

**Типові задачі з курсу
«Рівняння математичної фізики»**

I. Метод відокремлення змінних

1) Дослідити тип рівняння

$$(1+x^2)u_{xx} + (1+y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0.$$

2) Звести рівняння

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y + u = 0$$

до канонічного вигляду.

3) Розв'язати однорідну крайову задачу для рівняння дифузії на відрізку $(0, 1)$, $t > 0$:

$$\begin{aligned} u_t &= 4u_{xx} + u \\ u_x(0, t) &= u_x(1, t) = 0, \\ u(x, 0) &= 2 \cos 2\pi x \cos \frac{3\pi}{2} x. \end{aligned}$$

4) Розв'язати мішану крайову задачу для рівняння дифузії на відрізку $(0, \pi)$, $t > 0$:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u + t(t-2) \left(\frac{x}{\pi} - 1 \right) + \sin 3x \\ u(0, t) &= t^2, \quad u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) &= 2 \sin 3x \cos 2x. \end{aligned}$$

5) Розв'язати крайову задачу для рівняння $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ у напівсмугі $D = \{x, t | x \in (0, l), t \in (0, \infty)\}$, якщо межові умови мають вигляд:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \quad u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) &= \sin \frac{5\pi x}{2l}, \quad u_t(x, 0) = \cos \frac{\pi x}{2l}. \end{aligned}$$

6) Обчислити розподіл потенціалу електростатичного поля $u(x, y)$ всередині прямокутника $[0, a] \times [0, b]$, якщо потенціал вздовж боку цього прямокутника, що лежить на осі x , дорівнює V_0 , усі інші боки заземлені (усередині прямокутника зарядів немає).

7) Розв'язати внутрішню задачу Діріхле для круга U_R , якщо при $x^2 + y^2 = R^2$ поле матиме вигляд:

$$u(x, y) = x + xy.$$

- 8) Знайти функцію, що є гармонічною зовні кулі, радіус якої дорівнює R , та

$$u(R, \theta, \varphi) - u_r(R, \theta, \varphi) = \sin^2 \theta.$$

- 9) Знайти функцію, що є гармонічною всередині сферичного шару $r \in (1, 2)$ та таку, що

$$\begin{aligned} u(1, \theta, \varphi) &= \cos^2 \theta, \\ u(2, \theta, \varphi) &= \frac{1}{8} (\cos^2 \theta + 1). \end{aligned}$$

- 10) Знайти функцію $u(\rho, \phi, z)$, де ρ, ϕ, z - циліндричні координати, що є гармонічною в циліндрі, радіус якого дорівнює R , а довжина - l . На поверхні циліндра ця функція повинна задовольняти такі умови:

$$\begin{aligned} u(\rho, \phi, 0) &= V_1; \\ u(\rho, \phi, l) &= V_2; \\ u(R, \phi, z) &= \begin{cases} V_1, & 0 < z < l/2 \\ V_2, & l/2 < z < l \end{cases} \end{aligned}$$

II. Операції з узагальненими функціями

- 1) Довести, що $x^m \mathcal{P}^{\frac{1}{x}} = x^{m-1}$.
- 2) Обчислити $\theta(a - |x|) * \theta(a - |x|)$.
- 3) Обчислити $F[x^3 \delta(x)]$.
- 4) Обчислити $(\theta(x) e^{ax})^{(m)}$, $m \geq 1$.
- 5) Знайти усі похідні функції

$$y = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

в в класі узагальнених функцій.

- 6) Знайти усі розв'язки рівняння в класі узагальнених функцій:

$$x^3 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = 0.$$

- 7) Знайти фундаментальний розв'язок \mathcal{E} оператора

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - 4 \frac{d}{dx} + 5.$$

За допомогою \mathcal{E} розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 5y = x + e^x$.

III. Фундаментальні розв'язки крайових задач

1) Розв'язати одновимірну задачу Коші ($x \in \mathbb{R}, t > 0$):

$$u_t = u_{xx} + 2xe^x, \quad u(x, 0) = \theta(x)x^2.$$

2) Розв'язати двовимірну задачу Коші ($x, y \in \mathbb{R}, t > 0$):

$$u_t = \Delta u + \sin t \sin x \sin y, \quad u(x, y, 0) = 1.$$

3) Розв'язати трьохвимірну задачу Коші ($x, y, z \in \mathbb{R}, t > 0$):

$$\begin{aligned} u_t &= 2\Delta u + t \cos x, \\ u(x, y, z, 0) &= \cos y \cos z. \end{aligned}$$

4) Розв'язати одновимірну задачу Коші ($x \in \mathbb{R}, t > 0$):

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + e^{\alpha t} \delta(x), \\ u(x, 0) &= \delta(1 - |x|), \\ u_t(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

5) Розв'язати одновимірну задачу Коші ($x \in \mathbb{R}, t > 0$):

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \\ u(x, y, 0) &= 0, \\ u_t(x, y, 0) &= \delta'(x_0 - x). \end{aligned}$$

6) Розв'язати трьохвимірну задачу Коші ($x, y, z \in \mathbb{R}, t > 0$):

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u, \\ u(x, y, z, 0) &= (x^2 + y^2 + z^2)^2, \\ u_t(x, y, z, 0) &= (x^2 + y^2 + z^2)^2. \end{aligned}$$

7) Розв'язати трьохвимірну задачу Коші ($x, y, z \in \mathbb{R}, t > 0$):

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u, \\ u(x, y, z, 0) &= \cos r, \\ u_t(x, y, z, 0) &= \cos r. \end{aligned}$$