z,z',\ldots,z^{(n-1)})\right)=0. \qquad (4.68)$$

Скорочуючи на y^m ($y=0$ при $m>0$ може бути розв′язком диференціального рівняння (4.67)), перейдемо до диференціального рівняння порядку $(n-1)$.

Якщо $z=\varphi(x,c_1,\ldots,c_{n-1})-$ загальний розв′язок останнього диференціального рівняння , то

$$\frac{y'}{y}=\varphi(x,c_1,\ldots,c_{n-1}).$$

Звідки

$$y=c_n e^{\int\varphi(x,c_1,\ldots,c_{n-1})dx} \qquad (4.69)$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (4.67). Розв′язок $y(x)\equiv 0$ міститься в формулі (4.69) при $c_n=0$.

Приклад 4.7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xyy''+xy'^2-yy'=0.$$

Розв'язання. Це диференціальне рівняння є однорідним відносно шуканої функції і її похідних, тому

$$\frac{y'}{y}=z, y'=yz, y''=y(z^2+z'), xy^2(z^2+z')+xy^2z^2-y^2z=0.$$

Маємо $xz'+2xz^2-z=0$ – диференціальне рівняння Бернуллі .
Інтегруючи, отримаємо

$$z=\frac{x}{x^2+c_1},\ \frac{y'}{y}=\frac{x}{x^2+c_1}.$$

Звідки $y=c_2\sqrt{x^2+c_1}$. Наше диференціальне рівняння Бернуллі має розв′язок $y=c$, який не міститься в знайденому загальному інтегралі.

4.5.5. Диференціальні рівняння, ліва частина яких є точна похідна

Припустимо, що диференціальне рівняння (4.67), його ліва частина, є точна похідна за x від деякої функції $\Phi(x,y,y',...,y^{(n-1)})$, тобто

$$F(x,y,y',...,y^{(n)})=\frac{d}{dx}\Phi(x,y,y',...,y^{(n-1)})=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y'+...+\frac{\partial\Phi}{\partial y^{(n-1)}}y^{(n)}=0,$$

тоді диференціальне рівняння (4.67) має перший інтеграл

$$\Phi(x,y,y',...,y^{(n-1)})=c_1 \tag{4.70}$$

так, що його порядок можна понизити на одиницю.

<u>Приклад 4.8.</u> Розв′язати диференціальне рівняння

$$y''y+y'^2=0.$$

<u>Розв'язання</u>. Маємо $\frac{d}{dx}(y'y)=0$, $y'y=c_1, ydy=c_1dx$, $\frac{y^2}{2}=c_1x+c_2$ – загальний інтеграл.

Якщо ліва частина диференціальне рівняння (4.67) не є точною похідною, то в деяких випадках можна знайти функцію $\mu(x,y,y',...,y^{(n-1)})$, після домноження на яку рівняння (4.67), його ліва частина, буде точною похідною за x. Ця функція називається інтегрувальним множником. Якщо ми знаємо функцію μ, то можна знайти не тільки перший інтеграл, а й особливі розв'язки, які знаходяться з рівняння $\frac{1}{\mu}=0$.

<u>Приклад 4.9.</u> Знайти загальний розв'язок диференціальне рівняння

$$y''y+2y^2y'^2+y'^2-\frac{2yy'}{x}=0.$$

<u>Розв'язання</u>. Візьмемо $\mu=\frac{1}{yy'}$, тоді $\frac{y''}{y'}+2yy'+\frac{y'}{y}-\frac{2}{x}=0$. При цьому $y=0$, $y=c$ – розв′язки нашого диференціального рівняння. Маємо

$$\frac{d}{dx}(\ln y'+y^2+\ln y-2\ln x)=0.$$

$\ln y' + y^2 + \ln y - 2\ln x = \ln c_1$ – перший інтеграл. Перепишемо його в такій формі $e^{y^2} yy' - c_1 x^2 = \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}e^{y^2} - \frac{c_1}{3}x^3) = 0$. Звідки $\frac{1}{2}e^{y^2} - \frac{c_1}{3}x^3 = c_2$ – загальний інтеграл. Особливих розв′язків немає, так як диференціальне рівняння $yy' = 0$ приводить до розв′язків $y = c$, які містяться в загальному.

Розділ 5. Лінійні диференціальні рівняння n –го порядку

5.1. Загальні властивості лінійних однорідних диференціальних рівнянь n-го порядку

5.1.1. Властивості лінійного диференціального оператора

Лінійним диференціальним рівнянням називається рівняння вигляду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x), \qquad (5.1)$$

де $p_i(x)$, $i = 1,2,\ldots, n$, $f(x)$ – задані функції, неперервні на **(a,b)**.

При цих умовах диференціальне рівняння (5.1) має єдиний розв’язок $y=y(x)$, який задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots \quad , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}.$$

Цей розв’язок визначений і n раз неперервно диференційований на **(a,b)**.

Особливих розв’язків диференціальне рівняння (5.1) не має. Будь-який розв’язок при конкретних початкових умовах є частинним. Якщо при $y^{(n)}$ стоїть $p_0(x)$, то точки, в яких $p_0(x)=0$, називаються особливими.

Якщо $f(x)=0$, то диференціальне рівняння *(5.1)* називають однорідним

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0. \qquad (5.2)$$

Для скорочення запису введемо лінійний диференціальний оператор

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x). \qquad (5.3)$$

Властивості оператора L :

a) $L(ky)=k L(y)$, $k = const$;

b) $L(y_1 + y_2)=L(y_1) + L(y_2)$;

c) $L\left(\sum_{i=1}^{m} c_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i L(y_i)$, де $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – деякі числа.

Використовуючи оператор L диференціальні рівняння (5.1) і (5.2) перепишемо у вигляді

$$L(y) = f(x), \qquad (5.1')$$

$$L(y) = 0. \qquad (5.2')$$

<u>Означення 5.1.</u> Функція $y=y(x)$ називається розв’язком диференціального рівняння (5.1), якщо $L(y) \equiv f(x)$ (для диференціального рівняння (5.2) $L(y(x)) \equiv 0$).

Лінійне диференціальне рівняння (5.1) залишається бути лінійним при будь-якій заміні незалежної змінної $x = \varphi(t)$ $(\varphi'(t) \neq 0)$.

Лінійне диференціальне рівняння (5.1) залишається бути лінійним при будь-якій лінійній заміні шуканої функції

$$y = \alpha(x)z + \beta(x) \tag{5.4}$$
при певних обмеженнях на функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$.

5.1.2. Властивості розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n–го порядку

Наша задача полягає в тому, щоб знайти всі дійсні розв'язки диференціального рівняння
$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0. \tag{5.5}$$
Для розв'язування такої задачі доцільно знайти деякі комплексні розв'язки.

Означення 5.2. Функцію $z(x) = w(x) + iv(x)$, де $w(x), v(x)$ дійсні функції, $i = \sqrt{-1}$, будемо називати комплексною функцією від дійсної змінної x ($w(x)$ – дійсна частина, $v(x)$ – уявна частина).

Приклад 5.1. Показати справедливість формул
$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), \quad e^{\alpha x} = e^{(a+ib)x} = e^{\alpha x}(\cos bx + i\sin bx). \tag{5.6}$$
Розв'язання. Формули (5.6) доводяться шляхом розкладу відповідних експонент в ряд, наприклад.
$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \ldots =$$
$$= [1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots] + i[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots] = \cos(x) + i\sin(x).$$
Похідна n-го порядку від $z(x)$ дорівнює
$$z^{(n)}(x) = w^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x). \tag{5.7}$$
Приведемо формули для обчислення похідних:

а) $$\left(e^{\alpha x}\right)' = \alpha e^{\alpha x} \qquad (\alpha = a + ib). \tag{5.8}$$
Дійсно
$$\left[e^{\alpha x}(\cos bx + i\sin bx)\right]' = \alpha e^{\alpha x}(\cos bx + i\sin bx) + e^{\alpha x}[-b\sin bx + ib\cos bx] =$$
$$= e^{\alpha x}(a + ib)\cos bx + e^{\alpha x}(ai - b)\sin bx = (a + ib)e^{\alpha x}(\cos bx + i\sin bx);$$
б) для дійсного k і будь-якого α справедлива формула
$$\left(x^k e^{\alpha x}\right)' = \left(kx^{k-1} + \alpha x^k\right)e^{\alpha x}; \tag{5.9}$$
в) використовуючи (5.9) можна показати
$$\left(P_n(x)e^{\alpha x}\right)' = \overline{P}_n(x)e^{\alpha x}, \tag{5.10}$$
де $P_n(x), \overline{P}_n(x)$ – поліноми степеня n;

г) при будь-якому α (дійсному або комплексному) справедлива формула
$$\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{5.11}$$
Формула (5.11) доводиться шляхом представлення $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ і використання формули (5.8).

Означення 5.3. Комплексна функція
$$y(x) = y_1(x) + iy_2(x) \tag{5.12}$$
називається розв'язком однорідного диференціального рівняння (5.5), якщо

$$L(y(x)) \equiv 0,\ a < x < b\,.$$

Комплексний розв’язок (5.12) утворює два дійсних розв’язки $y_1(x)$, $y_2(x)$. Дійсно

$$L\,(y(x)) = L\,(\,y_1(x) + i\,y_2(x)) = L(\,y_1(x)) + iL(\,y_2(x)) = 0\,.$$

Звідки $L(\,y_1(x)) = 0, L(\,y_2(x)) = 0.$

Властивості розв’язків лінійного однорідного диференціального рівняння (5.5):

а) Якщо $y_1(x)$ – розв’язок , тобто $L(\,y_1)=0$, то $y=c\,y_1(x)$, де c – довільна константа , теж розв’язок диференціального рівняння (5.5)

$$L(c\,y_1) = cL(\,y_1) = 0;$$

б) якщо $y_1(x)$, $y_2(x)$ – розв’язки диференціального рівняння (5.5) , то $y= y_1(x)+ y_2(x)$ теж розв’язок . Дійсно $L\,(\,y_1 + y_2) = L\,(\,y_1)+L\,(\,y_2) = 0;$

в) якщо $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_m(x)$ – розв’язки диференціального рівняння (5.5), то їх лінійна комбінація також є розв’язком

$$L(\sum_{i=1}^{m} c_i y_i(x)) = \sum_{i=1}^{m} c_i L(y_i(x)) = 0\,.$$

<u>Приклад 5.2.</u> Записати двопараметричне сімейство розв’язків диференціального рівняння

$$y'' + y = 0\,.$$

<u>Розв'язання</u>. Очевидно, що $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x -$ розв’язки, тоді $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x -$ розв’язок.

5.1.3. Необхідні і достатні умови лінійної незалежності *n* розв’язків лінійного однорідного рівняння *n* – го порядку

<u>Означення 5.4.</u> Функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ називаються лінійно незалежними на (a, b) , якщо між ними не існує співвідношення виду

$$\alpha_1 y_1(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0,\ a < x < b, \tag{5.13}$$

де α_1, ... , α_n – постійні числа не рівні нулю одночасно . В противному випадку функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ називають лінійно залежними на (a, b).

Для двох функцій поняття лінійної незалежності на (a,b) зводиться до того, щоб відношення функцій $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$, $(\,y_2(x) \neq 0)$ не було постійним на (a,b).

<u>Зауваження 5.1.</u> Якщо одна із функцій на (a,b) тотожно дорівнює нулю, то ці функції лінійно залежні.

<u>Приклад 5.3.</u> Функції $y_1=1$, $y_2=x$, ... , $y_n = x^{n-1}$ - лінійно незалежні на будь-якому інтервалі $(a,b) \subset (-\infty,+\infty)$.

Дійсно, співвідношення $\alpha_1 1+\alpha_2 x + \ldots + \alpha_n x^{(n-1)}=0$, в якому не всі α_i дорівнюють нулю, не може виконуватися для будь-яких x , так як рівняння $(n\text{-}1)$ – го степеня має не більше $(n\text{-}1)$ – го кореня.

Приклад 5.4. Функції $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ – лінійно незалежні, так як співвідношення $\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{-x} = 0$, де α_1, α_2 не рівні одночасно нулю, виконуються не більше ніж в одній точці. Це випливає з $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = e^{2x} \neq const$.

Приклад 5.5. Функції $y_1 = sin^2 x$, $y_2 = cos^2 x$, $y_3 = 1$ – лінійно залежні на $(-\infty, +\infty)$, так як для будь-якого x справджується співвідношення

$$sin^2 x + cos^2 x - 1 = 0 .$$

Розглянемо необхідні умови лінійної залежності n функцій .

Теорема 5.1. Якщо функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – лінійно залежні на **(***a,b***)**, то їх вронскіан $W(x)$ тотожно дорівнює нулю на **(***a,b***)** . Тут

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \qquad (5.14)$$

Доведення. Згідно умови теореми

$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$, $a < x < b$, де не всі α_i одночасно рівні нулю . Нехай $\alpha_n \neq 0$, тоді

$$y_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2 - \ldots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}. \qquad (5.15)$$

Диференціюємо (5.15) *(n-1)* раз і підставляємо в (5.14)

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_{n-1}(x) & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2 - \ldots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1} \\ y_1'(x) & \cdots & y_{n-1}'(x) & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1' - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2' - \ldots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1^{(n-1)} - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2^{(n-1)} - \ldots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}. \qquad (5.16)$$

Розкладаючи визначник (5.16) на суму визначників, будемо мати в кожному з них два однакові стовпці, тому всі визначники будуть рівні нулю і отже

$$W(x) \equiv 0, \ a < x < b.$$

Теорема доведена.

Нехай кожна з функцій $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – розв'язок диференціального рівняння (5.5). Тоді необхідні і достатні умови лінійної незалежності цих розв'язків даються теоремою 5.1 і наступною теоремою.

Теорема 5.2. Якщо функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – суть лінійно незалежні розв'язки диференціального рівняння (5.5)**,** всі коефіцієнти якого неперервні на **(***a,b***)** , то вронскіан цих розв'язків W не дорівнює нулю в жодній точці інтервалу **(***a,b*).

Доведення. Припустимо протилежне , що в точці $x_0 \in (a,b)$ $W(x_0) = 0$. Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0)+ & \ldots & +c_ny_n(x_0)=0 \\ c_1y_1'(x_0)+ & \ldots & +c_ny_n'(x_0)=0 \\ \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+ & \ldots & +c_ny_n^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases}. \qquad (5.17)$$

Так як визначник системи (5.17) $W(x_0)=0$, то вона має ненульовий розв'язок $c_1^{(0)},\ldots,c_n^{(0)}$. Розглянемо функцію

$$y = c_1^{(0)}y_1(x)+\ldots+c_n^{(0)}y_n(x), \qquad (5.18)$$

яка є розв'язком диференціального рівняння (5.5).

Система (5.17) показує , що в точці x_0 розв'язок (5.18) перетворюється в нуль разом із своїми похідними до *(n-1)* –го порядку . В силу теореми існування і єдиності це значить , що має місце тотожність

$$y(x)= c_1^{(0)}y_1(x)+\ldots+c_n^{(0)}y_n(x)\equiv 0,\ a < x < b,$$

де не всі $c_i^{(0)}$ дорівнюють нулю . Останнє означає , що розв'язки $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ – лінійно залежні на **(***a,b***)**. Це протиріччя і доводить теорему.

З теорем 5.1 і 5.2 випливає: для того, щоб *n* розв'язків диференціального рівняння (5.5) були лінійно незалежними на **(***a,b***)** необхідно і достатньо , щоб їх вронскіан не дорівнював нулю в жодній точці цього інтервалу.

Виявляється, для вияснення лінійної незалежності *n* розв'язків диференціального рівняння (5.5) достатньо переконатися , що *W(x)* не дорівнює нулю хоча б в одній точці інтервалу **(***a,b***)** . Це випливає з наступних властивостей вронскіана від *n* розв'язків диференціального рівняння (5.5):

а) якщо вронскіан дорівнює нулю в одній точці $x_0 \in (a,b)$ і всі коефіцієнти диференціального рівняння (5.5) є неперервними, то $W(x_0)\equiv 0$ на **(***a,b***)**.

Дійсно, якщо $W(x_0)=0$, то по теоремі 5.2 функції $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ **-** лінійно залежні на **(***a,b***).** Тоді , по теоремі 5.1 $W(x)\equiv 0$ на **(**a,b);

б) якщо вронскіан *n* розв'язків диференціального рівняння (5.5) відмінний від нуля в одній точці $x_0 \in (a,b)$, то $W(x)\neq 0$ на **(***a,b***)**.

Дійсно , якби *W(x)* дорівнював в одній точці з **(***a,b***)** нулю, то згідно **а)** $W(x)\equiv 0$ на **(***a,b***)**, в тому числі і в точці $x_0 \in (a,b)$, що суперечить умові.

Звідси випливає, якщо *n* розв'язків диференціального рівняння **(**5.5**)** лінійно незалежні на **(***a,b***)**, то вони будуть лінійно незалежні на будь-якому $(a_1,b_1)\subset$ **(***a,b***)**.

5.1.4. Формула Остроградського – Ліувілля

Ця формула має вигляд

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)dx}. \qquad (5.19)$$

Доведення. Розглянемо вронскіан $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$ і обчислимо його похідну

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} +$$

$$\dots + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Перших *(n-1)* - визначників рівні нулю , так як всі вони мають по дві однакових стрічки. Далі домножимо перші *(n-1)* рядки останнього визначника відповідно на $p_n(x), p_{n-1}(x), \dots, p_2(x)$ і складемо всі n стрічок . В силу диференціального рівняння (5.5) маємо

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ -p_1 y_1^{(n-1)} & -p_1 y_2^{(n-1)} & \dots & p_1 y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -p_1(x) W(x).$$

Звідки маємо формулу (5.19).

5.1.5. Фундаментальна система розв'язків та її існування

Означення 5.5 Сукупність n розв'язків диференціального рівняння (5.5) визначених і лінійно незалежних на (a,b) називається фундаментальною системою розв'язків .

З попереднього випливає, для того, щоб система n розв'язків диференціального рівняння (5.5) була фундаментальною системою розв'язків необхідно і достатньо, щоб вронскіан цих розв'язків був відмінний від нуля хоч в одній точці інтервалу неперервності коефіцієнтів диференціального рівняння (5.5). Всі ці розв'язки повинні бути ненульовими.

Теорема 5.3 (про існування фундаментальної системи розв'язків). Якщо коефіцієнти диференціального рівняння (5.5) є неперервними на (a,b) , то існує фундаментальна система розв'язків на цьому інтервалі.

Доведення. Візьмемо точку $x_0 \in (a,b)$ і побудуємо, використовуючи метод Пікара , розв'язки :

$y_1(x)$ з початковими умовами $y_1(x_0)=1, y_1'(x_0)=0,\ldots,y_1^{(n-1)}(x_0)=0$;

$y_2(x)$ з початковими умовами $y_2(x_0)=0, y_2'(x_0)=1,\ldots,y_2^{(n-1)}(x_0)=0$;

………………………………………………

$y_n(x)$ з початковими умовами $y_n(x_0)=0, y_n'(x_0)=0,\ldots,y_n^{(n-1)}(x_0)=1$.

Очевидно , що $W(x_0)=1\neq 0$, отже побудовані розв'язки лінійно незалежні.

Теорема доведена.

З методу побудови лінійно незалежних функцій випливає, що таких функцій можна побудувати безліч.

Побудована система розв'язків називається нормованою в точці $x = x_0$.

Для будь-якого диференціального рівняння (5.5) існує тільки одна фундаментальна система розв'язків, нормована по моменту x_0.

5.1.6. Загальний розв'язок. Число лінійно незалежних розв'язків

Теорема 5.4. Якщо $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$- фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння **(**5.5**)** , то формула

$$y = c_1 y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \ldots + c_n\, y_n(x) \qquad \textbf{(}5.20\textbf{)}$$

де $c_1, c_2, \ldots, c_n$ - довільні константи, дає загальний розв'язок диференціального рівняння **(**5.5**)** в області

$$a < x < b,\ |y| < \infty, |y'| < \infty, \ldots, \left|y^{(n-1)}\right| < \infty, \qquad (5.21)$$

тобто в області визначення диференціального рівняння (5.5).

Доведення. Якщо $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – розв'язки диференціального рівняння **(**5.5**)** , то лінійна комбінація (5.20) теж розв'язок. Систему

$$\begin{cases} y = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \\ y' = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i'(x) \\ \ldots \\ y^{(n-1)} = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)}(x) \end{cases} \qquad (5.22)$$

можна розв'язати відносно c_1, c_2, ... , c_n в області (5.21), так як $W(x) \neq 0$. Згідно визначення (5.20) – загальний розв'язок і він містить в собі всі розв'язки диференціального рівняння (5.5).

Теорема доведена.

Для знаходження частинного розв'язку такого, що

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (5.23)$$

необхідно все підставити в (5.22) і визначити $c_i^{(0)}$, $i=1,2,\ldots,n$. Тоді $y=\sum_{i=1}^{n} c_i^{(0)} y_i(x)$ – частинний розв'язок. Якщо фундаментальна система розв'язків – нормована в точці $x=x_0$, то $c_i^{(0)}=y_0$, тобто

$$y=y_0 y_1(x)+y_0' y_2(x)+\ldots+y_0^{(n-1)} y_n(x) \tag{5.24}$$

загальний розв'язок в формі Коші.

Зауважимо, що загальний розв'язок диференціального рівняння (5.5) є однорідна лінійна функція від довільних констант.

<u>Твердження 5.1.</u> Диференціальне рівняння (5.5) не може мати більше ніж n лінійно незалежних частинних розв'язків.

Дійсно, нехай ми маємо *(n+1)* частинний розв'язок. Розглянемо *n* перших. Якщо вони лінійно залежні, то і всі будуть лінійно залежні, так як

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\ldots+\alpha_n y_n(x)+0 y_{n+1}(x)=0, \quad a<x<b,$$

де всі α_i не дорівнюють нулю . Якщо ж вони лінійно залежні, то по теоремі 5.4 будь-який розв'язок, в тому числі і y_{n+1} виражається через $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$, тобто $y_{n+1}=c_1^{(0)} y_1(x)+\ldots+c_n^{(0)} y_n(x)$. Отримали, що *(n+1)*-ий розв'язок знову виявився лінійно залежним.

Для побудови диференціального рівняння типу (5.5) по системі лінійно незалежних функцій $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$, які *n* раз неперервно диференційовані на (a,b) **,** вронскіан яких $W(x)\neq 0, \ x\in(a,b)$ необхідно розглянути вронскіан порядку *(n+1)*

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix}=0$$

і розкрити цей визначник по останньому стовпчику.

Якщо відомо один частинний ненульовий розв'язок диференціального рівняння (5.5), то можна понизати порядок його на одиницю заміною

$$y=y_1\int u dx \text{ , або } u=\left(\frac{y}{y_1}\right)'. \tag{5.25}$$

Тоді

$$\begin{cases} y'=y_1'\int u du+y_1 u \\ y''=y_1''\int u du+2y_1' u+y_1 u' \\ \cdots \\ y^{(n)}=y_1^{(n)}\int u du+n y_1^{(n-1)} u+\dfrac{n(n-1)}{2!} y_1^{(n-2)} u'+\ldots+y_1 u^{(n-1)} \end{cases}$$

і диференціальне рівняння (5.5) запишемо у вигляді

$$L(y_1)\int u dx+b_{n-1}(x) u+b_{n-2}(x) u'+\ldots+y_1 u^{(n-1)}=0 .$$

Ми отримали диференціальне рівняння порядку *(n-1)*

$$y_1(x)u^{(n-1)} + \ldots + b_{n-2}(x)u' + b_{n-1}(x)u = 0\,.$$

Якщо маємо *к* лінійно незалежних частинних розв'язків, то диференціальне рівняння (5.5) можна понизити на *к* одиниць .

5.2 Лінійні диференціальні рівняння з сталими коефіцієнтами

5.2.1. Побудова загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x), \qquad (5.26)$$

де $a_1,\ldots,a_n$ – постійні дійсні числа, $f(x)$ – неперервна функція на (a,b).

Разом з неоднорідним диференціальним рівнянням (5.26) будемо розглядати однорідне диференціальне рівняння

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0. \qquad (5.27)$$

Для побудови загального розв'язку диференціального рівняння (5.27) необхідно знайти хоч одну фундаментальну систему розв'язків. Виявляється, що фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (5.27) можна побудувати з елементарних функцій.

Наприклад, при $n = 1$ для диференціального рівняння $y' + a_1 y = 0$, де a_1 – дійсне число, частинним розв'язком буде функція $y_1 = e^{-a_1 x}$.

Дотримуючись ідеї Ейлера, частинні розв'язки диференціального рівняння (5.27) шукаємо у вигляді

$$y = e^{\lambda x}, \qquad (5.28)$$

де λ – деякі поки невідомі постійні числа (дійсні або комплексні). Підставимо (5.28) в (5.27) отримаємо

$$L\left(e^{\lambda x}\right) = \left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n\right)e^{\lambda x} = P_n(\lambda)e^{\lambda x}. \qquad (5.29)$$

З (5.29) випливає, що $y = e^{\lambda x}$ є розв'язком диференціального рівняння (5.27) тоді і тільки тоді, коли $P_n(\lambda) = 0$, тобто

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0\,. \qquad (5.30)$$

Рівняння (5.30) називають характеристичним рівнянням, а його корені характеристичними числами диференціального рівняння (5.27).

Розглянемо три випадки побудови лінійно незалежних розв'язків.

а). Корені характеристичного рівняння $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ дійсні і різні.

Тоді n дійсних частинних розв'язків знайдемо згідно формул

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots, y_n = e^{\lambda_n x}.$$

Ці розв'язки є лінійно незалежними. Дійсно

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \ldots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1}e^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_n^{n-1}e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

так як останній визначник є визначник Вандермонда, який не дорівнює нулю, коли всі числа $\lambda_1,...,\lambda_n$ – різні.

В цьому випадку загальний розв'язок має вигляд

$$y=\sum_{k=1}^{n}c_k e^{\lambda_k x} \tag{5.31}$$

в області

$$|x|<\infty, |y|<\infty, |y'|<\infty,..., \left|y^{(n-1)}\right|<\infty, \tag{5.32}$$

де $c_1,...,c_n$ – довільні сталі.

б). Корені характеристичного рівняння всі різні, але серед них є комплексні.

Нехай $a\pm bi$ – пара комплексно спряжених коренів. Два дійсних, лінійно незалежних розв'язків будуються таким чином. Кореню $a+bi$ відповідає комплексний розв'язок $y=e^{(a+bi)x}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$. Згідно доведеному вище, функції $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$ також є розв'язками диференціального рівняння (5.27), які є незалежними в інтервалі $(-\infty,\infty)$. Аналогічно кореню $a-bi$ відповідають два дійсних, лінійно незалежних розв'язки $e^{ax}\cos bx$, $-e^{ax}\sin bx$. Їх приєднання до знайдених дають лінійно залежну систему розв'язків. Тобто, спряжений корінь не приносить нових дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків.

Таким чином, кожній парі комплексно спряжених коренів відповідає два дійсних лінійно незалежних розв'язки виду

$$e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx,$$

які разом з розв'язком $e^{\lambda_k x}$ (λ_k – дійсні числа) утворюють фундаментальну систему розв'язків на інтервалі $(-\infty,\infty)$.

<u>Приклад 5.6.</u> Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'''-6y''+11y'-6y=0$$

<u>Розв'язання</u>. Запишемо характеристичне рівняння і знайдемо його розв'язки

$$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0,\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_2=3.$$

Тоді

$$y_1=e^x, y_2=e^{2x}, y_3=e^{3x}, y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}$$

– загальний розв'язок.

<u>Приклад 5.7.</u> Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'''-3y''+9y'+13y=0.$$

<u>Розв'язання</u>. $\lambda^3-3\lambda^2+9\lambda+13=0, \lambda_1=-1,\ \lambda_{2,3}=2\pm 3i$,

$$y_1=e^{-x},\ y_2=e^{2x}\cos 3x,\ y_3=e^{2x}\sin 3x,\ y=c_1e^{-x}+(c_2\cos 3x+c_3\sin 3x)e^{2x} -$$

загальний розв'язок.

<u>Приклад 5.8.</u> Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'''-y''+4y'-4y=0.$$

<u>Розв'язання</u>. $\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4=0,\ \lambda_1=1,\ \lambda_{2,3}=\pm 2i$,

$$y_1=e^x,\ y_2=\cos 2x,\ y_3=\sin 2x,\ y=c_1e^x+c_2\cos 2x+c_3\sin 2x.$$

в). Випадок наявності кратних коренів характеристичного рівняння.

Припустимо, що $\lambda_1 - k$-кратний корінь характеристичного рівняння (5.30), так що

$$P_n(\lambda_1) = P_n'(\lambda_1) = \ldots = P_n^{(k-1)}(\lambda_1) = 0, \text{ але } P_n^{(k)}(\lambda_1) \neq 0. \qquad (5.33)$$

Щоб знайти розв'язки, які відповідають характеристичному числу λ_1, продиференціюємо тотожність

$$L\left(e^{\lambda x}\right) = P_n(\lambda)e^{\lambda x} \qquad (5.34)$$

m раз по λ, використовуючи при цьому формулу

$$\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} L(u) = L\left(\frac{\partial^m u}{\partial \lambda^m}\right), \quad \left(u = e^{\lambda x}\right).$$

Для знаходження похідної від добутку функцій використовуємо формулу Лейбніца

$$(uv)^{(m)} = \sum_{i=0}^{m} C_m^i u^{(i)} v^{(m-i)}, \qquad \left(C_m^0 = 1\right),$$

де

$$u(\lambda) = P_n(\lambda), v(\lambda) = e^{\lambda x}.$$

Маємо

$$L(x^m e^{\lambda x}) = \sum_{i=0}^{m} C_m^i P_n^{(i)}(\lambda) x^{m-i} e^{\lambda x}.$$

Використовуючи (5.33), запишемо

$$L(x^m e^{\lambda x}) \equiv 0, \ m = 0,1,\ldots,k-1,$$

тобто функції

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda_1 x} \qquad (5.35)$$

є розв'язками диференціального рівняння (5.27). Ці функції лінійно незалежні на (a,b).

Таким чином, кожному дійсному кореню λ_1 кратності k відповідає k дійсних лінійно незалежних розв'язків виду (5.35).

Якщо характеристичне рівняння має комплексні корені $a \pm bi$ кратності k, то $2k$ лінійно незалежних розв'язків будуть мати вигляд

$$\begin{cases} e^{ax}\cos bx, \ xe^{ax}\cos bx, \ldots, x^{k-1}e^{ax}\cos bx \\ e^{ax}\sin bx, \ xe^{ax}\sin bx, \ldots, x^{k-1}e^{ax}\sin bx \end{cases}. \qquad (5.36)$$

Розв'язки (5.36) лінійно незалежні на інтервалі $(-\infty, \infty)$

Приклад 5.9. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

Розв'язання. Запишемо розв'язки характеристичного рівняння

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0, \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Тоді

$$y_1 = e^x, y_2 = xe^x, y_3 = x^2 e^x, \ y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$$

– загальний розв'язок.

Приклад 5.10. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0.$$

Розв'язання. $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$, $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$,

$$y_1 = e^{3x}, y_2 = e^{2x}, y_3 = xe^{2x}, \; y = c_1 e^{3x} + c_2 e^x + c_3 x e^x$$

– загальний розв'язок.

Приклад 5.11. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0.$$

Розв'язання. $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$, $\lambda_{1,2} = 1 + i, \lambda_{3,4} = 1 - i$,

$$y_1 = e^x \cos x, \; y_2 = xe^x \cos x, \; y_3 = e^x \sin x, \; y_4 = xe^x \sin x,$$

$$y = e^x \cos x (c_1 + xc_2) + e^x \sin x (c_3 + xc_4) \text{ – загальний розв'язок.}$$

5.2.2. Знаходження частинного розв'язку лінійно неоднорідного диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів

Для деяких частинних випадків функції $f(x)$ можна знайти частинні розв'язки диференціального рівняння (5.26) без квадратур.

I). Розглянемо диференціальне рівняння з правою частиною

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = P_m(x) e^{\alpha x}, \tag{5.37}$$

де $P_m(x) = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1} x + p_m, (m \geq 0)$ поліном з дійсними чи комплексними коефіцієнтами, α -постійне дійсне чи комплексне число.

Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Число α не є коренем характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок диференціального рівняння (5.37) шукають у вигляді

$$y_1 = Q_m(x) e^{\alpha x}, \tag{5.38}$$

де

$$Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_{m-1} x + q_m \tag{5.39}$$

поліном m-ої степені з невизначеними коефіцієнтами. Тобто, в цьому випадку частинний розв'язок має ту ж аналітичну структуру, що і права частина диференціального рівняння (5.37)

Коефіцієнти q_i, $i = 0,1,\ldots,m$ знаходяться шляхом підстановки (5.38) в (5.37) і прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x.

Переконаємося, що шукані коефіцієнти визначаються однозначно. Підставимо (5.38) в (5.37), отримаємо

$$L(y_1) = L\left(Q_m(x) e^{\alpha x}\right) = L\left(\left(q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_{m-1} x + q_m\right) e^{\alpha x}\right) =$$
$$= q_0 L\left(x^m e^{\alpha x}\right) + q_1 L\left(x^{m-1} e^{\alpha x}\right) + \ldots + q_{m-1} L\left(x e^{\alpha x}\right) + q_m L\left(e^{\alpha x}\right) =$$
$$= \left(p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1} x + p_m\right) e^{\alpha x}.$$

Використовуючи вищенаведені формули, запишемо

$$L\left(e^{\alpha x}\right) = P_n(\alpha) e^{\alpha x}, L\left(x^s e^{\alpha x}\right) = \sum_{i=0}^{s} C_s^i P_n^{(i)}(\alpha) x^{s-i} e^{\alpha x}.$$

На основі них маємо

$$q_0\sum_{i=0}^{m} C_m^i P_n^{(i)}(\alpha)x^{m-i}e^{\alpha x} + q_1\sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i P_n^{(i)}(\alpha)x^{m-1-i}e^{\alpha x} +$$

$$+\ldots+ q_{m-1}\sum_{i=0}^{1} C_1^i P_n^{(i)}(\alpha)x^{1-i}e^{\alpha x} + q_m P_n(\alpha)e^{\alpha x} =$$

$$= \left(p_0x^m + p_1x^{m-1} + \ldots + p_{m-1}x + p_m\right)e^{\alpha x}.$$

Скорочуємо на $e^{\alpha x}$ і прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях

$$\begin{array}{r} x^m: \\ x^{m-1}: \\ \ldots \\ x: \\ 1: \end{array} \left\{ \begin{array}{c} q_0P_n(\alpha) = p_0 \\ q_0C_m^1P_n'(\alpha) + q_1P_n(\alpha) = p_1 \\ \ldots \\ q_0C_m^{m-1}P_n^{(m-1)}(\alpha) + q_1C_{m-1}^{m-2}P_n^{(m-2)}(\alpha) + \ldots + q_{m-1}P_n(\alpha) = p_{m-1} \\ q_0C_m^mP_n^{(m)}(\alpha) + q_1C_{m-1}^{m-1}P_n^{m-1}(\alpha) + \ldots + q_{m-1}P_n'(\alpha) + q_mP_n(\alpha) = p_m. \end{array} \right. \tag{5.40}$$

Так як $P_n(\alpha) \neq 0$, то з (5.40) послідовно визначаються всі коефіцієнти $q_0, q_1, \ldots, q_m$.

Випадок 2. Параметр α являється k-кратним коренем характеристичного рівняння $(k \geq 1)$, тобто

$$P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = \ldots = P_n^{(k-1)}(\alpha) = 0, P_n^{(k)}(\alpha) \neq 0. \tag{5.41}$$

В цьому випадку частинний розв'язок не можна побудувати в вигляді (5.38), так як $P_n(\alpha) = 0$. Його шукаємо у вигляді

$$y_1 = x^kQ_m(x)e^{\alpha k}, \tag{5.42}$$

де $Q_m(x)$ – поліном вигляду (5.39).

Коефіцієнти полінома визначаються шляхом підстановки (5.42) в (5.37).

$$L(y_1) = L\left(x^kQ_m(x)e^{\alpha x}\right) = L\left(\sum_{s=0}^{m} q_sx^{k+m-s}e^{\alpha x}\right) = \sum_{s=0}^{m} q_sL\left(x^{k+m-s}e^{\alpha x}\right) =$$

$$= \sum_{s=0}^{m} q_s\sum_{i=k}^{k+m-s} C_{k+m-s}^iP_n^{(i)}(\alpha) = x^{k+m-s-i}e^{\alpha x} = \sum_{s=0}^{m} p_sx^{m-s}e^{\alpha x}.$$

Звідки

$$\sum_{s=0}^{m} q_s\sum_{i=0}^{m-s} C_{k+m-s}^{k+i}P_n^{(k+i)}(\alpha)x^{m-s-i} = \sum_{s=0}^{m} p_sx^{m-s}.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях

$$\begin{array}{c} x^m \\ x^{m-1} \\ \ldots \\ x \\ 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} q_0C_{k+m}^kP_n^{(k)}(\alpha) = p_0 \\ q_0C_{k+m}^{k-1}P_n^{(k+1)}(\alpha) + q_1C_{k+m-1}^kP_n^{(k)}(\alpha) = p_1 \\ \ldots \\ q_0C_{k+m}^{k+m-1}P_n^{(k+m-1)}(\alpha) + q_1C_{k+m-1}^{k+m-2}P_n^{(k+m-2)}(\alpha) + \ldots + q_{m-1}C_{k+1}^kP_n^{(k)}(\alpha) = p_{m-1} \\ q_0C_{k+m}^{k+m}P_n^{(k+m)}(\alpha) + q_1C_{k+m-1}^{k+m-1}P_n^{(k+m-1)}(\alpha) + \ldots + q_mC_k^kP_n^{(k)}(\alpha) = p_m. \end{array} \right. \tag{5.43}$$

З (5.43) послідовно однозначно визначаються $q_0, q_1, \ldots, q_m$, так як $P_n^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

II). Припустимо, що права частина диференціального рівняння (5.26) має вигляд

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_m^{(1)}(x)\cos\beta x+P_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right), \qquad (5.44)$$

де $P_m^{(1)}(x), P_m^{(2)}(x)$ – відомі поліноми степені менше або рівне m (хоча б один має степінь m).

Використовуючи формули Ейлера, обчислимо

$$\cos\beta x=\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}, \sin\beta x=\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2}$$

і перепишемо функцію $f(x)$ таким чином

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_m^{(1)}(x)\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}+P_m^{(2)}(x)\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2}\right)=$$

$$=\overline{P}_m^{(1)}(x)e^{(\alpha+i\beta)x}+\overline{P}_m^{(2)}(x)e^{(\alpha-i\beta)x},$$

де $\overline{P}_m^{(1)}(x)$ і $\overline{P}_m^{(2)}(x)$ – поліноми степені m, тобто $f(x)$ є сума двох функцій, які розглянуті вище.

Випадок 1. Число $\alpha+\beta i$ не є коренем характеристичного рівняння. Тоді частинний розв’язок шукаємо у вигляді

$$y_1=\overline{Q}_m^{(1)}(x)e^{(\alpha+i\beta)x}+\overline{Q}_m^{(2)}(x)e^{(\alpha-i\beta)x}, \qquad (5.45)$$

де $\overline{Q}_m^{(1)}(x)$ і $\overline{Q}_m^{(2)}(x)$ – поліноми m-ої степені з невизначеними коефіцієнтами.

Випадок 2. Якщо $\alpha+\beta i$ – k-кратний корінь характеристичного рівняння, то частинний розв’язок шукаємо в вигляді

$$y_1=x^k\left(\overline{Q}_m^{(1)}(x)e^{(a+ib)x}+\overline{Q}_m^{(2)}(x)e^{(a-ib)x}\right). \qquad (5.46)$$

Приводячи (5.45) і (5.46) до дійсного вигляду, сформулюємо наступне правило знаходження частинного розв’язку для випадку (5.44).

Випадок 1. Якщо $\alpha+\beta i$ не є коренем характеристичного рівняння, то

$$y_1=e^{\alpha x}\left(\overline{Q}_m^{(1)}(x)\cos\beta x+\overline{Q}_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right). \qquad (5.47)$$

Випадок 2. Якщо $\alpha+\beta i$ – k-кратний корінь характеристичного рівняння ($k\ge 1$), то

$$y_1=x^k e^{\alpha x}\left(\overline{Q}_m^{(1)}(x)\cos\beta x+\overline{Q}_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right). \qquad (5.48)$$

Тут $\overline{Q}_m^{(1)}(x)$ і $\overline{Q}_m^{(2)}(x)$ – поліноми m-ої степені з невизначеними коефіцієнтами.

Приклад 5.12. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів

$$y''+5y'+6y=6x^2-10x+2.$$

Розв'язання. Запишемо розв’язки однорідного диференціального рівняння

$$z''+5z'+6z=0,\ \lambda^2-5\lambda+6=0,\ \lambda_1=2,\lambda_2=3,\ z=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}.$$

Знаходимо розв’язки неоднорідного диференціального рівняння

$$\alpha=0,\ y_1=Ax^2+Bx+C,\ 6Ax^2+(6B-10A)x+6C-5B+2A=6x^2-10x+2,$$

$$\begin{cases}6A=6\\ 6B-10A=-10\\ 6C-5B+2A=2\end{cases},\quad \begin{cases}A=1\\ B=0\\ C=0\end{cases}.$$

Отже

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + x^2$$

– загальний розв’язок.

Приклад 5.13. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів

$$y'' - y = 2e^x.$$

Розв'язання. $z'' - z = 0$, $\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $z = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

Так як $\alpha = 1$ – корінь кратності 1,то

$$y_1 = Axe^x,\ A = 1,$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + xe^x$$

– загальний розв’язок.

Приклад 5.14. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів

$$y'' + y' - 2y = e^x(\cos x - \sin x)..$$

Розв'язання. Для нашого випадку $\alpha = 1, \beta = 1$.

Маємо $z'' + z' - 2z = 0$, $\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda_1 = 1, \lambda_1 = -2$, $z = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$.

Оскільки $\alpha + \beta i = 1 + i$, то $y_1 = e^x(A\cos x + B\sin x)$. Після підстановки отримаємо

$$y_1 = e^x(2\cos x + \sin x),$$

$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + e^x(2\cos x + \sin x)$ – загальний розв’язок.

5.3. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння n-го порядку

5.3.1. Структура загального розв′язку неоднорідного рівняння

Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x), \tag{5.49}$$

де $f(x),\ p_1(x), \ldots, p_n(x)$ – неперервні на (a,b) функції.

Припустимо, що для диференціального рівняння (5.49) ми знайшли частинний розв′язок так, що

$$L(y_1) = f(x). \tag{5.50}$$

Введемо нову змінну z

$$y = y_1 + z. \tag{5.51}$$

Тоді

$$L(y_1 + z) = L(y_1) + L(z) = f(x).$$

Звідки

$$L(z) \equiv z^{(n)} + p_1(x)z^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)z = 0. \tag{5.52}$$

Диференціальне рівняння (5.52) називається однорідним диференціальним рівнянням, яке відповідає неоднорідному диференціальному рівнянню (5.49).

Загальний розв′язок диференціального рівняння (5.52) записується у формі

$$z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_n z_n, \tag{5.53}$$

де $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння (5.52), $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – довільні сталі. Тоді

$$y = y_1(x) + c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_n z_n \tag{5.54}$$

буде загальним розв′язком диференціального рівняння (5.49) в області

$$a < x < b, \ |y| < \infty, \ |y'| < \infty, \ldots, \left|y^{(n-1)}\right| < \infty. \tag{5.55}$$

Таким чином, для знаходження загального розв′язку неоднорідного диференціального рівняння (5.49) необхідно знайти один частинний розв′язок диференціального рівняння (5.49) і прибавити до нього загальний розв′язок однорідного диференціального рівняння.

Зауваження 5.1. Розглянемо диференціальне рівняння

$$L(y) = f_1(x) + f_2(x). \tag{5.56}$$

Припустимо, що $y_1(x)$ – частинний розв′язок диференціального рівняння $L(y_1) = f_1(x)$, а $y_2(x)$ – частинний розв′язок диференціального рівняння $L(y_2) = f_2(x)$. Тоді, очевидно, $y_1(x) + y_2(x)$ – частинний розв′язок диференціального рівняння (5.56).

Приклад 5.15. Знайти частинний розв′язок диференціального рівняння

$$y'' + 2y = 2 + 3e^x.$$

Розв'язання. Розглянемо диференціальні рівняння:

a) $y'' + 2y = 2$ для якого $y_1 = 1$;

b) $y'' + 2y = 3e^x$ для якого $y_2 = e^x$.

Тоді $y_1 + y_2 = e^x + 1$ – частинний розв′язок даного диференціального рівняння.

5.3.2. Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)

Загальний розв′язок неоднорідного диференціального рівняння(5.49) можна знайти в квадратурах, якщо відомо загальний розв′язок відповідного однорідного диференціального рівняння (5.52). Будемо шукати загальний розв′язок диференціального рівняння (5.49) у вигляді

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) z_i, \tag{5.57}$$

де $z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x)$ – деяка фундаментальна система розв′язків диференціального рівняння (5.52).

Виберемо функції $c_i(x), \ i = 1,2,\ldots,n$ так, щоб функція (5.57) була загальним розв′язком диференціального рівняння (5.49). Так як шукані функції задовольняють тільки одній умові, то для їх визначення можна підпорядкувати їх будь яким (*n-1*) умовам.

Таким чином, знайдемо *n* похідних функції (5.57):

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) z_i;$$

$$y' = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) z_i' + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i \ \text{ й покладемо } \ \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i = 0;$$

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) z_i'' + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i' \text{ й покладемо; } \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i' = 0;$$

………………..

$$y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) z_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i^{(n-2)} \text{ й покладемо } \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i^{(n-2)} = 0;$$

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) z_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i^{(n-1)} \text{ й покладемо } \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i^{(n-1)} = 0.$$

Підставляючи (5.58) в диференціальне рівняння (5.49) отримаємо n –е рівняння

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(x) L(z_i) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i^{(n-1)} = f(x).$$

Таким чином, для визначення невідомих функцій отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i = 0,\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i' = 0,\ \ldots, \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i^{(n-2)} = 0,\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i^{(n-1)} = f(x) \quad . \ (5.59)$$

Відносно $c_1'(x), c_2'(x), \ldots, c_n'(x)$ – це система лінійних рівнянь з визначником $W(x) \neq 0$. Для знаходження $c_i'(x)$ запишемо формулу

$$c_i'(x) = \frac{W_{ni}(x) f(x)}{W(x)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (5.60)$$

де $W_{ni}(x)$ – алгебраїчне доповнення до елементу n-го рядка і i –го стовпчика визначника $W(x)$. Всі функції, які входять в праву частину диференціального рівняння (5.60) є неперервними на (a, b). З (5.60) отримаємо

$$c_i(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{W_{ni}(x) f(x)}{W(x)} dx + c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (5.61)$$

де c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ – довільні сталі, $x_0 \in (a, b)$.

Тоді загальний розв′язок диференціального рівняння (5.49) запишеться у вигляді

$$y = \sum_{i=1}^{n} z_i \int_{x_0}^{x} \frac{W_{ni}(t) f(t)}{W(t)} dt + \sum_{i=1}^{n} c_i z_i. \qquad (5.62)$$

Тут

$$y_1 = \sum_{i=1}^{n} z_i \int_{x_0}^{x} \frac{W_{ni}(t) f(t)}{W(t)} dt \qquad (5.63)$$

– частинний розв′язок диференціального рівняння (5.49).

Неважко перевірити, що частинний розв′язок (5.63) задовольняє нульовим початковим умовам

$$y_1(x_0) = 0,\ y_1'(x_0) = 0, \ldots,\ y_1^{(n-1)}(x_0) = 0,\ x_0 \in (a, b).$$

<u>Приклад 5.16.</u> Знайти загальний розв′язок диференціального рівняння

$$y'' + k^2 y = f(x),\ k \neq 0.$$

Розв'язання. Фундаментальна система розв′язків для диференціального рівняння $z'' + k^2 z = 0$ буде $z_1 = \cos kx,\ z_2 = \sin kx$. Отже

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos kx & \sin kx \\ -k\sin kx & k\cos kx \end{vmatrix} = k.$$

Тому загальний розв′язок запишемо у вигляді ($w_{21} = -\sin kx,\ w_{22} = \cos kx$)

$$y = -\frac{\cos kx}{k}\int_{x_0}^{x} \sin kt\, f(t)dt + \frac{\sin kx}{k}\int_{x_0}^{x} \cos kt\, f(t)dt + + c_1\cos kx + c_2 \sin kx,$$

$$y = \frac{1}{k}\int_{x_0}^{x} \sin k(x-t)\, f(t)dt + c_1\cos kx + c_2 \sin kx.$$

Зокрема, для диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (5.64)$$

загальний розв′язок запишеться у вигляді

$$y = -z_1\int_{x_0}^{x} \frac{z_2 f(t)}{W(t)}dt + z_2\int_{x_0}^{x} \frac{z_1 f(t)}{W(t)}dt + c_1 z_1 + c_2 z_2. \qquad (5.68)$$

При цьому $y_1(x)$ – частинний розв′язок диференціального рівняння (5.64), який задовольняє цьому рівнянню з початковими умовами $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$.

Для диференціального рівняння виду

$$y'' + q(x)y = f(x) \qquad (p(x) \equiv 0)\ , \qquad (5.66)$$

так як $W(x) = const$, що випливає з формули Остроградського – Ліувілля, загальний розв′язок запишемо у формі

$$y = -\frac{z_1}{W(x_0)}\int_{x_0}^{x} z_2 f(t)dt + \frac{z_2}{W(x_0)}\int_{x_0}^{x} z_1 f(t)dt. \qquad (5.67)$$

Таким чином, для знаходження загального розв′язку диференціального рівняння (5.49) необхідно знайти фундаментальну систему розв′язків однорідного рівняння (5.52), після чого загальний розв′язок запишеться в квадратурах.

5.3.3. Знаходження частинного розв′язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n –го порядку методом Коші

Припустимо, що для рівняння (5.52) відома фундаментальна система розв′язків $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Використовуючи (5.53), побудуємо частинний розв′язок диференціального рівняння (5.52), який задовольняє початковим умовам

$$z(\alpha) = 0,\ z'(\alpha) = 0, \ldots, z^{(n-2)}(\alpha) = 0,\ z^{(n-1)}(\alpha) = 1. \qquad (5.68)$$

Цей розв′язок буде залежати від α, як від параметра $z = \varphi(x,\alpha)$. Тут $a < x < b,\ a < \alpha < b$, функція $\varphi(x,\alpha)$ має неперервні частинні похідні по x та α до n –го порядку включно. Причому, вона є розв′язком диференціального рівняння (5.52) $L(\varphi(x,\alpha)) \equiv 0,\ a < x < b,\ a < \alpha < b$. Крім цього, в силу початкових умов (5.68), функція $\varphi(x,\alpha)$ задовольняє умовам

$$\varphi(\alpha,\alpha)=0,\ \varphi'(\alpha,\alpha)=0,\ \dots,\ \varphi^{(n-2)}(\alpha,\alpha)=0,\ \varphi^{(n-1)}(\alpha,\alpha)=1, \tag{5.69}$$

де

$$\varphi^{(p)}(\alpha,\alpha)=\left(\frac{d^p\varphi(x,\alpha)}{dx^p}\right)\Bigg|_{x=\alpha}.$$

Умову (5.69) можна записати і так

$$\varphi(x,x)=0,\ \varphi'(x,x)=0,\ \dots,\ \varphi^{(n-2)}(x,x)=0,\ \varphi^{(n-1)}(x,x)=1, \tag{5.70}$$

де

$$\varphi^{(p)}(x,x)=\left(\frac{d^p\varphi(x,\alpha)}{dx^p}\right)\Bigg|_{\alpha=x}.$$

Розглянемо функцію

$$y_1(x)=\int_{x_0}^{x}\varphi(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha, \tag{5.71}$$

де $x_0\in(a,b)$ і покажемо, що ця функція є частинним розв′язком диференціального рівняння (5.49) з початковими умовами

$$y_1(x_0)=0, y_1'(x_0)=0, \dots,\ y_1^{(n-1)}(x_0)=0.$$

Для цього використаємо формулу

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x}\psi(x,\alpha)d\alpha=\int_{x_0}^{x}\psi_x'(x,\alpha)d\alpha+\psi(x,x).$$

Знаходимо похідні

$$\frac{dy_1}{dx}=\int_{x_0}^{x}\varphi_x'(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha+\varphi(x,x)f(x)=\int_{x_0}^{x}\varphi_x'(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha,\ (\varphi(x,x)=0),$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\int_{x_0}^{x}\varphi_{xx}''(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha+\varphi_x'(x,x)f(x)=\int_{x_0}^{x}\varphi_{xx}''(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha,\ (\varphi_x'(x,x)=0),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{5.72}$$

$$\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}=\int_{x_0}^{x}\varphi_{x\dots x}^{(n-1)}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha+\varphi_{x\dots x}^{(n-2)}(x,x)f(x)=\int_{x_0}^{x}\varphi_{x\dots x}^{(n-1)}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha$$

$$(\varphi_{x\dots x}^{(n-2)}(x,x)=0),$$

$$\frac{d^ny_1}{dx^n}=\int_{x_0}^{x}\varphi_{x\dots x}^{(n)}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha+\varphi_{x\dots x}^{(n-1)}(x,x)f(x)=\int_{x_0}^{x}\varphi_{x\dots x}^{(n)}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha+f(x)$$

$$(\varphi_{x\dots x}^{(n-1)}(x,x)=1).$$

Підставимо (5.72) в диференціальне рівняння (5.49), отримаємо

$$L(y_1)=\int_{x_0}^{x}\varphi^{(n)}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha+f(x)+p_1(x)\int_{x_0}^{x}\varphi^{(n-1)}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha+\dots+$$

$$p_n(x)\int_{x_0}^{x}\varphi(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha=\int_{x_0}^{x}L(\varphi(x,\alpha))f(\alpha)d\alpha+f(x)=f(x)$$

$$(L(\varphi(x,\alpha))=0).$$

Тобто $L(y_1)) = f(x)$, а це означає, що функція (5.71) є частинним розв′язком диференціального рівняння (5.49). Формула (5.71) називається формулою Коші.

5.4. Лінійні диференціальні рівняння n –го порядку зі змінними коефіцієнтами, які зводяться до рівнянь з постійними коефіцієнтами

a). Рівняння Ейлера

Це рівняння вигляду

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = 0. \qquad (5.73)$$

Це рівняння приводиться до рівняння з постійними коефіцієнтами заміною

$$x = e^t,\ x > 0, \qquad x = -e^{-t},\ x < 0. \qquad (5.74)$$

Дійсно

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} e^{-t},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} e^{-t}\right) = \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) e^{-2t}, \qquad (5.75)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \left(\frac{d^n y}{dt^n} + \alpha_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + \alpha_{n-1} \frac{dy}{dt}\right) e^{-nt}.$$

Підставляючи (5.74) і (5.75) в диференціальне рівняння (5.73) ми отримаємо диференціальне рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами

$$\frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + b_n y = 0. \qquad (5.76)$$

Частинні розв′язки диференціального рівняння (5.76) знаходять у вигляді $y = e^{rt}$. Враховуючи (5.74), частинні розв′язки диференціального рівняння (5.73) можна зразу шукати у вигляді (5.74)

$$y = x^r. \qquad (5.77)$$

b). Рівняння Лагранжа має вигляд

$$(ax+b)^n y^n + (ax+b)^{n-1} a_1 y^{n-1} + \cdots + (ax+b) a_{n-1} y' + a_n y = 0. \ (5.78)$$

Це рівняння заміною $ax + b = e^t$ також приводиться до диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами.

c). Рівняння

$$(1 - x^2) y'' - xy' + n^2 y = 0 \qquad (5.79)$$

називається рівнянням Чебишева і після заміни $x = \cos t$ при $|x| < 1$ воно набирає вигляду

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + n^2 y = 0. \qquad (5.80)$$

Дійсно

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}\right)\left(-\frac{1}{\sin t}\right)=\frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt}.$$

Отже

$$\sin^2 t\left(\frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt}\right)+\frac{\cos t}{\sin t}\frac{dy}{dt}+n^2y=0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0.$$

Тобто отримали (5.80).

Приклад 5.17. Розв′язати диференціальне рівняння

$$x^3y'''+xy'-y=0.$$

Розв'язання. Випишемо і розв′яжемо характеристичне рівняння

$$r(r-1)(r-2)+r-1=0,$$

$$r_1=r_2=r_3=1.$$

Тому фундаментальна система розв′язків буде наступною

$$y_1=x,\ y_2=x\ln x,\ y_3=x\ln^2 x.$$

Отже

$$y=x\left(c_1+c_2\ln x+c_3\ln^2 x\right) \text{ – загальний розв′язок.}$$

5.5. Деякі питання теорії лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку. Задача Штурма – Ліувилля

5.5.1. Зведення диференціального рівняння другого порядку до рівняння, яке не містить члена з першою похідною, з допомогою заміни шуканої функції

Розглянемо однорідне диференційне рівняння другого порядку

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0. \tag{5.81}$$

Заміною

$$y=\alpha(x)z, \tag{5.82}$$

де z – нова змінна, $\alpha(x)$- двічі неперервно диференційована функція на інтервалі неперервності коефіцієнтів, диференціальне рівняння (5.81) зводиться до диференціального рівняння, яке не містить члена з першою похідною. Підставимо (5.82) в (5.81), отримаємо

$$\alpha''(x)z+2\alpha'(x)z'+\alpha(x)z''+p(x)\left(\alpha'(x)z+\alpha(x)z'\right)+q(x)\alpha(x)z=0,$$

$$z''+\left(\frac{2\alpha'(x)+p(x)\alpha(x)}{\alpha}\right)z'+\left(\frac{\alpha''(x)+p(x)\alpha'(x)+q(x)\alpha(x)}{\alpha}\right)z=0. \tag{5.83}$$

Виберемо $\alpha(x)$ з умови

$$\frac{2\alpha'}{\alpha}+p(x)=0. \tag{5.84}$$

За $\alpha(x)$ можна взяти, наприклад, функцію

$$\alpha(x)=e^{-\int\frac{p(x)}{2}dx}, \tag{5.85}$$

тоді

$$\alpha' = -\frac{p(x)}{2}e^{-\int\frac{p(x)}{2}dx}, \quad \alpha'' = \left(-\frac{p'(x)}{2} + \frac{p^2(x)}{4}\right)e^{-\int\frac{p(x)}{2}dx}$$

і диференціальне рівняння (5.83) перепишеться у вигляді

$$z'' + Q(x)z = 0\,, \tag{5.86}$$

де $Q(x) = -\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x)$. Функція *Q(x)* називається інваріантом диференціального рівняння (5.81).

Приклад 5.18. Звести диференціальне рівняння Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \qquad (x > 0), \tag{5.87}$$

до вигляду, який не містить члена з першою похідною з допомогою заміни шуканої функції.

Розв'язання. Тут $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = 1 - \frac{n^2}{x^2}$. Таким чином

$$Q(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + 1 - \frac{n^2}{x^2} = 1 + \frac{1/4 - n^2}{x^2}$$

і рівняння Бесселя підстановкою $y = e^{-\int\frac{dx}{2x}}z = \frac{z}{\sqrt{x}}$ приводиться до рівняння

$$z'' + \left(1 + \frac{1/4 - n^2}{x^2}\right)z = 0\,. \tag{5.88}$$

5.2.2. Зведення диференціальних рівнянь другого порядку до рівнянь, які не містять члена з першою похідною з допомогою заміни незалежної змінної

Розглянемо для диференціального рівняння (5.81) заміну

$$t = \psi(x) \tag{5.89}$$

і покажемо, що диференціальне рівняння можна привести до вигляду, який не містить члена з першою похідною.

Припустимо, що $\psi(x)$– неперервно диференційована функція на інтервалі неперервності коефіцієнтів диференціального рівняння (5.81), причому $\psi'(x) \neq 0$. Маємо

$$y'_x = y'_t\psi(x),\; y''_{xx} = y''_{t^2}\varphi'^2(x) + y'_t\psi''(x)\,, \tag{5.90}$$

де $x = x(t)$ – функція, яка визначається з (5.89). Підставляючи (5.90) в (5.81), отримаємо

$$\psi'^2(x)y''_{t^2} + [\psi''(x) + p(x)\psi'(x)]y'_t + q(x)y = 0\,.$$

Функцію $\psi(x)$ виберемо з рівняння $\psi''(x) + p(x)\psi'(x) = 0$. Звідки $\psi'(x) = ce^{-\int p(x)dx}$. Взявши $c = 1$, знаходимо функцію $\psi(x)$ як частинний розв'язок

$$\psi(x) = \int e^{-\int p(x)dx}dx\,. \tag{5.91}$$

Таким чином, підстановкою $t=\int e^{-\int p(x)dx}dx$, диференціальне рівняння (5.81) зводиться до вигляду

$$y''_{t^2}+q(x)e^{2\int p(x)dx}y=0,\ x=x(t). \tag{5.92}$$

Приклад 5.19. Розв′язати диференціальне рівняння

$$xy''+\frac{1}{2}y'-y=0.$$

Розв'язання. Зведемо наше диференціальне рівняння до вигляду, який не містить члена з першою похідною з допомогою заміни

$$t=\int e^{-\int\frac{1}{2x}dx}dx=\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}.$$

Будемо мати диференціальне рівняння $y''_{t^2}-y=0$.

Отже $y(x)=c_1e^t+c_2e^{-t}=c_1e^{2\sqrt{x}}+c_2e^{-2\sqrt{x}}$.

5.5.3. Спряжені, самоспряжені диференціальні оператори, крайові умови і крайові задачі

Спряженим з диференціальним оператором

$$L(u)=a(x)\frac{d^2u}{dx^2}+b(x)\frac{du}{dx}+c(x)u \tag{5.93}$$

називають диференціальний оператор наступного вигляду

$$M(v)=\frac{d^2}{dx^2}\big(a(x)v\big)-\frac{d}{dx}\big(b(x)v\big)+c(x)v. \tag{5.94}$$

Властивість спряженості двох операторів є взаємною, тобто спряженим до диференціального оператора $M(v)$ буде диференціальний оператор $L(u)$.

Якщо $L(u)\equiv M(v)$, то оператор $L(u)$ називають самоспряженим.

Характерна властивість спряжених диференціальних операторів: для будь-яких двічі неперервно диференційованих функцій $u(x)$ і $v(x)$ виконується співвідношення

$$vL(u)-uM(v)=\frac{d}{dx}\big(P(x,u,v,u',v')\big). \tag{5.95}$$

Дійсно

$$vL(u)-uM(v)=$$

$$=va(x)\frac{d^2u}{dx^2}+vb(x)\frac{du}{dx}+c(x)vu-u\frac{d^2}{dx^2}\big(a(x)v\big)+u\frac{d}{dx}\big(b(x)v\big)-c(x)uv+$$

$$+\left(\frac{d}{dx}(va)\frac{du}{dx}-\frac{d}{dx}(va)\frac{du}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left[va\frac{du}{dx}-u\frac{d}{dx}(va)+ubv\right]=\frac{d}{dx}\big(P(x,u,v,u',v')\big).$$

Нехай $\{u\}$ і $\{v\}$ – дві множини функцій, які задовольняють деяким однорідним крайовим умовам A і B відповідно на $[a,b]$. Тоді, якщо для довільних функцій з цих множин виконується співвідношення

$$\int_a^b [vL(u) - uM(v)]dx = 0, \qquad (5.96)$$

то крайові умови *A* та *B* називають спряженими крайовими умовами, які відповідають диференціальним операторам $L(u)$ і $M(v)$.

Крайову задачу для диференціального рівняння $L(u) = -f(x)$ при крайових умовах *A* і крайову задачу $M(v) = -\phi(x)$ при крайових умовах *B* ($f(x)$ *і* $\phi(x)$– задані функції) називають спряженими крайовими задачами.

Якщо при цьому диференціальний оператор $L(u)$ самоспряжений і крайові умови *A* "самоспряжені", тобто співпадають з крайовими умовами *B*, то крайова задача для $L(u) = -f(x)$ при крайових умовах *A* називається самоспряженою крайовою задачею.

5.5.4.Зведення лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку до самоспряженого вигляду

Означення 5.6. Лінійне однорідне диференціальне рівняння в якому коефіцієнт при y' дорівнює похідній від коефіцієнта при y'', тобто диференціальне рівняння (5.81) має вигляд

$$L(u) = \left(p(x)y'\right)' - q(x)y = 0 \qquad (5.97)$$

називають самоспряженим диференціальним рівнянням другого порядку.

Твердження 5.1. Довільне лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \qquad (5.98)$$

коефіцієнти якого неперервні на (a,b), а $p_0(x) \neq 0$ і є неперервно диференційованою функцією на (a,b), завжди можна привести до самоспряженого вигляду домноженням на деяку функцію від *x*.

Доведення. Домножимо (5.89) та $\mu(x)$:

$$\mu(x)p_0(x)y'' + \mu(x)p_1(x)y' + \mu(x)p_2(x)y = 0.$$

Виберемо $\mu(x)$ згідно умовам $\left(\mu(x)p_0(x)\right)' = \mu(x)p_1(x)$. Звідки $p_0\mu'(x) = \left(p_1(x) - p_0(x)\right)\mu(x)$, тобто

$$\mu(x) = \frac{1}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}. \qquad (5.99)$$

Домножаючи диференціальне рівняння (5.98) на функцію (5.99), отримаємо

$$e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx} y'' + \frac{p_1(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx} y' + \frac{p_2(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx} y = 0.$$

Позначивши $p(x) = e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}$, перепишемо диференціальне рівняння так

$$p(x)y'' + p'(x)y' - q(x)y = 0, \text{ де } q(x) = -\frac{p_2(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}.$$

Твердження доведено.

5.5.5. Задача Штурма-Ліувілля

Це задача про власні значення і власні функції: на відрізку $[a,b]$ знайти двічі неперервно диференційовані не рівні тотожно нулю розв'язки крайової задачі

$$L(u)+\lambda\rho(x)u=0 \quad \left(L(u)=\frac{d}{dx}\big(p(x)u'\big)-q(x)u\right), \qquad (5.100)$$

$$\begin{cases} R_0(u)=u(a)\cos\alpha+u'(a)\sin\alpha=0 \\ R_1(u)=u(b)\cos\beta+u'(b)\sin\beta=0 \end{cases} \qquad (5.101)$$

і визначити відповідні їм значення параметра λ. Тут $0\le\alpha,\ \beta\le 2\pi$ – постійні числа, $p(x), q(x), \rho(x)$ – неперервні на $[a,b]$ функції, причому $p(x)>0$, $\rho(x)>0$.

Вказані розв'язки називають власними або фундаментальними функціями, а відповідні їм числові значення λ називають власними значеннями або власними числами.

Властивості оператора $L(u)$:

а) справедливе співвідношення

$$vL(u)-uL(v)=\frac{d}{dx}\left(p(x)\left(v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}\right)\right). \qquad (5.102)$$

Дійсно

$$vL(u)-uL(v)=v\frac{d}{dx}\big(p(x)u'\big)-vq(x)u-u\frac{d}{dx}\big(p(x)v'\big)+uq(x)v=$$

$$=v\frac{d}{dx}\big(p(x)u'\big)-u\frac{d}{dx}\big(p(x)v'\big).$$

З іншого боку

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\left(v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}\right)\right)=v\frac{d}{dx}\big(p(x)u'\big)+v'p(x)u'-u\frac{d}{dx}\big(p(x)v'\big)-u'p(x)v'=$$

$$=v\frac{d}{dx}\big(p(x)u'\big)-u\frac{d}{dx}\big(p(x)v'\big).$$

Твердження доведено;

б) якщо $u(x)$ і $v(x)$ задовольняють умові (5.101), то

$$\int_a^b \big(vL(u)-uL(v)\big)dx=0. \qquad (5.103)$$

Дійсно

$$\int_a^b \big(vL(u)-uL(v)\big)dx=\int_a^b \frac{d}{dx}\left(p(x)\left(v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}\right)\right)dx=$$

$$=p(x)\left(v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}\right)\Bigg|_a^b=p(x)\left(v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}\right)\Bigg|_{x=b}-p(x)\left(v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}\right)\Bigg|_{x=a}.$$

Згідно крайових умов

$$u(a)\cos(\alpha)+u'(a)\sin(\alpha)=0,$$

$$u(b)\cos(\beta)+u'(b)\sin(\beta)=0,$$
$$v(a)\cos(\alpha)+v'(a)\sin(\alpha)=0,$$
$$v(b)\cos(\beta)+v'(b)\sin(\beta)=0.$$

Розглянемо дві системи: перше і третє, друге і четверте рівняння. Для першої системи $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$ розглядаємо як ненульовий розв'язок $(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1)$. Це можливо тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ v(a) & v'(a) \end{vmatrix} = u(a)v'(a)-u'(a)v(a)=0.$$

Аналогічно можна отримати $u(b)v'(b)-u'(b)v(b)=0$. Співвідношення (5.103), таким чином, буде виконуватися.

Властивості власних значень і власних функцій задачі Штурма-Ліувілля:

а) власні функції $u_1(x)$ і $u_2(x)$, що відповідають різним власним значенням λ_1 і λ_2, ортогональні з ваговою функцією $\rho(x)$, тобто

$$\int_a^b \rho(x)u_1(x)u_2(x)dx=0. \qquad (5.104)$$

Дійсно, домножаючи рівняння $L(u_1)+\rho\lambda_1 u_1=0$ і $L(u_2)+\rho\lambda_2 u_2=0$ відповідно на $u_2(x)$ і $u_1(x)$ і проінтегрувавши їх різницю, отримаємо

$$\int_a^b [u_2L(u_1)-u_1L(u_2)]dx+(\lambda_1-\lambda_2)\int_a^b \rho(x)u_1(x)u_2(x)dx=0.$$

Згідно властивості б) перший доданок дорівнює нулю, так як $\lambda_1\neq\lambda_2$, то виконується (5.104);

б) всі власні значення дійсні.

Дійсно, якби знайшлося комплексне власне значення λ з власною функцією u, то спряжене з ним комплексне число $\overline{\lambda}$ також було б власним значенням, а функція $\overline{u}$ була б його власною функцією. З ортогональності власних функцій $u(x)$ та $\overline{u}(x)$ випливає

$$\int_a^b \rho(x)u(x)\overline{u}(x)dx=\int_a^b \rho(x)|u|^2dx=0,$$

тобто $u(x)\equiv 0$. Це означає, що число λ не є власним значенням;

в) будь-якому власному значенню відповідає тільки одна лінійно незалежна власна функція.

Дійсно, припустимо, що маємо дві лінійно незалежні власні функції $u(x)$ і $v(x)$, які відповідають одному власному значенню λ. Тоді ліва частина в (5.102) дорівнює нулю, так як $L(u)=-\lambda\rho u$, $L(v)=-\lambda\rho v$. Тому

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\left(v\frac{du}{dx}-udv\right)dx\right)=0,$$

тобто

$$p(x)\left(v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}\right)=const. \qquad (5.105)$$

Ліва частина співвідношення (5.105) в точці $x = a$ дорівнює нулю, так як для функцій $u(x)$ і $v(x)$ виконується крайові умови. Постільки $p(x) \neq 0$, то в точці $x = a$ $vu' - uv' = 0$. Це означає, що в точці $x = a$ вронскіан від функцій $u(x)$ і $v(x)$ дорівнює нулю. Тобто функції $u(x)$ і $v(x)$ – лінійно-залежні;

г) довільну власну функцію $u(x)$ можна пронормувати

$$\int_a^b \rho(x) u^2(x) dx = 1. \quad (5.106)$$

5.5.6. Функція Гріна

Припустимо, що $\lambda = 0$ не є власним значенням задачі Штурма-Ліувілля (5.100), (5.101). Тоді крайова задача не має ненульових розв'язків. Нехай функцій $u(x)$ і $v(x)$ – розв'язки рівняння $L(u) = 0$, які задовольняють відповідно крайові умови $R_0(u) = 0$ та $R_1(v) = 0$.

Такі розв′язки існують і їх можна отримати як розв′язки задачі Коші, наприклад, при початкових умовах:

$$u(a) = -\sin\alpha, \ \ u'(a) = \cos\alpha; \ \ v(b) = -\sin\beta, \ \ v'(b) = \cos\beta.$$

Функції $u(x)$ і $v(x)$ будуть лінійно–незалежні, інакше якби $u(x) = cv(x)$, де c– постійна, то виконувалися б умови $R_0(u) = 0$, $R_1(u) = 0$. А це б означало, що задача (5.100),(5.101) при $\lambda = 0$ мала б ненульовий розв'язок. В силу (5.102)

$$\Delta = p(x)\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx} \right) = const \quad (5.107)$$

і ця константа, в силу лінійної незалежності функцій $u(x)$ і $v(x)$, буде відмінною від нуля.

Функцію

$$G(x, x_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta} u(x) v(x_0), \ x \le x_0 \\ \dfrac{1}{\Delta} u(x_0) v(x), \ x \ge x_0 \end{cases} \quad (5.108)$$

будемо називати функцією впливу або функцією Гріна крайової задачі (5.100), (5.101) при $\lambda = 0$, тобто

$$L(u) = 0, \ \left(L(u) = \frac{d}{dx}\left(p(x)u'\right) - q(x)u \right), R_0(u) = 0, R_1(u) = 0. \quad (5.109)$$

Властивості функції Гріна:

а) функція Гріна неперервна на $[a, b]$;

б) на кожному з інтервалів $[a, x_0], [x_0, b]$ двічі неперервно диференційовна і задовольняє рівняння $L(u) = 0$;

в) $R_0(G) = 0$, $R_1(G) = 0$;

г) $\left.\dfrac{\partial G}{\partial x}\right|_{x = x_0 + 0} - \left.\dfrac{\partial G}{\partial x}\right|_{x = x_0 - 0} = -\dfrac{1}{p(x_0)}$;

д) функція Гріна є симетричною функцією, тобто $G(x, x_0) = G(x_0, x)$.

Властивості а), б), в), д) випливають з побудови функції Гріна у вигляді (5.108). Доведемо властивість г):

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,x_0)=\frac{1}{\Delta}u(x_0)v'(x),x>x_0;\ \frac{\partial G}{\partial x}(x,x_0)=\frac{1}{\Delta}u'(x)v(x_0),x<x_0.$$

Тому

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x_0+0}-\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x_0-0}=\left.\frac{1}{\Delta}\big(u(x_0)v'(x)-u'(x)v(x_0)\big)\right|_{x=x_0}=-\frac{1}{p(x_0)}.$$

Приведемо без доведення ряд теорем, які часто використовуються при розв'язанні різних прикладних задач.

Теорема 5.5. (Про інтегральне представлення розв'язку з допомогою функції Гріна). Якщо $\lambda=0$ не є власним числом задачі Штурма-Ліувілля (5.100), (5.101), тобто якщо крайова задача (5.109) має ненульовий розв'язок, то для того , щоб функція $u(x)$ була двічі неперервно диференційовним на $[a,b]$ розв'язком крайової задачі

$$\begin{cases} L(u)=-r(x) \\ R_0(u)=0, R_1(u)=0 \end{cases} \tag{5.110}$$

необхідно і достатньо, щоб

$$u(x)=\int_a^b G(x,s)r(s)ds, \tag{5.111}$$

де $G(x,s)$-функція Гріна крайової задачі (5.109).

Теорема 5.6. Якщо $\lambda=0$ не є власним числом задачі Штурма-Ліувілля (5.100), (5.101), то для того, щоб функція $u(x)$ була двічі неперервно диференційовним розв'язком цієї задачі на $[a,b]$ необхідно і достатньо, щоб вона була розв'язком інтегрального рівняння

$$u(x)=\lambda\int_a^b G(x,s)\rho(s)u(s)ds, \tag{5.112}$$

де функція $G(x,s)$ – функція Гріна крайової задачі (5.109).

Теорема 5.7 (В.А. Стеклова про розклад функції в ряд). Довільна двічі неперервно диференційовна функція $f(x)$ на $[a,b]$, яка задовольняє крайовим умовам $R_0(f)=0, R_1(f)=0$, розкладається на цьому відрізку по власним функціям задачі Штурма-Ліувілля (5.100), (5.101) в абсолютно і рівномірно збіжний ряд Фур'є

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n u_n(x), \tag{5.113}$$

де $u_n(x)$– власні функції задачі Штурма-Ліувілля (5.100), (5.101), які відповідають власним значенням λ_n і задовольняють умові ортогональності з ваговою функцією $\rho(x)$

$$\int_a^b u_n(x)u_k(x)\rho(x)dx=\begin{cases}1, n=k \\ 0, n\neq k\end{cases}, \tag{5.114}$$

c_n коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$

$$c_n = \int_a^b f(x) u_n(x) \rho(x) dx. \qquad (5.115)$$

5.5.7. Поняття повноти системи функцій. Зв'язок збіжності в середньому і повноти

Нехай $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ – система власних функцій задачі (5.100), (5.101), або довільна система двічі неперервно диференційовних на $[a,b]$ функцій, ортогональних з ваговою функцією $\rho(x)$.

Означення 5.6. Система функцій називається повною на $[a,b]$, якщо для довільної функції $f(x)$, яка є кусково неперервною на $[a,b]$ і задовольняє умові $\int_a^b f^2(x) dx < \infty$, має місце рівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx, \qquad (5.116)$$

де $c_k = \int_a^b \rho(x) f(x) u_k(x) dx$ – коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$.

Співвідношення (5.116) називають умовою повноти, або рівністю Парсеваля-Стеклова.

В силу ортонормованості функцій $u_1(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ маємо

$$S = \int_a^b \rho(x) \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k^{(1)} u_k(x) \right]^2 dx = \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx - 2\sum_{k=1}^{n} c_k c_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{n} c_k^{(1)2} =$$

$$= \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (c_k - c_k^{(1)})^2, \qquad (5.117)$$

де $c_k^{(1)}$ – будь-які постійні, c_k – коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$.

Величину

$$I = \sqrt{S} \qquad (5.118)$$

називають середнім квадратичним відхиленням функції $f(x)$ від $\sum_{k=1}^{n} c_k^{(1)} u_k(x)$. З (5.117) випливає, що величина I найменша при $c_k = c_k^{(1)}, k = 1,2, \ldots$ і визначається формулою

$$I^2 = \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2. \qquad (5.119)$$

З (5.119) маємо

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \le \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx, \qquad (5.120)$$

яка називається нерівністю Бесселя.

В силу (5.119) можна стверджувати: для того, щоб система функцій $u_1(x),\ldots,u_n(x),\ldots$ була повною, необхідно і достатньо, щоб для довільної функції $f(x)$, кусково неперервної на $[a,b]$, з інтегровним квадратом, мала місце гранична рівність

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \rho(x)\left(f(x)-\sum_{k=1}^n c_k u_k(x)\right)^2 dx = 0. \tag{5.121}$$

Рівність (5.121) означає, що середнє квадратичне відхилення суми $f_n(x)=\sum_{k=1}^n c_k u_k(x)$ від $f(x)$ прямує до нуля при $n\to\infty$. В цьому випадку говорять, що послідовність функцій $f_n(x)$ збігається до $f(x)$ всередньому.

Таким чином, для того, щоб система функцій $u_1(x),\ldots,u_n(x),\ldots$, ортонормована з ваговою функцією $\rho(x)$, була повною, необхідно і достатньо, щоб ряд Фур'є для довільної функції $f(x)$, кусково неперервної на $[a,b]$ з інтегровним квадратом збігався до неї в середньому або, що все одно, необхідно і достатньо, щоб довільну з вказаних функцій $f(x)$ можна було апроксимувати в розумінні середнього квадратичного відхилення з будь-якою наперед заданою точністю.

Теорема 5.8 (про повноту власних функцій задачі Штурма–Ліувілля). Ортонормована з ваговою функцією $\rho(x)$ система власних функцій задачі Штурма-Ліувілля (5.100),(5.101) є повною на $[a,b]$.

Розділ 6. Системи звичайних диференціальних рівнянь

6.1. Основні поняття та загальні властивості розв′язків

6.1.1. Основні поняття та означення. Задача Коші

Означення 6.1. Сукупність рівнянь вигляду

$$\begin{cases} F_1(x,y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n')=0 \\ \qquad\ldots \\ F_n(x,y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n')=0 \end{cases}, \tag{6.1}$$

де $y_1,\ldots,y_n$ – шукані функції від незалежної змінної x, називається системою диференціальних рівнянь першого порядку.

Означення 6.2. Будемо говорити, що систему звичайних диференціальних рівнянь (6.1) записано в нормальній формі, якщо її можна розв′язати відносно похідних і представити в такому вигляді

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,y_1,\ldots,y_n),\ i=1,2,\ldots,n. \tag{6.2}$$

Число рівнянь системи диференціальних рівнянь (6.2) називається її порядком.

Означення 6.3. Якщо праві частини системи диференціальних рівнянь (6.2) лінійні по $y_1,\ldots,y_n$

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^n p_{ij}(x)y_j + f_i(x),\ i=1,..,n, \tag{6.3}$$

то система називається лінійною.

Означення 6.4. Сукупність n функцій

$$y_1 = y_1(x),\ldots,y_n = y_n(x) \tag{6.4}$$

визначених і неперервно диференційовних на (a,b) називається розв′язком системи (6.2), якщо вона перетворює всі рівняння системи (6.2) в тотожності на (a,b).

Процес знаходження розв′язків системи називається інтегруванням.

Задача Коші: для системи диференціальних рівнянь (6.2) серед всіх розв′язків знайти такий

$$y_1 = y_1(x),\ldots,y_n = y_n(x), \tag{6.5}$$

який задовольняє умовам

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)},\ldots,y_n(x_0) = y_n^{(0)}. \tag{6.6}$$

Тут $y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)}$ – початкові значення шуканих функцій, x_0 – початкове значення незалежної змінної x. Числа $x_0, y^{(0)},\ldots,y_n^{(0)}$ називаються початковими даними розв′язку (6.5), умови (6.6) – початковими умовами.

Геометричний зміст задачі Коші – серед всіх інтегральних кривих системи диференціальних рівнянь (6.2) знайти ту, яка проходить через точку (6.6).

Механічний зміст задачі Коші – знайти такий рух, визначений системою диференціальних рівнянь (6.2), який задовольняє початковим умовам (6.6).

6.1.2. Теореми про достатні умови існування та єдиності розв′язку задачі Коші та неперервну залежність розв′язку системи від початкових даних і параметрів(без доведення)

Теорема 6.1 (про існування і єдиність розв'язку задачі Коші). Розглянемо задачу (6.2), (6.6). Припустимо, що праві частини системи диференціальних рівнянь (6.2) визначені в області

$$R: |x - x_0| \le a, \left|y_k - y_k^{(0)}\right| \le b,\ k = 1,2,\ldots,n$$

($a,b > 0$-задані числа) і задовольняють на R умовам:

1) функції $f_k(x, y_1,\ldots,y_n)$, $k = 1,2,\ldots,n$ є неперервними по всім аргументам і, отже, обмеженими

$$|f_k(x, y_1,\ldots,y_n)| < M,\ k = 1,2,\ldots,n,\quad (x, y_1,\ldots,y_n) \in R;$$

2) функції $f_k(x, y_1,\ldots,y_n)$ мають обмеженні частинні похідні по $y_1,\ldots,y_n$, тобто

$$\left|\frac{\partial f_k(x, y_1,\ldots,y_n)}{\partial y_l}\right| \le K,\ \ l,k = 1,2,\ldots,n,\ (x, y_1,\ldots,y_n) \in R$$

($K > 0$ задане число).

При цьому існує єдиний розв′язок системи (6.2) при умові (6.6), визначений і неперервно диференційовний на інтервалі $|x - x_0| \le h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$.

Зауваження 6.1. Якщо праві частини системи диференціальних рівнянь (6.2) – суто поліноми від своїх аргументів, то існує єдиний розв′язок задачі Коші (6.2), (6.6) для будь-яких початкових умов.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь в нормальній формі залежну від параметрів

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m),\ i = 1,2,\ldots,n, \tag{6.7}$$

праві частини якої визначенні в областях

$$R: |x - x_0| \le a,\ \left|y_k - y_k^{(0)}\right| \le b,\ k = 1,2,\ldots,n$$

і

$$R_\lambda : \lambda_1^{(0)} \le \lambda_1 \le \lambda_1^{(1)}, \ldots, \lambda_m^{(0)} \le \lambda_m \le \lambda_m^{(1)}.$$

Теорема 6.2 (про неперервну залежність розв′язку від параметрів). Припустимо, що праві частини системи диференціальних рівнянь (6.7) задовольняють умовам:

1) функції $f_k(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m),\ k = 1,2,\ldots,n$ неперервні за $x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ в області R і R_λ, і, отже, обмежені

$$f_k(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \le M, \quad (x, y_1, \ldots, y_n) \in R,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in R_\lambda,\ (M = const);$$

2) функці $f_k(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m),\ k = 1,2,\ldots,n$ задовольняють умові Ліпшиця за $y_1, \ldots, y_n$

$$|f_k(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) - f_k(x, \bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2, \ldots, \bar{\bar{y}}_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)| \le L \sum_{i=1}^{n} \left|\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}_i\right|,$$

де $(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n)$ і $(x, \bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2, \ldots, \bar{\bar{y}}_n)$ – будь-які точки з R, λ – будь-яка точка з R_λ, L – постійне додатне число, незалежне від x та λ. Тоді система (6.7) має єдиний розв′язок

$$y_i = y_i(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m),\ i = 1,2,\ldots,n, \tag{6.8}$$

який задовольняє початковим умовам $y_i(x_0) = y_i^{(0)}, i = 1..n$.

Цей розв′язок є визначеним і неперервно дифереційовним за x на інтервалі

$$|x - x_0| \le h = \min\left\{a, \frac{b}{m}\right\}, \tag{6.9}$$

визначений і неперервний по $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ в області R_λ рівномірно за x з (6.9), тобто для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, що одночасно для кожного x з (6.9) виконується нерівність

$$|y_k(x, \lambda_1 + \Delta\lambda_1, \ldots, \lambda_m + \Delta\lambda_m) - y_k(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)| < \varepsilon,\ k = 1,2,\ldots,n$$

лише тільки

$$|\Delta\lambda_1| < \delta, \ldots, |\Delta\lambda_m| < \delta.$$

Теорема 6.3 (про неперервну залежність розв′язків від початкових умов). Якщо праві частини системи диференціальних рівнянь (6.2) задовольняють в R обом умовам тереми Пікара (теореми 6.1) , то розв′язок

$$y_k = \varphi_k(x, x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*),\ k = 1,2,\ldots,n \tag{6.10}$$

з початковими умовами

$$y_1(x^*) = y_1^*, \ldots, y_n(x^*) = y_n^* \tag{6.11}$$

буде неперервним за x і початковим умовам $x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*$, коли

$$|x-x_0|\le \frac{h}{2}-\omega, \tag{6.12}$$

а $y_1(x^*)=y_1^*,\ldots,y_n(x^*)=y_n^*$ лежать в області

$$\left|x^*-x_0\right|\le\omega,\ \left|y_i^{\ *}-y_i^{\ (0)}\right|\le\frac{b}{2},\ i=1,2,\ldots,n, \tag{6.13}$$

де

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},\ \ 0\le\omega\le\frac{h}{4}.$$

При цьому розв′язок (6.10) буде неперервним по $x^*,y_1^*,\ldots,y_n^*$, в області (6.13) рівномірно за x з (6.12), тобто для любого $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$, що нерівності

$$\left|\varphi_k(x,x^*+\Delta x^*,y_1^{\ *}+\Delta y_1^{\ *},\ldots,y_n^{\ *}+\Delta y_n^{\ *})-\varphi_k(x,x^*,y_1^{\ *},\ldots,y_n^{\ *})\right|<\varepsilon,\ k=1,2,\ldots,n$$

виконується одночасно для всіх x з (6.12), коли

$$\left|\Delta x^*\right|<\delta,\ \left|\Delta y_1^*\right|<\delta.$$

6.1.3 Загальний, частинний і особливий розв'язки

Нехай D – область, в кожній точці якої виконуються умови теореми існування і єдиності.

<u>Означення 6.5.</u> Сукупність n функцій

$$\begin{cases} y_1=\varphi_1(x,c_1,\ldots,c_n) \\ \qquad\ldots \\ y_n=\varphi_n(x,c_1,\ldots,c_n) \end{cases} \tag{6.14}$$

визначених в деякій області зміни змінних $x,c_1,\ldots,c_n$ і які мають неперервні частинні похідні за x, будемо називати загальним розв′язком системи (6.2) в області D, якщо систему (6.14) можна розв′язати відносно $c_1,\ldots,c_n$

$$\begin{cases} c_1=\psi_1(x,y_1,\ldots,y_n) \\ \qquad\ldots \\ c_n=\psi_n(x,y_1,\ldots,y_n) \end{cases}, \tag{6.15}$$

а сукупність функцій (6.14) є розв′язком диференціального рівняння (6.2) для всіх сталих, визначених співвідношеннями (6.15), коли $(x,y_1,\ldots,y_n)\in D$.

Якщо в (6.14) роль сталих відіграють початкові умови

$$\begin{cases} y_1=\varphi_1(x,x_0,y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)}) \\ \qquad\ldots \\ y_n=\varphi_n(x,x_0,y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)}) \end{cases}, \tag{6.16}$$

то (6.16) називається загальним розв′язком в формі Коші.

Означення 6.6. Розв′язок системи диференціальних рівнянь (6.2) називається частинним якщо він складається з точок єдиності розв′язку задачі Коші. Його можна отримати при конкретних сталих, включаючи $\pm\infty$.

Означення 6.7. Розв′язок системи диференціальних рівнянь (6.2) називається особливим, якщо в кожній точці його порушується єдиність розв′язку задачі Коші.

6.1.4 Інтеграл. Перший та загальний інтеграли. Число незалежних інтегралів

Розглянемо одну з рівностей (6.15)

$$\psi_i(x, y_1, \ldots, y_n) = c_i. \tag{6.17}$$

Функція $\psi_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ на будь-якому частинному розв′язку приймає постійні значення, тобто

$$\psi_i(x, \varphi_1(x, c_1, \ldots, c_n), \ldots, \varphi_n(x, c_1, \ldots, c_n)) = c_i.$$

Ця функція називається інтегралом.

Означення 6.8 (перше означення інтегралу). Функція $\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$, визначена на D і яка не приводиться до сталої, називається інтегралом системи диференціальних рівнянь (6.2) в області D, якщо при заміні $y_1, \ldots, y_n$ будь-яким частинним розв′язком цієї системи, вона приймає постійне значення.

На частинних розв′язках системи (6.2) $d\psi \equiv 0$, тобто

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} dy_n \equiv 0.$$

Це записується таким чином

$$d\psi_{(6.2)} = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1(x, y_1, \ldots, y_n) dx + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n(x, y_1, \ldots, y_n) dx \equiv 0. \tag{6.18}$$

Означення 6.9 (друге означення інтегралу). Функція $\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$ неперервно диференційована в області D і така, що $\frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial y_n}$ не дорівнюють одночасно нулю в цій області, називається інтегралом системи диференціальних рівнянь (6.2) в області D, якщо $d\psi_{(6.2)} \equiv 0$.

Співвідношення (6.18) еквівалентне наступному

$$\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(6.2)} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1(x, y_1, \ldots, y_n) + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \equiv 0.$$

Якщо функція є інтегралом в смислі другого означення, то вона буде інтегралом і в смислі першого. Обернене не вірно – $\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$ може не мати частинних похідних.

Рівність $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) = c$ називається першим інтегралом системи диференціальних рівнянь (6.2).

Означення 6.10. Сукупність n перших інтегралів вигляду (6.15). яку можна розв′язати відносно $y_1, \ldots, y_n$, в результаті чого в області D отримаємо

загальний розв′язок в формі (6.14) будемо називати загальним інтегралом системи диференціальних рівнянь (6.2) в області D.
Перші інтеграли (6.15), які утворюють загальний інтеграл системи диференціальних рівнянь (6.2), є незалежними, якщо між функціями $\psi_1,...,\psi_n$ не існує співвідношення виду $\Phi(\psi_1,...,\psi_n)=0$ ні при якому виборі функції $\Phi(\psi_1,...,\psi_n)$.

<u>Теорема 6.4.</u> Якщо інтеграли $\psi_1,...,\psi_n$ мають неперервні частинні похідні, то для незалежності їх необхідно і достатньо, щоб якобіан від функцій $\psi_1,...,\psi_n$ за $y_1,...,y_n$ не перетворювався тотожно в нуль

$$\frac{D(\psi_1,...,\psi_n)}{D(y_1,...,y_n)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n} \\ . & . & . \\ \frac{\partial\psi_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial\psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}\neq 0. \qquad (6.19)$$

Доведення витікає з відповідного розділу математичного аналізу: необхідною і достатньою умовою незалежності m функцій $u_1,...,u_m$ від n змінних $x_1,..,x_n$ $(m\le n)$ заключається в тому, щоб хоча б один з функціональних визначників який можна утворити з стовпців таблиці

$$\begin{matrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ . & . & . \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{matrix}$$

не дорівнює тотожно нулю.

Якщо ми маємо k інтегралів $1\le k\le n$, то вони будуть незалежними тоді і тільки тоді, коли хоча б один з функціональних визначників k–го порядку, складений з стовпців таблиці

$$\begin{matrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n} \\ . & . & . \\ \frac{\partial\psi_k}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial\psi_k}{\partial y_n} \end{matrix}$$

не дорівнює тотожно нулю.

Припустимо, що інтеграли $\psi_1,...,\psi_n$ мають неперервні частинні похідні за $x, y_1,...,y_n$.

<u>Теорема 6.5.</u> Нормальна система n рівнянь не може мати більш ніж n незалежних інтегралів.

<u>Доведення</u>. Твердження теореми рівносильно тому, що якщо відомо $n+1$ інтеграл системи диференціальних рівнянь (6.2) $\psi_1,...,\psi_n$, ψ, то вони не можуть бути незалежними. Розглянемо два випадки.
а) $\psi_1,...,\psi_n$ – залежні, то і $\psi_1,...,\psi_n$, ψ – теж залежні.

б) $\psi_1,\ldots,\psi_n$ – не залежні. Тоді $\dfrac{D(\psi_1,\ldots,\psi_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)} \neq 0$. Так як $\psi_1,\ldots,\psi_n$, ψ – інтеграли системи диференціальних рівнянь (6.2), то

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n} f_n = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial x} + \frac{\partial\psi_n}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial\psi_n}{\partial y_n} f_n = 0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial y_n} f_n = 0.$$

Ця система однорідних рівнянь показує, що вона має не нульовий розв′язок $1, f_1,\ldots,f_n$. Тому

$$\frac{D(\psi,\psi_1,\ldots,\psi_n)}{D(x,y_1,\ldots,y_n)} = 0.$$

З математичного аналізу відомо, що в цьому разі $\psi = \Phi(\psi_1,\ldots,\psi_n)$, тобто функції $\psi_1,\ldots,\psi_n,\psi$ – залежні.

<u>Теорема 6.6.</u> Якщо $\psi_1,\ldots,\psi_k$, $1 \le k \le n$ – незалежні інтеграли системи диференціальних рівнянь (6.2) в області D, а $\Phi(z_1,\ldots,z_k)$ – довільна функція, визначена в деякій області змінних $z_1,\ldots,z_k$, яка є областю значень функцій $\psi_1,\ldots,\psi_k$, коли $(x,y_1,\ldots,y_n) \in D$, і яка має в цій області неперервні частинні похідні по $z_1,\ldots,z_k$ не рівні нулю одночасно, то функція

$$\psi = \Phi(\psi_1,\ldots,\psi_n) \tag{6.20}$$

також буде інтегралом системи диференціальних рівнянь (6.2).
Дійсно

$$d\psi_{(6.2)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\Phi}{\partial\psi_i} d\psi_{i_{(6.2)}} \equiv 0$$

в силу умови теореми, що $d\psi_{i_{(6.2)}} \equiv 0$, $i = 1,2,\ldots,k$.

6.1.5. Пониження порядку системи з допомогою перших інтегралів

Знаючи один перший інтеграл системи диференціальних рівнянь (6.2) можна понизити її порядок на одиницю.
Дійсно, нехай

$$\psi_1(x,y_1,\ldots,y_n) = c_1 \tag{6.21}$$

– перший інтеграл.
Визначимо з (6.21)

$$y_1 = \overline{\varphi_1}(x,y_2,\ldots,y_n,c_1). \tag{6.22}$$

Підставивши(6.22) в $(n-1)$ рівняння будемо мати систему

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, \bar{\varphi}_1, y_2, \ldots, y_n) \\
\qquad\qquad \ldots \\
\dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, \bar{\varphi}_1, y_2, \ldots, y_n)
\end{cases}
\tag{6.23}
$$

порядку $(n-1)$.

Якщо відомо k перших інтегралів, то порядок системи диференціальних рівнянь (6.2) можна понизити на k одиниць.

6.1.6 Системи диференціальних рівнянь в симетричній формі

Така система має вигляд

$$
\frac{dx_1}{X_1(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, \ldots, x_n)}. \tag{6.24}
$$

Будь-яку систему нормальних рівнянь типу (6.2) можна записати в симетричній формі

$$
\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dx}{1}. \tag{6.25}
$$

Якщо $X_n(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, тоді (6.24) можна записати в нормальній формі

$$
\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{X_i(x_1, \ldots, x_n)}{X_n(x_1, \ldots, x_n)}, \ i = 1, 2, \ldots, (n-1). \tag{6.26}
$$

При розв′язанні систем в симетричній формі користуються властивістю: якщо

$$
\frac{a_1}{b_1} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}, \text{ то } \frac{a_i}{b_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j}.
$$

<u>Приклад 6.1.</u> Розв'язати систему в симетричній формі

$$
\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}.
$$

<u>Розв'язування</u>. Для знаходження загального інтегралу системи поступимо таким чином:

а) візьмемо $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ і просумуємо чисельники та знаменники, отримаємо $d(x+y+z) = 0,\ x+y+z = c_1$;

б) якщо ж виберемо $\alpha_1 = x, \alpha_2 = y, \alpha_3 = z$, то будемо мати $d(x^2+y^2+z^2) = 0,\ x^2+y^2+z^2 = c_2$.

Отже, загальний інтеграл системи запишемо у вигляді

$$
\begin{cases}
x + y + z = c_1 \\
x^2 + y^2 + z^2 = c_2
\end{cases}.
$$

6.2. Лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь

6.2.1. Однорідні системи

Розглянемо лінійну однорідну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n,\ i = 1,2,\ldots,n, \tag{6.27}$$

або в матричній формі

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y,\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix},\ A(x) = \{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n}. \tag{6.28}$$

Тут $A(x)$ – неперервна за $a < x < b$ матриця розмірності $n \times n$. Якщо функції $y^{(1)}(x),\ldots,y^{(m)}(x)$ – вектор-розв'язки системи (6.28),то і

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i y^{(i)}(x), \tag{6.29}$$

де $c_1,\ldots,c_m$ – довільні сталі, теж є розв'язком системи (6.28).
Дійсно, введемо оператор

$$L = \frac{d}{dx} - A, \tag{6.30}$$

який має властивості:
а) $L(cy) = cL(y)$;
б) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$.
З допомогою оператора L систему диференціальних рівнянь (6.28) запишемо так

$$L(y) = 0. \tag{6.31}$$

Якщо $L(y^{(i)}) = 0, i = 1,2,\ldots,m$, то в силу властивостей а), б) функція (6.29) також є розв'язком системи (6.28).

6.2.2. Лінійно незалежні розв'язки. Теореми про лінійно залежні і незалежні розв'язки

Означення 7.1. Вектор-розв'язки $y^{(1)}(x),\ldots,y^{(m)}(x)$ системи диференціальних рівнянь (6.28) називаються лінійно залежними на (a,b), якщо існують такі сталі $c_1,\ldots,c_m$, які не дорівнюють нулю одночасно, що

$$c_1 y^{(1)}(x) + \ldots + c_m y^{(m)}(x) \equiv 0,\ a < x < b,$$

в противному випадку система розв'язків називається лінійно незалежною на (a,b).
Теорема 7.1. Якщо для всіх $x_0 \in (a,b)$ система векторів

$$y^{(1)}(x_0),\ldots,y^{(m)}(x_0) \tag{6.32}$$

лінійно залежна, то відповідні їм розв'язки $y^{(1)}(x),\ldots,y^{(m)}(x)$ системи диференціальних рівнянь (6.28) також лінійно залежні.
Доведення. Припустимо, що вектори (6.32) лінійно залежні, тобто

$$c_1 y^{(1)}(x_0) + \ldots + c_m y^{(m)}(x_0) = 0, \tag{6.33}$$

де не всі $c_1,\ldots,c_m$ дорівнюють нулю. Розглянемо вектор-функцію з тими ж сталими

$$y(x) = c_1 y^{(1)}(x) + \ldots + c_m y^{(m)}(x). \qquad (6.34)$$

Вектор $y(x)$ задовольняє системі диференціальних рівнянь (6.28) і , в силу (6.33), $y(x_0) = 0$. На основі теореми існування і єдиності отримуємо, що

$$y(x) = c_1 y^{(1)}(x) + \ldots + c_m y^{(m)}(x) \equiv 0. \qquad (6.35)$$

Співвідношення (6.35) означає, що $y^{(1)}(x), \ldots y^{(m)}(x)$ лінійно залежні.

<u>Означення 7.2.</u> Система n лінійно незалежних розв'язків

$$y^{(1)}(x), \ldots y^{(n)}(x) \qquad (6.36)$$

системи диференціальних рівнянь (6.28) називається фундаментальною системою розв'язків або базисом цієї системи рівнянь.

<u>Теорема 6.8.</u> Система звичайних диференціальних рівнянь (6.28) має фундаментальну систему розв'язків. Якщо (6.36) – фундаментальна система розв'язків системи диференціальних рівнянь (6.28), то загальний розв'язок записується у вигляді

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(i)}(x), \qquad (6.37)$$

де $c_1, \ldots, c_n$ – довільні сталі.

<u>Доведення</u>. Доведемо першу частину теореми. Задамо систему з n лінійно незалежних векторів $h^{(1)}, \ldots, h^{(n)}$. Побудуємо систему розв'язків $y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ для системи диференціальних рівнянь (6.28) з початковими умовами $y^{(i)}(x_0) = h^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Так як вектори $h^{(1)}, \ldots, h^{(n)}$ лінійно незалежні, то в силу теореми (6.7) вектори $y^{(i)}(x), i = 1, 2, \ldots, n$ також є лінійно незалежними, тобто складають фундаментальну систему розв′язків.

Доведемо другу частину теореми, тобто покажемо, що з допомогою формули (6.37) можна розв'язати будь-яку задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y, \quad y(x_0) = h. \qquad (6.38)$$

Покажемо, що розв'язок задачі (6.38) можна записати в вигляді

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i y^{(i)}(x), \qquad (6.39)$$

де $\bar{c}_i$ – постійні числа.

Числа $\bar{c}_i$ визначаються з системи

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y^{(i)}(x) = h, \qquad (6.40)$$

так як вектори $y^{(i)}(x), i = 1, 2, \ldots, n$ лінійно незалежні, то по теоремі 6.7 вектори $y^{(i)}(x_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ також є лінійно незалежними. Тому визначник системи (6.40) відмінний від нуля. Таким чином, система (6.40) має єдиний розв'язок $\bar{c}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Теорема доведена.

6.2.3 Інтегральна (фундаментальна) матриця

Введемо матрицю $Y(x)$ розміром $n \times n$, яка складається з n лінійно незалежних розв'язків системи (6.28)

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(x) & \dots & y_1^{(n)}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(1)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}. \tag{6.41}$$

Ясно, що матриця $Y(x)$ задовольняє матричне диференціальне рівняння

$$\frac{dY(x)}{dx} = A(x)Y(x). \tag{6.42}$$

Матриця $Y(x)$ називається інтегральною, або фундаментальною.

Якщо $Y(x)$ – фундаментальна матриця розв'язків, то і $Y(x)C$, де C – довільна неособлива матриця розмірності $n \times n$, також є фундаментальною. Дійсно

$$\frac{d[Y(x)C]}{dx} = A(x)[Y(x)C].$$

6.2.4 Визначник Вронського. Формула Якобі

Визначник $\det Y(x) = W(x)$ називається визначником Вронського або вронськіаном системи (6.28).

На основі теореми 6.7 можна сказати:

а) якщо система векторів (6.36) лінійно залежна, то $W(x) = 0$;

б) якщо система (6.36) лінійно незалежна, то $W(x) \neq 0$, $a < x < b$ і матриця $Y(x)$ буде інтегральною.

Теорема 6.9. Припустимо, що матриця $A(x)$ системи диференціальних рівнянь (6.28) має неперервні елементи на $a < x < b$. Якщо матриця $Y(x)$ задовольняє (6.28), то

$$\det Y(x) = \det Y(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^{x} SpA(\tau) d\tau \right), \tag{6.43}$$

де $x_0, x \in (a,b)$, $SpA(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)$. Рівність (6.43) називають формулою Якобі.

Доведення. Запишемо систему матричних диференціальних рівнянь (6.42) у вигляді

$$y_i^{(j)\prime} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} y_k^{(j)}, \quad i, j = 1,2,\dots,n.$$

Тоді

$$\frac{d}{dx}(\det Y(x)) = \frac{dW(x)}{dx} = I_1 + I_2 \dots + I_n, \tag{6.44}$$

де $I_1, I_2, \dots, I_n$ – деякі визначники. Обчислимо визначник I_1

$$I_1 = \det\begin{pmatrix} {y_1^{(1)}}' & {y_1^{(2)}}' & \dots & {y_1^{(n)}}' \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \dots & y_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \dots & y_n^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k} y_k^{(1)} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k} y_k^{(2)} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k} y_k^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \dots & y_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

З першого рядка віднімемо суму другого рядка, помноженого на a_{12}, третього на a_{13}, … . Отримаємо

$$I_1 = \begin{vmatrix} a_{11} y_1^{(1)} & a_{11} y_1^{(2)} & \dots & a_{11} y_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \dots & y_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = a_{11} W(x).$$

Аналогічно показується, що

$$I_i = \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \dots & y_1^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{i-1}^{(1)} & y_{i-1}^{(2)} & \dots & y_{i-1}^{(n)} \\ {y_i^{(1)}}' & {y_i^{(2)}}' & \dots & {y_i^{(n)}}' \\ y_{i+1}^{(1)} & y_{i+1}^{(2)} & \dots & y_{i+1}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = a_{ii}(x) W(x), \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Таким чином, $\dfrac{dW}{dx} = SpA(x)W(x)$, звідки отримуємо формулу Якобі (6.43). Теорема доведена.

З формули (6.43) випливає, що якщо $W(x_0) = 0$, тобто система функцій в точці $x = x_0$ лінійно залежна, то $W(x) \equiv 0, a < x < b$, якщо ж $W(x_0) \neq 0$, то $W(x) \neq 0,\ a < x < b$.

Теорема 6.10. Припустимо, що матриця $Y(x)$ задовольняє диференціальне рівняння (6.42). Для того, щоб вона була інтегральною необхідно і достатньо, щоб

$$\det Y(x) = W(x) \neq 0, \quad a < x < b. \tag{6.45}$$

Доведення. *Достатність.* Припустимо, що $W(x) \neq 0$. Це означає, що вектори $y^{(i)}(x),\ i = 1,2,\dots,n$ є розв’язками системи диференціальних рівнянь (6.28) і лінійно незалежні, тобто $Y(x)$ – інтегральна матриця.

Необхідність. Нехай $Y(x)$ – фундаментальна матриця. В силу теореми (6.8) задача Коші

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y,\ y(x_0) = h \neq 0$$

має єдиний розв’язок $y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i y^{(i)}(x)$, де c_i визначається з системи

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y^{(i)}(x_0) = h. \tag{6.46}$$

Оскільки система (6.46) має єдиний розв'язок, то $\det Y(x_0) \neq 0$. А тоді, в силу (6.43), $W(x) \neq 0,\ a < x < b$. Теорема доведена.

З допомогою матриці $Y(x)$ загальний розв'язок лінійної системи можна записати у вигляді

$$y = Y(x)C, \tag{6.47}$$

де $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$.

6.2.5. Спряжені системи

Розглянемо дві системи

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y, \tag{6.48}$$

$$\frac{dz}{dx} = -A^T(x)z, \tag{6.49}$$

які називаються спряженими (тут T – знак транспонування).

Для цих систем справедлива властивість

$$y^T(x)z(x) = c_0 = Const. \tag{6.50}$$

Дійсно $\frac{d}{dx}(y^T z) = \frac{dy^T}{dx} z + y^T \frac{dz}{dx} = y^T A^T z - y^T A^T z = 0$.

Якщо $Y(x)$ і $Z(x)$ – інтегральні матриці для систем (6.49), (6.50) відповідно, тобто

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y, \tag{6.51}$$

$$\frac{dZ}{dx} = -A^T(x)Z, \tag{6.52}$$

то

$$Z^T(x)Y(x) = C, \tag{6.53}$$

де C – постійна матриця. Дійсно

$$\frac{d}{dx} Z^T Y = \frac{dZ^T}{dx} Y + Z^T \frac{dY}{dx} = -Z^T AY + Z^T AY = 0.$$

Якщо $C = E$, то

$$Z^T(x) = Y^{-1}(x). \tag{6.54}$$

6.2.6. Неоднорідні системи

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x), \tag{6.55}$$

яка називається лінійною неоднорідною системою звичайних диференціальних рівнянь.

Теорема 6.11 Якщо $\bar{y}(x)$ – розв'язок неоднорідної системи, тобто $L(\bar{y}) = f(x)$, а $y_1(x)$ – розв'язок однорідної системи $L(y_1) = 0$, то сума $y_1(x) + \bar{y}(x)$ є розв'язком неоднорідної системи.

Доведення. Дійсно

$$L(\bar{y} + y_1) = L(\bar{y}) + L(y_1) \equiv f(x).$$

Теорема 6.12. Загальний розв'язок неоднорідної системи (6.55) можна записати у вигляді суми загального розв'язку однорідного і частинного неоднорідного.

Доведення. Нехай $Y(x)$ – інтегральна матриця однорідної системи, $\bar{y}(x)$ – частинний розв'язок неоднорідної системи. Тоді

$$y = Y(x)c + \bar{y}(x) \tag{6.56}$$

в силу теореми 6.11 – розв'язок системи однорідних диференціальних рівнянь (6.55).

Для доведення теореми досить показати, що система алгебраїчних рівнянь

$$Y(x_0)c = y(x_0) - \bar{y}(x_0), \tag{6.57}$$

де $y(x_0)$ – довільний початковий вектор, має єдиний розв'язок . Так як $Y(x)$ – інтегральна матриця, то в такому випадку вона має обернену на (a,b). Тому $c = Y^{-1}(x_0)\big(y(x_0) - \bar{y}(x_0)\big)$. Теорема доведена.

6.2.7. Метод варіації довільної сталої

Загальний розв'язок системи однорідних диференціальних рівнянь (6.28) запишемо у формі

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(i)}(x), \tag{6.58}$$

де c_i – довільні сталі.

Розв'язок лінійної системи диференціальних рівнянь (6.55) шукаємо у вигляді

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y^{(i)}(x), \tag{6.59}$$

де $c_i(x),\ i = 1,2,\ldots,n$ невідомі функції.

Підставляючи (7.33) в (7.29) отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y^{(i)}(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) {y^{(i)}}'(x) = A(x) \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y^{(i)}(x) + f(x)$$

Так як ${y^{(i)}}' = A(x) y^{(i)},\ i = 1,2,\ldots,n$, то остаточно функції $c_i(x)$ шукаємо з системи диференціальних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y^{(i)}(x) = f(x). \tag{6.60}$$

Визначник системи (6.60) $W(x) \neq 0$, якщо $y^{(i)}(x), i = 1,2,\ldots,n$ – фундаментальна система рівнянь. З (6.60) визначаємо
$c_i'(x) = \varphi_i(x), i = 1,2,\ldots,n$.
Звідки

$$c_i(x) = \int \varphi_i(x)dx + c_i,\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Тому

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int \varphi_i(x)dx + c_i \right) y^{(i)}(x) \tag{6.61}$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (6.55).

6.2.8. Формула Коші

Розглянемо задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x),\ y(x_0) = y_0. \tag{6.62}$$

Припустимо, що ми знаємо матрицю $Y(x, x_0)$, яка нормована по моменту x_0

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y,\ Y(x_0, x_0) = E. \tag{6.63}$$

Шукаємо розв'язок задачі Коші (6.62) у вигляді

$$y(x) = Y(x, x_0)c(x). \tag{6.64}$$

Підставляючи (6.64) в (6.62) отримаємо

$$Y(x, x_0)c'(x) + Y'(x, x_0)c(x) = A(x)Y(x, x_0)c(x) + f(x).$$

Звідки $c'(x) = Y^{-1}(x, x_0) f(x)$, тобто

$$c(x) = c(x_0) + \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(\tau, x_0) f(\tau)d\tau.$$

Але $c(x_0) = y(x_0) = y^{(0)}$, тому

$$y(x) = Y(x, x_0)y^{(0)} + \int_{x_0}^{x} Y(x, x_0)Y^{-1}(\tau, x_0) f(\tau)d\tau.$$

Враховуючи, що $Y(x, \tau) = Y(x, x_0)Y^{-1}(\tau, x_0)$, остаточно запишемо

$$y(x) = Y(x, x_0)y^{(0)} + \int_{x_0}^{x} Y(x, \tau) f(\tau)d\tau. \tag{6.65}$$

Формула (6.65) називається формулою Коші.

Приклад 6.2. Розв'язати систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + ay \end{cases}.$$

Розв'язання. Приведемо дану систему до диференціального рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2}=a\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=2a\frac{dx}{dt}-(1+a^2)x\,.$$

Звідки отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2a\frac{dx}{dt}+(1+a^2)x=0\,.$$

Запишемо та розв'яжемо характеристичне рівняння $\lambda^2-2a\lambda+(1+a^2)=0$. Знайдемо $\lambda_{1,2}=a\pm i$. Тоді

$$x=e^{at}(c_1\cos t+c_2\sin t),\;\; y=\frac{dx}{dt}-ax=e^{at}(-c_1\sin t+c_2\cos t)$$

– загальний розв'язок.

Приклад 6.3. Розв'язати систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{y}{t}\\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{x}{t}\end{cases},\; t>0\,.$$

Розв'язання. Складемо і віднімемо почленно два рівняння, отримаємо

$$\frac{d(x+y)}{dt}=-\frac{1}{t}(x+y)\,,$$

$$\frac{d(x-y)}{dt}=\frac{1}{t}(x-y)\,.$$

Звідки $x+y=\dfrac{c_1}{t}$, $x-y=c_2t$, тобто

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c_1}{t}+c_2t\right)\\ y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c_1}{t}-c_2t\right)\end{cases}$$

– загальний розв'язок нашої системи.

Приклад 6.4. Перевірити, чи є першим інтегралом системи

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{y^2-t}{x}\end{cases}\qquad(6.66)$$

функції а) $z=t^2+2xy$; б) $z=x-ty^2$.

Розв'язання. Обчислимо повні похідні по t від заданих функцій на розв'язках системи (6.66).

а) $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{(6.66)}=2t+2\dfrac{dx}{dt}y+2x\dfrac{dy}{dt}=2t-2y^2+2x\dfrac{y^2-t}{x}=2t-2y^2+2y^2-2t\equiv 0$ – є інтегралом;

б) $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{(6.66)}=\frac{dx}{dt}-y^2-2ty\frac{dy}{dt}=-y-y^2-2ty\frac{y^2-t}{x}\neq 0$ – не є інтегралом.

6.3. Однорідні лінійні системи диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами

6.3.1. Випадки інтегрованості лінійних систем в квадратурах

Розглянемо матричне диференціальне рівняння

$$\frac{dY}{dx}=A(x)Y\ ,\ x_0\le x<\infty, \tag{6.67}$$

де $A(x)=\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n}$ – задана матриця , $Y(x)$ – фундаментальна матриця .

Розглянемо випадок (Лапо–Данилевського), коли матриця диференціального рівняння (6.67) виражається через $A(x)$.

Припустимо, що $A(x)$ комутує з своїм інтегралом, тобто

$$A(x)\int_{x_0}^{x}A(\tau)d\tau=\int_{x_0}^{x}A(\tau)d\tau A(x), \tag{6.68}$$

$$\|A(x)\|\le a_0<\infty \tag{6.69}$$

на будь-якому кінцевому інтервалі.

При цих умовах нормальна фундаментальна матриця має вигляд

$$Y(x)=e^{\int_{x_0}^{x}A(\tau)d\tau}\ . \tag{6.70}$$

Дійсно, за визначенням маємо

$$e^M=E+\frac{M}{1!}+\frac{M^2}{2!}+\cdots+\frac{M^m}{m!}+\cdots\ , \tag{6.71}$$

де

$$M=M(x)=\int_{x_0}^{x}A(\tau)d\tau\,. \tag{6.72}$$

З (6.71) випливає, що $Y(x_0)=E$.

Якщо виконується умова (6.68), то матриця $M(x)$ комутує з своєю похідною

$$M'(x)=A(x).$$

Тому

$$\frac{dM^2}{dx}=\frac{dM}{dx}M+M\frac{dM}{dx}=2\frac{dM}{dx}M\ .$$

По індукції можна вивести, що

$$\frac{dM^k}{dx}=k\frac{dM}{dx}M^{k-1},\ \ k=3,4,\ldots \tag{6.73}$$

З урахуванням (6.73) продиференціюємо (6.71)

$$\frac{de^M}{dx}=M'+M'M+\cdots+\frac{M'M^{m-1}}{(m-1)!}+\cdots=M'\left(E+M+\frac{M^2}{2!}+\cdots\right)=M'e^M\ .$$

Таким чином

$$\frac{d}{dx} e^{\int_{x_0}^{x} A(\tau)d\tau} = A(x) e^{\int_{x_0}^{x} A(\tau)d\tau}. \quad (6.74)$$

Матричний ряд (6.71), який складається з n^2 скалярних рядів збіжний на будь-якому кінцевому інтервалі $x_0 \le x \le x_1 < \infty$. Так як $\left|M^k\right| \le |M|^k$, то в силу (6.69) кожен із n^2 скалярних рядів мажорується збіжним рядом

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_0^m \frac{(x - x_0)^m}{m!}.$$

Звідси випливає рівномірна збіжність матричного ряду на будь-якому кінцевому інтервалі і сума (6.71) є неперервною функцією на цьому інтервалі.

6.3.2. Матричний метод інтегрування однорідних стаціонарних систем

Припустимо, що в системі (6.67) матриця A постійна. Тоді виконуються умови комутативності (6.68). Тому, згідно (6.70), маємо

$$Y(x) = e^{A(x - x_0)}. \quad (6.75)$$

Розглянемо випадок $x_0 = 0$, тоді

$$Y(x) = e^{Ax}. \quad (6.76)$$

Властивості матричної експоненти:

а) якщо $AB=BA$, то $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$;

б) якщо $A = T^{-1}JT$, то $e^A = T^{-1}e^J T$;

в) матриця $Y(x) = e^{Ax}$ є розв′язком матричного диференціального рівняння (6.67) з початковими умовами $Y(0) = E$. Тому розв'язок задачі Коші запишеться таким чином $y(x) = Y(x)y_0$.

Таким чином , для знаходження загального розв'язку системи необхідно знайти матрицю e^{Ax}.

Для цього представимо матрицю A у вигляді $A = T^{-1}JT$, де J – жорданова форма матриці A. Тоді

$$e^{Ax} = T^{-1}e^{Jx}T. \quad (6.77)$$

При обчисленні (6.77) враховується, що якщо J_{ρ_k} – k-та клітина Жордана

$$J_{\rho_k} = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad (6.78)$$

то представимо її у вигляді

$$J_1 = \lambda_k E_{\rho_k} + I_{\rho_k}, \quad (6.79)$$

де

$$I_{\rho_k} = \lambda_k E_{\rho_k} + I_{\rho_k},$$

$$I_{\rho_k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо

$$e^{J_{\rho_k} x} = e^{\lambda_k x} e^{I_{\rho_k} x}. \tag{6.80}$$

Матрицю $e^{I_{\rho_k} x}$ можна знайти з допомогою ряду (6.71), так як $I^{\rho_k} = 0$. Це означає, що в ряді (6.71) відмінні від нуля тільки перші ρ_k членів.

Розглянемо ряд прикладів, в яких матриця Жордана має різну структуру, тобто корені характеристичного рівняння будуть мати різний вигляд.

Приклад 6.5. Обчислити e^{Ax}, якщо А = $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Розглянемо характеристичне рівняння $|\lambda E - A| = \lambda^2 - 1, \quad \lambda_{1,2} = \pm 1$.

Знайдемо невироджену матрицю $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, щоб $A = T^{-1} J T$, де $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} a + 2b = 0 \\ c + d = 0 \end{cases},$$

тобто

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ і } T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Остаточно маємо:

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^x - e^{-x} & -e^x + e^{-x} \\ 2e^x - 2e^{-x} & -e^x + 2e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Приклад 6.6. Знайти $Y(x) = e^{Ax}$, якщо А = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Знайдемо корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Оскільки $rank(A - \lambda E) = 1$, то $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Визначимо матрицю $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тому $e^{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Але $e^{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x} = e^{2x} e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x} = \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$. Тому $e^{Ax} = \begin{pmatrix} (x+1)e^{2x} & xe^{2x} \\ -xe^{2x} & (1-x)e^{2x} \end{pmatrix}$.

<u>Приклад 6.7</u>. Знайти e^{Ax} , якщо $A=\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

<u>Розв'язання</u>. Так як $\lambda_{1,2}=1\pm 2i$, то $J=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ – жорданова форма. Аналогічно визначаємо

$$T=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ T^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$e^{Ax}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}x} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Представимо

$J=1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, тоді $e^{Jx}=e^{1\cdot Ex}e^{2Ix}=1\cdot e^{x}Ee^{2Ix}=e^{x}e^{2Ix}$, де $I=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Легко обчислити (згідно (6.71)), що

$$e^{Ix}=\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix},\ e^{2Ix}=\begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}.$$

Тому

$$e^{Ax}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{x}\cos 2x & e^{x}\sin 2x \\ -e^{x}\sin 2x & e^{x}\cos 2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} e^{x}(2\sin 2x+\cos 2x) & 5e^{x}\sin 2x \\ -e^{x}\sin 2x & e^{x}(\cos 2x-2\sin 2x) \end{pmatrix}.$$

6.3.3. Структура фундаментальної системи розв'язків. Метод Ейлера

Розглянемо лінійну систему звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами в векторно – матричній формі

$$\frac{dy}{dx}=Ay. \tag{6.81}$$

Лінійно незалежні розв'язки, згідно Ейлеру, шукаємо у вигляді

$$y=he^{\lambda x}, \tag{6.82}$$

де h – власний вектор , λ – власне значення, тобто

$$\lambda he^{\lambda x}=Ahe^{\lambda x},\quad Ah=\lambda h. \tag{6.83}$$

Число λ повинно задовольняти характеристичне рівняння

$$|\lambda E-A|=\lambda^{n}+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0. \tag{6.84}$$

Розглянемо різні випадки:

а) корені $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ характеристичного рівняння дійсні і різні. Тоді

$$y^{(1)}=h^{(1)}e^{\lambda_1 x},\ldots,y^{(n)}=h^{(n)}e^{\lambda_n x} \tag{6.85}$$

система n – лінійно незалежних розв′язків, так як в даному випадку кожному $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ відповідають лінійно незалежні власні вектори $h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(n)}$;

б) характеристичне рівняння має пару комплексно спряжених коренів $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Тоді кореню $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ відповідає власний вектор $h^{(1)} = a + bi$. Це означає, що система (6.81) має комплексний розв′язок

$$y(x) = h^{(1)} e^{\lambda_1 x} = (a + bi) e^{(\alpha + \beta i)} = (a + bi) e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) =$$
$$= e^{\alpha x} (a \cos \beta x - b \sin \beta x) + i e^{\alpha x} (b \cos \beta x + a \sin \beta x).$$

Звідки

$$y^{(1)}(x) = e^{\alpha x} (a \cos \beta x - b \sin \beta x), \; y^{(2)}(x) = e^{\alpha x} (b \cos \beta x + a \sin \beta x) \qquad (6.86)$$

– два лінійно незалежні розв’язки, які відповідають кореням $\alpha \pm i\beta$. При цьому розгляд кореня $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ не дає нових лінійно незалежних розв'язків;

в) розглянемо випадок кратних коренів. Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ ($s<n$) – різні розв'язки характеристичного рівняння (6.84), тобто

$$(\lambda - \lambda_1)^{\rho_1} (\lambda - \lambda_2)^{\rho_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{\rho_s} = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Тоді матрицю A можна представити клітками Жордана, тобто знайдеться неособлива матриця S така, що

$$S^{-1} A S = diag\big(I\rho_1(\lambda_1), I\rho_2(\lambda_2), \ldots, I\rho_s(\lambda_s)\big),$$

де

$$I_{\rho_j}(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

Отже, заміною $y = Sz$ прийдемо до системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dx} = S \frac{dz}{dx} = ASz, \; \frac{dz}{dx} = S^{-1} ASz.$$

Якщо $z = \begin{pmatrix} z^{(1)} \\ \vdots \\ z^{(s)} \end{pmatrix}$, $z^{(j)}$ – вектори розмірності ρ_j, $j = 1,2,\ldots,s$, то маємо

$$\frac{dz^{(1)}}{dx} = I_{\rho_1}(\lambda_1) z^{(1)}, \ldots, \frac{dz^{(s)}}{dx} = I_{\rho_s}(\lambda_s) z^{(s)}. \qquad (6.87)$$

Розглянемо одну з підсистем системи (6.87) з матрицею

$$I_{\rho_j} = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_j & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} + I_{\rho_j}(0) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_j & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальна матриця для системи (6.87) має вигляд

$$Z = \begin{pmatrix} e^{I_{\rho_1}(\lambda_1)x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{I_{\rho_2}(\lambda_2)x} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{I_{\rho_s}(\lambda_s)x} \end{pmatrix},$$

то знаючи заміну $y = Sz$, матриця $Y(x) = SZ$ буде фундаментальною для даної системи.

Визначимо

$$e^{I_{\rho_j}(\lambda_j)x} = e^{\left[\begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} + I_{\rho_j}(0)\right]x} = e^{\lambda_j x} e^{I_{\rho_j}(0)x}.$$

Але $e^{I_{\rho_j}(0)x} = E_{\rho_j} + I_{\rho_j}(0)x + \frac{1}{2!} I_{\rho_j}^2(0)x^2 + \dots + \frac{1}{(\rho_j - 1)!} I_{\rho_j}^{\rho_j - 1}(0)x^{\rho_j - 1}$, де E_{ρ_j} – одинична матриця розмірності ρ_j, причому

$$I_{\rho_j}^2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \; I_{\rho_j}^{\rho_j - 1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином

$$e^{I_{\rho_j}(0)x} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j x} & x e^{\lambda_j x} & \vdots & \frac{x^{\rho_j - 1}}{(\rho_j - 1)!} e^{\lambda_j x} \\ 0 & e^{\lambda_j x} & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & e^{\lambda_j x} \end{pmatrix}.$$

Домножаючи S на отриману матрицю будемо мати інтегральну матрицю для даної системи.

Враховуючи вид інтегральної матриці для побудови лінійно незалежних розв'язків j – ої підсистеми

$$\frac{dz^{(j)}}{dx} = I_{\rho_j}(\lambda_j) z^{(j)} \tag{6.88}$$

можна поступити так. Шукаємо $z^{(j,1)} = h^{(j,1)} e^{\lambda_j x}$,

$$\left(\lambda_j E_{\rho_j} - I_{\rho_j}(\lambda_j)\right)h^{(j,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} h^{(j,1)} = 0,\ h^{(j,1)} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тобто $z^{(j,1)} = e^{\lambda_j x}\begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $z^{(j,2)} = \left(h^{(j,1)}x + h^{(j,2)}\right)e^{\lambda_j x}$. Звідки

$$\left(I_{\rho_j}(\lambda_j) - \lambda_j E_{\rho_j}\right)h^{(j,2)} = h^{(j,1)}. \tag{6.89}$$

Тобто

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} h^{(j,2)} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ h^{(j,2)} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже

$$z^{(j,2)} = \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right] e^{\lambda_j x}.$$

Міркуючи аналогічно можна отримати $h^{(j,\rho_j)} = \begin{pmatrix} c_{\rho_j} \\ \vdots \\ c_1 \end{pmatrix}$, тому

$$z^{(j,\rho_j)} = \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x^{\rho_j - 1} + \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x^{\rho_j - 2} + \dots + \begin{pmatrix} c_{\rho_j} \\ \vdots \\ c_1 \end{pmatrix}\right] e^{\lambda_j x}. \tag{6.90}$$

Висновки. Якщо характеристичному числу λ_j відповідає тільки один елементарний дільник, то ми отримуємо тільки одну групу розв′язків виду (6.90), яка містить ρ_j розв′язків (цей випадок відповідає тому, що ранг характеристичної матриці дорівнює (*n-1*)). Якщо ж $\lambda = \lambda_j$ відповідає декілька елементарних дільників $(\lambda - \lambda_j)^{l_1} \dots (\lambda - \lambda_j)^{l_m}$, $(l_1 + \dots + l_m = \rho_j)$, то йому відповідає *m* груп розв′язків типу (6.90). Причому кожна з груп має відповідно

$l_1,\ldots,l_m$ – розв′язків. Якщо всі елементарні дільники прості, то ми маємо випадок простого кореня.

Розділ 7. Особливі точки диференціальних рівнянь на площині. Елементи теорії стійкості

7.1. Особливі точки диференціальних рівнянь на площині

Розглянемо скалярне диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{7.1}$$

Якщо $f(x, y)$ в околі точки (x_0, y_0) задовольняє умовам теореми Пікара, то через точку (x_0, y_0) проходить лише одна інтегральна крива диференціального рівняння (7.1).

Припустимо, що функція $f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) не є неперервною, то можливі випадки:

а) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$ (A – деяке число);

б) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \infty$;

в) *f(x,y)* – невизначена в точці (x_0, y_0).

Тоді перші два випадки зводяться до випадку, який розглядає теорема Пікара:

а) $f(x, y)$ можна довизначити – $f(x_0, y_0) = A$;

б) замість диференціального рівняння (7.1) розглядати рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)} \tag{7.2}$$

і прийнявши $\dfrac{1}{f(x_0, y_0)} = 0$ знаходимо єдиний розв′язок $x = \varphi(y)$ з вертикальною дотичною в точці (x_0, y_0).

У випадку в) точка (x_0, y_0) називається ізольованою особливою точкою.

Дослідження особливих точок проведемо для диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy}, \tag{7.3}$$

де a , b , c , d – дійсні числа : $ad - bc \neq 0$, так як в противному диференціальне рівняння (7.3) приводиться до рівняння $\dfrac{dy}{dx} = const$.

Нас цікавить поведінка інтегральних кривих в околі точки $(0,0)$. Перепишемо диференціальне рівняння (7.3) у вигляді

$$\frac{dx}{cx + dy} = \frac{dy}{ax + by} = dt$$

і перейдемо до системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = cx + dy \\ \dfrac{dy}{dt} = ax + by \end{cases}. \qquad (7.4)$$

Запишемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} c-\lambda & d \\ a & b-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Нехай λ_1, λ_2 – корені характеристичного рівняння. Розглянемо наступні випадки.

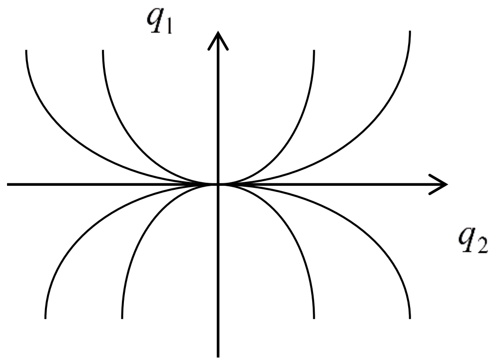
1. Корені дійсні , різні і одного знаку , тобто $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді система диференціальних рівнянь (7.4) має жорданову форму

$$\begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = \lambda_1 q_1 \\ \dfrac{dq_2}{dt} = \lambda_2 q_2 \end{cases}. \qquad (7.5)$$

Звідси $\dfrac{dq_1}{dq_2} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\dfrac{q_1}{q_2}$ і, отже

$$q_1 = c|q_2|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}. \qquad (7.6)$$

Якщо $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, тоді $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} > 1$ і всі криві (7.6) примикають до точки (0,0), тобто $q_1 \to 0$ коли $q_2 \to 0$ і розв′язок дотичний в цій точці до осі Oq_2 (мал. 7.1).

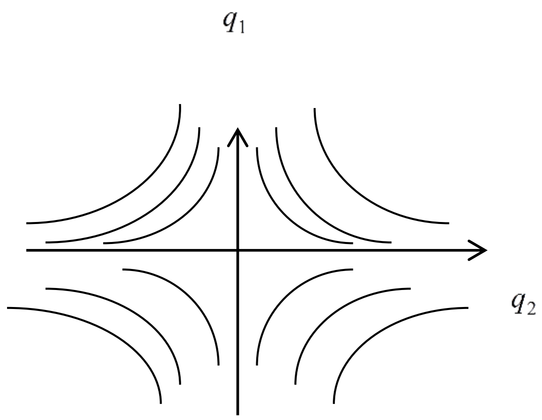


Мал. 7.1

В цьому випадку інтегральні криві дотичні тієї осі, якій відповідає мінімальне по абсолютній величині власне значення. Особлива точка – **вузол**.

Крім інтегральних кривих до особливої точки примикають дві полуосі осі Oq_1, тобто $q_2 = 0, q_1 \neq 0$.

2. Припустимо, що $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Тоді $q_1 = c|q_2|^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$ в даному випадку тільки чотири інтегральні корені $q_1 = 0$ $(q_2 \neq 0)$, $q_2 = 0$ $(q_1 \neq 0)$ примикають до особливої точки (0,0). Останні інтегральні криві мають вигляд, представлений на мал. 7.2.



Мал. 7.2

Особлива точка – **сідло.**

3. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – комплексні корені.

В цьому випадку, в силу довільності матриці перетворення до жорданової форми, елементи цієї матриці можна вибрати так, що $q_{1,2} = u \pm iw$, де u, w – дійсні змінні. Отже,

$$\frac{du + idw}{du - idw} = \left(\frac{\alpha + i\beta}{\alpha - i\beta}\right)\left(\frac{u + iw}{u - iw}\right), \tag{7.7}$$

$$(du + idw)[(\alpha u - \beta w) - i(\alpha w + \beta u)] = (du - idw)[(\alpha u - \beta w) + i(\alpha w + \beta u)].$$

Прирівнюючи дійсні і уявні частини, отримаємо диференціальне рівняння:

дійсні: $du(\alpha u - \beta w) + dw(\alpha w + \beta u) \equiv du(\alpha u - \beta w) + dw(\alpha w + \beta u)$;

уявні: $dw(\alpha u - \beta w) - du(\alpha w + \beta u) \equiv -dw(\alpha u - \beta w) + du(\alpha w + \beta u)$.

З останньої рівності маємо

$$\frac{du}{dw} = \frac{\alpha u - \beta w}{\beta u + \alpha w}. \tag{7.8}$$

Диференціальне рівняння (7.8) перепишемо у вигляді

$$\frac{\beta(udw + wdw)}{u^2 + w^2} = \frac{\alpha(udw - wdu)}{u^2 + w^2}.$$

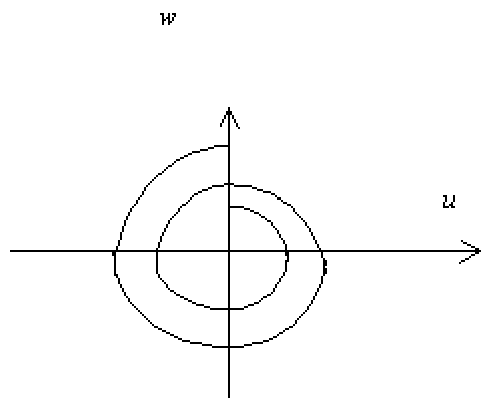
Звідки $\frac{1}{2}\ln\left(u^2 + w^2\right) + \frac{\alpha}{\beta} arctg \frac{w}{u} = \ln c$,

$$\sqrt{u^2 + w^2} = ce^{-\frac{\alpha}{\beta} arctg \frac{w}{u}}. \tag{7.9}$$

В (7.9) покладемо $u = r\cos\varphi, \quad w = r\sin\varphi$, тоді

$$r = ce^{-\frac{\alpha}{\beta}\varphi}. \tag{7.10}$$

Формулою (7.10) задається сімейство логарифмічних спіралей (мал. 7.3).

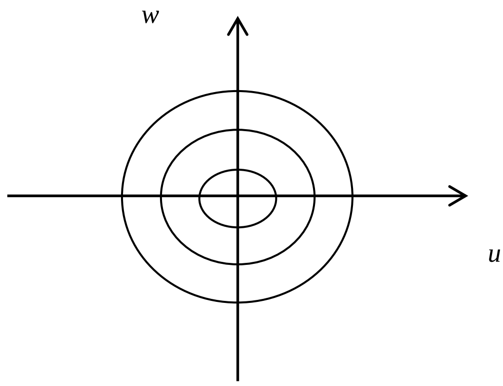


Мал. 7.3

В даному випадку всі інтегральні криві примикають до точки (0,0), роблячи нескінчену кількість оборотів. Така ж картина буде і в площині XOY. Особлива точка – **фокус**.

4. Корені уявні , тобто $\alpha = 0$.Тоді криві (7.10) будуть замкнені, в площині (u,w) – будуть концентричні кола (мал. 7.4).

Особлива точка – **центр**.



Мал. 7.4

5. Розглянемо випадок кратних коренів $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

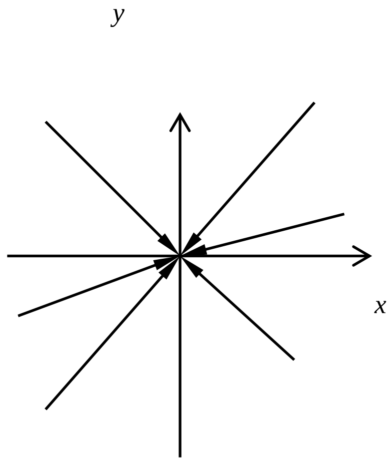
В цьому випадку жорданова форма матриці залежить від кратності елементарних дільників:

а) кореню λ відповідає два простих елементарних дільника, тобто $r(A - \lambda E)$=0. Тоді a=d=0 , b=c=λ. Отже

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \tag{7.11}$$

і y=cx ($x \neq 0$), x=0 ($y \neq 0$).

Ми отримали сімейство напівпрямих, які примикають до точки (0,0) (мал. 7.5).



Мал. 7.5

Особлива точка – **дикретичний вузол**;

б) кореню λ відповідає елементарний дільник кратності 2, тобто $r(A-\lambda E)$=1 і матриця Жордана має форму $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Отже, маємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = \lambda q_1 + q_2 \\ \dfrac{dq_2}{dt} = \lambda q_2 \end{cases}. \tag{7.12}$$

Звідки

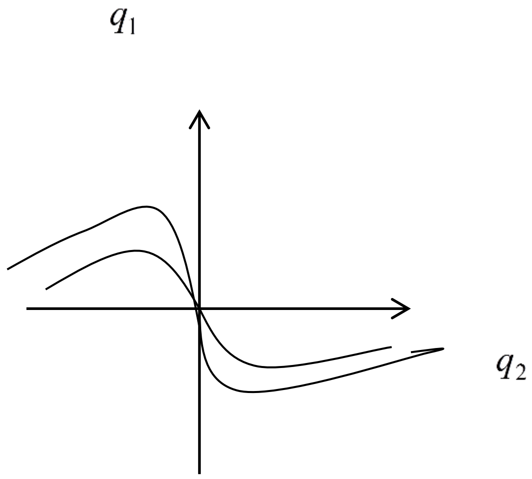
$$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{q_1}{q_2} + \frac{1}{\lambda}. \tag{7.13}$$

Розв′язок диференціального рівняння (7.13) запишемо у вигляді

$$q_1 = \frac{1}{\lambda} q_2 \ln|q_2| + cq_2, \quad q_2 \neq 0. \tag{7.14}$$

Крім (7.14) треба додати два розв′язки $q_2 = 0$ ($q_1 \neq 0$), $q_1 = 0$ ($q_2 \neq 0$).

З (7.14) випливає, що інтегральні криві примикають до точки (0,0), кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює $\pm\infty$ (мал. 7.6).



Мал. 7.6

Особлива точка – **вироджений вузол**.

7.2. Стійкість розв'язку систем звичайних диференціальних рівнянь. Перший метод Ляпунова

7.2.1. Основні поняття і визначення стійкості по Ляпунову

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \qquad t \ge t_0 , \tag{7.15}$$

де $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – n – вимірний вектор стану об′єкта, $f(x,t) = \begin{pmatrix} f_1(x,t) \\ \vdots \\ f_n(x,t) \end{pmatrix}$ – вектор - функція розмірності n, яка задовольняє умовам теореми існування і єдиності.

Без обмеження на загальність міркувань припустимо, що $x(t) \equiv 0$ – розрахунковий розв′язок (незбурений рух). Дійсно, якщо незбурений рух ненульовий $x(t) = \bar{x}(t,t_0,x_0)$, то заміною $x = y + \bar{x}$ ми приходимо до розглянутого випадку

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d\bar{x}}{dt} = f(x,t) - f(\bar{x},t) = f(y+\bar{x},t) - f(\bar{x},t) = \varphi(y,t). \tag{7.16}$$

Для системи диференціальних рівнянь (7.16) незбурений рух $y(t) \equiv 0$, $t \ge t_0$.

Розв′язок $x(t) \equiv 0$, який досліджується на стійкість називається незбуреним, інші розв′язки будемо називати збуреними.

<u>Означення 7.1.</u> Незбурений розв′язок $x(t) \equiv 0$ системи диференціальних рівнянь (7.15) будемо називати стійким по Ляпунову, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$, що $\|x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon$, $t \ge t_0$ лише тільки $\|x_0\| < \delta$.

<u>Означення 7.2</u>. Незбурений розв′язок $x(t) \equiv 0$ називають асимптотично стійким по Ляпунову, якщо він стійкий по Ляпунову, тобто виконується означення 7.1 і $\|x(t,t_0,x_0)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Множину $\Omega(t_0)=\{x_0:\|x(t,t_0,x_0)\|\to 0,\, t\to\infty\}$ будемо називати множиною асимптотичної стійкості.

Якщо означення 7.1 не виконується, то незбурений розв′язок $x(t)\equiv 0$ будемо називати нестійким по Ляпунову.

Для дослідження питання стійкості існує два методи Ляпунова. Суть першого методу полягає в тому, що для аналізу стійкості знаходиться загальний розв′язок системи диференціальних рівнянь (7.15). По його виду можна судити про стійкість або не стійкість розв′язку системи диференціальних рівнянь (7.15). Знайти загальний розв′язок системи диференціальних рівнянь (7.15) важко, тому і не завжди можна використати цей метод.

Приклад 7.1. Дослідити на стійкість розв'язки $x(t)\equiv 0$ в залежності від параметра a такого рівняння:

$$\frac{dx}{dt}=ax.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок нашого рівняння запишемо в формі Коші $x(t)=x_0e^{at},\quad t\ge 0$.

Тому розв'язок $x(t)\equiv 0$ при $\begin{cases} a<0-\textit{асимптотично}\quad \textit{стійкий}\\ a=0-\textit{стійкий}\\ a>0-\textit{не}\quad \textit{стійкий}\end{cases}$.

В другому методі для дослідження стійкості використовуються спеціальні функції, які називаються функціями Ляпунова. В цьому випадку загального розв′язку можна не знати.

7.2.2 Перший метод Ляпунова. Дослідження стійкості лінійних нестаціонарних систем

Розглянемо лінійну систему однорідних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x, \tag{7.17}$$

де $A(t)=\{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{n}$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$.

Тоді розв′язок однорідного диференціального рівняння (7.17) можна записати у формі Коші

$$x(t)=X(t,t_0)x_0,\quad t\ge t_0, \tag{7.18}$$

де $X(t,t_0)$ – фундаментальна матриця розв'язків, нормована по моменту t_0

$$\frac{dX(t,t_0)}{dt}=A(t)X(t,t_0),\qquad X(t,t_0)=E. \tag{7.19}$$

Питання про стійкість розв′язується шляхом аналізу властивостей матриці $X(t,t_0)$. Розглянемо наступні випадки:

а) матриця $X(t,t_0)=\{x_{ij}(t,t_0)\}_{i,j=1}^{n}$ обмежена при $t\ge t_0$

$$\|X(t,t_0)\| \le \sum_{i,j=1}^{n} |x_{ij}(t,t_0)| \le M, \; t \ge t_0.$$

В цьому випадку $\|x(t)\| \le \|X(t,t_0)\| \|x_0\| < \varepsilon$ при $\|x_0\| < \delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Тобто при цих умовах незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ є стійким;

б) припустимо , що $\lim_{t\to\infty} X(t,t_0) = 0$. В цьому випадку матриця $X(t,t_0)$ обмежена при $t \ge t_0$ і розв′язок $x(t) \equiv 0$, $t \ge t_0$ є стійким. Крім цього з формули Коші випливає, що $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$. Таким чином, незбурений розв′язок $x(t) \equiv 0$ є асимптотично стійким;

в) нехай $X(t,t_0)$ – необмежена при $t \ge t_0$, тобто існує зростаюча послідовність чисел $t_0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots$ така, що $\lim_{k\to\infty} \|X(t_k,t_0)\| = \infty$.

В цьому випадку, серед функцій $x_{ij}(t,t_0)$ знайдеться хоча б одна $x_{pl}(t_k,t_0)$, для якої $\lim_{k\to\infty} |x_{pl}(t_k,t_0)| = \infty$.

Розглянемо розв′язок $\bar{x}(t)$ з початковими умовами

$$\bar{x}_j(t_0) = 0, \quad j = 1,\ldots,n, \quad j \ne l, \quad \bar{x}_l(t_0) \ne 0.$$

Тоді розв'язок (координата) $\bar{x}_p(t) = x_{pl}(t,t_0)\bar{x}_l(t_0)$ буде зростати при $t \to \infty$, які б малі по модулю початкові умови $\bar{x}_l(t_0)$ ми не взяли. Це означає, що незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ буде нестійким.

Це ми показали достатні умови стійкості. Покажемо, що ці умови являються необхідними.

Дійсно, припустимо, що незбурений розв′язок $x(t) \equiv 0$ є стійким. Тоді

$$\|x(t)\| < \varepsilon \tag{7.20}$$

при $t \ge t_0$, лише тільки $\|x_0\| < \delta$. Нерівність (7.20) означає, що величини

$$|x_i(t)| = \left| \sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t,t_0) x_j(t_0) \right| \tag{7.21}$$

є обмеженими. Поклавши в (7.21)

$$x_j(t_0) = 0, \quad j = 1,\ldots,n, \quad x_k(t_0) \ne 0$$

отримаємо

$$|x_{ik}(t,t_0)| \le \frac{|x_i(t)|}{|x_k(t_0)|} \le L = const, \qquad t \ge t_0. \tag{7.22}$$

Звідки

$$\|X(t,t_0)\| \le n^2 L, \; t \ge t_0, \tag{7.23}$$

тобто, матриця $X(t,t_0)$ є обмеженою при $t \ge t_0$.

Якщо незбурений розв′язок $x(t) \equiv 0$ асимптотично стійкий, то $\lim_{t\to\infty} |x_i(t)| = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$ і з (7.22) випливає

$$\lim_{t\to\infty} X(t,t_0) = 0.$$

Якщо незбурений розв'язок нестійкий, то $X(t,t_0)$ необмежена матриця при $t \ge t_0$, так як в противному з її обмеженості випливає стійкість незбуреного розв′язку $x(t) \equiv 0$. Таким чином, ми довели наступну теорему.

Теорема 7.1. Для стійкості незбуреного розв′язку $x(t) \equiv 0$ лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь (7.17) необхідно і достатньо, щоб фундаментальна матриця $X(t,t_0)$ цієї системи була обмежена при $t \ge t_0$;
для асимптотичної стійкості – необхідно і достатньо, щоб $\lim\limits_{t\to\infty} X(t,t_0) = 0$;
для нестійкості – необхідно і достатньо, щоб фундаментальна матриця була необмеженою при $t \ge t_0$.

Зауваження 7.1. Так як фундаментальна матриця $X(t,t_0)$ не залежить від початкових умов $x(t_0)$, то всі розв′язки системи (7.17) будуть стійкими або нестійкими.

7.2.3. Стійкість розв′язку лінійних систем з сталими коефіцієнтами. Критерій Гурвіца

Припустимо , що в системі (7.17) матриця A має постійні елементи, тоді $X(t,t_0) = e^{A(t-t_0)}$ і умови стійкості можна виразити через матрицю A.
Відомо, що в цьому випадку лінійно незалежні розв′язки системи диференціальних рівнянь (7.17) мають вигляд:
а) $x^{(i)}(t) = h^{(i)} e^{\lambda_i t}$, $i = 1,\ldots,n$ для випадку, коли корені відповідного характеристичного рівняння λ_i дійсні і різні;
б) $x(t) = e^{(\alpha + it\beta)}\left(h^{(1)} + h^{(2)}\right)$, $x^{(1)}(t) = \operatorname{Re} x(t)$, $x^{(2)} = \operatorname{Im} x(t)$ – коли характеристичне рівняння має пару комплексно спряжених коренів $\alpha \pm i\beta$;
в) $x^{(k)}(t) = \left(h^{(1)} t^{k-1} + \cdots + h^{(k)}\right) e^{\lambda t}$, $k = 1,\ldots,m$ – коли λ корінь характеристичного рівняння кратності *m*.
Аналіз розв′язків приводить до твердження.

Теорема 7.2. Незбурений розв′язок $x(t) \equiv 0$ системи диференціальних рівнянь (7.17) з постійними коефіцієнтами тоді і тільки тоді є:
а) стійким, якщо дійсні частини характеристичного рівняння

$$|\lambda E - A| = 0 \tag{7.24}$$

недодатні, причому характеристичним числам з нульовими дійсними частинами відповідають одномірні клітки Жордана. Тобто такі характеристичні числа мають прості елементарні дільники;
б) асимптотично стійким, якщо дійсні частини коренів характеристичного рівняння (7.24) всі від′ємні;
в) нестійким, якщо хоча б один з коренів характеристичного рівняння (7.24) має додатну дійсну частину, або хоча б одному кратному кореню з нульовою дійсною частиною відповідала неодномірна клітка Жордана (таке число має непростий елементарний дільник).
Розглянемо характеристичне рівняння:

$$|\lambda E - A| = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0,\ a_0 > 0\,. \qquad (7.25)$$

Складемо матрицю Гурвіца розмірності $n \times n$:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \vdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_1 & \vdots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

де $a_i = 0$ при $i>n$.

Розглянемо послідовність головних мінорів

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n = |\Gamma|\,. \qquad (7.26)$$

Критерій Гурвіца. Для того, щоб всі корені характеристичного рівняння (7.24) мали від′ємні дійсні частини необхідно і достатньо, щоб послідовність (7.26) була додатньою, тобто $\Delta_i > 0, \quad i = 1,\ldots,n$.

Приклад 7.2. Записати умови асимптотичної стійкості для такого характеристичного рівняння

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0\,.$$

Розв'язання. Згідно критерію Гурвіца запишемо умови асимптотичної стійкості $\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 > 0,\ a_3 > 0$.

Приклад 7.3 Записати умови асимптотичної стійкості для такого характеристичного рівняння

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0\,.$$

Розв'язання. Запишемо умови асимптотичної стійкості

$$\Delta_1 = a_1 > 0,\ \Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 > 0,\ \Delta_3 = a_3\Delta_2 - a_4a_1^2 > 0,\ a_4 > 0,$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}.$$

7.2.4. Дослідження стійкості за першим наближенням

Лема Гронуолла – Беллмана. Нехай функції $u(t)$ і $v(t)$ – неперевні при $t \ge t_0$, $c > 0$ – стала і при $t \ge t_0$ виконується нерівність

$$|u(t)| \le c + \int_{t_0}^{t} |u(\tau)||v(\tau)|d\tau\,. \qquad (7.27)$$

Тоді при $t \ge t_0$ справедлива нерівність

$$|u(t)| \le c\exp\int_{t_0}^{t} |v(\tau)|d\tau\,. \qquad (7.28)$$

Доведення. Помножимо обидві частини нерівності (7.27) на $|v(t)|$

$$|u(t)||v(t)| \le |v(t)|\left(c+\int_{t_0}^{t}|u(\tau)||v(\tau)|d\tau\right)$$

і позначимо $\alpha(t)=\int_{t_0}^{t}|u(\tau)||v(\tau)|d\tau$. Тоді з останньої нерівності отримаємо

$$\frac{d\alpha}{dt} \le |v(t)|(c+\alpha).$$

Так як $c+\alpha>0$, то $\frac{d\alpha}{c+\alpha} \le |v(t)|dt$, $\ln(c+\alpha)-\ln c \le \int_{t_0}^{t}|v(\tau)|d\tau$.

Отже,

$$c+\alpha \le c\exp\int_{t_0}^{t}|v(\tau)|d\tau. \tag{7.29}$$

Використовуючи, (7.27) і (7.29) отримаємо (7.28). Лема доведена.
Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=f(x,t) \quad (x(t)\equiv 0 - \text{незбурений розв}'\text{язок}),\ t\ge t_0. \tag{7.30}$$

Проводимо лінеаризацію системи диференціальних рівнянь (7.30) в околі точки $x(t)=0$

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+R(x,t),\ t\ge t_0, \tag{7.31}$$

де $A(x,t)=\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}$, $R(x,t)=f(x,t)-A(t)x$.

Стійкість системи диференціальних рівнянь (7.30) в деяких випадках можна проаналізувати за допомогою дослідження стійкості лінеаризованої системи (7.31). Припустимо, що

$$\|R(x,t)\| \le \alpha\|x\|,\ t\ge t_0, \tag{7.32}$$

де постійна $\alpha=\alpha(\delta)$ в достатньо малому околі нуля $\|x\|<\delta$.

<u>Теорема 7.3.</u> Якщо фундаментальна матриця $X(t,\tau)$ однорідної системи при будь-якому $\tau\ge t_0$ і $t\ge t_0$ задовольняє нерівність

$$\|X(t,\tau)\| \le ke^{-\rho(t-\tau)} \tag{7.33}$$

з додатними і незалежними від t, t_0 константами k і ρ, то незбурений розв′язок $x(t)\equiv 0$ асимптотично стійкий при будь-якому виборі функції $R(x,t)$, яка задовольняє умові (7.32), якщо $\alpha<\frac{\rho}{k}$, причому для будь-якого розв'язку $x(t)$ системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь (7.30) для якого $\|x(t_0)\|<\frac{\delta}{k}$ виконується нерівність

$$\|x(t)\| \le e^{-(\rho-\alpha k)(t-t_0)}\delta \quad \text{при} \quad t\ge t_0. \tag{7.34}$$

Доведення. Запишемо розв′язок системи звичайних диференціальних рівнянь (7.31) у вигляді

$$x(t) = X(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)R(x,\tau)d\tau .$$

Звідки

$$\|x(t)\| \le ke^{-\rho(t-t_0)}\|x(t_0)\| + k\alpha\int_{t_0}^{t} e^{-\rho(t-\tau)}\|x(\tau)\|d\tau ,$$

$$\|x(t)\|e^{\rho(t-t_0)} \le k\|x(t_0)\| + k\alpha\int_{t_0}^{t} e^{\rho(\tau-t_0)}\|x(\tau)\|d\tau .$$

Позначимо $u(t) = \|x(t)\|e^{\rho(t-t_0)}$, $c = k\|x(t_0)\|$, $v = k\alpha$, $u(\tau) = e^{\rho(t-\tau)}\|x(\tau)\|$. Тоді, згідно леми

$$u(t) \le k\|x(t_0)\|e^{k\alpha(t-t_0)}.$$

Отже,

$$\|x(t)\| \le e^{-(\rho-k\alpha)(t-t_0)}k\|x(t_0)\| \le \delta e^{-(\rho-k\alpha)(t-t_0)}.$$

Теорема доведена.

Розглянемо автономну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{7.35}$$

Лінеаризуємо систему (7.35) ($f(0)=0,\ t \ge t_0$)

$$\frac{dx}{dt} = Ax + R(x), \quad A = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=0}, \quad R(x) = f(x) - Ax. \tag{7.36}$$

Критерій стійкості автономної системи за першим наближенням:

а). Якщо корені характеристичного рівняння (7.24) задовольняють умові $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, то незбурений розв′язок $x = 0$ системи диференціальних рівнянь (7.35) асимптотично стійкий;

б). Якщо серед коренів характеристичного рівняння (7.24) знайдеться хоча б один з додатною дійсною частиною, то незбурений розв′язок $x = 0$ системи диференціальних рівнянь (7.35) нестійкий;

в). Якщо лінійна система стійка, тобто серед коренів характеристичного рівняння (7.24) знайдуться деякі з нульовими дійсними частинами, то незбурений розв′язок $x = 0$ системи диференціальних рівнянь (7.35) може бути як стійкий так і не стійкий.

Приклад 7.4. Дослідити на стійкість незбурений розв′язок x=y=0 системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = -x \end{cases}, t \ge 0 .$$

Розв'язання. Розглянемо два підходи, які описані вище.

а). $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1,\ \lambda_{1,2} = \pm i$.

Згідно критерію система стійка.

б). Знайдемо фундаментальну матрицю. Загальний розв′язок системи має вигляд

$$\begin{cases} x = c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ y = c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{cases}.$$

Тоді фундаментальну матрицю запишемо таким чином

$$X(t,0) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Оскільки ця матриця обмежена, то незбурений розв′язок x=y=0 є стійким.

7.3. Другий метод Ляпунова

7.3.1. Функції Ляпунова

Будемо розглядати автономну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad t \geq t_0, \tag{7.37}$$

де $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$ – n-вимірна вектор-функція, яка задовольняє умовам теореми існування та єдиності.

Припустимо, що $x(t) = 0,\ t \geq t_0$ – розв'язок системи диференціальних рівнянь (7.37), який досліджується на стійкість. Його будемо називати незбуреним або програмним розв'язком. Якщо досліджуваний на стійкість розв'язок є ненульовим $x = \bar{x}(t)$, то заміною $x = y + \bar{x}(t)$ переходимо до нульового.

Означення 7.3. Будемо говорити, що незбурений розв'язок $x(t) = 0$ системи диференціальних рівнянь (7.37) є стійким по Ляпунову, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, t) > 0$ таке, що $\|x(t, x_0)\| < \varepsilon$, $t \geq t_0$ лиш тільки $\|x_0\| < \delta$.

***Означення 7.4*.** Незбурений роз'язок $x(t) \equiv 0$ системи диференціальних рівнянь (7.15) будемо називати асимптотично стійким по Ляпунову, якщо:

а) виконується означення 7.3;

б) при $\|x_0\| < \bar{\delta} \leq \delta$ справджуються граничні співвідношення $\|x(t, x_0)\| \to 0,\ t \to \infty$

.

Множина тих x_0, для яких виконується означення 7.4 називається множиною асимптотичної стійкості.

Для дослідження властивості стійкості існують два методи Ляпунова.

Перший метод передбачає знання загального розв'язку системи диференціальних рівнянь (7.37), але його не завжди можна знайти.

В другому методі аналіз стійкості або нестійкості проводиться за допомогою спеціальних функцій, які називаються функціями Ляпунова і позначаються $V(x) = V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Якщо означення 7.3 не виконується, то незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ називається нестійким. В цьому випадку для будь-якого $\varepsilon > 0$ в будь-якому околі початку координат знайдуться точки x_0 відповідні розв'язки для яких виходять з ε – околу.

Означення 7.5. Функцію $V(x)=V(x_1,...,x_n)$ будемо називати додатньо визначеною (від'ємно визначеною) в області $\|x\|\le H$, якщо вона в цій області приймає додатні (від'ємні) значення при $\|x\|\ne 0$ і $V(0)=0$.

Означення 7.6. Функція $V(x)$ називається знакопостійною на множині $\|x\|\le H$, якщо вона приймає недодатні або невід'ємні значення і може дорівнювати нулю не лише в одній точці $x=0$. (В першому випадку функція називається від'ємно постійною, в другому – додатньо постійною).

Означення 7.7. Функція $V(x)$ називається знакозмінною в області $\|x\|\le H$, якщо вона в цій області приймає як від'ємні так і додатні значення.

Приклад 7.5. Визначити типи вказаних функцій:

а) $V(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+3x_3^2$;

б) $V(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+(x_2-x_3)^2$;

в) $V(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2$.

Відповідь: а)– додатньо визначена; б)– додатньо постійна; в) – знакозмінна функція.

Дуже часто функції Ляпунова будують у вигляді квадратичної форми $V(x)=x^T Bx=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_i x_j$, де B – додатньо визначена симетрична квадратна матриця. Сформулюємо критерій додатньої визначеності.

Критерій Сільвестра. Для того, щоб квадратична форма $V(x)=x^T Bx$ була додатньо визначена необхідно і достатньо, щоб всі головні мінори

$$\Delta_1=b_{11},\ \Delta_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix},\ \dots,\ \Delta_n=|B| \tag{7.38}$$

були додатні.

Для від'ємної визначеності необхідно і достатньо, щоб головні мінори міняли по черзі свій знак починаючи з від'ємного.

Приведемо геометричну інтерпретацію знаковизначених функцій. Без обмежень на загальність розглянемо додатньо визначену функцію трьох змінних і поверхню

$$V(x_1,x_2,x_3)=c \quad (c>0). \tag{7.39}$$

Якщо $c=0$, то співвідношення (7.39) задовольняє тільки одна точка $x=0$. Покажемо, що при досить малих c поверхня (7.39) є замкнутою.

Дійсно, нехай l– точна нижня грань функції $V(x)$ на множині $\|x\|=H$, тобто на кулі $V(x)\ge l$. Розглянемо неперервну криву, яка виходить з початку координат і другим кінцем лежить на поверхні $\|x\|=H$. Так як $V(0)=0$, а на поверхні $V(x)\ge l$, то при $0<c<l$ в деякій точці кривої функція $V(x)$ приймає значення c в силу неперервності. Звідси випливає замкненість поверхні і те, що точка $x=0$ входить в цю поверхню.

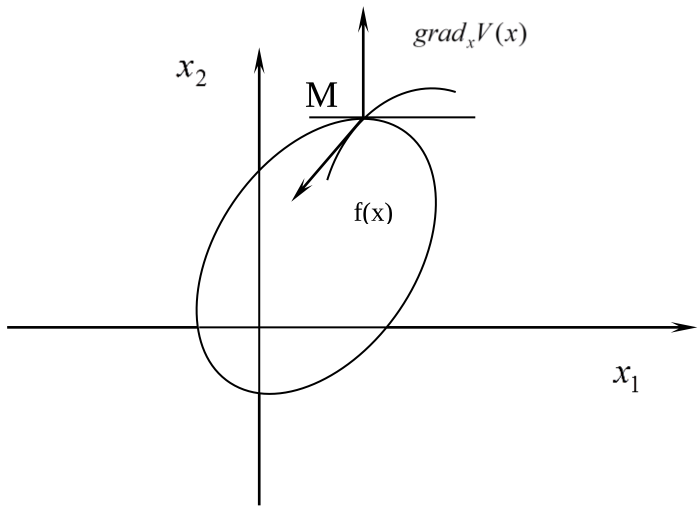
Ця властивість характерна тільки для знаковизначених функцій, для знакопостійних ці поверхні розімкнені.

7.3.2. Геометрична інтерпретація умов стійкості

Обчислимо повну похідну по t від функції $V(x(t))$ в силу системи диференціальних рівнянь (7.37)

$$\frac{dV}{dt} = grad_x^T V(x) f(x). \tag{7.40}$$

Виберемо на поверхні $V(x)=c$ будь-яку точку M і обчислимо в ній $grad_x V(x)\big|_{x=M}$

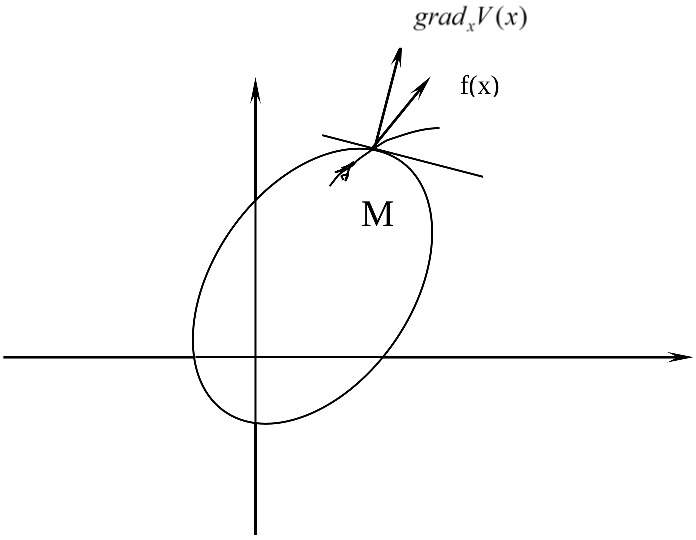


Мал. 7.7

Такий вектор направлений по нормалі в точці M до поверхні $V(x)=c$. Причому нормаль буде зовнішньою, якщо $V(x)$ додатньо визначена і цей вектор направлений всередину при умові, що $V(x)$ від'ємно визначена. Геометрично вектор $f(x)$ – це вектор швидкості. Знаком скалярного добутку (7.40) аналізується стійкість незбуреного розв'язку $x(t)\equiv 0$.

Припустимо, що в деякий момент t динамічна траєкторія визначається точкою M. Проведемо через неї поверхню $V(x)=c$. Розглянемо три випадки:

а). Якщо $\frac{dV}{dt}<0$ (мал. 7.7), то це означає, що кут між векторами $f(x)$ і $grad_x V(x)$ тупий. А це свідчить про те, що траєкторія входить в поверхню $V(x)=c$. Якщо така властивість буде виконуватися для будь-якої точки траєкторії, то спостерігатиметься асимптотична стійкість;



Мал. 7.8

б). Якщо в точці *M* виконується умова $\frac{dV}{dt} = 0$, то кут між векторами $grad_x V(x)$ та $f(x)$ 90° і траєкторія дотикається поверхні $V(x) = c$. Відмітимо, якщо вказане співвідношення виконується для будь-якої точки траєкторії, то точка рухається по поверхні $V(x) = V(M)$;

в). Якщо $\frac{dV}{dt} > 0$ (мал. 7.8), то траєкторія виходить з поверхні $V(x) = c$.

Приклад 7.6. Вказати при яких *c* лінії рівня замкнені:

а) $V(x) = x_1^2 + 2x_2^2 = c$;

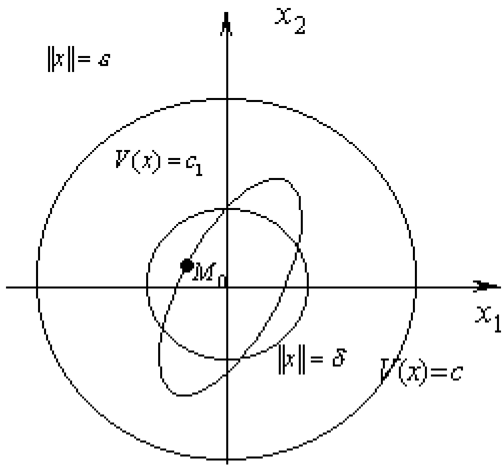
б) $V(x) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{1 + 2x_1^2 + 2x_2^2} = c$.

Розв'язання. а) Функція $V(x)$ є додатньо визначеною і $V(x) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$. Лінії рівня $V(x) = c$ є еліпсами і вони є замкненими для будь-якого $c > 0$; б) співвідношення $V(x) = c$ можна переписати в такому вигляді $(1 - 2c)x_1^2 + (1 - 2c)x_2^2 = c$. З нього випливає, що лінії рівня замкнені при $0 < c < \frac{1}{2}$.

7.3.3. Теореми Ляпунова про стійкість і асимптотичну стійкість

Теорема 7.4 **(**Ляпунова про стійкість). Якщо для системи диференціальних рівнянь (7.37) знайдеться додатньо визначена функція $V(x)$, повна похідна від якої по *t*, взята в силу системи (7.37), є функцією від'ємно постійною, то розв'язок $x(t) \equiv 0$ стійкий по Ляпунову.

Доведення. Виберемо $\varepsilon > 0$ і розглянемо сферу $\|x\| = \varepsilon$ (мал. 7.9).



Мал. 7.9

Побудуємо поверхню $V(x) = c$, яка лежить всередині сфери $\|x\| = \varepsilon$. Це можна зробити так як $V(x)$ є неперервною функцією і $V(0) = 0$. Виберемо δ таке, щоб куля $\|x\| \le \delta$ лежала всередині поверхні $V(x) = c$.

Покажемо, що зображаюча точка *M,* починаючи свій рух із δ-околу (точки M_0), не дійде сфери ε. Дійсно, так як $\dot{V} \le 0$, то $V - V_0 = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt} dt \le 0$.

Звідки

$$V(x) \le V_0 = V(x_0). \tag{7.41}$$

З (7.41) випливає, що зображаюча точка або знаходиться на поверхні $V(x) = V_0 = c_1 \left(\dot{V}_{(7.37)} \equiv 0\right)$ або йде всередину поверхні $V(x) = c_1$. Це і доводить теорему.

Приклад 7.7. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 3x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_2 - x_2^3 \end{cases}. \tag{7.42}$$

Розв'язання. Дослідимо на стійкість незбурений рух $x_1 = x_2 = 0$ за допомогою функції $V(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$. Обчислимо $\frac{dV}{dt} = -\left(x_1 - x_2^2\right)^2 \le 0$. Тобто, згідно теореми 7.4, незбурений розв'язок $x_1 = x_2 = 0$ стійкий.

Теорема 7.5 **(**Ляпунова про асимптотичну стійкість**)**. Якщо для системи диференціальних рівнянь (7.37) знайдеться додатньо визначена функція Ляпунова $V(x)$ така, що $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.37)}$ є функцією від'ємно визначеною, то незбурений рух $x(t) \equiv 0$ – асимптотично стійкий.

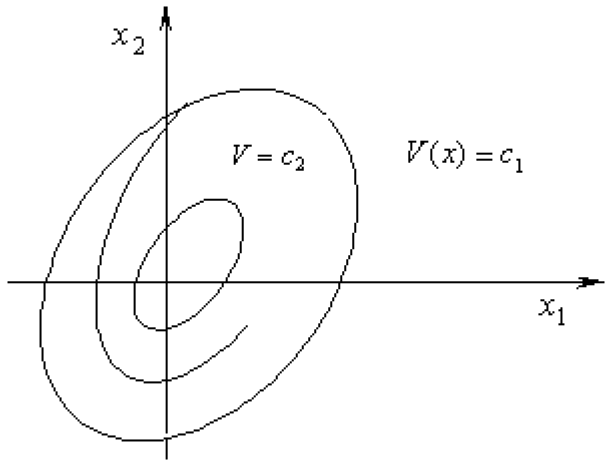
Доведення. Так як умови теореми 7.5 сильніші ніж умови теореми 7.4, то зображаюча точка в динаміці не вийде з поверхні $V(x) = c$ (мал. 7.9). Причому вона залишатися на поверхні $V(x)=c$ $\left(\dot{V}<0\right)$ не може і строго входить в неї. З умови $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(7.37)}<0$ випливає, що функція *V(x)*, залишаючись додатньою, монотонно спадає. Це значить, що вона має границю c_2, тобто $V(x(t))\to c_2,\ t\to\infty$. Як видно з мал. 7.8 зображаюча точка *M* прямує до граничної поверхні $V(x)=c_2$.

Покажемо, що $c_2=0$, тобто поверхня $V(x)=c_2$ вироджується в точку – початок координат.

Припустимо, що $c_2\neq 0$. Тоді в замкнутій області $D=\{x: c_2\le V(x)\le c_1\}$ функція $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(7.37)}$ строго від'ємна. Якщо $\dot{V}_{(7.37)}$ є неперервною на D, то вона має точну верхню та нижню грань. Таким чином, з відношення $\dot{V}_{(7.37)}\le -l$, випливає нерівність

$$V(x(t))-V(x(t_0))=\int_{t_0}^{t}\frac{dV(x(\tau))}{d\tau}d\tau\le V(x(t_0))-l(t-t_0). \qquad (7.43)$$

З (7.43) випливає, що з часом функція $V(x(t))$ стає від'ємною, що суперечить умові теореми. Значить $c_2=0$, тобто зображаюча точка асимптотично прямує в початок координат. Теорема доведена.



Мал. 7.10

7.3.4. Теореми Четаєва і Ляпунова про нестійкість

<u>Теорема 7.6</u> **(**Четаєва про нестійкість**)**. Якщо для системи диференціальних рівнянь (7.37) можна знайти функцію $V(x)$, для якої в як завгодно малому околі точки *x*=0 існує область $V(x)>0$, а $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(7.37)}>0$ у всіх точках області $V(x)>0$, то незбурений розв'язок $x(t)\equiv 0$ – нестійкий.

Доведення. Припустимо, що функція $V(x)$ – визначена на множині $x^T x \le \mu(\mu > 0)$. Візьмемо як завгодно мале $\varepsilon > 0$ і побудуємо кулю $x^T x \le \varepsilon \le \mu$. Для того, щоб виявити нестійкість достатньо знайти в як завгодно малому околі точки $x = 0$ хоч би одну траєкторію, яка виходить за сферу радіуса $\sqrt{\varepsilon}$.
Візьмемо початкове положення точки M в області $V(x) > 0$. Причому, така точка M_0 може бути вибрана як завгодно близько до точки x=0, але не співпадати з нею.

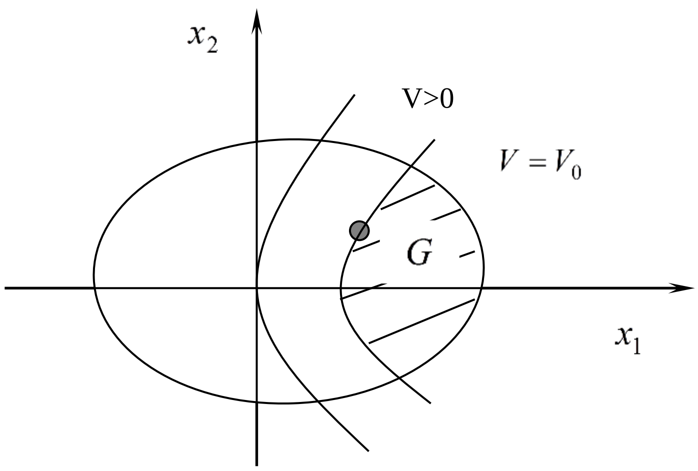
Так як в області $V(x) > 0$ виконується $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.37)} > 0$, то функція $V(x)$ монотонно зростає, отже

$$V(x) \ge V_0 > 0,\ t \ge t_0, \tag{7.44}$$

де $V_0 = V(x)\big|_{M_0}$.

Динамічна точка M, з початком в точці M_0, в процесі руху не може перетинати границю області $V > 0$ (на границі V=0, а $V_0 > 0$ і V – зростає).

Припустимо, що точка M не вийде за сферу ε, тобто знаходиться в середині замкненої області $G = \left\{x : x^T x \le \varepsilon, V(x) \ge V_0\right\}$ (мал. 7.11).



Мал. 7.11

Оскільки функція $V(x)$ неперервна на G, то

$$L_{\min} \le V(x) \le L_{\max}. \tag{7.45}$$

На G функція $\dot{V}_{(7.37)} > 0$ також є неперервною. Тому

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.37)} \ge l_1. \tag{7.46}$$

Звідки

$$V(x) \ge V_0 + l_1(t - t_0). \tag{7.47}$$

З (7.47) випливає, що функція $V(x)$ при $t\to\infty$ необмежено зростає. Що суперечить (7.45). Отже наше припущення, що траєкторія не вийде з ε-околу неправильне. Теорему доведено.

Сформулюємо теорему Ляпунова про нестійкість, яка є частинним випадком теореми Четаєва.

<u>Теорема 7.7</u> **(**перша теорема теорема Ляпунова про нестійкість**)**. Якщо система диференціальних рівнянь (7.37) така , що існує функція $V(x)$, для якої $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.37)} > 0$, а сама функція $V(x)$ в околі точки x=0 приймає значення $V(x) > 0$, то незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ є нестійким.

<u>Теорема 7.8</u> **(**друга теорема Ляпунова про нестійкість**)**. Якщо для системи диференціальних рівнянь (7.37) існує функція $V(x)$ така, що

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.37)} = \lambda V + W(x_1,\ldots,x_n), \tag{7.48}$$

де $\lambda > 0$, а *W(x)* або тотожньо дорівнює нулю, або ж є додатньо постійною функцією і при цьому $V(x)$ не є від'ємно постійною, то незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи диференціальних рівнянь (7.37) є нестійким.

<u>Доведення.</u> Оскільки *W(x)* додатна, то з (7.48) маємо $\frac{dV}{dt} \geq \lambda V$. Припустимо, що траєкторія для системи диференціальних рівнянь (7.37) не виходить з ε-сфери, тобто

$$\|x\| \leq \varepsilon . \tag{7.49}$$

Тоді $V(x)$ на (7.49) обмежена

$$V(x) \leq L . \tag{7.50}$$

Оскільки $\frac{dV(x)}{dt}$ залишається додатньою на траєкторії, то

$$\frac{dV(x)}{dt} \geq \lambda V(x) \geq \lambda V(x_0) > 0 .$$

Звідки

$$V(x) \geq V(x_0) + \lambda(t - t_0)V(x_0), \tag{7.51}$$

що суперечить умові (7.50). Тобто розв'язок виходить з ε-сфери. Теорема доведена.

7.3.5. Побудова функцій Ляпунова для лінійних стаціонарних систем

Для лінійних стаціонарних систем

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (A = \{a_{ij}\}_{ij=1,2,\ldots,n}), \tag{7.52}$$

де A – деяка асимтотично стійка матриця, функцію Ляпунова можна побудувати у вигляді квадратичної форми $V(x) = x^T Bx$. Симетрична додатньо визначена матриця *B* знаходиться з умови

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7.52)} = -x^T Dx, \tag{7.53}$$

де D – задана додатньо визначена матриця.

Для знаходження симетричної матриці B користуються матричним рівняння Ляпунова

$$AB + BA = -D, \tag{7.54}$$

яке легко отримується з умови (7.53).

При розв'язуванні прикладних задач часто користуються співвідношенням Релея

$$\rho_{\min}^{B} \le \frac{x^T Bx}{x^T x} \le \rho_{\max}^{B}, \tag{7.55}$$

де $\rho_{\min}^{B}$, $\rho_{\max}^{B}$ – мінімальне і максимальне власні значення симетричної додатньо визначеної матриці B.

7.3.6. Оцінка часу регулювання перехідного процесу в системах автоматичного керування за допомогою функцій Ляпунова

Припустимо, що для системи диференціальних рівнянь (7.52) ми побудували функцію Ляпунова у вигляді квадратичної форми $V(x) = x^T Bx$ згідно умови

$$\frac{dV}{dt} = -x^T x, \tag{7.56}$$

тобто

$$A^T B + BA = -E.$$

З співвідношення (7.55) маємо

$$\frac{x^T Bx}{\rho_{\max}^{(B)}} \le x^T x \le \frac{x^T Bx}{\rho_{\min}^{(B)}}, \tag{7.57}$$

або
$$-\frac{x^T Bx}{\rho_{\min}^{(B)}} \le -x^T x \le -\frac{x^T Bx}{\rho_{\max}^{(B)}}.$$

Використовуючи (7.56) запишемо

$$-\frac{V}{\rho_{\min}^{(B)}} \le \frac{dV}{dt} \le -\frac{V}{\rho_{\max}^{(B)}}, \qquad -\frac{dt}{\rho_{\min}^{(B)}} \le \frac{dV}{V} \le -\frac{dt}{\rho_{\max}^{(B)}}.$$

Інтегруючи записану нерівність отримаємо

$$-\frac{t-t_0}{\rho_{\min}^{(B)}} \le \ln V - \ln V_0 \le -\frac{t-t_0}{\rho_{\max}^{(B)}}, \qquad V_0\, e^{-\frac{t-t_0}{\rho_{\min}^{(B)}}} \le V \le V_0\, e^{-\frac{t-t_0}{\rho_{\max}^{(B)}}}.$$

Використовуючи (7.57) прийдемо до нерівностей

$$\frac{V_0}{\rho_{\max}^{(B)}} e^{-\frac{t-t_0}{\rho_{\min}^{(B)}}} \le x^T x \le \frac{V_0}{\rho_{\min}^{(B)}} e^{-\frac{t-t_0}{\rho_{\max}^{(B)}}}. \tag{7.58}$$

Нам потрібно знайти такий момент $t(x_0, \varepsilon)$, в який траєкторія системи диференціальних рівнянь (7.52) задовольнятиме умові $x^T x \le \varepsilon^2$. Оцінити час перехідного процесу можна з нерівності (7.58)

$$\frac{V_0}{\rho_{\min}^{(B)}} e^{-\frac{t-t_0}{\rho_{\max}^{(B)}}} \le \varepsilon^2 (V_0 = x_0^T B x_0), \quad e^{-\frac{t-t_0}{\rho_{\max}^{(B)}}} \le \frac{\varepsilon^2 \rho_{\min}^{(B)}}{V_0}.$$

З останньої нерівності маємо

$$t(x_0,\varepsilon) = t_0 - \rho_{\max}^{(B)} \ln \frac{\varepsilon^2 \rho_{\min}^{(B)}}{V_0}. \tag{7.59}$$

Формулою (7.59) представлена оцінка часу перехідного процесу.

Розділ 8. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку з частинними похідними

8.1 Однорідні лінійні диференціальні рівняння першого порядку з частинними похідними

8.1.1. Зв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними та систем звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі

Рівняння з частинними похідними першого порядку має вигляд

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0. \tag{8.1}$$

<u>Означення 8.1.</u> Розв'язком рівняння (8.1) називається функція

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{8.2}$$

яка визначена і неперервна разом з частинними похідними в деякій області змінних $x_1,..,x_n$ і перетворює в цій області рівняння (8.1) в тотожність. При цьому $x_1,..,x_n$ і значення $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ лежать в області визначення функції $\Phi(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$.

Якщо в рівнянні (8.1) функція $\Phi(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$ залежить лінійно від частинних похідних шуканої функції, то воно називається лінійним

$$X_1(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + X_n(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, \ldots, x_n, u). \tag{8.3}$$

Розглянемо однорідне рівняння, тобто випадок коли $R(x_1, \ldots, x_n, u) \equiv 0$, а функції $X_i(x_1, \ldots, x_n, u)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ не залежать від u

$$X_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + X_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \tag{8.4}$$

Рівняння (8.4) має очевидний розв'язок

$$u = c \ (c = const). \tag{8.5}$$

Доведемо, що рівняння (8.4) має безліч розв'язків, відмінних від очевидних.

Для цього, разом з (8.4), будемо розглядати систему звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,..,x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1,..,x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1,..,x_n)}. \tag{8.6}$$

Доведемо дві теореми, які встановлюють зв'язок між рівнянням (8.4) і системою (8.6). Припустимо, що коефіцієнти $X_1(x_1,..,x_n),\ldots,\ X_n(x_1,..,x_n)$ рівняння (8.4) неперервні разом з частинними похідними по $x_1,..,x_n$ в деякому околі точки $x_1^{(0)},..,x_n^{(0)}$ і в цій точці вони одночасно не перетворюються в нуль (тобто точка $(x_1^{(0)},..,x_n^{(0)})$ не є особливою точкою системи (8.6)). Наприклад, припустимо, що

$$X_n(x_1^{(0)},..,x_n^{(0)}) \neq 0. \tag{8.7}$$

При цьому припущенні система (8.6) має рівно (n-1) незалежних інтегралів, визначених і неперервних разом з частинними похідними в околі точки ($x_1^{(0)}$,.., $x_n^{(0)}$). Це випливає з того, що система (8.6) рівносильна нормальній системі розмірності (n-1)

$$\begin{gathered}\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1(x_1,..,x_n)}{X_n(x_1,..,x_n)},\\ \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2(x_1,..,x_n)}{X_n(x_1,..,x_n)},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}(x_1,..,x_n)}{X_n(x_1,..,x_n)}\end{gathered} \tag{8.8}$$

для якої виконуються умови теореми про існування незалежних інтегралів нормальної системи.

<u>Теорема 8.1.</u> Довільний інтеграл системи (8.6) є неочевидним розв'язком рівняння (8.4).

<u>Доведення</u>. Припустимо, що $\psi(x_1,..,x_n)$ – інтеграл системи (8.6) визначений в деякому околі точки ($x_1^{(0)},..,x_n^{(0)}$). Тоді повний диференціал від $\psi(x_1,..,x_n)$, в силу (8.6) або (8.8), дорівнює нулю, тобто

$$d\psi_{(8.8)} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}dx_n \equiv 0. \tag{8.9}$$

Враховуючи співвідношення $dx_1 = \dfrac{X_1(x_1,\ldots,x_n)}{X_n(x_1,\ldots,x_n)}dx_n, \ldots, dx_{n-1} = \dfrac{X_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)}{X_n(x_1,\ldots,x_n)}dx_n,$

рівняння (8.9) перепишемо так

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{X_1}{X_n} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{X_2}{X_n} + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}}\frac{X_{n-1}}{X_n} + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right]dx_n \equiv 0. \tag{8.10}$$

Скорочуємо на dx_n і домножуючи на X_n, отримаємо

$$X_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+...+X_n\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\equiv 0. \qquad (8.11)$$

Це означає, що функція $u=\psi(x_1,\ldots,x_n)$ є розв'язком рівняння (8.4).

Теорема 8.2. Довільний неочевидний розв'язок рівняння (8.4) є інтегралом системи (8.6).

Доведення. Нехай $u=\psi(x_1,\ldots,x_n)$ – неочевидний розв'язок рівняння (8.4). Тоді

$$X_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+...+X_n\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\equiv 0. \qquad (8.12)$$

Обчислимо

$$d\psi_{(8.8)}=\frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}dx_n=$$
$$=[\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{X_1}{X_n}+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{X_2}{X_n}+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}}\frac{X_{n-1}}{X_n}+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}]dx_n=$$
$$=(X_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+...+X_n\frac{\partial\psi}{\partial x_n})\frac{dx_n}{X_n}\equiv 0.$$

Це означає, що $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ є інтегралом системи (8.6).

Приклад 8.1. Знайти розв'язки лінійного однорідного рівняння з частинними похідними

$$x\frac{\partial U}{\partial x}-2y\frac{\partial U}{\partial y}-z\frac{\partial U}{\partial z}=0. \qquad (8.13)$$

Розв'язання. Запишемо для рівняння (8.13) систему в симетричній формі

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-2y}=\frac{dz}{-z}. \qquad (8.14)$$

Для системи звичайних диференціальних рівнянь маємо інтеграли

$$\psi_1=xz,\ \psi_2=x\sqrt{y} \qquad (8.15)$$

Тому

$$U_1=xy, U_2=x\sqrt{y} \qquad (8.16)$$

є розв'язками рівняння (8.13).

8.1.2. Загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння рівняння з частинними похідними. Розв'язування задачі Коші

Нехай

$$\psi_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_n) \qquad (8.17)$$

незалежні інтеграли системи (8.6). Тоді функція

$$u=\Phi(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{n-1}), \qquad (8.18)$$

де $\Phi(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{n-1})$ – будь-яка диференційована функція, буде розв'язком рівняння (8.4)

Дійсно, підставимо (8.18) в (8.4)

$$X_1\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+...+X_n\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}=$$

$$=X_1\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_1}+X_2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_2}+...+X_n\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_n}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_i}(X_1\frac{\partial\psi_i}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\psi_i}{\partial x_2}+...+X_n\frac{\partial\psi_i}{\partial x_n})\equiv 0. \tag{8.19}$$

Формулу (8.18) називають загальним розв’язком рівняння (8.4). На відміну від загального розв’язку звичайного диференціального рівняння в (8.18) входять не довільні сталі, а довільна функція.

Задача знаходження загального розв’язку рівняння (8.4) рівносильна задачі знаходження (n-1) незалежних інтегралів відповідної системи звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі.

Розглянемо випадок двох незалежних змінних

$$X(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+Y(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=0. \tag{8.20}$$

Запишемо систему в симетричній формі

$$\frac{dx}{X(x,y)}=\frac{dy}{Y(x,y)}. \tag{8.21}$$

Якщо $\psi(x,y)$ – інтеграл системи (8.21), то

$$z=\Phi(\psi(x,y)) \tag{8.22}$$

загальний розв’язок рівняння (8.20). Тут $\Phi(\psi(x,y))$ довільна неперервно диференційована функція від ψ.

<u>Приклад 8.2.</u> Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x_1\frac{\partial U}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial U}{\partial x_2}+...+x_n\frac{\partial U}{\partial x_n}=0. \tag{8.23}$$

<u>Розв'язання</u>. Складемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=...=\frac{dx_n}{x_n}. \tag{8.24}$$

Для системи (8.24) заходимо інтеграл

$$\frac{x_2}{x_1}=c_1,\ \frac{x_3}{x_1}=c_2,...,\frac{x_n}{x_1}=c_{n-1}. \tag{8.25}$$

Тобто

$$\psi_1=\frac{x_2}{x_1},\ \psi_2=\frac{x_3}{x_1},...,\ \psi_{n-1}=\frac{x_n}{x_1}. \tag{8.26}$$

Тоді

$$U=\Phi\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},...,\frac{x_n}{x_1}\right), \tag{8.27}$$

де $\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right)$ – неперервно-диференційована функція, буде загальним розв'язком системи (8.23).

Приклад 8.3. Розв'язати рівняння

$$(z-y)\frac{\partial U}{\partial x} + (x-z)\frac{\partial U}{\partial y} + (y-x)\frac{\partial U}{\partial z} = 0. \tag{8.29}$$

Розв'язання. Складаємо систему звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}. \tag{8.30}$$

Легко визначити

$$\psi_1 = x+y+z,\ \psi_2 = x^2+y^2+z^2. \tag{8.31}$$

Тому загальний розв'язок має вигляд

$$U = \Phi(x+y+z, x^2+y^2+z^2). \tag{8.32}$$

Перейдемо до постановки і розв'язання задачі Коші для рівняння (8.4). Серед всіх розв'язків рівняння знайти такий

$$u = f(x_1, \dots, x_n), \tag{8.33}$$

який задовольняє початковій умові

$$u = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \text{ при } x_n = x_n^{(0)}, \tag{8.34}$$

або

$$u\Big|_{x_n = x_n^{(0)}} = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}), \tag{8.35}$$

де $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$ задана неперервно-диференційована функція від $x_1, \dots, x_{n-1}$.

Для випадку двох змінних: знайти функцію

$$z = f(x, y), \tag{8.36}$$

яка задовольняє умові

$$z = \varphi(y) \text{ при } x_n = x_n^{(0)}. \tag{8.37}$$

Геометрично (8.36),(8.37) означає, що серед всіх інтегральних поверхонь знайти ту, яка проходить через задану криву (8.37) при $x_n = x_n^{(0)}$. Ця крива лежить в площині $x_n = x_0$, яка паралельна площині YOZ.

В загальному випадку розв'язування задачі Коші зводиться до визначення вигляду функції $\Phi(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})$ так , щоб

$$\Phi(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})\Big|_{x_n = x_n^{(0)}} = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}). \tag{8.38}$$

Введемо позначення

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, \dots, x_n)\Big|_{x_n = x_n^{(0)}} = \overline{\psi_1} \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n)\Big|_{x_n = x_n^{(0)}} = \overline{\psi}_{n-1} \end{cases}. \tag{8.39}$$

Тоді (8.38) перепишемо так

$$\Phi(\overline{\psi_1}, \dots, \overline{\psi}_{n-1}) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}). \tag{8.40}$$

Розв’яжемо систему (8.39) в околі точок $x_1^{(0)},...,x_n^{(0)}$, відносно $x_1,...,x_{n-1}$ (це можливо так як $\psi_1,...,\psi_{n-1}$ – незалежні інтеграли)

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\overline{\psi}_1,...,\overline{\psi}_{n-1}) \\ .... \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1,...,\overline{\psi}_{n-1}) \end{cases}. \qquad (8.41)$$

Тоді функцію $\Phi(\psi_1,...,\psi_{n-1})$ вибираємо таким чином

$$\Phi(\psi_1,...,\psi_{n-1}) = \varphi(\omega_1(\psi_1,...,\psi_{n-1}),...,\omega_{n-1}(\psi_1,...,\psi_{n-1})). \quad (8.42)$$

Тоді умова (8.40) буде виконуватися

$$\Phi(\overline{\psi}_1,...,\overline{\psi}_{n-1}) = \varphi(\omega_1(\overline{\psi}_1,...,\overline{\psi}_{n-1}),...,\omega_{n-1}(\overline{\psi}_1,...,\overline{\psi}_{n-1})) = \varphi(x_1,...,x_{n-1}).$$

Тому функція

$$u = \varphi(\omega_1(\psi_1,...,\psi_{n-1}),...,\omega_{n-1}(\psi_1,...,\psi_{n-1})) \qquad (8.43)$$

– шуканий розв’язок задачі Коші.

<u>Приклад 8.4.</u> Розв’язати задачу Коші

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

при умові $z = \varphi(y)$ при $x = 0$.

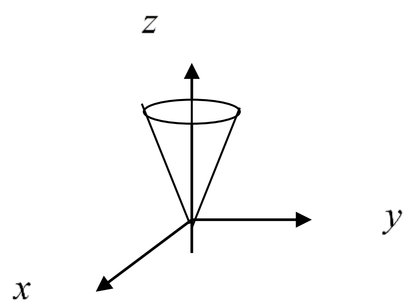
<u>Розв'язання</u>. Складаємо систему $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{-x}$, звідси $\psi = x^2 + y^2$ – інтеграл. Отже

$$y^2 = \overline{\psi}, y = \sqrt{\overline{\psi}}.$$

Шуканий розв’язок $z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Розглянемо частинні випадки:

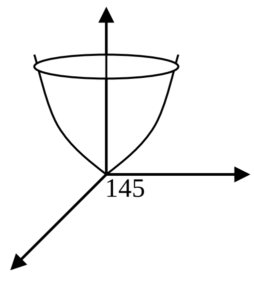
а) $\varphi(y) = y$. Тоді $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z^2 = x^2 + y^2$



Мал. 8.1

Розв’язок – конус, який отриманий обертанням прямої $z = y$ навколо осі OZ (мал. 8.1);

б) $\varphi(y) = y^2$, $z = x^2 + y^2$



z

Мал. 8.2

y

x

Розв'язок – параболоїд, який отриманий обертанням параболи $z = y^2$ навколо осі OZ (мал. 8.2).

8.2. Розв'язування неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними

Розглянемо неоднорідне рівняння

$$X_1(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+X_n(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=R(x_1,\ldots,x_n,u). \qquad (8.44)$$

Розв'язок диференціального рівняння (8.44) шукаємо у вигляді

$$V(x_1,\ldots,x_n,u)=0, \qquad (8.45)$$

де $V(x_1,\ldots,x_n,u)$ неперервно-диференційована функція по всім змінним і $\dfrac{\partial V(x_1,\ldots,x_n,u)}{\partial u}\neq 0$ в околі точки $(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)},u^{(0)})$.

Припустимо, що в (8.45) $u(\cdot)$ залежить від $x_1,\ldots,x_n$. Продиференціюємо (8.45) по x_k

$$\frac{\partial V}{\partial x_k}+\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_k}=0, \quad k=1,2,\ldots,n.$$

Звідси

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=-\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}}, \quad k=1,2,\ldots,n. \qquad (8.46)$$

Підставивши (8.46) в (8.44), отримаємо

$$X_1(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial x_1}+\ldots+X_n(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial x_n}+R(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial u}=0. \qquad (8.47)$$

Рівняння (8.47) – це вже однорідне рівняння. Його розв'язуємо по відомій схемі:

а) складаємо систему звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,\ldots,x_n,u)}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n(x_1,\ldots,x_n,u)}=\frac{du}{R(x_1,\ldots,x_n,u)}; \qquad (8.48)$$

б) знаходимо n незалежних інтегралів

$$\psi_1(x_1,\ldots,x_n,u),\ldots,\psi_n(x_1,\ldots,x_n,u); \qquad (8.49)$$

в) записуємо загальний розв'язок

$$V=\Phi(\psi_1(x_1,\ldots,x_n,u),\ldots,\psi_n(x_1,\ldots,x_n,u))=0. \qquad (8.50)$$

<u>Приклад 8.5.</u> Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+x_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=mu \quad (m\neq 0).$$

<u>Розв'язання</u>. Складаємо систему в симетричній формі

$$\frac{dx_1}{x_1}=...=\frac{dx_n}{x_n}=\frac{du}{mu}.$$

Знаходимо інтеграли

$$\psi_1=\frac{x_2}{x_1},\ \psi_2=\frac{x_3}{x_1},...,\psi_{n-1}=\frac{x_n}{x_1},\ \psi_n=\frac{u}{x_1^{\ m}}.$$

Тоді

$$\Phi\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},...,\frac{x_n}{x_1},\frac{u}{x_1^m}\right)=0 \tag{8.51}$$

– загальний розв'язок.

Якщо розв'язати (8.51) відносно $\frac{u}{x_1^{\ m}}$, то отримаємо

$$u=x_1^m f\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},...,\frac{x_n}{x_1}\right)$$

–загальний розв'язок в явній формі.

Задача Коші ставиться та розв'язується для рівняння (8.44) аналогічно: знайти таку функцію

$$u=f(x_1,...,x_n), \tag{8.52}$$

яка задовольняє початковій умові

$$u=\varphi(x_1,...,x_{n-1})\ \text{при}\ x_n=x_n^{(0)}, \tag{8.53}$$

де $\varphi(x_1,...,x_{n-1})$ – задана неперервно-диференційована функція від $x_1,...,x_{n-1}$.

Алгоритм для знаходження розв'язку задачі Коші:

а) перепишемо початкові умови (8.53) у вигляді

$$u-\varphi(x_1,...,x_{n-1})=0\ \text{при}\ x_n=x_n^{(0)};$$

б) знаходимо n інтегралів $\psi_1,...,\psi_n$ і складаємо систему

$$\begin{cases}\psi_1(x_1,...,x_{n-1},x_n^{(0)},u)=\overline{\psi_1}\\ \vdots\\ \psi_n(x_1,...,x_{n-1},x_n^{(0)},u)=\overline{\psi_n}\end{cases}; \tag{8.54}$$

в) розв'язуємо систему (8.54) відносно $x_1,...,x_{n-1},u$

$$\begin{cases}x_1=\omega_1(\overline{\psi_1},...,\overline{\psi}_n)\\ \vdots\\ x_{n-1}=\omega_{n-1}(\overline{\psi_1},...,\overline{\psi}_n)\\ u=\omega_n(\overline{\psi_1},...,\overline{\psi}_n)\end{cases}; \tag{8.55}$$

г) записуємо розв'язок задачі Коші в вигляді

$$\Phi(\psi_1,...,\psi_{n-1})=\psi_n(\psi_1,...,\psi_n)-\varphi(\omega_1(\psi_1,...,\psi_n),...,\omega_{n-1}(\psi_1,...,\psi_n)). \tag{8.56}$$

При цьому умова (8.53) буде виконуватися.

Приклад 8.6. Розв'язати задачу Коші

$$\left(1+\sqrt{z-x-y}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2, z=2x \text{ при } y=0.$$

Розв'язання. Складаємо систему в симетричній формі

$$\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}.$$

Звідси $\psi_1 = z-2y, \psi_2 = 2\sqrt{z-x-y}+y$.

При $y=0$: $z=\overline{\psi_1}$, $2\sqrt{z-x}=\overline{\psi_2}$. Отже

$$\begin{cases} x=\overline{\psi_1}-\dfrac{\overline{\psi_2}^2}{4} \\ z=\overline{\psi_1} \end{cases}.$$

Тому $\psi_1-2(\psi_1-\dfrac{\psi_2^2}{4})=0$, $2\psi_1-\psi_2^2=0$ – розв'язок задачі Коші. Остаточно маємо

$$2z-4y-(2\sqrt{z-x-y}+y)^2=0.$$

Розділ 9. Елементи варіаційного числення

9.1 Основні поняття варіаційного числення

9.1.1. Функціонали і деякі їх властивості

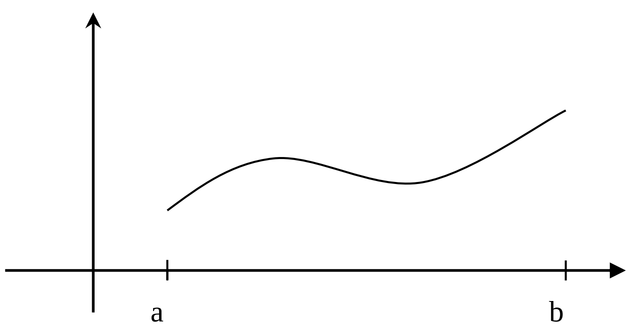
а) *Означення функціоналу*

Нехай *M* деякий клас функцій *y(x).*

Означення 9.1. Якщо для будь-якої функції *y(x)* $\in$ *M* по деякому закону поставлено у відповідність деяке число, то говорять, що на класі *M* визначений функціонал і пишуть $I=I(y(x))$. Тут *M* область визначення функціоналу.

Приклад 9.1. Нехай *y(x)* – плоска крива, яка з'єднує точки (*a,A*) та (*b,B*). Її довжина є функціонал (мал. 9.1)

$$l(y(x))=\int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx.$$



Мал. 9.1

Приклад 9.2. Площа криволінійної трапеції, яка показана на мал. 9.1 також є функціонал

$$S(y(x))=\int_a^b y(x)dx.$$

б) ***Функціонали в лінійних нормованих (банахових) просторах.***

Поняття неперервності функціоналу вводиться так само як і для функції.

Означення 9.2. Функціонал $I(y(x))$ називається неперервним в точці $y_0(x)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ такі, що $\left|I(y(x)) - I(y_0(x))\right| < \varepsilon$ лише тільки $\|y(x) - y_0(x)\| < \delta$.

Приведемо основні банахові простори, які ми будемо розглядати.

I. Простір $C_{[a,b]}$ – неперервних на $[a,b]$ функцій з нормою

$$\|y(x)\|_C = \max_{x\in[a,b]}|y(x)|. \tag{9.1}$$

Збіжність по нормі в просторі $C_{[a,b]}$ – це рівномірна збіжність функцій на $[a,b]$.

II. Простір $C'_{[a,b]}$ – це простір всіх неперервно диференційованих на $[a,b]$ функцій з нормою

$$\|y(x)\|_{C'} = \max_{x\in[a,b]}|y(x)| + \max_{x\in[a,b]}|y'(x)|. \tag{9.2}$$

Якщо послідовність $y_n(x) \to y(x)$ по нормі $C'_{[a,b]}$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n(x) - y(x)\| = 0$.

Тоді $y_n(x) \Rightarrow y(x),\ y'_n(x) \Rightarrow y'(x)$ при $n \to \infty$.

Справедливе і обернене твердження.

III. Простір $C^n_{[a,b]}$– простір функцій, які n-разів неперервно-диференційовані на $[a,b]$. Норма в цьому просторі вводиться наступним чином

$$\|y(x)\|_{C^n} = \sum_{k=0}^{n}\max_{x\in[a,b]}\left|y^{(k)}(x)\right| \ \left(y^{(0)}(x) = y(x)\right). \tag{9.3}$$

Близькість функцій в просторі $C^n_{[a,b]}$ означає близькість як самих функцій так і їх похідних до n-го порядку включно.

Аналогічно вводиться поняття неперервності (означення 9.2) в смислі близькості будь-якого порядку.

Наведемо декілька означень для кращого розуміння матеріалу.

Означення 9.3. Лінійним простором називається сукупність R елементів довільної природи для яких визначені операції додавання та множення на число з такими умовами (аксіомами):

1) $x+y=y+x$;

2) $(x+y)+z=x+(y+z)$;

3) існує ненульовий елемент 0: $x+0=x$, для всіх $x \in R$;

4) існує для всіх $x \in R$ елемент $-x$ такий, що $x+(-x)=0$;

5) $1*x=x$;

6) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;

7) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;

8) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

Означення 9.4. Лінійний простір R називається нормованим, якщо кожному елементу $x \in R$, поставлено у відповідність невід'ємне число $\|x\|$ (норма елементу) так, що

1) $\|x\| = 0$ тільки при $x=0$;

2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

3) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Під відстанню в нормованому просторі розуміють $\|x-y\|$ між елементами x та y;

Означення 9.5. Функціонал $I(y(x))$ називається лінійним на банаховому просторі B, якщо він неперервний на просторі B і

$$I(\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)) = \alpha_1 I(y_1(x)) + \alpha_2 I(y_2(x))$$

для будь-яких $y_1(x),\ y_2(x) \in B$ і будь-яких чисел $\alpha_1,\ \alpha_2$.

Приклад 9.3. Наведемо приклади лінійних функціоналів:

а) $I(y(x)) = \int\limits_a^b a(x)y(x)dx$, $a(x) \in C_{[a,b]}$. Це лінійний функціонал у просторі $C_{[a,b]}$;

б) $I(y(x)) = \int\limits_a^b [a(x)y(x) + b(x)y'(x)]dx$, $a(x), b(x) \in C[a,b]$. Це лінійний функціонал у просторі $C'_{[a,b]}$.

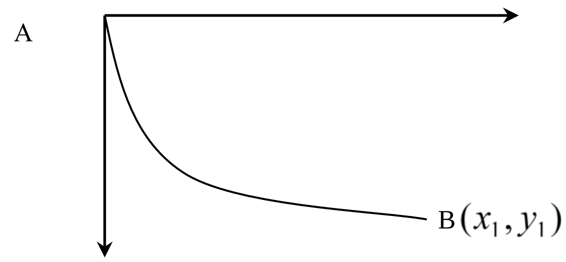
9.1.2. Приклади і класифікація задач варіаційного числення

Великий вплив на розвиток варіаційного числення дали наступні три задачі.

I. **Задача про брахістохрону**

В 1696 році Іоган Бернуллі розглянув задачу про знаходження лінії найшвидшого спуску – брахістохрони.

Необхідно визначити лінію, яка зв'язує дві точки A та B, які не лежать на одній вертикальній прямій. Лінія має ту властивість, що матеріальна точка скочується під дією сили тяжіння за мінімальний час (мал. 9.2).



Мал. 9.2

Нехай $A(0,0)$, $B(x_1, y_1)$, $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$ – швидкість руху матеріальної точки, де g – прискорення вільного падіння. Звідки:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}{\sqrt{2g}\sqrt{y}}.$$

Отже

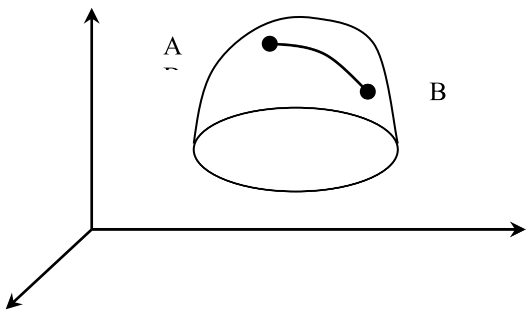
$$T = T(y(x)) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx, \tag{9.4}$$

$$y(0)=0, y(x_1)=y_1. \tag{9.5}$$

– крайові умови.

II. Задача про геодезичні лінії

Необхідно визначити лінію найменшої довжини, яка з'єднує дві задані точки A і B на поверхні $\varphi(x,y,z)=0$ (мал. 9.3). Такі лінії називаються геодезичними.



Мал. 9.3

Це є типова варіаційна задача на умовний екстремум. Нехай $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1,y_1,z_1)$ точки на поверхні $\varphi(x,y,z)=0$. Необхідно мінімізувати

$$l=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx \tag{9.6}$$

при умовах

$$\varphi(x,y,z)=0, \tag{9.7}$$

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0, z(x_0)=z_0 \\ y(x_1)=y_1, z(x_1)=z_1 \end{cases}. \tag{9.8}$$

Ця задача була поставлена в 1698 р. Бернуллі а розв'язана Ейлером та Лагранжом.

III. Ізопериметрична задача

Необхідно знайти замкнену лінію заданої довжини l, яка обмежує максимальну площу S (ще в стародавній Греції було відомо що цією лінією буде коло).

Тут необхідно обчислити екстремум функціоналу S при такому обмеженні

$$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt=l, \tag{9.9}$$

де l – постійна.

Загальний метод для розв'язання цієї задачі запропонував Ейлер.

Класифікацію задач варіаційного числення можна проводити по різному. Ми будемо дотримуватись тої, згідно якої будемо розглядати в подальшому матеріал.

I. Вид функціоналу:

а) $I=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$;

б) $I = \int\limits_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) dx$;

в) $I = \int\limits_{x_0}^{x_1} F\left(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n\right) dx$;

г) $I = \iint\limits_D F\left(x, y, z(x, y), \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy$.

Тут функції $y, y_1, \ldots, y_n, z(x, y)$ є аргументами відповідних функціоналів.

II. Вид граничних умов:
а) варіаційні задачі з фіксованими умовами, наприклад, для функціоналу а) $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$;
б) варіаційні задачі з вільними кінцями – $y(x_0)$ та $y(x_1)$ не фіксуються;
в) варіаційні задачі з рухомими границями (кінцями) $y(x_0)$ та $y(x_1)$ можуть належати деяким лініям чи поверхням.
При цьому x_0 та x_1 – можуть бути як фіксованими так і не фіксованими.

III. Додаткові умови:
а) безумовний екстремум – не задаються додаткові умови;
б) умовний екстремум – задаються додаткові обмеження.

9.1.3. Перша варіація функціоналу

З допомогою поняття лінійного функціоналу введемо поняття першого диференціалу (першої варіації функціоналу).
Під варіацією або приростом аргументу $\delta y = h(x)$ будемо називати різницю між $y(x)$ та $y_0(x)$: $h(x) = y(x) - y_0(x)$.
З курсу математичного аналізу відомо означення.
<u>Означення 9.6.</u> Функція *f(x)* називається диференційованою в точці x_0, якщо її приріст можна представити у вигляді

$$\Delta f = f\left(x_0 + h\right) - f\left(x_0\right) = \varphi(h) + o(h) \quad (h \to 0), \qquad (9.10)$$

де $\varphi(h)$ – лінійна функція, яка називається диференціалом функції *f(x)* в точці x_0.
По аналогії дамо означення диференційованого функціоналу.
<u>Означення 9.7.</u> Функціонал $I(y(x))$ називають диференційованим у точці $y_0(x)$, якщо його приріст можна представити у вигляді

$$\Delta I = I\left(y_0(x) + h(x)\right) - I\left(y_0(x)\right) = \varphi\left(h(x)\right) + o\left(\|h\|\right) \quad (\|h\| \to 0), \qquad (9.11)$$

де $\varphi(h)$ – лінійний функціонал, який називають першою варіацією (або першим диференціалом) функціоналу $I(y(x))$ в точці $y_0(x)$ і позначають

$$\varphi(h) = \delta I_{y_0}(h).$$

Функціонал $\varphi(h)$ визначається єдиним чином.
<u>Твердження 9.1.</u> Якщо функціонал $I(y(x))$ диференційований в точці $y_0(x)$, то його першу варіацію можна обчислити за формулою

$$\varphi(h) = \frac{d}{dt} I\left(y_0(x) + th(x)\right)\Big|_{t=0}. \qquad (9.12)$$

Доведення. Дійсно, нехай $\psi(t) = I\left(y_0(x) + th(x)\right)$, де $h(x) \in B$ – фіксований елемент. Тоді, в силу (9.11), маємо $\psi(t) - \psi(0) = \varphi\left(th(x)\right)$, $\psi'(0) = \varphi\left(h(x)\right)$, тобто (9.12) справджується.

Приклад 9.4. Обчислити першу варіацію функціоналу

$$I(y(x)) = \int_a^b F(x, y, y')dx. \qquad (9.13)$$

Розв'язання. Скористаємося формулою (9.12)

$$\delta I_{y_0}(h) = \frac{d}{dt}\int_a^b F\left(x, y_0 + th(x), y'_0 + th'(x)\right)dx\Bigg|_{t=0} = \\ = \int_a^b \left[F'_y\left(x, y_0, y'_0\right)h(x) + F'_{y'}\left(x, y_0, y'_0\right)h'(x)\right]dx. \qquad (9.14)$$

Очевидно, що функціонал (9.13) являється диференційованим у всіх точках простору $C'_{[a,b]}$.

9.1.4. Необхідні умови екстремуму

Означення 9.8. Говорять, що функціонал $I(y(x))$ досягає на кривій $y = y_0(x)$ максимума, якщо на будь-якій близькій до $y = y_0(x)$ кривій виконується нерівність $\Delta I = I\left(y(x)\right) - I(y_0(x)) \le 0$.

Якщо $\Delta I \le 0$, причому $\Delta I = 0$ тільки на кривій $y = y_0(x)$, то говорять, що на кривій $y = y_0(x)$ досягається строго максимум.

Якщо $\Delta I \ge 0$, то на кривій $y = y_0(x)$ досягається мінімум.

Якщо близькість кривих розуміємо в смислі нульового порядку $\left(\max\limits_{x\in[a,b]}\left|y(x) - y_0(x)\right|\right)$, то говорять, що на кривій $y = y_0(x)$ досягається сильний максимум (мінімум).

Якщо близькість кривих розуміємо в смислі 1-го порядку $\left(\max\limits_{x\in[a,b]}\left|y(x) - y_0(x)\right| + \max\limits_{x\in[a,b]}\left|y'(x) - y'_0(x)\right|\right)$, то говорять, що на кривій $y = y_0(x)$ досягається слабий максимум (мінімум).

Це локальні мінімуми та максимуми. Вони називаються локальними екстремумами.

Будь-який сильний екстремум є і слабким але не навпаки.

Екстремум на всій множині називається абсолютним. Визначення локального екстремума можна подати і на мові $\varepsilon - \delta$.

Теорема 9.1. Нехай функціонал $I(y(x))$ диференційований в точці $y = y_0(x)$. Якщо в цій точці досягається екстремум, то перша варіація функціоналу $I(y(x))$ в цій точці дорівнює нулю

$$\delta I_{y_0}\left(h(x)\right) = 0. \qquad (9.15)$$

(Співвідношення (9.15) виконується для будь-яких приростів $h(x)$).

Доведення. Для визначеності нехай $y_0(x)$ – точка мінімума. Нехай $\delta I_{y_0}(h) = \varphi(h) \neq 0$. Тоді існує елемент $h_0(x)$ такий, що $\varphi(h_0(x)) \neq 0$. Маємо при малих $|t|$:

$$0 \le \Delta I = I(y_0 + th_0(x)) - I(y_0(x)) = t\varphi(h_0(x)) + o(t). \qquad (9.16)$$

Знак останнього виразу при малих $t \neq 0$ співпадає зі знаком числа $t\varphi(h_0(x))$. Тут t можна вибирати таким чином, щоб це число було від'ємним. Отримане протиріччя і доводить теорему.

9.1.5. Основна лема варіаційного числення

Лема 9.1. Нехай *f(x)* неперервна на [*a,b*] функція і

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = 0 \qquad (9.17)$$

для будь-якої функції $h(x) \in C'_{[a,b]}$ з умовами

$$h(a) = h(b) = 0, \qquad (9.18)$$

то $f(x) \equiv 0,\ x \in [a,b]$.

Доведення. Припустимо, що $f(x) \neq 0$. Тоді існує $x_0 \in (a,b)$ така, що $f(x_0) \neq 0$. Це означає, що існує окіл $|x - x_0| < \delta$ такий, в якому $f(x) > 0$, причому δ-окіл лежить в інтервалі (*a,b*). Побудуємо $h_0(x) \in C'_{[a,b]}$:

$$h_0(x) = \begin{cases} [(x - x_0 + \delta)(x - x_0 - \delta)]^2, & x \in I_\delta = \{x : |x - x_0| < \delta\} \\ 0, & x \notin I_\delta \end{cases}. \qquad (9.19)$$

Фунція (9.19) задовольняє всім умовам леми. В силу побудови

$$\int_a^b f(x)h_0(x)dx = \int_{I_\delta} f(x)h_0(x)dx > 0 \qquad (9.20)$$

так як $f(x) > 0, h_0(x) > 0,\ x \in I_\delta$. Це протиріччя і доводить лему.

Зауваження 9.1 Лема залишається справедливою, якщо умови (9.17) виконуються для більш вузького класу функцій $h(x)$, які мають $n \ge 1$ неперервні похідні на [*a,b*] і $h^{(j)}(a) = h^{(j)}(b) = 0,\ \ 0 \le j \le n-1$. Для цього достатньо в відповідній лемі побудувати *n*-раз неперервно-диференційовану функцію $h_0(x)$ у вигляді:

$$h_0(x) = \begin{cases} [(x - x_0 + \delta)(x - x_0 - \delta)]^{2n}, & x \in I_\delta \\ 0, & x \notin I_\delta \end{cases}. \qquad (9.21)$$

9.2 Рівняння Ейлера для різних типів функціоналів

9.2.1. Рівняння Ейлера для найпростішої задачі варіаційного числення

Теорема 9.2. Нехай *y(x)* – екстремаль задачі з закріпленими кінцями

$$I(y(x)) = \int_a^b F(x, y, y')dx, \tag{9.22}$$

$$y(a) = A,\ y(b) = B. \tag{9.23}$$

Тоді *y(x)* задовольняє рівняння Ейлера

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0,\ a < x < b. \tag{9.24}$$

Доведення. Якщо *y(x)* – екстремаль, то $\delta I_y(h) = 0$ для будь-яких допустимих приростів *h(x)*. Згідно рівності (9.14) перша варіація функціоналу має вигляд

$$\delta I_y(h) = \int_a^b \left[F'_y(x, y, y')h(x) + F'_{y'}(x, y, y')h'(x)\right]dx =$$

$$= \int_a^b F_y'(x, y, y')h(x)dx + \int_a^b F'_{y'}(x, y, y')dh(x) =$$

$$= \int_a^b F'_y(x, y, y')h(x)dx + F'_{y'}(x, y, y')\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}F'_{y'}(x, y, y')h(x)dx =$$

$$= \int_a^b \left[F'_y(x, y, y') - \frac{d}{dx}F'_{y'}(x, y, y')\right]h(x)dx = 0.$$

В силу леми маємо необхідні умови (9.24). Теорема доведена.

Рівняння Ейлера – це диференціальне рівняння другого порядку

$$F'_y(x, y, y') - F''_{y'x}(x, y, y')y' - F''_{y'y}(x, y, y')y' - F''_{y'y'}(x, y, y')y'' = 0. \tag{9.25}$$

9.2.2. Рівняння Ейлера для функціоналів, залежних від декількох функцій

Розглянемо функціонал

$$I(y_1, ..., y_n) = I(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx \tag{9.26}$$

з закріпленими умовами

$$y(a) = A,\ y(b) = B. \tag{9.27}$$

Тут $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}.$

Нехай функція $F(x, y, y')$ двічі неперервно диференційована за своїми змінними в області $a \le x \le b,\ -\infty < y_j < \infty,\ -\infty < y'_j < \infty,\ j = 1,2,...,n$. Будемо шукати екстремум функціоналу (9.26) в класі $C'[a, b]$. Нехай $h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_n(x) \end{pmatrix}$ – допустимий приріст з $C'[a, b]$, який задовольняє крайовим умовам

$$h(a) = h(b) = 0. \tag{9.28}$$

Теорема 9.3 Якщо $y(x)=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ – екстремаль функціоналу (9.26) при умові (9.27), то вона задовольняє системі рівнянь Ейлера

$$F'_{y_i}-\frac{d}{dx}F'_{y'_i}=0,\ \ i=1,2,\ldots,n. \tag{9.29}$$

Доведення. Розглянемо варіацію функціоналу

$$\delta I(x,y(x),y'(x))=\frac{d}{dt}\int_a^b[F(x,y_1+th_1,\ldots,y_n+th_n,y'_1+th'_1,\ldots,y'_n+th'_n]dx\Big|_{t=0}=$$

$$=\int_a^b\left[\sum_{i=1}^n F'_{y_i}(x,y_1,\ldots,y_n,y'_1,\ldots,y'_n)h_i(x)+\sum_{i=1}^n F'_{y'_i}(x,y_1,\ldots,y_n,y'_1,\ldots,y'_n)h'(x)\right]dx=$$

(інтегруємо по частинам враховуючи умови $h_i(a)=h_i(b)=0$, $i=1,2,\ldots,n$)

$$=\int_a^b[\sum_{i=1}^n F'_{y_i}(x,y_1,\ldots,y_n,y'_1,\ldots,y'_n)-\frac{d}{dx}F'_{y'_i}(x,y_1,\ldots,y_n,y'_1,\ldots,y'_n)]h_i(x)dx=0.$$

Але кожна з $h_i(x)\in C'[a,b]$ – довільна функція .Вибираючи одну з них довільно $h_i(x)\neq 0$, а останні $h_j(x)=0$, $i\neq j,\ j=1,2,\ldots,n$, отримуємо в силу основної леми

$$F'_{y_i}(x,y_1,\ldots,y_n,y'_1,\ldots,y'_n)-\frac{d}{dx}F'_{y'_i}(x,y_1,\ldots,y_n,y'_1,\ldots,y'_n)=0,\ i=1,2,\ldots,n. \tag{9.30}$$

Систему n рівнянь (9.30), кожне з яких другого порядку, розглядаємо з крайовими умовами (9.27).

9.2.3. Принцип найменшої дії

Нехай матеріальна точка маси m в 3-вимірному просторі $x=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$ рухається в потенціальному силовому полі. Введемо функцію Лагранжа

$$L=T-U, \tag{9.31}$$

де $T=\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)$ – кінетична енергія, $U(t,x_1,x_2,x_3)$ – потенціальна.

Таким чином

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)-U(t,x_1,x_2,x_3). \tag{9.32}$$

Інтеграл

$$S=\int_{t_0}^{t_1}Ldt \tag{9.33}$$

називається дією. Дія S є функціонал

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)-U(t,x_1,x_2,x_3)\right]dt.$$

Нехай

$$x(t_0)=x^{(0)},\quad x(t_1)=x^{(1)}. \qquad (9.34)$$

Принцип найменшої дії: матеріальна точка рухається по такій траєкторії, яка відповідає найменшій дії, тобто

$$\delta S=0. \qquad (9.35)$$

Для виводу диференціального рівняння руху з цього принципу необхідно записати рівняння Ейлера

$$m\ddot{x}_1=-\frac{\partial U}{\partial x_1},\ m\ddot{x}_2=-\frac{\partial U}{\partial x_2},\ m\ddot{x}_3=-\frac{\partial U}{\partial x_3}. \qquad (9.36)$$

Рівняння (9.36) – це класичне рівняння Ньютона. Аналогічне рівняння можна записати для систем точок.

9.2.4. Рівняння Ейлера для функціоналів, залежних від функції багатьох змінних

Розглянемо функціонал

$$I(y(x_1,\ldots,x_n))=\int_D F(x_1,\ldots,x_n,y,\frac{\partial y}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial y}{\partial x_n})dx_1..dx_n. \qquad (9.37)$$

Тут $y=y(x_1,\ldots,x_n)$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $dx=dx_1..dx_n, D-$ обмежена область з гладкою границею Γ.

Припустимо, що $F(x_1,\ldots,x_n,y_1,\frac{\partial y}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial y}{\partial x_n})-$ двічі неперервно диференційована по сукупності всіх змінних при $x\in D\cup\Gamma$, а змінні $\frac{\partial y}{\partial x_i}$, $i=1,2,\ldots,n$ змінюються в границі $(-\infty,\infty)$.

Екстремум шукаємо в класі неперервно диференційованих функцій при $x\in D\cup\Gamma$.

Обчислимо варіацію

$$\delta I_y(h)=\frac{d}{dt}I(y+th(x_1,\ldots,x_n))\big|_{t=0}=\int_D[F'_y(x_1,\ldots,x_n,y,\frac{\partial y}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial y}{\partial x_n})h(x_1,\ldots,x_n)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}F'_{y'_{x_i}}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\frac{\partial y}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial y}{\partial x_n})h'_{x_i}(x_1,\ldots,x_n)]dx. \qquad (9.38)$$

Так як і для одномірного випадку справедлива лема.

Лема 9.2. Нехай функція $f(x_1,\ldots,x_n)$ неперервна при $x\in D\cup\Gamma$ і

$$\int_D f(x_1,\ldots,x_n)h(x_1,\ldots,x_n)dx=0 \qquad (9.39)$$

для довільної $h(x_1,\ldots,x_n)-$ неперервно диференційованої функції при $x\in D\cup\Gamma$ такої, що

$$h(x)\big|_{\Gamma}=0. \qquad (9.40)$$

Тоді $f(x)\equiv 0$ в області D.

Доведення. Дійсно, припустимо, що в деякій точці $\overline{x}=(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})$ функція $f(\overline{x})\neq 0$, наприклад, $f(\overline{x})>0$.

Тоді вона є додатною і в деякому $\varepsilon-$ околі радіуса ε з області D. Побудуємо

$$h(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases}0, & (x-\bar{x})^T(x-\bar{x})\ge\varepsilon^2\\ [(x-\bar{x})^T(x-\bar{x})-\varepsilon^2]^2, & (x-\bar{x})^T(x-\bar{x})\le\varepsilon^2\end{cases}. \qquad (9.41)$$

Тоді інтеграл (9.41) зводиться до обчислення інтегралу по кругу і буде додатнім. Це протиріччя і доводить лему.

<u>Теорема 9.4.</u> Якщо $y(x)$ екстремаль функціоналу (9.37) при умові

$$y(x)\big|_\Gamma=\varphi(x), \qquad (9.42)$$

де $\varphi(x)$ – відома на Γ функція, тоді $y(x)$ задовольняє в D рівнянню Ейлера

$$F'_y-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}F'_{y'_{x_i}}=0. \qquad (9.43)$$

<u>Доведення.</u> Перетворимо вираз (9.38), інтегруючи по частинам і враховуючи $h(x)\big|_\Gamma=0$

$$\int_D h'_{x_i}F'_{y'_{x_i}}dx=$$

$$=\int_D\frac{\partial}{\partial x_i}[h(x_1,\ldots,x_n)F'_{y'_{x_i}}(x_1,\ldots,x_n,y,\frac{\partial y}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial y}{\partial x_n})]dx-$$

$$-\int_D h(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}F'_{y'_{x_i}}(x_1,\ldots,x_n,y,\frac{\partial y}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial y}{\partial x_n})dx=$$

(використовуємо формулу Остроградського

$$\int_D\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_i(\cdot)}{\partial x_i}dx_1\ldots dx_n=\int_\Gamma\sum_{i=1}^{n}X_i(\cdot)dx_1\ldots dx_{i-1}dx_{i+1}\ldots dx_n\ )$$

$$=\int_\Gamma h(x_1,\ldots,x_n)F'_{y'_{x_i}}(x_1,\ldots,x_n,y,\frac{\partial y}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial y}{\partial x_n})dx_1\ldots dx_{i-1}dx_{i+1}\ldots dx_n-$$

$$-\int_D h(x)\frac{\partial}{\partial x_i}F'_{y'_{x_i}}(x_1,\ldots,x_n,y,\frac{\partial y}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial y}{\partial x_n})dx.$$

Так як $h(x_1,\ldots,x_n)=0$ на Г, то варіацію функціоналу запишемо у вигляді

$$\delta I_y(h)=\int_D h(x_1,\ldots,x_n)[F'_y(\cdot)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}F'_{y'_{x_i}}(\cdot)]dx=0.$$

В силу леми (9.2) отримаємо (9.43). Теорема доведена.

9.2.5. Необхідні умови екстремуму для функціоналів, які залежні від похідних порядку вище першого

Розглянемо функціонал вигляду

$$I(y)=\int_a^b F(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n)}(x))dx \qquad (9.44)$$

і задачу з закріпленими кінцями

$$\begin{cases}y(a)=A,\ y'(a)=A_1,\ldots,y^{(n-1)}(a)=A_{n-1}\\ y(b)=B,\ y'(b)=B_1,\ldots,y^{(n-1)}(b)=B_{n-1}\end{cases}. \qquad (9.45)$$

Припустимо, що функція $F(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n)}(x))$ n раз неперервно диференційована по сукупності своїх змінних в області

$$a \le x \le b,\ -\infty < y, y', \ldots, y^{(n-1)} < \infty .$$

Запишемо варіацію функціоналу (9.44)

$$\delta I(h(x)) = \frac{d}{dt}\int_a^b [F(x, y+th, \ldots, y'+th', \ldots, y'^{(n)}+th^{(n)}]dx\Big|_{t=0} =$$

$$\int_a^b [F'_y(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n)}(x))h(x) + F'_{y'}(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n)}(x))h'(x)+\ldots+$$

$$+F'_{y^{(n)}}(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n)}(x))h^{(n)}(x)]dx. \qquad (9.46)$$

Так як функціонал $y(x)$ задовольняє крайовим умовам (9.45), то

$$h^{(k)}(a) = h^{(k)}(b) = 0,\ 0 \le k \le n-1. \qquad (9.47)$$

Інтегруючи ($k+1$)-ий вираз k раз по частинам в (9.46) і враховуючи (9.47), отримаємо

$$\int_a^b F'_{y^{(k)}} h^{(k)}(x)dx = (-1)^k \int_a^b h(x)\frac{d^k}{dx^k}F'_{y^{(k)}}dx .$$

Тому варіацію функціоналу (9.46) перепишемо так

$$\delta I_y(h) = \int_a^b h(x)[F'_y(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n)}(x)) - \frac{d}{dx}F'_{y'}(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n)}(x))+\ldots+$$

$$+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F'_{y^{(n)}}(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n)}(x))]dx. \qquad (9.48)$$

Якщо $y(x)$ – екстремаль функціоналу (9.44), то $\delta I_y(h)=0$ для довільних допустимих приростів $h(x)\in C^n[a,b]$. З (9.48), в силу зауваження 9.1, отримаємо рівняння Ейлера

$$F'_y(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n)}(x)) - \frac{d}{dx}F'_{y'}(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n)}(x))+\ldots+$$

$$+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F'_{y^{(n)}}(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n)}(x))=0. \qquad (9.49)$$

Рівняння (9.49) – це диференціальне рівняння порядку $2n$, яке розглядається разом з крайовими умовами (9.45).

9.3. Про достатні умови екстремуму функціоналів

Для прикладу розглянемо найпростішу варіаційну задачу для функціоналу (9.22) з крайовими умовами (9.23).

Достатні умови Веєрштраса. Функцією Веєрштраса $E(x,y,p,y')$ називається функція, яка визначається рівністю

$$E(x,y,p,y') = F(x,y,y') - F(x,y,p) - (y'-p)F'_p(x,y,p), \qquad (9.50)$$

де $p = p(x, y)$ – нахил поля екстремалей розглянутої варіаційної задачі (9.22), (9.23) в точці (x, y).

<u>Достатні умови слабкого екстремуму</u>. Крива C доставляє слабкий екстремум функціоналу (9.22), якщо:

1) крива C є екстремаллю функціоналу (9.22) і задовольняє граничним умовам (9.23), тобто є розв'язком рівняння Ейлера для функціоналу (9.22), який задовольняє умовам (9.23);
2) екстремаль C може бути включена в поле екстремалей (в частинному випадку це буде, коли виконується умова Якобі);
3) функція Веєрштраса $E(x, y, p, y')$ повинна зберігати знак в усіх точках (x, y), які близькі до екстремалі C, і для близьких до $p(x, y)$ значень y'. Функціонал $I(y)$ буде мати максимум на C, якщо $E \le 0$ і мінімум, якщо $E \ge 0$.

<u>Достатні умови сильного екстремуму</u>. Крива C доставляє сильний екстремум функціоналу (9.22), якщо:

1) крива C є екстремаллю функціоналу (9.22), яка задовольняє граничним умовам (9.23);
2) екстремаль C може бути включена в поле екстремалей;
3) функція Веєрштраса $E(x, y, p, y')$ зберігає знак в усіх точках (x, y) близьких до екстремалі C і для довільних значень y'. При $E \le 0$ буде максимум, а при $E \ge 0$ – мінімум.

<u>Зауваження 9.2.</u> Умова Веєрштраса необхідна для наявності екстремума в наступному розумінні – якщо в точках екстремалі для деяких значень y' функція E має протилежні знаки, то сильний екстремум не досягається. Якщо ця властивість має місце при як завгодно близьких до p значеннях y', то не досягається і слабкий екстремум.

<u>Приклад 9.3.</u> Дослідити на екстремум функціонал

$$I(y) = \int_0^1 (y'^3 + y')dx, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 2.$$

<u>Розв'язання</u>. Рівняння Ейлера для даного функціоналу має вигляд $y'y'' = 0$, так що екстремалями будуть прямі $y(x) = C_1x + C_2$. Екстремаллю, яка задовольняє заданим граничним умовам, є пряма $y = 2x$. Нахил поля в точках цієї екстремалі $p = 2$. Очевидно, що дана екстремаль $y = 2x$ включається в центральне поле екстремалей з центром в точці $(0,0)$. Неважко перевірити, що в даному випадку виконується умова Якобі. Рівняння Якобі в даному випадку має вигляд $\dfrac{d}{dx}(6y'u') = 0$, в силу рівняння екстремалі маємо $y' = 2$. Таким чином рівняння Якобі прийме вигляд $u''(x) = 0$, звідки отримаємо $u(x) = C_1x + C_2$. З умови $u(0) = 0$ отримаємо $C_2 = 0$. Так як цей розв'язок $u = C_1x$ при $C_1 \ne 0$, крім точки $x = 0$, в нуль не перетворюється, то умова Якобі виконана. Запишемо функцію Веєрштраса

$$E(x, y, p, y') = y'^3 + y' - p^3 - p - (y' - p)(3p^2 + 1) =$$

$$=(y'-p)^2(y'+2p).$$

Перший множник завжди додатній для будь-яких y', а другий додатній при значеннях y' близьких до 2. Тобто, виконуються всі умови існування слабкого мінімуму. Якщо $y'<-4$, то функція E буде від'ємною і достатні умови сильного екстремуму не виконуються. Для даного випадку сильного екстремуму не має.

Достатні умови Лежандра. Нехай функція $F(x,y,y')$ має неперервну частинну похідну $F_{y'y'}(x,y,y')$, а екстремаль C включена в поле екстремалей.

Якщо на екстремалі C має місце умова $F_{y'y'}>0$, то на кривій C досягається слабкий мінімум, якщо $F_{y'y'}<0$ на екстремалі C, то на ній досягається слабкий максимум функціоналу (9.22). Ці умови називаються підсиленими умовами Лежандра.

У випадку, коли $F_{y'y'}(x,y,y')\geq 0$ в точках (x,y) близьких до екстремалі C при довільних значеннях y', то маємо сильний мінімум, а у випадку, коли для вказаних значень аргументів $F_{y'y'}(x,y,y')\leq 0$, маємо сильний максимум.

Приклад 9.4. Дослідити на екстремум функціонал

$$I(y)=\int_0^2 (e^{y'}+3)dx, \quad y(0)=0,\ y(2)=1.$$

Розв'язання. В даному прикладі екстремалями є наступні прямі $y=C_1x+C_2$. Екстремаллю, яка задовольняє граничні умови, є пряма $y=\frac{x}{2}$. Вона може бути включена в центральне поле екстремалей $y=Cx$. В даному випадку $F_{y'y'}(x,y,y')=e^{y'}>0$ при будь-яких значеннях y'. Тобто, на екстремалі $y=\frac{x}{2}$ функціонал має сильний мінімум.