

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

*Є. Д. Білоколос, Д. Д. Шека*

**Збірник задач з курсу  
«Рівняння математичної фізики»**

**Навчальний посібник  
для студентів природничих факультетів**

Київ  
2007

УДК 530.145  
ББК 22.331

версія v2.7 $\alpha$  (11.09.07)

Є. Д. Білококос, Д. Д. Шека

**Збірник задач з курсу «Рівняння математичної фізики»:** Навчальний посібник для студентів природничих факультетів. — К., 2007.-77 с.

Збірник містить біля 500 задач з курсу «Рівняння математичної фізики», який автори читають на радіофізичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Збірник може бути рекомендовано студентам, аспірантам і викладачам фізичних та фізико–математичних спеціальностей вищих навчальних закладів. Збірник може бути корисним також і для самопідготовки.

# Зміст

<b>Глава 1. Вступ</b>	<b>5</b>
§ 1.1. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними . . . . .	5
<b>Глава 2. Метод відокремлення змінних</b>	<b>11</b>
§ 2.1. Задача Штурма–Ліувілля . . . . .	11
§ 2.1.1. Регулярна задача Штурма–Ліувілля . . . . .	11
§ 2.1.2. Сингулярна задача Штурма–Ліувілля . . . . .	13
§ 2.2. Рівняння дифузії на відрізку . . . . .	16
§ 2.3. Хвильове рівняння на відрізку . . . . .	22
§ 2.4. Крайові задачі для рівняння Лапласа на площині. . . . .	27
§ 2.4.1. Декартові координати . . . . .	27
§ 2.4.2. Спектральна задача для оператора Лапласа у прямокутнику (рівняння Гельмгольца) . . . . .	30
§ 2.4.3. Полярні координати . . . . .	30
§ 2.5. Крайові задачі для рівняння Лапласа у трьохвимірному просторі . . . . .	33
§ 2.5.1. Декартові координати . . . . .	33
§ 2.5.2. Сферичні координати . . . . .	35
§ 2.5.3. Циліндричні координати . . . . .	42
<b>Глава 3. Узагальнені функції та фундаментальні розв’язки крайових задач</b>	<b>52</b>
§ 3.1. Основні означення . . . . .	52
§ 3.2. Узагальнені функції та їх властивості . . . . .	53
§ 3.2.1. Основні означення і приклади узагальнених функцій	53
§ 3.2.2. Операції з узагальненими функціями: множення і заміна змінних . . . . .	56
§ 3.2.3. Операції з узагальненими функціями: диференціювання . . . . .	58
§ 3.2.4. Операції з узагальненими функціями: прямий добуток, згортка і перетворення Фур’є . . . . .	59
§ 3.2.5. Фундаментальний розв’язок лінійного диференціального оператора . . . . .	62
<b>Глава 4. Фундаментальні розв’язки та задачі для лінійних диференціальних операторів математичної фізики</b>	<b>68</b>
§ 4.1. Фундаментальний розв’язок і задача Коші для рівняння дифузії . . . . .	68
§ 4.2. Фундаментальний розв’язок і задача Коші для хвильового рівняння . . . . .	70

§ 4.3. Фундаментальний розв'язок і межові задачі для рівнянь Лапласа і Пуассона . . . . .	73
<b>Абетковий покажчик</b>	<b>75</b>
<b>Рекомендована література</b>	<b>76</b>

# Глава 1

## Вступ

### §1.1. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними

Розгляньмо лінійне диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними:

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = \Phi(x, y, u, u_x, u_y). \quad (1.1)$$

Для проведення класифікації таких рівнянь суттєві ті властивості рівнянь, що не змінюються при перетвореннях координат. Такою інваріантною характеристикою є знак дискримінанту

$$\Delta \triangleq b^2 - ac, \quad (1.2)$$

тобто величина  $\text{sign } \Delta$ . Ми класифікуємо рівняння за цією інваріантною величиною.

Рівняння (1.1) називається:

1. *гіперболічним*, якщо  $\Delta > 0$ ;
2. *еліптичним*, якщо  $\Delta < 0$ ;
3. *параболічним*, якщо  $\Delta = 0$ .

Для приведення рівняння до канонічного вигляду введемо *характеристичну* функцію (1.1), або його *характеристику*  $w(x, y)$ , що задовольняє наступне характеристичне рівняння:

$$a(x, y)w_x^2 + 2b(x, y)w_xw_y + c(x, y)w_y^2 = 0. \quad (1.3)$$

Крива  $w(x, y) = \text{const}$ , що є розв'язком характеристичного рівняння (1.3), має назву *характеристичної кривої*, а напрямок  $\{dx, dy\}$  — *характеристичним напрямком*. З умови  $w(x, y) = \text{const}$  випливатиме, що  $w_x dx + w_y dy = 0$ , тобто характеристичний напрямок дуже просто пов'язаний з  $w$ :  $\frac{dy}{dx} = -\frac{w_x}{w_y}$ , звідки

$$\frac{dy_+}{dx} = \frac{b + \sqrt{\Delta}}{a}, \quad (1.4a)$$

$$\frac{dy_-}{dx} = \frac{b - \sqrt{\Delta}}{a}. \quad (1.4b)$$

Інтегралі рівнянь (1.4) є характеристиками  $w(x, y) = \text{const}$ . В залежності від знаку  $\Delta$  маємо різні типи характеристичних кривих (1.4). Розгляньмо кожний з випадків окремо.

1.  $\Delta > 0$ , рівняння гіперболічного типу. Обидва розв'язки  $y_+(x)$  та  $y_-(x)$  дійсні та різні. В цьому випадку ми маємо дві сім'ї характеристик,  $w_+(x, y) = \text{const}$  та  $w_-(x, y) = \text{const}$ . Заміною змінних

$$\xi = w_+(x, y), \quad \eta = w_-(x, y),$$

рівняння зводиться до так званої *першої канонічної форми* рівняння гіперболічного типу

$$u_{\xi\eta} = \Phi_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \quad (1.5a)$$

Заміною

$$\xi = \alpha + \beta, \quad \eta = \alpha - \beta$$

можна привести рівняння до *другої канонічної форми*

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_2(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta). \quad (1.5b)$$

2.  $\Delta < 0$ , рівняння еліптичного типу. Розв'язки  $y_+(x)$  та  $y_-(x)$  є комплексно спряженими. В цьому випадку відповідні характеристики мають вигляд

$$w_\pm(x, y) = \xi(x, y) \pm i\eta(x, y).$$

В змінних  $\xi(x, y), \eta(x, y)$  рівняння еліптичного типу приймає *канонічну форму*

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \quad (1.5c)$$

3.  $\Delta = 0$ , рівняння параболічного типу. В цьому випадку характеристики  $w_+(x, y)$  та  $w_-(x, y)$  співпадають. Виберемо незалежні змінні у вигляді

$$\xi = w(x, y), \quad \eta = \eta(x, y),$$

де  $\eta(x, y)$  — будь — яка функція, незалежна від  $\xi(x, y)$ . Таким чином ми отримаємо для рівняння параболічного типу *канонічну форму*

$$u_{\eta\eta} = \Phi_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \quad (1.5d)$$

### Приклад 1.1

◁ Дослідити тип рівняння Чаплигіна-Трікомі

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0 \quad (1.6)$$

та привести його до канонічного вигляду.

▷

**Розв’язання** ◀ Дискримінант рівняння (1.1) є  $\Delta = -x$ . Отже, рівняння Чаплигіна-Трікомі має різний тип в різних областях незалежних змінних: при  $x < 0$  воно гіперболічне, при  $x > 0$  еліптичне, а при  $x = 0$  — параболічне. Розгляньмо кожну з перелічених областей:

Гіперболічний тип,  $x < 0$ . Рівняння характеристик має вигляд:

$$\frac{dy_{\pm}}{dx} = \pm(-x)^{-1/2}.$$

Ці рівняння мають наступні інтеграли  $w_{\pm} = \text{const}$ , що визначають його характеристики:

$$w_{\pm}(x, y) = y \mp \frac{2}{3}(-x)^{3/2}.$$

Отже, перетворенням координат

$$\xi = w_{+}(x, y) = y - \frac{2}{3}(-x)^{3/2}, \quad \eta = w_{-}(x, y) = y + \frac{2}{3}(-x)^{3/2} \quad (1.7)$$

рівняння приводиться до канонічного вигляду

$$u_{\xi\eta} = \frac{u_{\xi} - u_{\eta}}{6(\xi - \eta)}. \quad (1.8)$$

Еліптичний тип,  $x > 0$ . Рівняння

$$\frac{dy_{\pm}}{dx} = \pm ix^{-1/2}$$

має характеристики:

$$w_{\pm}(x, y) = y \pm i\frac{2}{3}x^{3/2}.$$

Отже, перетворенням координат

$$\xi = \text{Re } w_{+}(x, y) = y, \quad \eta = \text{Im } w_{+}(x, y) = \frac{2}{3}x^{3/2} \quad (1.9)$$

рівняння зводиться до канонічного вигляду

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = -\frac{3u_{\eta}}{\eta}. \quad (1.10)$$

Параболічний тип,  $x = 0$ . В незалежних змінних  $x, y$  рівняння Чаплигіна-Трікомі має канонічний вигляд

$$u_{xx} = 0. \quad (1.11)$$



В прикладах (1)–(29) треба дослідити тип рівнянь.

$$1 \quad (1+x^2)u_{xx} + (1+y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0.$$

$$2 \quad x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x + 4yu_y + 16x^4u = 0.$$

$$3 \quad 4y^2u_{xx} - \exp(2x)u_{yy} - 4y^2u_x = 0.$$

$$4 \quad x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0.$$

$$5 \quad y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0.$$

$$6 \quad x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0.$$

$$7 \quad y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0.$$

$$8 \quad u_{xx}\operatorname{sign}y + 2u_{xy} - u_{yy}\operatorname{sign}x = 0.$$

$$9 \quad u_{xx} + 2u_{xy} + (1 - \operatorname{sign}x)u_{yy} = 0.$$

$$10 \quad u_{xx}\operatorname{sign}y + 2u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

$$11 \quad u_{xx} + xyu_{yy} = 0.$$

$$12 \quad yu_{xx} + xu_{yy} = 0.$$

$$13 \quad xu_{xx} + yu_{yy} = 0.$$

$$14 \quad xu_{xx} + yu_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0.$$

$$15 \quad e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} - xu = 0.$$

$$16 \quad u_{xx} - (1+y^2)^2 u_{yy} - 2y(1+y^2)u_y = 0.$$

$$17 \quad u_{xx} + 2\sin xu_{xy} - (\cos^2 x - \sin^2 x)u_{yy} + \cos xu_y = 0.$$

$$18 \quad u_{xx} - 2\sin xu_{xy} - \cos^2 xu_{yy} - 3\cos xu_y = 0.$$

$$19 \quad 2xu_{xx} - yu_{xy} - 6xu_{yy} - e^x u_y = 0.$$

$$20 \quad xu_{xx} - |y|u_{xy} - 6u_{yy} - |x|u_y = 0.$$

$$21 \quad 2\sin xu_{xx} - \cos xu_{xy} - 6\cos xu_{yy} - 12u_y + u_x - 11u = 0.$$

$$22 \quad 2(x+y)u_{xx} - 3xu_{xy} - 4xu_{yy} + 2u_y - 8u_x - u = 0.$$

$$23 \quad 2(x+y)u_{xx} - 3xu_{xy} - 4xu_{yy} + 2u_y - 8u_x - u = 0.$$

$$24 \quad 2(x+y)u_{xx} - 3xu_{xy} - xu_{yy} + 2u_y - 8u_x - u = 0.$$

$$25 \quad (x+y)u_{xx} - (3x-y)u_{xy} - (y+4)u_{yy} - 3u_y - 8u_x + 5u = 0.$$

$$26 \quad (2x-y)u_{xx} - (3x-y)u_{xy} - 5xu_{yy} + 2u_y - 8u_x - u = 0.$$

$$27 \quad \sin yu_{xx} - 5\cos yu_{xy} + 4\cos yu_{yy} - 2u_y + 4u_x - 7u = 0.$$

$$28 \quad 4\sin(x+y)u_{xx} + 5\cos(x+y)u_{xy} + 2\cos(x+y)u_{yy} - 5u_y + 14u_x - 6u = 0.$$

$$29 \quad \operatorname{ch} yu_{xx} - \operatorname{sh} xu_{xy} - 3u_x = 0.$$

Якщо в рівнянні (1.1) коефіцієнти є сталими, то після зведення до канонічного вигляду можна зробити подальше спрощення. Нехай рівняння зведено до однієї з канонічних форм (1.5) заміною змінних  $\xi(x, y)$ ,  $\eta(x, y)$ . Якщо ввести невідому функцію  $v(\xi, \eta)$  згідно з співвідношенням

$$u(\xi, \eta) = v(\xi, \eta) \cdot e^{\alpha\xi + \beta\eta}, \quad (1.12)$$

то вибираючи сталі  $\alpha$  й  $\beta$  відповідним чином, завжди можна позбавитись в рівнянні однієї, або двох перших похідних функції  $v(\xi, \eta)$ .

### Приклад 1.2

◁ Звести до канонічного вигляду та спростити наступне рівняння:

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0. \quad (1.13)$$

▷

**Розв'язання** ◀ Дискримінант рівняння (1.13) дорівнює нулеві, отже маємо рівняння параболічного типу. Рівняння характеристик

$$\frac{dy}{dx} = -3$$



має наступний інтеграл:

$$w(x, y) = y + 3x,$$

отже перетворенням координат

$$\xi = y + 3x, \quad \eta = x$$

рівняння приводиться до канонічного вигляду:

$$u_{\eta\eta} = u_{\xi} - u_{\eta}.$$

Для того, щоб спростити це рівняння далі, скористаємось підстановкою (1.12), звідки маємо:

$$v_{\eta\eta} = v_{\xi} - v_{\eta}(2\beta - 1) - v(\beta^2 - \alpha + \beta). \quad (1.14)$$

Оберемо сталі  $\alpha$  і  $\beta$  таким чином, щоб позбутися останніх двох доданків в рівнянні (1.14). Для цього покладемо  $\alpha = 1/4$  і  $\beta = -1/2$ . Таким чином, заміною

$$u(\xi, \eta) = e^{\frac{\xi-2\eta}{4}} v(\xi, \eta) = e^{\frac{x+y}{4}} v(\xi, \eta)$$

рівняння (1.13) зводиться до наступного спрощеного канонічного вигляду:

$$v_{\eta\eta} = v_{\xi}. \quad (1.15)$$



В прикладах (30)–(57) звести рівняння до канонічного вигляду та спростити.

<b>30</b> $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y + u = 0$	$27u = 0$
<b>31</b> $2u_{xy} - 4u_{yy} + u_x - 2u_y + u + x = 0.$	<b>41</b> $u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} + 3u_x + 24u_y - 9u + 9(x + y) = 0$
<b>32</b> $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + 4u_y + u = 0$	<b>42</b> $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 10u_x - 15u_y - 50u + x - 2y = 0$
<b>33</b> $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 4u_y + u = 0$	<b>43</b> $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0$
<b>34</b> $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y + 4u = 0$	<b>44</b> $2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u = 0$
<b>35</b> $u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y - 4u = 0$	<b>45</b> $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = 0$
<b>36</b> $u_{xy} + u_{xx} - u_y - 10u + x = 0$	<b>46</b> $3u_{xx} - u_{xy} - u_{yy} + 5u_x + u_y - 5u = 0$
<b>37</b> $3u_{xx} + u_{xy} + 3u_x + u_y - u + y = 0$	<b>47</b> $2u_{xx} + 5u_{xy} + 2u_{yy} - 6u_x + 7u = 0$
<b>38</b> $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} - 2u_x - 2u_y + u = 0$	<b>48</b> $3u_{xx} + 9u_{xy} + 27u_{yy} - 2u_x + 7u_y - 2u = 0$
<b>39</b> $5u_{xx} + 16u_{xy} + 16u_{yy} + 24u_x + 32u_y + 64u = 0$	
<b>40</b> $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + 12u_y +$	

$$49 \quad 2u_{xx} + 6u_{xy} + 17u_{yy} + 5u_x - 2u_y - 7u = 0$$

$$50 \quad 12u_{xx} - 9u_{xy} + u_{yy} + u_x + 4u_y - 5u = 0$$

$$51 \quad u_{xx} + 6(x + 2y)u_{xy} + yu_{yy} + 15u_x + 12u_y - u = 0$$

$$52 \quad 3xu_{xx} + 6yu_{xy} + 2(x - 3y)u_{yy} + 4u_x + u_y - 21u = 0$$

$$53 \quad xu_{xx} + 5yu_{xy} + (3x - 2y)u_{yy} - 2u_x +$$

$$u_y - 4u = 0$$

$$54 \quad 3xu_{xx} + 6yu_{xy} + xu_{yy} + 2u_x + 3u_y - 4u = 0$$

$$55 \quad 2u_{xx} - 5u_{xy} + 6u_{yy} + 4u_x - 3u_y - 15u = 0$$

$$56 \quad 11u_{xx} - 7u_{xy} + 7u_{yy} + u_x - 8u_y + 5u = 0$$

$$57 \quad 7xu_{xy} + 3u_{yy} - 11u_x + 2u_y - 3u = 0$$

# Глава 2

## Метод відокремлення змінних

Метод відокремлення змінних для диференціальних рівнянь з частинними похідними зводиться до задачі Штурма–Ліувілля для функції від однієї незалежної змінної.

### §2.1. Задача Штурма–Ліувілля

#### §2.1.1. Регулярна задача Штурма–Ліувілля

В цьому параграфі ми розглянемо так звану регулярну задачу Штурма–Ліувілля (ШЛ). Постановка задачі: знайти нетривіальні (тобто не рівні тотожно нулеві) розв’язки задачі

$$\left\{ \begin{array}{l} -(p(x)X'(x))' + q(x)X(x) = \lambda\rho(x)X(x), \quad x \in (a, b) \\ \alpha_1 X(a) + \beta_1 X'(a) = 0, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0 \\ \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 > 0. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

При постановці задачі ШЛ вважається, що  $p \in \mathcal{C}^1[a, b]$ ,  $q \in \mathcal{C}[a, b]$  та  $p(x) > 0$  при  $x \in [a, b]$ .

Перелічимо деякі важливі властивості розв’язків задачі ШЛ:

- існує злічена множина власних чисел  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ , які відповідають власним функціям  $X_1(x), X_2(x), \dots$ . При цьому  $\lambda_k \geq 0$ , якщо  $q(x) \geq 0$ .
- власні функції  $X_{n_1}$  та  $X_{n_2}$ , що відповідають різним нумерам  $n_1$  та  $n_2$  є ортогональними з вагою  $\rho(x)$ :

$$(X_{n_1}, X_{n_2}) \equiv \int_a^b \overline{X_{n_1}}(x) X_{n_2}(x) \rho(x) dx = \|X\|^2 \delta_{n_1 n_2}, \quad (2.2)$$

$$\|X\| = \sqrt{(X, X)} = \left( \int_a^b |X(x)|^2 \rho(x) dx \right)^{1/2}. \quad (2.3)$$

- система власних функцій  $\{X_n(x)\}$  є повною, тобто будь-яку функцію  $f(x) \in \mathcal{L}^2[a, b]$  можна подати у вигляді збіжного в середньому квадратичному ряду Фур’є за розв’язками задачі ШЛ:

$$f(x) = \sum_n C_n X_n(x), \quad (2.4)$$

де коефіцієнти Фур'є

$$C_n = \frac{1}{\|X\|^2} \int_a^b f(x) \overline{X_n}(x) dx \quad (2.5)$$

Якщо функція  $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ , то ряд збігається поточково.

Зауважимо, що власні функції задачі ШЛ завжди можна обрати у дійсному вигляді, тому що коефіцієнти диференціального рівняння  $p(x)$ ,  $q(x)$  і  $\rho(x)$  є дійсними.

### Приклад 2.1

◁ Розв'язати наступну регулярну задачу ШЛ:

$$\begin{cases} X''(x) = \nu X(x), \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

▷

**Розв'язання** ◀ В залежності від параметра  $\nu$  рівняння матиме такі розв'язки:

$$X(x) = \begin{cases} A_0 x + B_0 & \text{коли } \nu = 0, \\ A_\nu \operatorname{sh} \nu x + B_\nu \operatorname{ch} \nu x & \text{коли } \nu \neq 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

$A_\nu$  та  $B_\nu$  — деякі сталі, які визначаються межовими умовами. Якщо  $\nu = 0$ , матимемо:

$$\begin{aligned} X(0) = 0 &\implies B_0 = 0, \\ X(l) = 0 &\implies A_0 = 0. \end{aligned}$$

Отже при  $\nu = 0$  можливі лише тривіальні розв'язки задачі ШЛ:  $X(x) = 0$ . Нехай  $\nu \neq 0$ :

$$\begin{aligned} X(0) = 0 &\implies B_\nu = 0, \\ X(l) = 0 &\implies A_\nu \operatorname{sh} \nu l = 0. \end{aligned}$$

Якщо  $A_\nu$ , задача має лише тривіальні розв'язки. Виключаючи цей випадок, з останньої умови маємо  $\operatorname{sh} \nu l = 0$ , яке має розв'язки лише при уявних значеннях параметра  $\nu$ . Покладемо  $\nu = i\lambda$ , де  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Тоді задача ШЛ набуває вигляду:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Загальний розв'язок рівняння

$$X(x) = A_\lambda \sin \lambda x + B_\lambda \cos \lambda x \quad (2.9)$$

а межові умови приймають наступну форму

$$\begin{aligned} X(0) = 0 &\implies B_\lambda = 0, \\ X(l) = 0 &\implies A_\lambda \sin \lambda x = 0, \end{aligned}$$

яке має нетривіальні розв'язки, якщо

$$\sin \lambda l = 0 \implies \lambda l = \pi n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отже матимемо набір власних чисел

$$\left\{ \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}, \quad (2.10a)$$

яким відповідають власні функції

$$\left\{ X_n(x) = \sin \lambda_n x = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad x \in (0, l) \right\}. \quad (2.10b)$$



В прикладах (58)–(64) розв'язати задачі ШЛ:

<b>58</b> $\left\{ \begin{aligned} X''(x) + \lambda^2 X(x) &= 0, \\ X(0) = X'(l) &= 0. \end{aligned} \right.$	<b>64</b> $\left\{ \begin{aligned} X''(x) + \lambda^2 X(x) &= 0, \\ X(0) = 0, \\ X(l) + hX'(l) &= 0, \end{aligned} \right.$ де $h > 0$ .
<b>59</b> $\left\{ \begin{aligned} X''(x) + X'(x) + \lambda^2 X(x) &= 0, \\ X(0) = X(l) &= 0. \end{aligned} \right.$	<b>65</b> $\left\{ \begin{aligned} X''(x) + \lambda^2 X(x) &= 0, \\ X(0) + hX'(0) &= 0, \\ X(l) &= 0, \end{aligned} \right.$ де $h > 0$ .
<b>60</b> $\left\{ \begin{aligned} X''(x) - X'(x) + \lambda^2 X(x) &= 0, \\ X(0) = X(l) &= 0. \end{aligned} \right.$	<b>66</b> $\left\{ \begin{aligned} X''(x) + X'(x) + \lambda^2 X(x) &= 0, \\ X(0) + hX'(0) &= 0, \\ X(l) &= 0, \end{aligned} \right.$ де $h > 0$ .
<b>61</b> $\left\{ \begin{aligned} X''(x) + \lambda^2 X(x) &= 0, \\ X'(a) = X(b) &= 0. \end{aligned} \right.$	<b>67</b> $\left\{ \begin{aligned} X''(x) + \lambda^2 X(x) &= 0, \\ X(0) + hX'(0) &= 0, \\ X(l) - hX'(l) &= 0, \end{aligned} \right.$ де $h > 0$ .
<b>62</b> $\left\{ \begin{aligned} X''(x) + X'(x) + \lambda^2 X(x) &= 0, \\ X'(a) = X(b) &= 0. \end{aligned} \right.$	
<b>63</b> $\left\{ \begin{aligned} X''(x) + \lambda^2 X(x) &= 0, \\ X'(0) = X'(l) &= 0. \end{aligned} \right.$	

### §2.1.2. Сингулярна задача Штурма–Ліувілля

В цьому параграфі ми розглянемо так звану сингулярну задачу ШЛ. Задача Штурма–Ліувілля називається сингулярною, якщо 1) в одній кінцевій точці (або в обох) коефіцієнт  $p(x)$  обертається в 0, або 2) в інтервалі  $[a, b]$  одна гранична точка (або обидві) є нескінченностями. Від цього залежать умови, що накладаються на розв'язок задачі Штурма–Ліувілля.

**Приклад 2.2**

◁ Постановка задачі у випадку  $p(x) > 0 \forall x \in (a, b)$ ,  $p(a) = 0$ ,  $p(b) \neq 0$ , має такий вигляд:

$$\begin{cases} -(p(x)X'(x))' + q(x)X(x) = \lambda\rho(x)X(x), & x \in (a, b) \\ |X(a)| < +\infty, \\ \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 > 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

▷

Ми розглянули задачу ШЛ, сингулярну на лівому кінці, коли  $p(a) = 0$ . Аналогічним чином можна розглянути задачу, сингулярну на правому кінці ( $p(b) = 0$ ,  $p(a) \neq 0$ ). В цьому випадку на розв'язок задачі накладається умова  $|X(b)| < +\infty$ . Можна розглянути також сингулярну на обох кінцях задачу за відповідними умовами.

**Приклад 2.3**

◁ Розв'язати наступну сингулярну задачу Штурма-Ліувілля [11]:

$$\begin{cases} -(1-x^2)X'' + 2xX' = \lambda X, & x \in (-1, 1) \\ |X(-1)| < +\infty, & |X(1)| < +\infty. \end{cases} \quad (2.12)$$

▷

**Розв'язання** ◀ Шукаємо розв'язок рівняння (2.12) у вигляді степеневого ряду:  $X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ . В інтервалі збіжності степеневий ряд можна почленно диференціювати, тому  $X'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n$ ,  $X''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}x^n$ ,  $xX'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n$ ,  $x^2 X''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^n$ . Підставляючи ці вирази в (2.12) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, одержуємо рекурентне співвідношення

$$c_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} c_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.13)$$

Щоб обчислювати за ним, потрібно задати  $c_0$ ,  $c_1$  (це і є довільні сталі, що входять у загальний розв'язок), причому якщо один із цих коефіцієнтів покладемо рівним нулю, то для отримання ненульового розв'язку інший повинен бути ненульовим. Розгляньмо два випадки.

а)  $c_1 = 0 \neq c_0$ . Тоді з формули (2.13) випливає, що для будь-якого  $k \in \mathbb{Z}_+$   $c_{2k+1} = 0$ ,  $c_{2k+2} = \frac{2k(2k+1) - \lambda}{(2k+1)(2k+2)} c_{2k}$ . Звідси видно, що при  $\lambda = 2j/(2j+1)$  буде  $c_{2k+2} = 0$ , як тільки  $k \geq j$ , і  $c_{2k} \neq 0$ ,  $k \leq j$ , тобто  $X$  буде поліномом степеня  $2j$ . Очевидно, він задовольняє межові умови. Таким чином, числа  $\lambda_{2j} = 2j/(2j+1)$ ,  $j \in \mathbb{Z}_+$ , є власними і відповідні їм власні функції  $X_{2j}$  — поліноми степеня  $2j$ .

б)  $c_0 = 0 \neq c_1$ . Тоді з формули (2.13) випливає, що для будь-якого  $k \in \mathbb{N}$   $c_{2k} = 0$ ,  $c_{2k+1} = \frac{2k(2k-1) - \lambda}{2k(2k+1)} c_{2k-1}$ . Міркуючи аналогічно випадкові 1,

переконаємося, що числа  $\lambda_{2j-1} = 2j(2j-1)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , є власними і відповідні їм власні функції  $X_{2j-1}$  — поліноми степеня  $2j-1$ .

Об'єднуючи випадки а) і б), отримуємо таку систему власних елементів задачі ШЛ:

$$\lambda_n = n(n+1), \quad X_n \text{ — поліном } n\text{-го степеня, } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Покажемо, що інших власних функцій немає.

Оскільки множина скінчених лінійних комбінацій функцій  $X_n$  містить, очевидно, усі поліноми, то за теоремою Вейерштрасса вона всюди щільна в  $\mathcal{C}[-1; 1]$ , відтак і в  $L_2[-1; 1]$ . Значить, єдиний елемент простору  $L_2[-1; 1]$ , ортогональний усім  $X_n$ , є нульова функція. Водночас, за властивістю 2° спектральних задач, кожна власна функція ортогональна решті власних функцій. Отже, власних функцій, відмінних від знайдених, не існує. Задачу (2.12) розв'язано.

Нагадаємо, що власні функції визначаються з точністю до сталого множника. У нашому випадку це рівносильно заданню тієї з двох констант  $c_0$ ,  $c_1$ , яка відмінна від нуля. Загальноприйнятим є такий вибір константи, за якого в точці 1 власна функція набирає значення 1. Власні функції, підпорядковані цій додатковій вимозі, називаються *поліномами Лежандра* і позначаються  $P_n$ . Таким чином,  $P_n$  — це єдиний розв'язок лінійної диференціальної задачі

$$(1-x^2)X'' - 2xX' + n(n+1)X = 0, \quad (2.14)$$

$$|X(-1+0)| < \infty, \quad X(1) = 1. \quad (2.15)$$

Як показано вище,  $P_n$  є поліномом  $n$ -го степеня. Наведемо «явний» вираз поліномів Лежандра та їхніх норм:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad (2.16a)$$

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}. \quad (2.16b)$$

►

#### Приклад 2.4

◁ Постановка задачі у випадку  $p(x) > 0 \quad \forall x \in (a, +\infty)$ , має такий вигляд:

$$\begin{cases} -(p(x)X'(x))' + q(x)X(x) = \lambda\rho(x)X(x), & x \in (a, b) \\ \alpha_1 X(a) + \beta_1 X'(a) = 0, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0, \\ |X(x)| = \mathcal{O}(|x|^\sigma), \quad x \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (2.17)$$

▷

Ми розглянули сингулярну задачу ШЛ, коли правий кінець  $b = +\infty$ . Аналогічним чином можна розглянути задачу, коли лівий кінець  $a = -\infty$ .

## §2.2. Рівняння дифузії на відрізку

Канонічний вигляд одновимірного рівняння дифузії має наступну форму:

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t). \quad (2.18)$$

Якщо  $f(x, t) = 0$ , рівняння нізивається однорідним; якщо  $f(x, t) \neq 0$ , рівняння нізивається неоднорідним. Крайова задача для одновимірного рівняння дифузії має наступну форму:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x \in (0, l), \quad t \in (0, \infty), \\ \alpha_1 u(0, t) + \beta_1 u_x(0, t) = p(t), & t \in (0, \infty), \\ \alpha_2 u(l, t) + \beta_2 u_x(l, t) = q(t), & t \in (0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in (0, l). \end{cases} \quad (2.19)$$

### Приклад 2.5

◁ Нехай  $u = u(x, t)$  задана на відрізку  $x \in (0, l)$ ,  $t \in (0, \infty)$ . Потрібно знайти розв'язок рівняння дифузії

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad (2.20)$$

при наступних крайових умовах:

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in (0, l), \quad (2.21a)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (2.21b)$$

Умова (2.21a) є початковою, а умови (2.21b) — однорідними межовими умовами. ▷

**Розв'язання** ◀ Основна ідея метода полягає в тому, щоб побудувати досить велику кількість частинних розв'язків рівняння (2.20), що мають вигляд добутка

$$v(x, t) = X(x)T(t) \quad (2.22)$$

та задовольняють межовим умовам (2.21b). З цих розв'язків будуюмо лінійну комбінацію, яка за принципом лінійної суперпозиції також є розв'язком задачі. Природньо очікувати, що знайдена лінійна комбінація буде задовольняти також початковим умовам (2.21a), тобто буде розв'язком крайової задачі.

Отже, підставляючи вираз (2.22) до рівняння (2.20), отримаємо

$$X(x)T'(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0.$$

Вважаючи, що  $v \neq 0$ , та поділивши на  $v(x, t)$ , матиме

$$\frac{T'}{T} = a^2 \frac{X''}{X}. \quad (2.23)$$



Ліва частина рівності (2.23) не залежит від  $x$ , права — від  $t$ , тобто кожна з них є сталою. Поділивши (2.23) на  $a^2$ , позначимо цю сталу як  $-\lambda^2$ . Це — так звана константа відокремлення змінних:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2, \quad (2.24)$$

звідки випливатиме, що рівняння в частинних похідних розбивається на два звичайних рівняння, кожне з яких залежить тільки від своїх змінних, тобто змінні розділилися,

$$X''_{\lambda}(x) + \lambda^2 X_{\lambda}(x) = 0; \quad (2.25a)$$

$$T'_{\lambda}(t) + a^2 \lambda^2 T_{\lambda}(t) = 0; \quad (2.25b)$$

Завдяки лінійності, можемо побудувати формальний ряд

$$u(x, t) = \sum_{\lambda} X_{\lambda}(x) T_{\lambda}(t). \quad (2.26)$$

Цей розв'язок повинен задовольняти межовим умовам (2.21b):

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0 = \sum_{\lambda} X_{\lambda}(0) T_{\lambda}(t) \quad \forall t \implies X_{\lambda}(0) = 0; \\ u(l, t) &= 0 = \sum_{\lambda} X_{\lambda}(l) T_{\lambda}(t) \quad \forall t \implies X_{\lambda}(l) = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, потрібно знайти розв'язки  $X(x)$  крайової задачі

$$\begin{cases} X''_{\lambda}(x) + \lambda^2 X_{\lambda}(x) = 0, & x \in (0, l), \\ X_{\lambda}(0) = 0, & X_{\lambda}(l) = 0, \end{cases} \quad (2.27)$$

а також чисельні значення параметра  $\lambda$ , при яких розв'язки існують. Поставлена задача відноситься до класу задач Штурма—Ліувілля (2.8), розв'язком якої є повна система ортогональних функцій (2.10):

$$\left\{ X_n(x) = \sin \lambda_n x; \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Цей розв'язок визначається з точністю до множника, який ми поклали рівним одиниці. Розгляньмо тепер рівняння (2.25b) для функції  $T(t)$ . Ненульовим власним числам  $\lambda_n$  відповідають розв'язки

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t}, \quad (2.28)$$

звідки загальний розв'язок (2.26) матиме вигляд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} X_n(x). \quad (2.29)$$

Константу  $C_n$  підберемо таким чином, щоб задовольнити початковим умовам (2.21a):

$$u(x, 0) = \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n X_n(x). \quad (2.30)$$

Але формула (2.30) — це формула розвинення функції  $\phi(x)$  в ряд Фур'є за власними функціями задачі ШЛ, пор. (2.4). Коефіцієнти Фур'є цього розвинення, згідно з (2.5) мають вигляд:

$$C_n = \frac{1}{\|X\|^2} \int_0^l \phi(x) X_n(x) dx, \quad (2.31)$$

а норма  $\|X\|$  має вигляд

$$\|X\|^2 = \int_0^l |X_n(x)|^2 dx = \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}.$$

Таким чином, розв'язок крайової задачі з однорідними межевими умовами для рівняння дифузії матиме вигляд:

$$u(x, t) = \sum_n C_n X_n(x) e^{-a^2 \lambda_n^2 t}, \quad (2.32a)$$

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) X_n(x) dx, \quad (2.32b)$$

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}. \quad (2.32c)$$



В прикладах (68)–(94) розв'язати крайову задачу для однорідного рівняння дифузії на відрізку:

$$68 \quad \begin{cases} u_t = 4u_{xx} + u, \\ u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 2 \cos 2\pi x \cos \frac{3\pi}{2} x. \end{cases}$$

$$70 \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} - u + 1 \\ u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 4 \sin^3 \frac{x}{2}. \end{cases}$$

$$69 \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + u \\ u_x(0, t) = u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0, \\ u(x, 0) = 8 \cos^4 x. \end{cases}$$

$$71 \quad \begin{cases} u_t = 5u_{xx} \\ u_x(-1, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 3 + x^2. \end{cases}$$

- |    |   |    |   |
|----|---|----|---|
| 72 | $\begin{aligned} u_t &= 4u_{xx} \\ u(0, t) &= 0, \\ u_x(2, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= 3 \sin^2 x. \end{aligned}$  | 82 | $\begin{aligned} u_t &= 3u_{xx} \\ u(-1, t) &= 0, \\ u_x(1, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= (2x + 1)e^{3x}. \end{aligned}$                         |
| 73 | $\begin{aligned} u_t &= 4u_{xx} \\ u(1, t) &= 0, \\ u_x(2, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= x \sin x. \end{aligned}$  | 83 | $\begin{aligned} u_t &= 2u_{xx} \\ u_x(0, t) &= 0, \\ u(1, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= (x + 2)^2 \sin(3x - 1). \end{aligned}$                  |
| 74 | $\begin{aligned} u_t &= 3u_{xx} \\ u_x(-2, t) &= 0, \\ u(2, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= x^2 \sin 2x. \end{aligned}$                                      | 84 | $\begin{aligned} u_t &= 12u_{xx} \\ u_x(1/3, t) &= 0, \\ u_x(1, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= [2 + \sin(3x - 1)]e^{-2x}. \end{aligned}$          |
| 75 | $\begin{aligned} u_t &= 9u_{xx} \\ u_x(-2, t) &= 0, \\ u_x(-1, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= 3x^2 - 1 + \sin x. \end{aligned}$                             | 85 | $\begin{aligned} u_t &= 10u_{xx} \\ u_x(-1/3, t) &= 0, \\ u(1/3, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= 2 + \\ &+ (3x - 1)(3 - 2x) \sin x. \end{aligned}$ |
| 76 | $\begin{aligned} u_t &= 16u_{xx} \\ u_x(-3, t) &= 0, \\ u(3, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= (x^2 - 1)e^{-x}. \end{aligned}$                                 | 86 | $\begin{aligned} u_t &= 4u_{xx} \\ u(0, t) &= 0, \\ u_x(1/3, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= 2e^{-x} + (x - 1)(x^2 + 1). \end{aligned}$            |
| 77 | $\begin{aligned} u_t &= 6u_{xx} \\ u_x(-2, t) &= 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= (3x^2 - 1) \sin x. \end{aligned}$                              | 87 | $\begin{aligned} u_t &= 6, 25u_{xx} \\ u(0, t) &= 0, \\ u_x(3, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= e^{-2x} + \cos(x + 2). \end{aligned}$               |
| 78 | $\begin{aligned} u_t &= 7u_{xx} \\ u_x(0, t) &= 0, \\ u(5, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= (x - 1) \sin(x + 3). \end{aligned}$                               | 88 | $\begin{aligned} u_t &= 4u_{xx} \\ u(0, t) &= 0, \\ u_x(1/3, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= 2e^{-x} + (x - 1)(x^2 + 1). \end{aligned}$            |
| 79 | $\begin{aligned} u_t &= 5u_{xx} \\ u_x(0, t) &= 0, \\ u(2/3, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= (x - 1) \sin(x + 3) - \\ &- (x + 1) \sin(x - 3). \end{aligned}$ | 89 | $\begin{aligned} u_t &= 1, 44u_{xx} \\ u_x(-5, t) &= 0, \\ u_x(3, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= x^2 e^x \cos x. \end{aligned}$                   |
| 80 | $\begin{aligned} u_t &= 4u_{xx} \\ u(-1, t) &= 0, \\ u(3, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= e^{x-1} \sin^2(x + 1). \end{aligned}$                              | 90 | $\begin{aligned} u_t &= 2, 25u_{xx} \\ u(1/5, t) &= 0, \\ u_x(1/3, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= e^{-x} + (x - 1) \cos x. \end{aligned}$         |
| 81 | $\begin{aligned} u_t &= 3u_{xx} \\ u_x(-1, t) &= 0, \\ u(1/2, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= (x^3 - 2)e^{4x}. \end{aligned}$                                | 91 | $\begin{aligned} u_t &= 0, 49u_{xx} \\ u(2/3, t) &= 0, \\ u(3/2, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= (x^3 + 2)e^{-4x}. \end{aligned}$                  |

$$92 \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t = 0, 81u_{xx} \\ u(1, t) = 0, \\ u_x(3/2, t) = 0, \\ u(x, 0) = (x+1)e^{-x} + \\ + x^2(1 + \cos x). \end{array} \right.$$

$$93 \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t = 36u_{xx} \\ u_x(-1/2, t) = 0, \\ u_x(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = x(e^x + \cos x). \end{array} \right.$$

$$94 \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t = 0, 64u_{xx} \\ u_x(-1/2, t) = 0, \\ u_x(3/2, t) = 0, \\ u(x, 0) = x^2(\sin 2x + 2 \cos x). \end{array} \right.$$

В прикладах (95)–(97) розв'язати крайову задачу для неоднорідного рівняння дифузії на відрізку:

$$95 \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + u + 2 \sin x \sin 2x \\ u_x(0, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0. \end{array} \right.$$

$$97 \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + u + 4 \cos^3 x \\ u_x(0, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0. \end{array} \right.$$

$$96 \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t = 49u_{xx} - u + \cos \pi x \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 2 \cos^2 2\pi x. \end{array} \right.$$

В прикладах (98)–(129) розв'язати мішану крайову задачу для рівняння дифузії на відрізку:

$$98 \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t = u_{xx} \\ u_x(0, t) = 1 \\ u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0. \end{array} \right.$$

$$102 \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2t + \\ + 2 \cos^2 x \\ u_x(0, t) = 0, \\ u_x(\pi, t) = 2\pi t, \\ u(x, 0) = 0. \end{array} \right.$$

$$99 \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + u + t(t-2)\left(\frac{x}{\pi} - \right. \\ \left. - 1\right) + \sin 3x \\ u(0, t) = t^2, \\ u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 2 \sin 3x \cos 2x. \end{array} \right.$$

$$103 \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t = 9u_{xx} + u - 7 + 4tx - 2tx^2 + \\ + 18t^2 - 2t^2x + t^2x^2 + \\ + 2 \sin 3\pi x \sin 5\pi x \\ u_x(0, t) = 2t^2, \\ u_x(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 7. \end{array} \right.$$

$$100 \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + u - x + 1 + \\ + 4 \cos^3 \frac{5\pi x}{2} \\ u_x(0, t) = 1, \\ u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = x - 1. \end{array} \right.$$

$$101 \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + u - x + 2 \sin 2x \cos x \\ u(0, t) = 0, \\ u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 1, \\ u(x, 0) = x. \end{array} \right.$$

$$104 \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + u - \frac{x}{\pi} (\sin t + \cos t), \\ u(0, t) = 0, \\ u(\pi, t) = \cos t, \\ u(x, 0) = \frac{x}{\pi} + 4 \sin^3 3x. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 105 \quad & \left\{ \begin{aligned} u_t &= 25u_{xx} - u + 3 + e^t(x^2 + 2x - 25), \\ u_x(0, t) &= e^t, \\ u_x(1, t) &= 2e^t, \\ u(x, 0) &= x^2 + 2x - 22 + \\ &+ 2 \cos \pi x \cos 9\pi x. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 106 \quad & \left\{ \begin{aligned} u_t &= 4u_{xx} + u - \\ &- (3x + 1)(3x - 1) \\ u(0, t) &= \sin t, \\ u(1, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= 2 \cos 2\pi x \cos \frac{3\pi}{2}x. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 107 \quad & \left\{ \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + t(t - 2)\left(\frac{x}{\pi} - 1\right) + \\ &+ \sin 3x \\ u(0, t) &= t^2, \\ u(\pi, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= 2 \sin 3x \cos 2x. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 108 \quad & \left\{ \begin{aligned} 4u_t &= u_{xx} + u + e^{-2t} \cos^2 x \\ u(0, t) &= t \sin t, \\ u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) &= 0, \\ u(x, 0) &= x + 8 \cos^4 x. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 109 \quad & \left\{ \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 2u - x + 1 + \\ &+ 4 \cos^3 \frac{5\pi x}{2} \\ u_x(0, t) &= 1, \\ u(l, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= x - 1. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 110 \quad & \left\{ \begin{aligned} u_t &= 9u_{xx} - u + 1 - \\ &- 2xe^{-2x} \cos 3x, \\ u(0, t) &= 2t, \\ u(\pi, t) &= 3; \\ u(x, 0) &= 4 \sin^3 \frac{x}{2}. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 111 \quad & \left\{ \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 3u - x + \\ &+ 2 \sin 2x \cos x \\ u(0, t) &= 2 + \sin t, \\ u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) &= 1; \\ u(x, 0) &= 2x \cos^2 x. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 112 \quad & \left\{ \begin{aligned} u_t &= (1/4)u_{xx} - 2u + \\ &+ \sin(t + 2x) \\ u(0, t) &= \sin^2 t, \\ u(l, t) &= 5 + 2t; \\ u(x, 0) &= (4x^3 - 1) \cos 2x. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 113 \quad & \left\{ \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - \\ &- 4x^2t + 2 \cos^2 x \\ u(0, t) &= t^2 \cos t, \\ u_x(\pi, t) &= 2\pi t, \\ u(x, 0) &= (x^2 + 3)e^{-2x}. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 114 \quad & \left\{ \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 3u + 2 \sin x \sin 2x \\ u_x(0, t) &= 2t^2 \sin t, \\ u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) &= 1; \\ u(x, 0) &= 1 + e^x \cos x. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 115 \quad & \left\{ \begin{aligned} u_t &= 9u_{xx} + u + 4tx + 18t^2 - \\ &- 2t^2x + 2 \sin 3\pi x \sin 5\pi x \\ u_x(0, t) &= 2t^2 - 3, \\ u_x(1, t) &= 0; \\ u(x, 0) &= 7. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 116 \quad & \left\{ \begin{aligned} u_t &= 49u_{xx} - u + \cos \pi x \\ u_x(0, t) &= (t^2 + t - 1) \sin t, \\ u_x(1, t) &= 2; \\ u(x, 0) &= 2 \cos^2 2\pi x. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 117 \quad & \left\{ \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u - \frac{x}{\pi} (\sin t + \cos t), \\ u(0, t) &= 2t^3, \\ u(\pi, t) &= \cos t; \\ u(x, 0) &= \frac{x}{\pi} + 4 \sin^3 3x. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 118 \quad & \left\{ \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u + 4 \cos^3 x \\ u_x(0, t) &= e^t \cos 2t, \\ u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) &= 2t - 3; \\ u(x, 0) &= (\sin x + 2)e^{-x}. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 119 \quad & \left\{ \begin{aligned} u_t &= 25u_{xx} - u + 3 + \\ &+ e^t(x^2 + 2x - 25), \\ u_x(0, t) &= e^t, \\ u_x(1, t) &= 2 + t^2; \\ u(x, 0) &= x^2 + 3 + \\ &+ 2 \cos \pi x \cos 9\pi x. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 120 \quad & \left\{ \begin{aligned} u_t &= u_{xx} - 2u + \cos^3 \pi x \\ u_x(0, t) &= \cos t + t^2 \sin t, \\ u_x(1, t) &= e^t; \\ u(x, 0) &= (3x^2 - 1)(\cos x - 1). \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

121	$\begin{cases} 9u_t = u_{xx} - u + 3 + \\ + e^t (2x^2 + 8x - 9), \\ u_x(0, t) = 4e^t, \\ u_x(1, t) = 2 + t^3; \\ u(x, 0) = x^2 - 25 + 2 \sin 9\pi x. \end{cases}$	126	$\begin{cases} 4u_t = u_{xx} + 4u - \\ - \cos(t + 1) \sin(x - 1) \\ u_x(0, t) = \cos(t + 1), \\ u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 2t^2 - 4; \\ u(x, 0) = 1 - \cos^3 x. \end{cases}$
122	$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} - 4u_x + x \sin(2t) \\ u(-1, t) = e^{-2t}(\cos t + 1), \\ u_x(1, t) = 0; \\ u_x(x, 0) = (x^2 + x + 1)(\sin x + \\ + \cos x). \end{cases}$	127	$\begin{cases} u_t = 16u_{xx} + u_x - (x + 1)^2 + \\ + 3 \cos^2 \frac{3\pi x}{2} \\ u_x(0, t) = (e^{2t} + \cos t)(t - 1), \\ u(1, t) = 2; \\ u(x, 0) = (x + 1)^3. \end{cases}$
123	$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + 3u + t^2 \sin(2\pi x), \\ u_x(0, t) = 1 - t, \\ u_x(\pi, t) = 3t^2; \\ u(x, 0) = (2x - 3)^2 - 5 \cos 2\pi x. \end{cases}$	128	$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} - 3u + e^{-x} \sin(t + 2), \\ u_x(0, t) = 1 + \cos t, \\ u_x(\frac{\pi}{2}, t) = -1 + \sin t; \\ u(x, 0) = (x + 1)^2 \cos^2 x. \end{cases}$
124	$\begin{cases} 16u_t = u_{xx} + 3u_x + x \sin(2t) \\ u(0, t) = (t + 2)^2 e^t, \\ u_x(3, t) = 3, \\ u(x, 0) = 2xe^x \cos 2x. \end{cases}$	129	$\begin{cases} 9u_t = u_{xx} - x^2 + 4 \cos \frac{\pi x}{2} \\ u(0, t) = 2, \\ u_x(1, t) = t(2 + \cos t); \\ u(x, 0) = x^3 + 1. \end{cases}$
125	$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} - 2u + (t - 2) \cos(\pi x), \\ u_x(0, t) = t^2 - 2, \\ u_x(\pi, t) = t/3, \\ u(x, 0) = x - \sin^2(\pi x). \end{cases}$		

### §2.3. Хвильове рівняння на відрізку

Канонічний вигляд одновимірного хвильового рівняння має наступну форму:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t). \quad (2.33)$$

Якщо  $f(x, t) = 0$ , рівняння нізивається однорідним.

#### Приклад 2.6

◁ Нехай  $u = u(x, t)$  задана на відрізку  $x \in (0, l)$ ,  $t \in (0, \infty)$ . Потрібно знайти розв'язок наступної крафової задачі для хвильового рівняння:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in (0, l), \quad t \in (0, \infty), \\ u(0, t) = 0 & t \in (0, \infty), \\ u(l, t) = 0, & t \in (0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in (0, l), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in (0, l). \end{cases} \quad (2.34)$$

▷

**Розв'язання** ◀ Шукатиме частинні розв'язки у вигляді

$$v(x, t) = \sum_n T_n(t) X_n(x).$$

Підставляючи цей вираз до хвильового рівняння (2.34), отримаємо

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x).$$

Якщо поділити обидві частини цього співвідношення на  $X(x)T(t)$ , отримаємо що ліва частина є функцією лише координати  $x$ , права —  $t$ , тобто рівність може справджуватися лише, коли кожна з частин є сталою (позначимо її  $-\lambda^2$ ),

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

Отже змінні відокремилися. Для функції  $X(x)$  отримали вже розібрану задачу Штурма – Ліувілля, розв'язок якої дається формулами (2.10). Для функції  $T_n(t)$  отримаємо рівняння

$$T_n''(t) + a^2 \lambda_n^2 T_n(t) = 0,$$

що має розв'язок

$$T_n(t) = A_n \cos(a\lambda_n t) + B_n \sin(a\lambda_n t). \quad (2.35)$$

Отже загальний розв'язок дається рядом Фур'є за  $X_n(x)$ :

$$u(x, t) = \sum_n X_n(x) \left[ A_n \cos(a\lambda_n t) + B_n \sin(a\lambda_n t) \right].$$

Константи  $A_n$  та  $B_n$  знаходимо з початкових умов:

$$\phi(x) = u(x, 0) = \sum_n X_n(x) A_n \quad \implies \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l X_n(x) \phi(x) dx,$$

$$\psi(x) = u_t(x, 0) = \sum_n X_n(x) B_n a \lambda_n \quad \implies \quad a \lambda_n B_n = \frac{2}{l} \int_0^l X_n(x) \psi(x) dx.$$

Остаточно, розв'язок крайової задачі (2.34) для хвильового рівняння має вигляд

$$u(x, t) = \sum_n X_n(x) \left[ A_n \cos(a\lambda_n t) + B_n \sin(a\lambda_n t) \right], \quad (2.36a)$$

$$X_n(x) = \sin(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad (2.36b)$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l X_n(x) \phi(x) dx, \quad B_n = \frac{2}{a \lambda_n l} \int_0^l X_n(x) \psi(x) dx. \quad (2.36c)$$



В прикладах (130)–(137) розв'язати однорідну крайову задачу для хвильового рівняння на відрізку:

$$130 \quad \begin{cases} u_{tt} = 16u_{xx}, \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = \sin \frac{2\pi x}{l}. \end{cases}$$

$$131 \quad \begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, \\ u(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin \frac{5\pi x}{2l}, \\ u_t(x, 0) = \cos \frac{\pi x}{2l}. \end{cases}$$

$$132 \quad \begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, \\ u(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2l} + \sin \frac{3\pi x}{2l}. \end{cases}$$

$$133 \quad \begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx}, \\ u_x(-l, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \cos \frac{\pi x}{2l}, \\ u_t(x, 0) = \cos \frac{3\pi x}{2l} + \cos \frac{5\pi x}{2l}. \end{cases}$$

$$134 \quad \begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, \\ u_x(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = x, \\ u_t(x, 0) = 1. \end{cases}$$

$$135 \quad \begin{cases} u_{tt} = 25u_{xx}, \\ u_x(0, t) = 0, \\ u_x(l, t) + hu(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = 1, h > 0. \end{cases}$$

$$136 \quad \begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx}, \\ u(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = x \left( \sin \frac{3\pi x}{2l} + 1 \right). \end{cases}$$

$$137 \quad \begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx}, \\ u(0, t) = u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 1, \\ u_t(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2l}. \end{cases}$$

$$138 \quad \begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx}, \\ u_x(0, t) = 0, \\ u(3, t) = 0, \\ u(x, 0) = \cos \frac{\pi x}{6}, \\ u_t(x, 0) = \cos \frac{3\pi x}{6} + \cos \frac{5\pi x}{6}. \end{cases}$$

$$139 \quad \begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx}, \\ u_x(-l, t) = 0, \\ u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = x, \\ u_t(x, 0) = 1. \end{cases}$$

$$140 \quad \begin{cases} u_{tt} = 4a^2u_{xx}, \\ u_x(0, t) = 0, \\ u_x(2l, t) + 2u(2l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = 1. \end{cases}$$

$$141 \quad \begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + u, \\ u_x(0, t) = 0, \\ u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 2x + 1, \\ u_t(x, 0) = 2 \sin(x + 1). \end{cases}$$

$$142 \quad \begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + u_x, \\ u(0, t) = 0, \\ u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = x^2 + 1, \\ u_t(x, 0) = \sin x + \cos x. \end{cases}$$

$$143 \quad \begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} - 2u, \\ u_x(-l, t) = 0, \\ u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 1 + \sin \frac{5\pi x}{l}, \\ u_t(x, 0) = \sin \frac{3\pi x}{2l}. \end{cases}$$

$$144 \quad \begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} - 2u, \\ u(-l, t) = 0, \\ u_x(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin \frac{3\pi x}{l}, \\ u_t(x, 0) = 1 + \sin \frac{5\pi x}{2l}. \end{cases}$$



$$145 \quad \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2u, \\ u_x(-l, t) = 0, \\ u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin^2(3\pi x/l), \\ u_t(x, 0) = 1. \end{cases}$$

$$146 \quad \begin{cases} u_{tt} = 49u_{xx}, \\ u(0, t) = 0, \\ u_x(3, t) = 0, \\ u(x, 0) = 2 - x, \\ u_t(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{a}. \end{cases}$$

$$147 \quad \begin{cases} u_{tt} = 1,44u_{xx} + 2u, \\ u(0, t) = 0, \\ u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 3 + 2 \cos x, \\ u_t(x, 0) = 1 + 5x^3. \end{cases}$$

$$148 \quad \begin{cases} 0,81u_{tt} = u_{xx} + 2u, \\ u_x(0, t) = 0, \\ u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = (x + 2) \cos x, \\ u_t(x, 0) = 1 + x^4. \end{cases}$$

$$149 \quad \begin{cases} u_{tt} = 25u_{xx}, \\ u_x(-l, t) = 0, \\ u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = x^2 \cos x, \\ u_t(x, 0) = 4 \sin x^2. \end{cases}$$

$$150 \quad \begin{cases} 25u_{tt} = u_{xx}, \\ u_x(-3, t) = 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = \cos(x - 2), \\ u_t(x, 0) = 4 - x^2. \end{cases}$$

$$151 \quad \begin{cases} u_{tt} = 16u_{xx} + u, \\ u_x(-3, t) = 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = 1 + \cos^2 x, \\ u_t(x, 0) = 8 - x^3. \end{cases}$$

$$152 \quad \begin{cases} u_{tt} = 36u_{xx} - 2u, \\ u_x(-2, t) = 0, \\ u(2, t) = 0, \\ u(x, 0) = x \cos x, \\ u_t(x, 0) = 3 + x^3. \end{cases}$$

$$153 \quad \begin{cases} 4u_{tt} = u_{xx} + u, \\ u_x(1, t) = 0, \\ u(2, t) = 0, \\ u(x, 0) = x - \cos x, \\ u_t(x, 0) = 2 + x. \end{cases}$$

$$154 \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 4u, \\ u_x(-1, t) = 0, \\ u(2, t) = 0, \\ u(x, 0) = x - 1, \\ u_t(x, 0) = 3 \cos(2 + x). \end{cases}$$

$$155 \quad \begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, \\ u_x(-3, t) = 0, \\ u_x(3, t) = 0, \\ u(x, 0) = x \operatorname{tg}(x/3), \\ u_t(x, 0) = 3 + \cos x. \end{cases}$$

$$156 \quad \begin{cases} 4u_{tt} = 9u_{xx}, \\ u(-1, t) = 0, \\ u_x(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = x + 2 \operatorname{tg} x, \\ u_t(x, 0) = 2 + 3x. \end{cases}$$

$$157 \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 3u, \\ u(-2, t) = 0, \\ u_x(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = \operatorname{tg}(x/8), \\ u_t(x, 0) = 5x. \end{cases}$$

$$158 \quad \begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + u_x, \\ u_x(-1, t) = 0, \\ u_x(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = (x + 1) \operatorname{tg} x, \\ u_t(x, 0) = \exp x. \end{cases}$$

В прикладах (159)–(182) розв'язати мішану крайову задачу для хвильового рівняння на відрізку:

$$159 \quad \begin{cases} u_{tt} = 0,81u_{xx} + u + e^{-xt}, \\ u(0, t) = t, \\ u(1, t) = 2 \sin t, \\ u(x, 0) = 1, \\ u_t(x, 0) = 2 - \cos x. \end{cases}$$

- |     |   |     |   |
|-----|---|-----|---|
| 160 | $\begin{aligned} u_{tt} &= 36u_{xx} - 2u + x \exp(-t^2), \\ u(-1, t) &= \cos t, \\ u(1, t) &= 2 + t^2, \\ u(x, 0) &= 2 + 3x, \\ u_t(x, 0) &= \cos x. \end{aligned}$                       | 167 | $\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + 2u_x + t \cos 3x, \\ 3u_x(-2, t) + u(-2, t) &= 1, \\ u(0, t) &= 2t, \\ u(x, 0) &= \cos(x + 1), \\ u_t(x, 0) &= \sin(x - 1). \end{aligned}$  |
| 161 | $\begin{aligned} (1/4)u_{tt} &= u_{xx} - 3u + \\ &+ (1 + x) \exp(-2t), \\ u(0, t) &= \cos t, \\ u(2, t) &= 2 \sin t, \\ u(x, 0) &= 2 + x^2, \\ u_t(x, 0) &= (1/2) \sin 2x. \end{aligned}$ | 168 | $\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} - u_x + u, \\ u(0, t) &= 2, \\ u_x(l, t) &= 1, \\ u(x, 0) &= 2x, \\ u_t(x, 0) &= 1 + x^3 + \sin \frac{\pi x}{a}. \end{aligned}$   |
| 162 | $\begin{aligned} (4/9)u_{tt} &= u_{xx} + 2u + \operatorname{ch}^{-2}(x), \\ u(-2, t) &= 2t, \\ u(2, t) &= 1 + \cos t, \\ u(x, 0) &= 2x^2, \\ u_t(x, 0) &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$ | 169 | $\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + 3u_x - 2u + 2t \cos x, \\ u(0, t) &= 5t, \\ u_x(l, t) &= t \cos t, \\ u(x, 0) &= 2x, \\ u_t(x, 0) &= 1 + x^3 + \sin \frac{\pi x}{a}. \end{aligned}$   |
| 163 | $\begin{aligned} u_{tt} &= 25u_{xx} + 3u + \\ &+ \cos t \cos 2(x), \\ u(0, t) &= 2 \sin 2t, \\ u(3, t) &= (1 + t)^2, \\ u(x, 0) &= x^2, \\ u_t(x, 0) &= 1 + 2 \cos x. \end{aligned}$      | 170 | $\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + 4u - \cos t \sin \frac{\pi x}{a}, \\ u(0, t) &= \sin t, \\ u_x(l, t) &= \cos^2 t, \\ u(x, 0) &= 1 + x^4, \\ u_t(x, 0) &= 3 + \cos 3x. \end{aligned}$  |
| 164 | $\begin{aligned} u_{tt} &= 16u_{xx} + u + \\ &+ (3 + \cos t)(1 + x^2)^{-2}, \\ u(0, t) &= 4, \\ u(1, t) &= 3 + \cos 2t, \\ u(x, 0) &= 1 + e^x, \\ u_t(x, 0) &= (x + 1)^2. \end{aligned}$  | 171 | $\begin{aligned} u_{tt} &= 16u_{xx} + u - (1 + 2t) \cos^2 \frac{\pi x}{a}, \\ u(0, t) &= t(t^2 + 1), \\ u(4, t) &= 3 + \sin^3 t, \\ u(x, 0) &= 2x + \cos x, \\ u_t(x, 0) &= x \cos 2x. \end{aligned}$                           |
| 165 | $\begin{aligned} u_{tt} &= 16u_{xx} + u + t(1 + x^2), \\ u(0, t) &= 4, \\ u(1, t) &= 3t, \\ u(x, 0) &= x + 2, \\ u_t(x, 0) &= 0. \end{aligned}$   | 172 | $\begin{aligned} 16u_{tt} &= u_{xx} + 3u_x - \cos t \left(\frac{\pi x}{l}\right)^2, \\ u(0, t) &= t \sin t, \\ u_x(l, t) &= (t^2 + 1)^{-1}, \\ u(x, 0) &= 2x \sin x, \\ u_t(x, 0) &= 2 + x + 3x^2. \end{aligned}$               |
| 166 | $\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + u + x \cos 3t, \\ u_x(0, t) + 3u(0, t) &= 0, \\ u(2, t) &= 1 + t^2, \\ u(x, 0) &= 1 + \sin x, \\ u_t(x, 0) &= 2x^2 + 3. \end{aligned}$            | 173 | $\begin{aligned} u_{tt} &= (1/3)^2 u_{xx} + 4u_x - 2t \left(\frac{3\pi x}{l}\right), \\ u(-l, t) &= t + \sin t, \\ u_x(l, t) &= 2t^2, \\ u(x, 0) &= \operatorname{ch}^{-2}(x + 1), \\ u_t(x, 0) &= (x + 2)^{-4}. \end{aligned}$ |
| 167 | $\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + 2u_x + t \cos 3x, \\ 3u_x(-2, t) + u(-2, t) &= 1, \\ u(0, t) &= 2t, \\ u(x, 0) &= \cos(x + 1), \\ u_t(x, 0) &= \sin(x - 1). \end{aligned}$        | 174 | $\begin{aligned} 4u_{tt} &= u_{xx} + 12u_x - 8xt(x + t), \\ u(0, t) &= 3t + 1, \\ u_x(1, t) + u(1, t) &= \sin(t + 2), \\ u(x, 0) &= 3 + \cos(2x + 3), \\ u_t(x, 0) &= x^2 + \sin x. \end{aligned}$                              |

175	$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 3u_x - 8x \cos(x+t), \\ u(-1, t) = t + 3, \\ u_x(0, t) + u(0, t) = 2t \sin t, \\ u(x, 0) = \exp(x+1), \\ u_t(x, 0) = \exp(x+2). \end{cases}$	179	$\begin{cases} 3u_{tt} = 2u_{xx} + u +  t  \cos x, \\ u_x(0, t) = 3 + t, \\ 5u_x(1, t) + u(1, t) = 4 + t^4, \\ u(x, 0) = \sin x, \\ u_t(x, 0) = 2x. \end{cases}$
176	$\begin{cases} u_{tt} = 5u_{xx} + u - (x+t) + \\ + \sin(x+t), \\ u_x(0, t) = t + 3, \\ u_x(\pi/4, t) + 2u(\pi/4, t) = t + \\ + \sin t, \\ u(x, 0) = 2x, \\ u_t(x, 0) = \operatorname{tg} x. \end{cases}$	180	$\begin{cases} u_{tt} = 2u_{xx} + u_x + t(1 + \cos x), \\ u_x(0, t) + 4u(0, t) = 3t + t^2, \\ u_x(2, t) = (1 + \cos t)^4, \\ u(x, 0) = 2x + 3 \sin x, \\ u_t(x, 0) = 2 - x^2. \end{cases}$
177	$\begin{cases} u_{tt} = 64u_{xx} + 4u + \\ + \exp(x+t) \sin t, \\ u_x(0, t) = 3t, \\ u_x(4, t) + 4u(4, t) = \cos t, \\ u(x, 0) = 2 + \sin x, \\ u_t(x, 0) = x^2. \end{cases}$	181	$\begin{cases} u_{tt} = 144u_{xx} - 3u_x + (2t+x)e^t, \\ 3u_x(-2, t) + 2u(-2, t) = t^2, \\ u_x(2, t) = 7 \cos t, \\ u(x, 0) = (x+3) \sin x, \\ u_t(x, 0) = (2+x)^2. \end{cases}$
178	$\begin{cases} 9u_{tt} = u_{xx} + 3u + \exp(-t) \sin x, \\ u_x(0, t) = 3 + t^3, \\ 2u_x(4, t) + u(4, t) = \cos(1+t), \\ u(x, 0) = x^2 \sin(x+2), \\ u_t(x, 0) = x + 2. \end{cases}$	182	$\begin{cases} 81u_{tt} = u_{xx} + 5u + 2te^x, \\ 2u_x(0, t) + 5u(0, t) = (1+t)^2, \\ u_x(2, t) = 3t + \cos t, \\ u(x, 0) = (3+x) \sin x, \\ u_t(x, 0) = (2+x) \cos x. \end{cases}$

## §2.4. Крайові задачі для рівняння Лапласа на площині.

### §2.4.1. Декартові координати

Крайова задача для рівняння Лапласа в прямокутнику  $[0, a] \times [0, b]$  має вигляд:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in (0, a), \quad y \in (0, b), \\ \alpha_1 u(0, y) + \beta_1 u_x(0, y) = \phi_1(y), & y \in (0, b), \\ \alpha_2 u(a, y) + \beta_2 u_x(a, y) = \phi_2(y), & y \in (0, b), \\ \alpha_3 u(x, 0) + \beta_3 u_y(x, 0) = \phi_3(x), & x \in (0, a), \\ \alpha_4 u(x, b) + \beta_4 u_y(x, b) = \phi_4(x), & x \in (0, a). \end{cases} \quad (2.37)$$

### Приклад 2.7

◁ Розгляньмо простішу задачу Діріхле для рівняння Лапласа в пря-

мокутнику:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in (0, a), \quad y \in (0, b), \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in (0, a), \\ u(x, b) = \psi(x), & x \in (0, a), \\ u(0, y) = u(a, y) = 0. \end{array} \right. \quad (2.38)$$

▷

**Розв'язання** ◀ Шукатиме частинні розв'язки у вигляді

$$v(x, y) = X(x)Y(y) \quad (2.39)$$

Відокремлюючи змінні, отримаємо два рівняння

$$X'' = \lambda X, \quad Y'' = -\lambda Y.$$

Завдяки однорідним умовам  $u(0, y) = u(a, y) = 0$ , отримаємо

$$X(0) = X(a) = 0,$$

тобто для функції  $X(x)$  маємо задачу Штурма – Ліувілля, розв'язок якої має вигляд повної системи функцій  $X_n(x)$  (2.10). Загальний розв'язок рівняння для  $Y_n(y)$  можна подати у вигляді

$$Y_n(y) = C_n \operatorname{ch}(\lambda_n y) + C'_n \operatorname{sh}(\lambda_n y).$$

Однак більш зручною є форма розв'язку

$$Y_n(y) = A_n \operatorname{sh}(\lambda_n y) + B_n \operatorname{sh}(\lambda_n(b - y)).$$

Загальний розв'язок задачі

$$u(x, y) = \sum_n X_n(x)Y_n(y).$$

Константи  $A_n$  та  $B_n$  знаходимо з додаткових умов

$$\begin{aligned} \phi(x) &= u(x, 0) = \sum_n X_n(x)Y_n(0) = \sum_n X_n(x)B_n \operatorname{sh}(\lambda_n b), \\ \psi(x) &= u(x, b) = \sum_n X_n(x)Y_n(b) = \sum_n X_n(x)A_n \operatorname{sh}(\lambda_n b), \end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned} A_n \operatorname{sh}(\lambda_n b) &= \frac{2}{a} \int_0^a X_n(x)\psi(x)dx, \\ B_n \operatorname{sh}(\lambda_n b) &= \frac{2}{a} \int_0^a X_n(x)\phi(x)dx. \end{aligned}$$

Таким чином, розв'язок задачі Діріхле має вигляд

$$u(x, y) = \sum_n X_n(x) Y_n(y), \quad (2.40a)$$

$$X_n(x) = \sin(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{a}, \quad (2.40b)$$

$$Y_n(y) = A_n \operatorname{sh}(\lambda_n y) + B_n \operatorname{sh}(\lambda_n(b - y)), \quad (2.40c)$$

$$A_n = \frac{2}{a \operatorname{sh}(\lambda_n b)} \int_0^a X_n(x) \psi(x) dx, \quad (2.40d)$$

$$B_n = \frac{2}{a \operatorname{sh}(\lambda_n b)} \int_0^a X_n(x) \phi(x) dx. \quad (2.40e)$$



В прикладах (183)–(190) розв'язати внутрішню крайову задачу для рівняння Лапласа в прямокутнику  $[0, a] \times [0, b]$ , якщо межові умови мають вигляд:

$$183 \quad \begin{cases} u(0, y) = A \sin \frac{\pi y}{b}, & u(a, y) = 0, \\ u(x, 0) = B \sin \frac{\pi x}{a}, & u(x, b) = 0. \end{cases}$$

$$184 \quad \begin{cases} u(0, y) = V_1, & u(a, y) = V_2, \\ u(x, 0) = 0, & u(x, b) = 0. \end{cases}$$

$$185 \quad \begin{cases} u(0, y) = \sin \frac{\pi y}{2b}, & u(a, y) = \sin \frac{7\pi y}{2b}, \\ u(x, 0) = 0, & u_y(x, b) = 0. \end{cases}$$

$$186 \quad \begin{cases} u(0, y) = 0, & u(a, y) = (b - y)^2 \sin \frac{\pi y}{b}, \\ u_y(x, 0) = 0, & u_y(x, b) = 0. \end{cases}$$

$$187 \quad \begin{cases} u(0, y) = 0, & u(a, y) = 0, \\ u(x, 0) = 0, & u_y(x, b) + hu(x, b) = T. \end{cases}$$

$$188 \quad \begin{cases} u(0, y) = \sin^2 \frac{\pi y}{b}, & u(a, y) = 0, \\ u_y(x, 0) = 0, & u_y(x, b) = 0. \end{cases}$$

$$189 \quad \begin{cases} u_x(0, y) = 0, & u_x(a, y) = \cos \frac{\pi y}{b}, \\ u_y(x, 0) = 0, & u_y(x, b) = \cos \frac{3\pi x}{a}. \end{cases}$$

$$190 \quad \begin{cases} u(0, y) + \beta u_x(0, y) = A, & u(a, y) = 0, \\ u(x, 0) = 0, & u(x, b) = 0. \end{cases}$$

**191** Обчислити розподіл потенціалу електростатичного поля  $u(x, y)$  всередині прямокутника  $[0, a] \times [0, b]$ , якщо потенціал вздовж боку цього прямокутника, що лежить на осі  $x$ , дорівнює  $V_0$ , усі інші боки заземлені (усередині прямокутника зарядів немає).

**192** Обчислити розподіл потенціалу електростатичного поля  $u(x, y)$  всередині прямокутника  $[-a, a] \times [-b, b]$ , якщо потенціали двох протилежних

боків ( $x = \pm a$ ) дорівнюють  $V_0$ , інші боки заземлені.

### §2.4.2. Спектральна задача для оператора Лапласа у прямокутнику (рівняння Гельмгольца)

#### Приклад 2.8

◁ Постановка задачі наступна:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + k^2 u = 0, & x \in (0, a), y \in (0, b), \\ u(0, y) = u(a, y) = 0, & y \in (0, b) \\ u(x, 0) = u(x, b) = 0, & x \in (0, a). \end{cases} \quad (2.41)$$

Невідомими є власні функції  $u(x, y)$  та власні числа  $k$ , при яких задача має розв'язок. ▷

**Розв'язання** ◀ Відокремлюючи стандартним чином змінні, матиме

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + k^2 = 0,$$

звідки прямує, що кожен з доданків є сталою та задача розбивається на дві незалежні задачі Штурма—Ліувілля

$$X''(x) + \lambda_1^2 X(x) = 0, \quad X(0) = X(a) = 0, \quad (2.42a)$$

$$Y''(y) + \lambda_2^2 Y(y) = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0, \quad (2.42b)$$

$$k^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2. \quad (2.42c)$$

Розв'язки задач Штурма – Ліувілля відомі, див. (2.10), отже загальний розв'язок задачі має вигляд подвійного ряду Фур'є

$$u(x, y) = \sum_{n,m} C_{nm} X_n(x) Y_m(y), \quad (2.43a)$$

$$X_n(x) = \sin(\lambda_{1n} x), \quad \lambda_{1n} = \frac{\pi n}{a}, \quad (2.43b)$$

$$Y_m(y) = \sin(\lambda_{2m} y), \quad \lambda_{2m} = \frac{\pi m}{b}, \quad (2.43c)$$

$$k_{nm} = \sqrt{\lambda_{1n}^2 + \lambda_{2m}^2}. \quad (2.43d)$$

►

### §2.4.3. Полярні координати

Рівняння Лапласа на площині в полярних координатах має вигляд:

$$u_{\rho\rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{\rho^2} = 0. \quad (2.44)$$

Загальний розв'язок рівняння (2.44) має форму:

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) = A_0 + B_0 \ln(\rho) + \sum_{\{\lambda\}} \left( A_{\lambda}^{(1)} \rho^{\lambda} + B_{\lambda}^{(1)} \rho^{-\lambda} \right) \cos \lambda \varphi \\ + \sum_{\{\lambda\}} \left( A_{\lambda}^{(2)} \rho^{\lambda} + B_{\lambda}^{(2)} \rho^{-\lambda} \right) \sin \lambda \varphi. \end{aligned} \quad (2.45)$$

### Приклад 2.9

◁ Розгляньмо задачу Діріхле для рівняння Лапласа в крузі:

$$u(\rho, \varphi) : \Delta u(\rho, \varphi) = 0, \quad \rho \in [0, R), \varphi \in S^1, \quad (2.46a)$$

$$u(a, \varphi) = f(\varphi), \quad (2.46b)$$

▷

де  $S^1$  — одиничне кола (відрізок  $[0, 2\pi]$  з ототожненими кінцями).

**Розв'язання** ◀ Оскільки область та межові умови задані у полярних координатах, істотно записати рівняння Лапласа також у полярних координатах:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (2.47)$$

Шукатиме частинні розв'язки у вигляді

$$v(\rho, \varphi) = R(\rho) \Phi(\varphi) \quad (2.48)$$

Відокремлюючи змінні, отримаємо два рівняння

$$\Phi''(\varphi) + \lambda^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad \varphi \in S^1, \quad (2.49a)$$

$$\rho R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda^2 R(\rho) = 0. \quad (2.49b)$$

Розгляньмо рівняння (2.49a) для функції  $\Phi$ . Його загальний розв'язок має вигляд

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} A_0 + B_0 \varphi & \text{при } \lambda = 0, \\ A_{\lambda} \cos \lambda \varphi + B_{\lambda} \sin \lambda \varphi & \text{при } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Крайові умови для цього рівняння явним чином не задані. Відомо тільки, що  $\varphi \in S^1$ . Але  $S^1$  не справжній відрізок. Його кінці ототожнені, тобто маємо, задачу Штурма—Ліувілля з так званими періодичними умовами

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \quad (2.50)$$

Завдяки умовам (2.50) власні числа  $\lambda$  можуть приймати тільки цілі значення, та розв'язок матиме вигляд

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad B_0 = 0,$$

константу  $A_0$  тоді, звісно, можна покласти рівною одиниці, тому вважати-  
ме, що  $\Phi_0(\varphi) = 1$ .

Перейдемо до рівняння (2.49b). Якщо  $n = 0$ , його розв'язок

$$R_0(\rho) = A_0 + B_0 \ln(\rho),$$

в решті випадків

$$R_n(\rho) = A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}.$$

В результаті загальний розв'язок

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) = A_0 + B_0 \ln(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n^{(1)} \rho^n + B_n^{(1)} \rho^{-n} \right) \cos n\varphi \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n^{(1)} \rho^n + B_n^{(1)} \rho^{-n} \right) \sin n\varphi \end{aligned} \quad (2.51)$$

Для внутрішньої задачі  $u(\rho, \varphi)$  має задовольняти умові  $u(\rho, \varphi) \Big|_{\rho \rightarrow 0} < \infty$ ,  
звідки усі  $B_n = 0$  та розв'язок має вигляд

$$u(\rho, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{R} \right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (2.52a)$$

Коефіцієнти  $A_n$  та  $B_n$  знаходяться з межових умов (2.46b),

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad (2.52b)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi. \quad (2.52c)$$



В прикладах (193)–(201) розв'язати внутрішню крайову задачу для рівняння Лапласа у крузі  $U_R$ , якщо межові умови мають вигляд:

**193**  $u(R, \varphi) = A \sin^3 \varphi.$

**194**  $u_\rho(R, \varphi) = A \sin^2 \varphi.$

**195**  $u_\rho(R, \varphi) = A + B \cos^3 \varphi.$

**196**  $u(R, \varphi) + hu_\rho(R, \varphi) = A \sin 3\varphi.$

**197**  $u(R, \varphi) = A \cos^2 \varphi.$

**198**  $u(R, \varphi) = A \cos^4 \varphi.$

**199**  $u(R, \varphi) = A \cos^6 \varphi + B \sin^6 \varphi.$

**200**  $u_\rho(R, \varphi) = A \cos \varphi.$

**201**  $u_\rho(R, \varphi) = A \cos 2\varphi.$



В прикладах (202)–(205) розв'язати зовнішню крайову задачу для рівняння Лапласа у крузі  $U_R$ , якщо межові умови мають вигляд:

$$\mathbf{202} \quad u(R, \varphi) = A + B \sin 5\varphi.$$

$$\mathbf{203} \quad u_\rho(R, \varphi) = A \cos^3 \varphi.$$

$$\mathbf{204} \quad u_\rho(R, \varphi) = A + B \sin 2\varphi.$$

$$\mathbf{205} \quad u(R, \varphi) + hu_\rho(R, \varphi) = A \sin 4\varphi.$$

В прикладах (206)–(211) розв'язати внутрішню задачу Діріхле для круга  $U_R$ , якщо при  $x^2 + y^2 = R^2$  поле матиме вигляд:

$$\mathbf{206} \quad u(x, y) = x + xy.$$

$$\mathbf{207} \quad u(x, y) = 2(x^2 + y).$$

$$\mathbf{208} \quad u(x, y) = x^3 - y^3.$$

$$\mathbf{209} \quad u(x, y) = x^4 + y^4.$$

$$\mathbf{210} \quad u(x, y) = x^3 + xy^2.$$

$$\mathbf{211} \quad u(x, y) = x^4 + x^3y + x^2y^2 + y^4.$$

В прикладах (212)–(217) розв'язати внутрішню задачу Неймана для круга  $U_R$ , якщо при  $x^2 + y^2 = R^2$  нормальна похідна дорівнює:

$$\mathbf{212} \quad u_\rho = xy.$$

$$\mathbf{213} \quad u_\rho = x^2 - y.$$

$$\mathbf{214} \quad u_\rho = x^3.$$

$$\mathbf{215} \quad u_\rho = y^4.$$

$$\mathbf{216} \quad u_\rho = xy + x^2 - y^2.$$

$$\mathbf{217} \quad u_\rho = 3x^2y^2.$$

В прикладах (218)–(223) розв'язати зовнішню Діріхле задачу для круга  $U_R$ , якщо при  $x^2 + y^2 = R^2$  поле матиме вигляд:

$$\mathbf{218} \quad u(x, y) = y + 2xy.$$

$$\mathbf{219} \quad u(x, y) = x^2 + 1.$$

$$\mathbf{220} \quad u(x, y) = x^2 - y^2.$$

$$\mathbf{221} \quad u(x, y) = y^2 + x +$$

$$y.$$

$$\mathbf{222} \quad u(x, y) = ax + by +$$

$$c.$$

$$\mathbf{223} \quad u(x, y) = xy^2 +$$

$$x^2y + x^3 - y^3.$$

В прикладах (224)–(231) розв'язати крайову задачу для рівняння Лапласа у кільці, радіус якого  $\rho \in (R_1, R_2)$ , якщо межові умови мають вигляд:

$$\mathbf{224} \quad u_\rho(R_1, \varphi) = T, \quad u_\rho(R_2, \varphi) = U.$$

$$\mathbf{225} \quad u_\rho(R_1, \varphi) - hu(R_1, \varphi) = T, \\ u_\rho(R_2, \varphi) + hu(R_2, \varphi) = U.$$

$$\mathbf{226} \quad u_\rho(R_1, \varphi) = A, \quad u(R_2, \varphi) = B.$$

$$\mathbf{227} \quad u(R_1 = 1, \varphi) = 1 + \cos^2 \varphi, \\ u(R_2 = 2, \varphi) = \sin^2 \varphi.$$

$$\mathbf{228} \quad u(R_1, \varphi) = 0, \quad u(R_2, \varphi) = \sin \varphi +$$

$$2 \cos^2 \varphi.$$

$$\mathbf{229} \quad u_\rho(R_1, \varphi) = 4 \sin^3 \varphi, \quad u(R_2, \varphi) = 0.$$

$$\mathbf{230} \quad u(R_1, \varphi) = 1, \quad u_\rho(R_2, \varphi) = 2 \sin^2 \varphi.$$

$$\mathbf{231} \quad u_\rho(R_1, \varphi) = \sin \varphi, \quad u_\rho(R_2, \varphi) = \cos \varphi.$$

## §2.5. Крайові задачі для рівняння Лапласа у трьохвимірному просторі

### §2.5.1. Декартові координати

Рівняння Лапласа в декартових координатах має вигляд:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \quad (2.53)$$

**Приклад 2.10**

◁ Розгляньмо простішу задачу Діріхле для рівняння Лапласа в прямокутному паралелепіпеді:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, & x \in (0, a), \quad y \in (0, b), \quad z \in (0, c), \\ u(x, y, 0) = \phi(x, y), & x \in (0, a), \\ u(x, y, c) = \psi(x, y), & x \in (0, a), \\ u(0, y, z) = u(a, y, z) = 0, & y \in (0, b), \quad z \in (0, c) \\ u(x, 0, z) = u(x, b, z) = 0, & x \in (0, a), \quad z \in (0, c). \end{array} \right. \quad (2.54)$$

▷

**Розв'язання** ◀ Шукатиме частинні розв'язки у вигляді

$$v(x, y, z) = w(x, y)Z(z), \quad (2.55)$$

де ми відокремили саме ту змінну, за якою додаткові умови в задачі (2.54) є однорідними. Підставляючи вираз (2.55) до рівняння Лапласа, отримаємо:

$$\frac{w_{xx} + w_{yy}}{w(x, y)} - \frac{Z''}{Z(z)} = -k^2.$$

Змінні відокремлено. Для функції  $w(x, y)$  маємо спектральну задачу 2.8: задачу

$$\left\{ \begin{array}{ll} w_{xx} + w_{yy} + k^2 w = 0, & x \in (0, a), \quad y \in (0, b), \\ w(0, y) = w(a, y) = 0, & y \in (0, b) \\ w(x, 0) = w(x, b) = 0, & x \in (0, a). \end{array} \right. \quad (2.56)$$

Розв'язком цієї задачі є повний набір власних елементів  $\{w_{nm}; k_{nm}\}$ , див. (2.43):

$$w_{nm}(x, y) = \sin(\lambda_{1n}x) \sin(\lambda_{2m}y),$$

$$k_{nm} = \sqrt{\lambda_{1n}^2 + \lambda_{2m}^2}, \quad \lambda_{1n} = \frac{\pi n}{a}, \quad \lambda_{2m} = \frac{\pi m}{b}.$$

Для функції  $Z(z)$ , згідно з (2.55) маємо рівняння:

$$Z'' + k_{n,m}^2 Z(z) = 0, \quad z \in (0, c),$$

загальний розв'язок якого запишемо у вигляді:

$$Z_{n,m}(z) = A_{n,m} \operatorname{sh} k_{n,m} z + B_{n,m} \operatorname{sh} k_{n,m}(c - z).$$

Загальний розв'язок шукаємо у вигляді розвинення по частинних розв'язках (фактично, по розв'язках спектральної задачі):

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{n,m}(x, y) Z_{n,m}(z), \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{n,m}(x, y) (A_{n,m} \operatorname{sh} k_{n,m} z + B_{n,m} \operatorname{sh} k_{n,m}(c - z)). \end{aligned}$$

Коефіцієнти  $A_{n,m}$  і  $B_{n,m}$  визначаються з межових умов:

$$\begin{aligned}\phi(x, y) = u(x, y, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} w_{n,m}(x, y), \\ \psi(x, y) = u(x, y, c) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} w_{n,m}(x, y)\end{aligned}$$

як коефіцієнти Фур'є розкладу межових умов в подвійний ряд Фур'є за розв'язками спектральної задачі (2.56):

$$\begin{aligned}A_{n,m} &= \frac{1}{\|w\|^2} \int_0^a dx \int_0^b dy \phi(x, y) w_{n,m}(x, y), \\ B_{n,m} &= \frac{1}{\|w\|^2} \int_0^a dx \int_0^b dy \psi(x, y) w_{n,m}(x, y).\end{aligned}$$



В прикладах (232)–(235) розв'язати внутрішню крайову задачу для рівняння Лапласа в прямокутному паралелепіпеді  $[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ , якщо межові умови мають вигляд:

<b>232</b>	$\left\{ \begin{aligned} u_x(0, y, z) &= 0, & u_x(a, y, z) &= A, \\ u_y(x, 0, z) &= 0, & u_y(x, b, z) &= B, \\ u_z(x, y, 0) &= 0, & u_z(x, y, c) &= C. \end{aligned} \right.$	<b>234</b>	$\left\{ \begin{aligned} u(0, y, z) &= 0, & u(a, y, z) &= 1, \\ u(x, 0, z) &= 0, & u(x, b, z) &= 1, \\ u(x, y, 0) &= 0, & u(x, y, c) &= 1. \end{aligned} \right.$
<b>233</b>	$\left\{ \begin{aligned} u(0, y, z) &= 0, & u(\pi, y, z) &= 0, \\ u_y(x, 0, z) &= 0, & u_y(x, \pi, z) &= 0, \\ u(x, y, 0) &= \sin x \cos y, \\ u(x, y, c) &= \sin 2x \cos 2y. \end{aligned} \right.$	<b>235</b>	$\left\{ \begin{aligned} u_x(0, y, z) &= 0, & u_x(a, y, z) &= 0, \\ u_y(x, 0, z) &= 0, & u_y(x, b, z) &= 0, \\ u(x, y, 0) &= A, & u(x, y, c) &= B. \end{aligned} \right.$

### §2.5.2. Сферичні координати

Оператор Лапласа у сферичних координатах має вигляд:

$$\begin{aligned}\Delta &= \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi}, \\ \Delta_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad \text{— радіальна частина;} \\ \Delta_{\theta\varphi} &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad \text{— кутова частина.}\end{aligned} \tag{2.57}$$

Сферичну функцією можна задати *формулою Лапласа*

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = N_{lm} e^{im\varphi} \int_0^{2\pi} d\psi (\cos \theta + i \sin \theta \cos \psi)^l e^{im\psi}, \quad (2.58)$$

де сталу  $N_{lm}$  обирають з умови нормування

$$\|Y_{lm}\|^2 \equiv \int_{S^2} |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega = 1. \quad (2.59)$$

Простіші сферичні функції мають вигляд

$$\begin{aligned} Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, & Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \\ Y_{1,\pm 1} &= \pm \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}, & Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), \\ Y_{2,\pm 1} &= \pm \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi}, & Y_{2,\pm 2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi}. \end{aligned}$$

Сферичні функції утворюють повну ортонормовану систему функцій на сфері одиничного радіуса, тому будь-яку функцію  $f(\theta, \varphi) \in L^2(S^2)$  можливо розкласти в ряд Фур'є по сферичних функціях:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l=-m}^l f_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (2.60a)$$

де коефіцієнти Фур'є

$$f_{lm} = \int_{S^2} f(\theta, \varphi) \overline{Y_{lm}}(\theta, \varphi) d\Omega. \quad (2.60b)$$

Це дає можливість шукати розв'язок крайових задач у сферичних областях саме у вигляді розвинення в ряд за сферичними функціями. Загальний розв'язок рівняння Лапласа в сферичних координатах має вигляд

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l=-m}^l \left( A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (2.61)$$

### Приклад 2.11

◁ Розгляньмо простішу задачу Діріхле для рівняння Лапласа в кулі:

$$\begin{cases} \Delta u(r, \theta, \varphi) = 0, & r \in [0, R), \\ u(R, \theta, \varphi) = C \sin \theta \cos \varphi. \end{cases} \quad (2.62)$$

▷

**Розв'язання** ◀ Загальний розв'язок рівняння Лапласа у сферичних координатах може бути поданий у вигляді розвинення (2.61) в ряд по сферичних функціях. Для внутрішньої задачі Діріхле з умов обмеженості маємо покласти  $B_{lm} = 0$ . Поки константа  $A_{lm}$  не визначена, перепозначимо  $A_{lm}r^l \rightarrow A_{lm}(r/R)^l$ . Отже

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l=-m}^l A_{lm} \left(\frac{r}{R}\right)^l Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (2.63)$$

Сталі  $A_{lm}$  визначимо з межових умов. На сфері  $r = R$

$$\begin{aligned} u(R, \theta, \varphi) &= C \sin \theta \cos \varphi = -i \sqrt{\frac{2\pi}{3}} C (Y_{1,1} + Y_{1,-1}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l=-m}^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

$$\text{звідки } A_{1,\pm 1} = -i \sqrt{\frac{2\pi}{3}} C, \quad A_{l,m} = 0 \text{ в решті випадків.}$$

Підставляючи ці сталі в загальний розв'язок (2.63), отримаємо:

$$u(r, \theta, \varphi) = C \left(\frac{r}{R}\right) \sin \theta \sin \varphi.$$



В прикладах (236)–(237) розв'язати внутрішню крайову задачу для рівняння Лапласа у кулі радіуса  $R$ , якщо межові умови мають вигляд:

<b>236</b> $u(R, \theta, \varphi) = \sin \theta (\sin \varphi + \sin \theta).$ <b>237</b> $u_r(R, \theta, \varphi) + 2u(R, \theta, \varphi) = 1 + 2 \cos \theta + 3 \cos^2 \theta.$ <b>238</b> $u_r(R, \theta, \varphi) + u(R, \theta, \varphi) = 3 + \sin \theta (\sin \varphi + \sin \theta).$	<b>239</b> $u(R, \theta, \varphi) - u_r(R, \theta, \varphi) = \sin(2\theta).$ <b>240</b> $u(R, \theta, \varphi) = \sin \theta (\sin \varphi + \sin \theta).$ <b>241</b> $u(R, \theta, \varphi) + 2u_r(R, \theta, \varphi) = 1 + \sin \theta (\sin \varphi + \sin \theta).$
--	--

В прикладах (242)–(243) розв'язати зовнішню крайову задачу для рівняння Лапласа у кулі радіуса  $R$ , якщо межові умови мають вигляд:

<b>242</b> $u(R, \theta, \varphi) - u_r(R, \theta, \varphi) = \sin^2 \theta.$	<b>243</b> $u_r(R, \theta, \varphi) + 2u(R, \theta, \varphi) = 1 + \cos \theta.$
---	--

В прикладах (244)–(259) розв'язати крайову задачу для рівняння Лапласа у сферичному шарі  $r \in (R_1, R_2)$ , якщо межові умови мають вигляд:

**244**  $u(1, \theta, \varphi) = \cos^2 \theta, u(2, \theta, \varphi) = \frac{1}{8} (\cos^2 \theta + 1),$  радіуси  $R_1 = 1, R_2 = 2.$

**245**  $u(1, \theta, \varphi) = 1 - \cos 2\theta$ ,  $u(2, \theta, \varphi) = 2 \cos \theta$ , радіуси  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ .

**246**  $u(1, \theta, \varphi) = \frac{1}{2} \cos \theta$ ,  $u(2, \theta, \varphi) = (1 + \cos 2\theta)$ , радіуси  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ .

**247**  $u(1, \theta, \varphi) = \cos^2 \theta$ ,  $u(2, \theta, \varphi) = \frac{1}{8} (\cos^2 \theta + 1)$ , радіуси  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ .

**248**  $u(1, \theta, \varphi) = \sin \theta \sin \varphi$ ,  $u(2, \theta, \varphi) = 0$ , радіуси  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ .

**249**  $u(1/2, \theta, \varphi) = 0$ ,  $u(1, \theta, \varphi) = 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta$ , радіуси  $R_1 = 1/2$ ,  $R_2 = 1$ .

**250**  $u_r(1, \theta, \varphi) = 1 - \cos 2\theta$ ,  $u(2, \theta, \varphi) = 2$ , радіуси  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ .

**251**  $u_r(1, \theta, \varphi) + u(1, \theta, \varphi) = 0$ ,  $u(2, \theta, \varphi) = \frac{1}{5} (1 + \cos 2\theta)$ , радіуси  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ .

**252**  $u(1, \theta, \varphi) = \frac{1}{3} \sin^2 \theta$ ,  $u_r(2, \theta, \varphi) = (\cos^2 \theta + 1)$ , радіуси  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ .

**253**  $u(1, \theta, \varphi) = \sin \theta \sin \varphi$ ,  $u_r(2, \theta, \varphi) + 5u(2, \theta, \varphi) = 0$ , радіуси  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ .

**254**  $u_r(1/2, \theta, \varphi) = 0$ ,  $u(1, \theta, \varphi) = 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta$ , радіуси  $R_1 = 1/2$ ,  $R_2 = 1$ .

**255**  $u(R_1, \theta, \varphi) = \sin(2\theta)$ ,  $u(R_2, \theta, \varphi) = 2 \cos \theta$ .

**256**  $u(1, \theta, \varphi) = \sin \theta \sin \varphi$ ,  $u(2, \theta, \varphi) = 0$ , радіуси  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ .

**257**  $u(1/2, \theta, \varphi) = 0$ ,  $u(1, \theta, \varphi) = 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta$ , радіуси  $R_1 = 1/2$ ,  $R_2 = 1$ .

**258**  $u(1, \theta, \varphi) = \sin \theta \sin \varphi$ ,  $u(2, \theta, \varphi) + 5u_r(2, \theta, \varphi) = 0$ , радіуси  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ .

**259**  $u_r(R_1, \theta, \varphi) = \sin \theta$ ,  $u(R_2, \theta, \varphi) = 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta$ .

Фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа має такий розклад по сферичних функціях

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} = \begin{cases} \frac{1}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^l P_l(\cos \theta), & r < R \\ \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^l P_l(\cos \theta), & r > R \end{cases}. \quad (2.64)$$

При запису (2.64) введено поліном Лежандра

$$P_l(\cos \theta) = \frac{Y_{l0}(\theta, \varphi)}{Y_{l0}(0, 0)} = \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{3/2} Y_{l0}(\theta, \varphi). \quad (2.65)$$

### Приклад 2.12

◁ Знайти потенціал, створюваний заземленою металевією сферою радіуса  $R$  та точковим зарядом величини  $q$ , поміщеним на відстані  $a < R$  від центра сфери та густину індукованих зарядів. ▷

**Розв'язання** ◀ В сфері  $0R$  виділимо сферу  $0a$  та розглянемо потенціал в сферичному шарі,  $u = u_1 + u_2$ , де  $u_1$  — потенціал точкового заряду,  $u_2$  —

потенціал зарядів, індукованих на сфері.

$$u_1(r, \theta) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} = \frac{q}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^l P_l(\cos \theta),$$

$$u_2(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{l0}(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos \theta).$$

З граничної умови  $u(R, \theta) = 0$  впливатиме, що

$$\frac{q}{R} \left(\frac{a}{r}\right)^l + C_l \left(\frac{r}{a}\right)^l = 0 \implies C_l = -\frac{q}{R} \cdot \left(\frac{a}{R}\right)^{2l}.$$

Таким чином, для  $u_2$  можемо записати

$$u_2(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(-\frac{q}{R} \cdot \left(\frac{a}{R}\right)^{2l}\right) \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos \theta) = \frac{q'}{a'} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a'}\right)^l P_l(\cos \theta),$$

де

$$q' = q \frac{a}{R}, \quad a' = \frac{R^2}{a}.$$

Отже поле  $u_2$  індукованих зарядів еквівалентно полю «зображення» заряду  $a$  відносно сфери, тобто полю заряду  $q'$ , розташованого на одній прямій з  $0a$  на відстані  $a'$  (точки  $a$  та  $a'$  є зв'язаними операцією інверсії,  $a \cdot a' = R^2$ ). В цьому полягає відомий з електростатики *метод зображень*. ►

**260** Куля радіуса  $a$  з діелектричною сталою  $\varepsilon_1$  міститься в середовищі з діелектричною сталою  $\varepsilon_2$ . На відстані  $b$  від центра кулі розташований точковий заряд величини  $e$ . Знайти розподіл електричного потенціалу в кулі та середовищі.

**261** Діелектрична куля радіусу  $R$  з діелектричною сталою  $\varepsilon_0$  знаходиться в середовищі з діелектричною сталою  $\varepsilon_1$ . Знайти потенціал, що створюється точковим зарядом величини  $q$ , який знаходиться на відстані  $a$  від центру кулі. Вважати, що  $a < R$ .

**262** Діелектрична куля радіусу  $R_0$  з діелектричною сталою  $\varepsilon_0$  покрити

та діелектричним шаром завтовшки  $d = R_1 - R_0$  з діелектричною сталою  $\varepsilon_1$  і все це знаходиться в середовищі з діелектричною сталою  $\varepsilon_2$ . Знайти потенціал, що створюється точковим зарядом величини  $q$ , який знаходиться на відстані  $a$  від центру кулі. Вважати, що  $a > R_1$ .

**263** Діелектрична куля радіусу  $R_0$  з діелектричною сталою  $\varepsilon_0$  покрити діелектричним шаром завтовшки  $d = R_1 - R_0$  з діелектричною сталою  $\varepsilon_1$  і все це знаходиться в середовищі з діелектричною сталою  $\varepsilon_2$ . На нескінченності задане стале однорідне електричне поле величини  $E$ . Знайти розподіл потенціалу в системі.

**264** Заземлена металева куля радіусу  $R_0$  покрита діелектричним шаром завтовшки  $d = R_1 - R_0$  з діелектричною сталою  $\varepsilon_1$  і все це знаходиться в середовищі з діелектричною сталою  $\varepsilon_2$ . На нескінченності задане стале однорідне електричне поле величини  $E$ . Знайти розподіл потенціалу в системі.

**265** На відстані  $a$  від заземленої металевої сфери радіусу  $R$  знаходиться квадруполь величини  $Q$  в діелектричному середовищі з діелектричною сталою  $\varepsilon$ . Знайти розподіл потенціалу в системі.

**266** Між двома металевими сферами радіусів  $R_1$  та  $R_2$ , одна з яких заземлена, знаходиться точковий заряд величини  $q$  на відстані  $a$  від центру сфер. Середовище між металічними сферами заповнене діелектриком з діелектричною сталою  $\varepsilon$ . Знайти розподіл потенціалу в системі.

**267** На відстані  $a$  від центру незаземленої металевої сфери радіусу  $R$  поміщений диполь величини  $p = ql$ , де  $q$  — абсолютна величина різноіменних зарядів, що створюють диполь, а  $l$  — відстань між ними. Вісь диполю направлена вздовж лінії, що з'єднує диполь із центром сфери. Знайти розподіл потенціалу в системі та розподіл заряду на поверхні сфери.

**268** Заземлена металева куля радіусу  $R_0$  покрита діелектричним шаром завтовшки  $d = R_1 - R_0$  з діелектричною сталою  $\varepsilon_1$  і все це знаходиться в середовищі з діелектричною сталою  $\varepsilon_2$ . На відстані  $a$  від центру кулі знаходиться точковий заряд величини  $q$ . Знайти розподіл

потенціалу в системі.

**269** Діелектрична куля радіусу  $R_0$  з діелектричною сталою  $\varepsilon_0$  покрита діелектричним шаром завтовшки  $d = R_1 - R_0$  з діелектричною сталою  $\varepsilon_1$  і все це знаходиться в середовищі з діелектричною сталою  $\varepsilon_2$ . Знайти потенціал, що створюється точковим зарядом величини  $q$ , який знаходиться на відстані  $a$  від центру кулі. Вважати, що  $a > R_1$ .

**270** Між двома металевими сферами радіусів  $R_1$  та  $R_2$ , одна з яких заземлена, знаходиться точковий заряд величини  $q$  на відстані  $a$  від центру сфер. Середовище між металічними сферами заповнене діелектриком з діелектричною сталою  $\varepsilon$ . Знайти розподіл потенціалу в системі.

**271** Заземлена металева куля радіусу  $R_0$  покрита діелектричним шаром завтовшки  $d = R_1 - R_0$  з діелектричною сталою  $\varepsilon_1$  і все це знаходиться в середовищі з діелектричною сталою  $\varepsilon_2$ . На нескінченності задане стале однорідне електричне поле величини  $E$ . Знайти розподіл потенціалу в системі.

**272** На відстані  $a$  від заземленої металевої сфери радіусу  $R$  знаходиться квадруполь величини  $Q$  в діелектричному середовищі з діелектричною сталою  $\varepsilon$ . Знайти розподіл потенціалу в системі.

**273** Знайти потенціал, створюваний металевою заземленою (ізолюваною) сферою радіуса  $R$  і точковим диполем величини  $p$ , поміщеним на відстані  $a$  від центра сфери і напрямленим уздовж її радіуса. Розглянути випадок, коли ди-



поль знаходиться всередині сфери.

**274** Знайти потенціал, створюваний металевою заземленою (ізолюваною) сферою радіуса  $R$  і точковим диполем величини  $p$ , поміщеним на відстані  $a$  від центра сфери і напрямленим уздовж її радіуса. Розглянути випадок, коли диполь знаходиться зовні сфери.

**275** Куля радіуса  $a$  з діелектричною сталою  $\varepsilon_1$  міститься в середовищі з діелектричною сталою  $\varepsilon_2$ . На відстані  $b$  від центра кулі розташований точковий заряд величини  $e$ . Знайти розподіл електричного потенціалу в кулі та середовищі. Розглянути випадок, коли заряд знаходиться всередині сфери.

**276** Куля радіуса  $a$  з діелектричною сталою  $\varepsilon_1$  міститься в середовищі з діелектричною сталою  $\varepsilon_2$ . На відстані  $b$  від центра кулі розташований точковий заряд величини  $e$ . Знайти розподіл електричного потенціалу в кулі та середовищі. Розглянути випадок, коли заряд знаходиться зовні сфери.

**277** Діелектрична куля радіусу  $a$  з діелектричною сталою  $\varepsilon_a$  покрита діелектричним шаром завтовшки  $h = a - b$  з діелектричною сталою  $\varepsilon_h$  і все це знаходиться в середовищі з діелектричною сталою  $\varepsilon_b$ . Знайти потенціал, що створюється точковим зарядом величини  $q$ , який знаходиться на відстані  $R$  від центра кулі. Вважати, що  $a < R < b$ .

**278** Між двома металевими сферами радіусів  $R_1$  та  $R_2$ , одна з яких заземлена, знаходиться точковий заряд величини  $q$  на відстані  $a$  від

центру сфер. Середовище між металічними сферами заповнене діелектриком з діелектричною сталою  $\varepsilon$ . Знайти розподіл потенціалу в системі.

**279** На відстані  $a$  від центру незаземленої металевої сфери радіусу  $R$  поміщений диполь величини  $p = ql$ , де  $q$  — абсолютна величина різноіменних зарядів, що створюють диполь, а  $l$  — відстань між ними. Вісь диполю направлена вздовж лінії, що з'єднує диполь із центром сфери. Знайти розподіл потенціалу в системі та розподіл заряду на поверхні сфери.

**280** Заземлена металева куля радіусу  $R_0$  покрита діелектричним шаром завтовшки  $d = R_1 - R_0$  з діелектричною сталою  $\varepsilon_1$  і все це знаходиться в середовищі з діелектричною сталою  $\varepsilon_2$ . На відстані  $a$  від центра кулі знаходиться точковий заряд величини  $q$ . Знайти розподіл потенціалу в системі.

**281** Знайти потенціал, створюваний металевою заземленою (ізолюваною) сферою радіуса  $R$  і точковим диполем величини  $p$ , поміщеним на відстані  $a$  від центра сфери і напрямленим уздовж її радіуса. Розглянути випадок, коли диполь знаходиться зовні сфери.

**282** Куля радіуса  $a$  з діелектричною сталою  $\varepsilon_1$  міститься в середовищі з діелектричною сталою  $\varepsilon_2$ . На відстані  $b$  від центра кулі розташований точковий заряд величини  $e$ . Знайти розподіл електричного потенціалу в кулі та середовищі. Розглянути випадок, коли заряд знаходиться всередині сфери.

### §2.5.3. Циліндричні координати

Оператор Лапласа у циліндричних координатах має вигляд:

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.66)$$

Перелічемо деякі властивості циліндричних функцій.

Циліндричні функції  $w = Z_\nu(k\rho)$  задовольняють *рівняння Бесселя*:

$$w'' + \frac{1}{\rho} w' + \left( k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) w = 0. \quad (2.67)$$

Загальний розв'язок рівняння Бесселя можна представити у вигляді

$$w = C_1 J_\nu(k\rho) + C_2 N_\nu(k\rho), \quad (2.68a)$$

$$w = C_1 H_\nu^{(1)}(k\rho) + C_2 H_\nu^{(2)}(k\rho), \quad (2.68b)$$

де  $J_\nu$  — функція Бесселя,  $N_\nu$  — функція Неймана,  $H_\nu^{(1,2)}$  — функції Ханкеля 1-го/2-го роду.

Асимптотичний вигляд циліндричних функцій при малих значеннях аргумента:

$$J_\nu(z) \asymp \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left( \frac{z}{2} \right)^\nu; \quad \nu \notin \mathbb{Z}_-; \quad J_0(z) \asymp 1; \quad (2.69a)$$

$$N_\nu(z) \asymp -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left( \frac{z}{2} \right)^{-\nu}; \quad \nu \neq 0; \quad N_0(z) \asymp \frac{1}{\pi} \ln z; \quad (2.69b)$$

$$H_\nu^{(1)}(z) \asymp i N_\nu(z), \quad H_\nu^{(2)}(z) \asymp -i N_\nu(z). \quad (2.69c)$$

Асимптотичний вираз для циліндричних функцій  $Z_\nu(x)$  при  $x \rightarrow \infty$

$$J_\nu(x) \asymp \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left( x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (2.70a)$$

$$N_\nu(x) \asymp \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left( x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad (2.70b)$$

$$H_\nu^{(1,2)}(x) \asymp \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{\pm i \left( x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)} \quad (2.70c)$$

Рекурентні співвідношення та формули диференціювання:

$$\begin{aligned}
 Z_{\nu-1}(z) + Z_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z} Z_{\nu}(z), \\
 Z_{\nu-1}(z) - Z_{\nu+1}(z) &= 2Z'_{\nu}(z), \\
 \frac{d}{dz} [z^{\nu} Z_{\nu}(z)] &= z^{\nu} Z_{\nu-1}(z), \\
 \frac{d}{dz} [z^{-\nu} Z_{\nu}(z)] &= -z^{-\nu} Z_{\nu+1}(z), \\
 \left( \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n [z^{\nu} Z_{\nu}(z)] &= z^{\nu-n} Z_{\nu-n}(z), \\
 \left( -\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n [z^{-\nu} Z_{\nu}(z)] &= z^{-(\nu-n)} Z_{\nu+n}(z).
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

За допомогою цих рекурентних співвідношень можна обчислити інтеграли з циліндричними функціями. Зокрема:

$$\int z^{\nu} Z_{\nu-1}(z) dz = z^{\nu} Z_{\nu}(z), \quad \int z^{-\nu} Z_{\nu+1}(z) dz = -z^{-\nu} Z_{\nu}(z). \tag{2.72}$$

Для циліндричних функцій можна поставити спектральну задачу Штурма–Ліувілля:

$$\begin{cases}
 (\rho u')' - \frac{\nu^2}{\rho} u = -k^2 \rho u, & \rho \in [a, b] \\
 \alpha u(a) + \beta u'(a) = 0, & \alpha^2 + \beta^2 > 0 \\
 \gamma u(b) + \delta u'(b) = 0, & \delta^2 + \gamma^2 > 0.
 \end{cases} \tag{2.73}$$

Розв'язки задачі ШЛ (2.73) складаються з власних елементів: власних чисел  $k_n^{(\nu)}$ , де  $n \in \mathbb{N}$  та відповідних до них власних функцій  $u = Z_{\nu}(k_n^{(\nu)} \rho)$ , що утворюють повну ортогональну з вагою  $\rho$  систему функцій на відрізку  $[a, b]$ . Якщо  $k_1 \equiv k_1^{(\nu)}$  та  $k_2 \equiv k_2^{(\nu)}$  — два власних числа задачі ШЛ, що задовільняють межовим умовам (2.73),  $u_1 = Z_{\nu}(k_1 \rho)$  та  $u_2 = Z_{\nu}(k_2 \rho)$  відповідні до них власні функції, тоді умова ортогональності для циліндричних функцій має вигляд:

$$\int_a^b \rho d\rho u_1 u_2 = \delta_{k_1, k_2} \|Z_{\nu}(k\rho)\|^2, \tag{2.74a}$$

де норма  $\|Z_{\nu}(k\rho)\|$  визначається як

$$\|Z_{\nu}(k\rho)\|^2 = \left[ \frac{\rho}{2k} \left( \frac{\partial Z_{\nu}(k\rho)}{\partial \rho} \frac{\partial Z_{\nu}(k\rho)}{\partial k} \right) - Z_{\nu}(k\rho) \frac{\partial^2 Z_{\nu}(k\rho)}{\partial k \partial \rho} \right] \Big|_a^b. \tag{2.74b}$$

Завдяки властивості повноти будь-яку функцію  $f(\rho) \in L^2(\rho, [a, b])$  можливо розкласти в ряд Фур'є за циліндричними функціями, так званий *ряд Фур'є-Бесселя*

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n Z_{\nu} \left( k_n^{(\nu)} \rho \right), \quad (2.75a)$$

де коефіцієнти Фур'є

$$f_n = \frac{1}{\|Z_{\nu}(k\rho)\|^2} \int_a^b \rho d\rho f(\rho) Z_{\nu}(k_n \rho). \quad (2.75b)$$

Це дає можливість шукати розв'язок крайових задач у циліндричних областях саме у вигляді розвинення в ряд за циліндричними функціями. Загальний розв'язок рівняння Лапласа в циліндричних координатах має вигляд

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi, z) = \sum_{k, \nu} \left( A_{k, \nu}^{(1)} J_{\nu}(k\rho) + B_{k, \nu}^{(1)} N_{\nu}(k\rho) \right) \left( A_{k, \nu}^{(2)} \cos \nu \varphi + B_{k, \nu}^{(2)} \sin \nu \varphi \right) \\ \times \left( A_{k, \nu}^{(3)} e^{kz} + B_{k, \nu}^{(3)} e^{-kz} \right). \end{aligned} \quad (2.76)$$

### Приклад 2.13

◁ Розв'язати простішу задачу Діріхле для рівняння Лапласа в циліндрі:

$$\begin{cases} \Delta u(\rho, \varphi, z) = 0, & \rho \in [0, R), \varphi \in S^1, z \in (0, h), \\ u(\rho, \varphi, 0) = f(\rho, \varphi), & \rho \in [0, R), \varphi \in S^1 \\ u(\rho, \varphi, h) = 0, & \rho \in [0, R), \varphi \in S^1 \\ u(R, \varphi, z) = 0, & \varphi \in S^1, z \in (0, h). \end{cases} \quad (2.77)$$

Розглянути окремий випадок

$$f(\rho, \varphi) = A\rho^2 \sin 2\varphi. \quad (2.78)$$

▷

**Розв'язання** ◀ Загальний розв'язок рівняння Лапласа в циліндричних координатах має вигляд (2.76). Для внутрішньої задачі Діріхле маємо покласти  $B_1 = 0$  внаслідок розбіжності  $N_{\nu}(k\rho)$ , коли  $\rho \rightarrow 0$ . Крім того, функція  $u$  має бути однозначною, тому

$$u(\rho, \varphi + 2\pi, z) = u(\rho, \varphi, z),$$

звідки  $\nu$  має бути цілим. Отже для внутрішньої задачі

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi, z) = \sum_k \sum_{n=0}^{\infty} J_n(k\rho) \left( A_{k, n}^{(2)} \cos n\varphi + B_{k, n}^{(2)} \sin n\varphi \right) \\ \times \left( A_{k, n}^{(3)} \operatorname{sh}(kz) + B_{k, n}^{(3)} \operatorname{sh}(k(z - h)) \right). \end{aligned} \quad (2.79)$$

З умови  $u(\rho, \varphi, h) = 0$  випливатиме, що стала  $A_{k,n}^{(3)} = 0$ . З умови  $u(R, \varphi, z) = 0$  отримаємо, що

$$J_n(kR) = 0 \implies k_m^{(n)} = \frac{j_m^{(n)}}{R}, \quad (2.80)$$

де  $j_m^{(n)}$  —  $m$ -й нуль функції Бесселя  $J_n$ , що задовільнює умову  $J_n(j_m^{(n)}) = 0$ . Це — відомі протабульовані величини. Отже, загальний розв'язок задачі (2.77) має вигляд

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_n(j_m^{(n)} \rho / R) \operatorname{sh}(j_m^{(n)}(z - h)/R) \times (C_{nm} \cos n\varphi + D_{nm} \sin n\varphi). \quad (2.81a)$$

Коефіцієнти  $C_{nm}$  та  $D_{nm}$  знаходяться з межевої умови  $u(\rho, \varphi, 0) = f(\rho, \varphi)$ :

$$f(\rho, \varphi) = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sh}(j_m^{(n)} h / R) J_n(j_m^{(n)} \rho / R) \times (C_{nm} \cos n\varphi + D_{nm} \sin n\varphi). \quad (2.81b)$$

Але ця формула — це розклад функції  $f$  в подвійний ряд Фур'є, звідки коефіцієнти Фур'є

$$C_{nm} = \frac{1}{\pi(1 + \delta_{n0}) \|J_n(k\rho)\|^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho f(\rho, \varphi) \cos n\varphi J_n(k_m^{(n)} \rho), \quad (2.81c)$$

$$D_{nm} = \frac{1}{\pi \|J_n(k\rho)\|^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho f(\rho, \varphi) \sin n\varphi J_n(k_m^{(n)} \rho). \quad (2.81d)$$

Підрахуємо норму  $\|J_n(k\rho)\|^2$ . Згідно з (2.74b):

$$\|J_n(k\rho)\|^2 = \left[ \frac{\rho}{2k} \left( \frac{\partial J_n(k\rho)}{\partial \rho} \frac{\partial J_n(k\rho)}{\partial k} \right) - J_n(k\rho) \frac{\partial^2 J_n(k\rho)}{\partial k \partial \rho} \right] \Big|_0^R$$

Завдяки (2.80)  $J_n(k\rho)$  на межах дорівнює нулеві, отже

$$\|J_n(k\rho)\|^2 = \frac{R^2}{2} [J'_n(kR)]^2. \quad (2.82)$$

Для випадка (2.78), коли функція  $f(\rho, \varphi) = A\rho^2 \sin 2\varphi$ , розрахунки можна довести до кінця. Межева умова (2.81b) набуває вигляду:

$$A\rho^2 \sin 2\varphi = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sh}\left(\frac{j_m^{(n)} h}{R}\right) J_n\left(\frac{j_m^{(n)} \rho}{R}\right) (C_{nm} \cos n\varphi + D_{nm} \sin n\varphi),$$

звідки з усіх Фур'є-коефіцієнтів  $C_{n,m}$  та  $D_{n,m}$  ненульовими є лише  $D_{n=2,m}$ , які визначаються з умови:

$$A\rho^2 = - \sum_{m=1}^{\infty} D_{2m} \operatorname{sh} \left( j_m^{(2)} h / R \right) J_2 \left( j_m^{(2)} \rho / R \right).$$

Цей ряд — ряд Фур'є-Бесселя, коефіцієнти Фур'є, згідно з (2.75b):

$$D_{2m} = \frac{A}{\|J_2(k\rho)\|^2} \int_0^R d\rho \rho^3 J_2 \left( j_m^{(2)} \rho / R \right). \quad (2.83)$$

Згідно з (2.72)

$$\int_0^R d\rho \rho^3 J_2 \left( j_m^{(2)} \rho / R \right) = \frac{R}{j_m^{(2)}} \rho^3 J_3 \left( j_m^{(2)} \rho / R \right) \Big|_0^R = \frac{R^4}{j_m^{(2)}} J_3 \left( j_m^{(2)} \right).$$

Підставляючи цей вираз до (2.83) разом із нормою (2.82), остаточно маємо:

$$u(\rho, \varphi, z) = \sin 2\varphi \sum_{m=1}^{\infty} D_{2m} \cdot J_2 \left( j_m^{(2)} \rho / R \right) \operatorname{sh} \left( j_m^{(2)} (z - h) / R \right), \quad (2.84)$$

$$D_{2m} = \frac{2A}{j_m^{(2)}} \cdot \frac{J_3 \left( j_m^{(2)} \right)}{\left[ J_2' \left( j_m^{(2)} \right) \right]^2}.$$



### Приклад 2.14

◁ Розв'язати наступну задачу Діріхле для рівняння Лапласа в циліндрі:

$$\begin{cases} \Delta u(\rho, \varphi, z) = 0, & \rho \in [0, R), \varphi \in S^1, z \in (0, h), \\ u(\rho, \varphi, 0) = 0, & \rho \in [0, R), \varphi \in S^1 \\ u(\rho, \varphi, h) = 0, & \rho \in [0, R), \varphi \in S^1 \\ u(R, \varphi, z) = f(\varphi, z), & \varphi \in S^1, z \in (0, h). \end{cases} \quad (2.85)$$

Розглянути окремий випадок

$$f(\varphi, z) = A \cos \varphi \sin \frac{2\pi z}{h}. \quad (2.86)$$



**Розв'язання** ◀ Розв'язок задачі має вигляд (2.79). Але однорідні умови на основах циліндра  $u(\rho, \varphi, 0) = 0$  та  $u(\rho, \varphi, h) = 0$  означають, що функція за змінною  $z$  має бути не гіперболічною, а тригонометричною. Це означає, що в виразі умови (2.79) параметр  $k$  має бути суто уявним,  $k = i\kappa$ :

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_{\kappa} \sum_n I_n(\kappa \rho) \left( A_{\kappa, n}^{(2)} \cos n\varphi + B_{\kappa, n}^{(2)} \sin n\varphi \right) \times \left( A_{\kappa, n}^{(3)} \cos(\kappa z) + B_{\kappa, n}^{(3)} \sin(\kappa z) \right), \quad (2.87)$$

де  $I_n$  — модифікована функція Бесселя,  $J_n(iz) = i^n I_n(z)$ . З умови  $u(\rho, \varphi, 0) = 0$  випливатиме, що стала  $A_{\kappa, n}^{(3)} = 0$ . З умови  $u(\rho, \varphi, h) = 0$

$$\sin(\kappa h) = 0 \quad \implies \quad \kappa_m = \frac{m\pi}{h}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Загальний розв'язок задачі (2.85) має вигляд

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} I_n\left(\frac{\pi m \rho}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi m z}{h}\right) (C_{nm} \cos n\varphi + D_{nm} \sin n\varphi). \quad (2.88a)$$

Коефіцієнти  $C_{nm}$  та  $D_{nm}$  знаходяться з умови  $u(R, \varphi, z) = f(\varphi, z)$ :

$$f(\varphi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} I_n\left(\frac{\pi m R}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi m z}{h}\right) (C_{nm} \cos n\varphi + D_{nm} \sin n\varphi), \quad (2.88b)$$

звідки

$$C_{nm} = \frac{1}{I_n\left(\frac{\pi m R}{h}\right)} \frac{1}{\pi(1 + \delta_{n0})} \frac{2}{h} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz f(\varphi, z) \sin\left(\frac{\pi m z}{h}\right) \cos n\varphi, \quad (2.88c)$$

$$D_{nm} = \frac{1}{I_n\left(\frac{\pi m R}{h}\right)} \frac{1}{\pi(1 + \delta_{n0})} \frac{2}{h} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz f(\varphi, z) \sin\left(\frac{\pi m z}{h}\right) \sin n\varphi. \quad (2.88d)$$

Для випадка (2.86), коли функція  $f(\varphi, z) = A \cos \varphi \sin \frac{2\pi z}{h}$ , розрахунки можна довести до кінця. Межова умова (2.88b) набуває вигляду:

$$A \cos \varphi \sin \frac{2\pi z}{h} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} I_n\left(\frac{\pi m R}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi m z}{h}\right) (C_{nm} \cos n\varphi + D_{nm} \sin n\varphi),$$

звідки з усіх Фур'є-коефіцієнтів  $C_{n,m}$  та  $D_{n,m}$  ненульовими є лише  $C_{n=1, m=2}$ , який визначається з умови:

$$A = C_{n=1, m=2} I_1(2\pi R h) \quad \implies \quad C_{n=1, m=2} = \frac{A}{I_1(2\pi R/h)}$$

Підставляючи цей коефіцієнт до загального розв'язку (2.88а), отримаємо:

$$u(\rho, \varphi, z) = A \frac{I_1(2\pi\rho/h)}{I_1(2\pi R/h)} \sin(2\pi z/h) \cos \varphi. \quad (2.89)$$



В прикладах (283)–(293) розв'язати внутрішню крайову задачу для рівняння Лапласа в циліндрі радіуса  $R$  і висотою  $h$ , якщо межові умови мають вигляд:

<b>283</b>	$\left\{ \begin{array}{l} u(\rho, \varphi, 0) = A_1, \\ u(\rho, \varphi, h) = A_2, \\ (R, \varphi, z) = A_3. \end{array} \right.$	<b>288</b>	$\left\{ \begin{array}{l} u(\rho, \varphi, 0) = A + B\rho; \\ \left( \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma_1 u \right) (\rho, \varphi, h) = C; \\ \left( \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma_2 u \right) (R, \varphi, z) = 0 \end{array} \right.$
<b>284</b>	$\left\{ \begin{array}{l} u(\rho, \varphi, 0) = A\rho^3; \\ u(\rho, \varphi, h) = B \cos \varphi; \\ u(R, \varphi, z) = C \cos(\alpha z) \end{array} \right.$	<b>289</b>	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial n}(\rho, \varphi, 0) = \begin{cases} I, & 0 \leq \rho < R_1, \\ 0, & R_1 \leq \rho < R \end{cases} \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\rho, \varphi, h) = \begin{cases} I, & 0 \leq \rho < R_1 \\ 0, & R_1 \leq \rho < R, \end{cases} \\ \frac{\partial u}{\partial n}(R, \varphi, z) = 0. \end{array} \right.$
<b>285</b>	$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma_1 u \right) (R, \varphi, z) = 0, \\ \left( \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma_2 u \right) (\rho, \varphi, h) = 0, \\ u(\rho, \varphi, 0) = A(R^2 - \rho^2). \end{array} \right.$	<b>290</b>	$\left\{ \begin{array}{l} u(\rho, \varphi, 0) = V_1; \\ u(\rho, \varphi, h) = V_2; \\ u(R, \varphi, z) = \begin{cases} V_1, & 0 < z < h/2 \\ V_2, & h/2 < z < h \end{cases} \end{array} \right.$
<b>286</b>	$\left\{ \begin{array}{l} u(\rho, \varphi, 0) = A\rho \sin \varphi; \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\rho, \varphi, h) = B\rho \cos \varphi; \\ u(R, \varphi, z) = C \cos \varphi \sin(\pi z/h). \end{array} \right.$		
<b>287</b>	$\left\{ \begin{array}{l} u(\rho, \varphi, 0) = A(R^2 - \rho^2); \\ u(\rho, \varphi, h) = B; \\ u(R, \varphi, z) = C \cos(\alpha z). \end{array} \right.$		
<b>291</b>	$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma_1 u \right) (\rho, \varphi, 0) = 0, \\ \left( \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma_2 u \right) (\rho, \varphi, h) = 0, \\ u(R, \varphi, z) = \begin{cases} Az, & 0 \leq z \leq l/2, \\ A(h - z), & h/2 \leq z \leq h \end{cases} \end{array} \right.$		
<b>292</b>	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial n}(\rho, \varphi, 0) = A\rho^k; \\ \left( \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) (\rho, \varphi, h) = B\rho^m; \\ \frac{\partial u}{\partial n}(R, \varphi, z) = C + D \cos^2(\pi z/l). \end{array} \right.$		



$$293 \quad \left\| \begin{aligned} u(\rho, \varphi, 0) &= 0; \\ u(\rho, \varphi, h) &= 0; \\ \left( \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) (R, \varphi, z) &= \begin{cases} (q/k) \cos \varphi, & 0 < \varphi < \pi/2; \\ 0, & \pi/2 < \varphi < \pi \end{cases} \end{aligned} \right.$$

В прикладах (294)–(298) розв'язати внутрішню крайову задачу для рівняння Лапласа в циліндричному шарі, радіус якого  $\rho \in (R_1, R_2)$ , висота  $h$ , якщо межові умови мають вигляд:

$$294 \quad \left\| \begin{aligned} u(\rho, \varphi, 0) &= U_1, \\ u(\rho, \varphi, h) &= U_2, \\ u(R_1, \varphi, z) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(R_2, \varphi, z) &= 0. \end{aligned} \right.$$

$$295 \quad \left\| \begin{aligned} u(\rho, \varphi, 0) &= a_1 + b_1 \rho, \\ u(\rho, \varphi, h) &= a_2 + b_2 \rho, \\ \left( \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u \right) (R_1, \varphi, z) &= 0, \\ \left( \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \right) (R_2, \varphi, z) &= 0. \end{aligned} \right.$$

$$296 \quad \left\| \begin{aligned} u(\rho, \varphi, 0) &= A(R_1 - \rho)(\rho - R_2), \\ u(\rho, \varphi, h) &= B, \\ u(R_1, \varphi, z) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(R_2, \varphi, z) &= 0. \end{aligned} \right.$$

$$297 \quad \left\| \begin{aligned} u(\rho, \varphi, 0) &= A \cos \varphi, \\ u(\rho, \varphi, h) &= B \rho \sin \varphi, \\ \left( \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u \right) (R_1, \varphi, z) &= C \sin \frac{\pi z}{h}, \\ \left( \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \right) (R_2, \varphi, z) &= 0. \end{aligned} \right.$$

$$298 \quad \left\| \begin{aligned} u(\rho, \varphi, 0) &= 0, \\ u(\rho, \varphi, h) &= \rho^3, \\ \left( \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u \right) (R_1, \varphi, z) &= B \cos \varphi + C \sin(\pi z/h), \\ \left( \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \right) (R_2, \varphi, z) &= \sin \varphi. \end{aligned} \right.$$

В прикладах (299)–(302) розв'язати внутрішню крайову задачу для рівняння Лапласа всередині прямого циліндру висоти  $h$ , основою якого є круговий сегмент  $\rho \in [0, R)$ ,  $\varphi \in [0, \alpha]$ , якщо межові умови мають вигляд:

$$299 \quad \left\| \begin{aligned} u(\rho, 0, z) &= 0, \\ u(\rho, \alpha, z) &= 0, \\ u(\rho, \varphi, 0) &= a_1 + b_1 \rho, \\ u(\rho, \varphi, h) &= a_2 + b_2 \rho, \\ u(R, \varphi, z) &= 0. \end{aligned} \right.$$

$$300 \quad \left\| \begin{aligned} u(\rho, 0, z) &= A \rho \cos(\pi z/h), \\ u(\rho, \alpha, z) &= B \sin(\pi z/h), \\ u(\rho, \varphi, 0) &= 0, \\ u(\rho, \varphi, h) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(R, \varphi, z) &= C z \cos \varphi. \end{aligned} \right.$$

$$301 \quad \left\| \begin{aligned} u(\rho, 0, z) &= 0, u(\rho, \alpha, z) = 0, \\ u(\rho, \varphi, 0) &= 0, u(\rho, \varphi, h) = 0, \\ u(R, \varphi, z) &= A \sin \frac{\pi z}{h} \cos \frac{\pi \varphi}{\alpha}. \end{aligned} \right.$$

$$302 \quad \left\| \begin{aligned} u(\rho, 0, z) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\rho, \pi, z) &= 0, \\ u(R, \varphi, z) &= 0, \\ u(\rho, \varphi, 0) &= 0, \\ u(\rho, \varphi, h) &= \rho^{2/3} \sin \frac{3\varphi}{2}. \end{aligned} \right.$$

В прикладах (303)–(306) розв'язати внутрішню крайову задачу для рівняння Лапласа всередині сектора прямого кругового тора прямокутного перетину:  $\rho \in [R_1, R_2]$ ,  $\varphi \in [0, \alpha]$ ,  $z \in [0, h]$ , якщо межові умови мають вигляд:

303	$\left\{ \begin{array}{l} u(\rho, 0, z) = 0, \\ u(\rho, \alpha, z) = 0, \\ u(\rho, \varphi, 0) = A, \\ u(\rho, \varphi, h) = B\rho, \\ u(R_1, \varphi, z) = 0, \\ u(R_2, \varphi, z) = 0. \end{array} \right.$		$\left\{ \begin{array}{l} u(R_1, \varphi, z) = z \cos 2\varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(R_2, \varphi, z) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\rho, 0, z) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\rho, \pi/2, z) = 0, \\ u(\rho, \varphi, 0) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\rho, \varphi, h) = 0. \end{array} \right.$
304	$\left\{ \begin{array}{l} u(\rho, 0, z) = 0, \\ u(\rho, \pi, z) = 0, \\ u(\rho, \varphi, 0) = \rho \sin \varphi, \\ u(\rho, \varphi, h) = 0, \\ u(R_1, \varphi, z) = 0, \\ u(R_2, \varphi, z) = 0. \end{array} \right.$		$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial n}(\rho, 0, z) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\rho, \pi/3, z) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(R_1, \varphi, z) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(R_2, \varphi, z) = 0, \\ u(\rho, \varphi, 0) = A, \\ u(\rho, \varphi, h) = B. \end{array} \right.$

В прикладах (307)–(308) розв'язати крайову задачу для рівняння Лапласа в циліндричній області

$$D = \{R < \rho < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 < z < h\},$$

якщо межові умови маєть вигляд:

307	$\left\{ \begin{array}{l} u(\rho, \varphi, 0) = 0, \\ u(\rho, \varphi, h) = 0, \\ u(R, \varphi, z) = Az(h - z). \end{array} \right.$
308	$\left\{ \begin{array}{l} u(\rho, \varphi, 0) = \begin{cases} A_1, & R < \rho < R_1 \\ 0, & R < \rho < \infty \end{cases}, \\ u(\rho, \varphi, h) = \begin{cases} A_2, & R < \rho < R_2 \\ 0, & R < \rho < \infty \end{cases}, \\ u(R, \varphi, z) = Bz(h - z), \\  u(\rho, \varphi, z)  < +\infty, \rho \rightarrow +\infty. \end{array} \right.$

**309** Знайти функцію  $u(\rho, \varphi, z)$ , де  $\rho, \varphi, z$  — циліндричні координати, що задовольняє рівняння  $k\Delta u + Q = 0$  в циліндричній області  $D = \{0 < \rho <$

$R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 < z < h\}$ . На поверхні цієї області функція повинна задовольняти такі умови:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(\rho, \phi, 0) = 0, \\ u(\rho, \phi, h) = 0, \\ u(R, \phi, z) = 0. \end{array} \right.$$

Тут  $k, Q$  означають сталі.

## Глава 3

# Узагальнені функції та фундаментальні розв'язки крайових задач

### §3.1. Основні означення

Введемо позначення, які є зручними при використанні функцій декількох змінних та диференціальних операторів.

1°  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  — точка  $n$ -вимірного дійсного евклідового простору  $\mathbb{R}^n$ .

2°  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  — мультиіндекс  $\alpha$  (при цьому  $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$ ).

3° Якщо  $\alpha$  — мультиіндекс, то ми покладемо

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \\ \alpha! &= \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n! \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

4° Покладемо  $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ ,  $\partial = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)$ ;  $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n}$ , тобто

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

5° Простіром *основних функцій*  $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  будемо вважати простір усіх фінітних нескінченно диференційовних в  $\mathbb{R}^n$  функцій;

6° *Носієм* неперервної функції  $\phi(x)$  (позначатимемо  $\text{supp } \phi$ ) називають множину усіх точок  $x$ , для яких  $\phi(x) \neq 0$ :

$$\text{supp } \phi = \overline{\{x : x \in \mathbb{R}^n, \phi(x) \neq 0\}}. \quad (3.1)$$

7° *Лінійний диференціальний оператор* порядку  $m$  — це оператор вигляду:

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha. \quad (3.2)$$

8° *Символом оператора* (або *повним символом оператора*  $m$ -го порядку  $L$  називається функція:

$$a(x, k) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) k^\alpha;$$

9° Головним символом оператора оператора  $m$ -го порядку  $L$  називається функція:

$$a_m(x, k) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) k^\alpha.$$

## §3.2. Узагальнені функції та їх властивості

### §3.2.1. Основні означення і приклади узагальнених функцій

Узагальненою функцією називають будь-який лінійний неперервний функціонал на просторі основних (тобто усіх фінітних нескінченно диференційовних) функцій  $\mathcal{D}$ . Розшифруємо означення узагальненої функції.

1° Узагальнена функція  $f$  є функціоналом на  $\mathcal{D}$ , тобто кожній основній функції  $\phi \in \mathcal{D}$  ставиться у відповідність комплексне число:

$$f : \phi \rightarrow (f, \phi), \phi \in \mathcal{D}, (f, \phi) \in \mathbb{C}.$$

2° Узагальнена функція  $f$  є лінійним функціоналом на  $\mathcal{D}$ , тобто

$$\left(f, \sum_k C_k \phi_k\right) = \sum_k C_k (f, \phi_k).$$

3° Узагальнена функція  $f$  є неперервним функціоналом на  $\mathcal{D}$ , тобто

$$\{\phi_k\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \phi, \implies (f, \phi_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (f, \phi).$$

Наведемо декілька прикладів узагальнених функцій.

#### Приклад 3.1

◁ Простішим прикладом узагальнених функцій є «класичні», так звані *регулярні узагальнені функції* — це функціонали, які породжено локально-інтегровними у  $\mathbb{R}^n$  функціями  $f(x)$ :

$$(f, \phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \phi(x) dx, \quad \phi \in \mathcal{D}. \quad (3.3)$$

Важливим прикладом регулярних функцій в теорії узагальнених функцій є функція Хевісайда

$$\begin{aligned} \theta : (\theta, \phi) &= \int_0^\infty \phi(x) dx \\ \text{тобто } \theta(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

▷

**Приклад 3.2**

◁ З функцією Хевісайда пов'язана наступні функції, які досить часто зустрічаються в теорії узагальнених функцій:

$$\begin{aligned} x_+ &= x\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}, \\ x_- &= -x\theta(-x) = \begin{cases} 0, & -x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Зазначимо, що  $x = x_+ - x_-$ ,  $|x| = x_+ + x_- = x \operatorname{sign} x$ . ▷

**Приклад 3.3**

◁ Простішим прикладом сингулярної узагальненої функції є  $\delta$ -функція Дірака:

$$(\delta, \phi) = \phi(0), \quad \phi \in \mathcal{D}. \quad (3.6)$$

▷

**Приклад 3.4**

◁ Функція  $f(x) = 1/x$  не є локально-інтегровною, тому що не інтегровна в околі початка координат. Для того, щоб здобути локально-інтегровну функцію, слід провести регуляризацію. Для цього введемо узагальнену функцію  $\mathcal{P}(1/x)$ :

$$\begin{aligned} \left( \mathcal{P} \frac{1}{x}, \phi \right) &= \oint_{\mathbb{R}^1} \frac{\phi(x)}{x} dx \equiv \operatorname{Vp} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\phi(x)}{x} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right], \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1), \end{aligned} \quad (3.7)$$

яка називається *регуляризацією* функції  $1/x$ ; інтеграл, що визначає цю функцію є головною частиною за Коші розбіжного інтеграла від  $f(x)$ . ▷

**Приклад 3.5**

◁ Інша можливість регуляризації пов'язана з *псевдофункціями*. Розгляньмо функцію  $f(x) = 1/x$ . Вона не є локально-інтегровною, тому що не інтегровна в околі початка координат. Введемо узагальнену функцію  $\operatorname{Pf}(1/x^2)$ , яка називається псевдофункцією  $1/x^2$ :

$$\left( \operatorname{Pf} \frac{1}{x^2}, \phi(x) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x^2} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x^2} dx - 2 \frac{\phi(0)}{\varepsilon} \right]. \quad (3.8)$$

Аналогічним чином можна визначити узагальнені функції  $\operatorname{Pf}(\theta(x)/x)$  і

$\text{Pf}(\theta(-x)/x)$ :

$$\left(\text{Pf} \frac{\theta(x)}{x}, \phi(x)\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx + \phi(0) \ln \varepsilon \right], \quad (3.9a)$$

$$\left(\text{Pf} \frac{\theta(-x)}{x}, \phi(x)\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx - \phi(0) \ln \varepsilon \right]. \quad (3.9b)$$

▷

### Приклад 3.6

◁ Довести формулу Сохоцького:

$$\frac{1}{x + i0} = \mathcal{P} \frac{1}{x} - i\pi \delta(x). \quad (3.10)$$

▷

**Розв'язання** ◀ Обчислимо інтеграл

$$I = \left( \frac{1}{x + i0}, \phi(x) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)}{x + i\varepsilon} dx.$$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \phi(x) dx \\ &= \phi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} [\phi(x) - \phi(0)] dx \\ &= \phi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} dx - i\phi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arctg \frac{x}{\varepsilon} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx \\ &= -i\pi \phi(0) + \oint_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)}{x} dx = (-i\pi \delta(x), \phi(x)) + \left( \mathcal{P} \frac{1}{x}, \phi(x) \right), \end{aligned}$$

звідки отримаємо (3.10). ►

**310** Довести наступну формулу Сохоцького:

$$\frac{1}{x - i0} = \mathcal{P} \frac{1}{x} + i\pi \delta(x).$$

**311** Довести наступну формулу:

$$\mathcal{P} \frac{1}{x} = \text{Pf} \frac{\theta(x)}{x} + \text{Pf} \frac{\theta(-x)}{x}.$$

**312** Нехай  $\mathcal{F}(1/|x|)$  — узагальнена функція, що визначається наступним співвідношенням:

$$\left(\mathcal{F}\frac{1}{|x|}, \phi(x)\right) = \int_{|x|>1} \frac{\phi(x)}{|x|} dx + \int_{|x|<1} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{|x|} dx.$$

Довести наступну формулу:

$$\mathcal{F}\frac{1}{|x|} = \text{Pf} \frac{\theta(x)}{x} - \text{Pf} \frac{\theta(-x)}{x}.$$

### §3.2.2. Операції з узагальненими функціями: множення і заміна змінних

Добуток узагальненої функції  $f \in \mathcal{D}'$  та нескінченно диференційовної  $a \in \mathcal{C}^\infty$  визначається наступним чином:

$$(af, \phi) = (f, a\phi). \quad (3.11)$$

#### Приклад 3.7

◁ Розгляньмо добуток функцій  $a(x)\delta(x)$ .

$$(a\delta, \phi) = (\delta, a\phi) = a(0)\phi(0) = (a(0)\delta, \phi),$$

звідки

$$a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x).$$

▷

#### Приклад 3.8

◁

$$\left(x\mathcal{P}\frac{1}{x}, \phi\right) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, x\phi\right) = \oint \frac{x\phi(x)}{x} dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = (1, \phi),$$

звідки  $x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$ .

▷

Заміна змінних в узагальненій функції визначається наступним чином:

$$(f(y(x)), \phi(x)) = \left(\frac{f(y)}{\left|\det\left(\frac{dy}{dx}\right)\right|}, \phi(x(y))\right). \quad (3.12)$$

#### Приклад 3.9

◁ Нехай  $y = x + a$  — зсув, тоді  $(f(x + a), \phi(x)) = (f(y), \phi(y - a))$ . ▷



**Приклад 3.10**

◁ Нехай  $y = Ax$ , де  $A$  — матриця, тоді  $(f(Ax), \phi(x)) = \left(\frac{f(y)}{|A|}, \phi(A^{-1}y)\right)$ .

▷

**Приклад 3.11**

◁ Дельта-функція від складного аргумента,  $\delta(y(x))$ :

$$\begin{aligned} (\delta(y(x)), \phi(x)) &= \left( \frac{\delta(y)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|}, \phi(x(y)) \right) = \left( \delta(y), \frac{\phi(x(y))}{\left| \frac{dy}{dx} \right|} \right) \\ &= \sum_{x_k: y(x_k)=0} \frac{\phi(x_k)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|_{x_k}} = \sum_{x_k: y(x_k)=0} \frac{(\delta(x - x_k), \phi(x))}{\left| \frac{dy}{dx} \right|_{x_k}}, \end{aligned}$$

звідки

$$\delta(y(x)) = \sum_{x_k: y(x_k)=0} \frac{\delta(x - x_k)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|_{x_k}}. \quad (3.13)$$

Зокрема, якщо  $y(x) = x^2 - a^2$ ,  $x_{\pm} = \pm a$  та  $\left| \frac{dy}{dx} \right|_{x_{\pm}} = 2a$ , звідки

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} (\delta(x + a) + \delta(x - a)).$$

▷

В прикладах (313)–(318) довести співвідношення:

$$\mathbf{313} \quad x^m \mathcal{P} \frac{1}{x} = x^{m-1}.$$

$$\mathbf{314} \quad x^n \delta(x) = 0, \text{ де } n \in \mathbb{N}.$$

$$\mathbf{315} \quad \delta(-x) = \delta(x).$$

$$\mathbf{316} \quad \delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x).$$

$$\mathbf{317} \quad \delta(x^3 - 7x + 6) = \frac{1}{4} \delta(x - 1) + \frac{1}{5} \delta(x - 2) + \frac{1}{20} \delta(x + 3).$$

$$\mathbf{318} \quad \delta(\alpha x + \beta) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x + \beta/\alpha).$$

В прикладах (319)–(321) спростити вираз:

$$\mathbf{319} \quad \delta(x^3 - a^3), \text{ де } a \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{320} \quad \delta(x^n - 1), \text{ де } n \in \mathbb{N}.$$

$$\mathbf{321} \quad \delta(\sin(\pi x)).$$

$$\mathbf{322} \quad \delta(\cos x).$$

$$\mathbf{323} \quad x \delta(\sin x).$$

**324** Розглянути узагальнену функцію  $\mathcal{P}(1/x^2)$ :

$$\left( \mathcal{P} \frac{1}{x^2}, \phi(x) \right) = \oint_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x^2} dx.$$

Довести, що  $x^2 \mathcal{P} \frac{1}{x^2} = 1$ .

### §3.2.3. Операції з узагальненими функціями: диференціювання

Похідна від узагальненої функції:

$$(\partial^\alpha f, \phi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \phi). \quad (3.14)$$

#### Приклад 3.12

◁  $\delta'$ -функція:

$$\delta' : (\delta', \phi) = -(\delta, \phi') = -\phi'(0).$$

▷

#### Приклад 3.13

◁ Похідна функції Хевісайда:

$$(\theta', \phi) = -(\theta, \phi') = -\int_0^\infty \phi'(x) dx = \phi(0) - \phi(\infty) = \phi(0) = (\delta, \phi),$$

звідки  $\theta' = \delta$ .

▷

В прикладах (325)–(330) обчислити усі похідні функції.

$$325 \quad y = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ x+1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2+1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$326 \quad y = \begin{cases} |\sin x|, & -\pi \leq x \leq \pi \\ 0, & |x| \geq \pi. \end{cases}$$

$$327 \quad y(x) = (x-2)^k \delta^{(p)}(x) + x \theta^{(q)}.$$

$$328 \quad y(x) = x^k \theta(x).$$

$$329 \quad y = \theta(x) e^{ax}$$

$$330 \quad f(x) - 2\pi\text{-періодична функція, причому } f(x) = 1/2 - x/2\pi, \text{ де } x \in (0, 2\pi].$$

В прикладах (331)–(350) довести співвідношення.

$$331 \quad \frac{d}{dx} \ln|x| = \mathcal{P} \frac{1}{x}.$$

$$332 \quad \frac{d}{dx} \mathcal{P} \frac{1}{x} = -\mathcal{P} \frac{1}{x^2}.$$

$$333 \quad \frac{d}{dx} \frac{1}{x \pm i0} = \mp \delta'(x) - \mathcal{P} \frac{1}{x^2}.$$

$$334 \quad a(x) \delta'(x) = -a'(0) \delta(x) + a(0) \delta'(x), \text{ де } a(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^1).$$

$$335 \quad (\theta(x) \cos x)' = \delta(x) - \theta(x) \sin x.$$

$$336 \quad (\theta(x) \sin x)' = \theta(x) \cos x.$$

$$337 \quad x \delta^{(n)}(x) = -n \delta(x)^{(n-1)}, \text{ де } n \in \mathbb{N}.$$

$$338 \quad (x_+)' = \theta(x).$$

$$339 \quad (x_-)' = -\theta(-x).$$

$$340 \quad (x_+^p)' = p x_+^{p-1}, \text{ де } p \notin \mathbb{Z}_-.$$

$$341 \quad (x_-^p)' = -p x_-^{p-1}, \text{ де } p \notin \mathbb{Z}_-.$$

$$342 \quad x^n \delta^{(n)}(x) = (-1)^n n! \delta(x), \text{ де } n \in \mathbb{N}.$$

$$343 \quad |x|' = 2\theta(x) - 1 = \text{sign } x.$$

$$344 \quad (\operatorname{sign} x)' = 2\delta(x).$$

$$345 \quad \frac{d}{dx} \ln(x + i0) = \frac{1}{x + i0}.$$

$$346 \quad (x + i0)^p = x_+^p + e^{i\pi p} x_-^p, \text{ де } p \notin \mathbb{Z}_-.$$

$$347 \quad \frac{d}{dx} (x + i0)^p = p(x + i0)^{p-1}, \text{ де } p \neq 0.$$

$$348 \quad (x - i0)^p = x_+^p + e^{-i\pi p} x_-^p, \text{ де } p \notin \mathbb{Z}_-.$$

$$349 \quad \frac{d}{dx} (x - i0)^p = p(x - i0)^{p-1}, \text{ де } p \neq 0.$$

$$350 \quad \delta^{(n)}[y(x)] = \sum_{x_k: y(x_k)=0} \frac{1}{|y'(x_k)|} \cdot \left( \frac{1}{y'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n \delta(x - x_k).$$

### §3.2.4. Операції з узагальненими функціями: прямий добуток, згортка і перетворення Фур'є

Прямий добуток двох узагальнених функцій:

$$(f \otimes g, \phi) = (f, (g, \phi)). \quad (3.15)$$

Згортка двох узагальнених функцій:

$$(f \star g, \phi) = (f(x) \otimes g(y), \phi(x + y)). \quad (3.16)$$

#### Приклад 3.14

◁ Функція  $\delta(x)$  виконує роль одиниці при згортці:

$$\begin{aligned} (\delta(x) \star f(x), \phi(x)) &= (\delta(x) \otimes f(y), \phi(x + y)) = (f(y), (\delta(x), \phi(x + y))) \\ &= (f(y), \phi(y)) \implies \delta(x) \star f(x) = f(x). \end{aligned} \quad (3.17)$$

▷

В прикладах (351)–(359) довести співвідношення.

$$351 \quad \delta(x - a) \star \delta(x - b) = \delta(x - a - b).$$

$$352 \quad \delta(x - a) \star f(x) = f(x - a).$$

$$353 \quad \theta(x) \star \theta(x) = x_+.$$

$$354 \quad \theta(x - a) \star \theta(x - b) = (x - a - b)_+.$$

$$355 \quad \theta(x) \star x_+ = \frac{x_+^2}{2}.$$

$$356 \quad \theta(x) \star x_+^n = \frac{x_+^{n+1}}{n + 1}.$$

$$357 \quad \theta(x) \sin x \star \theta(x) \cos x = \frac{x_+ \sin x}{2}.$$

$$358 \quad \theta(x) \sin x \star \theta(x) \sin x = \frac{\theta(x) \sin x - x_+ \cos x}{2}.$$

$$359 \quad \theta(x) \cos x \star \theta(x) \cos x = \frac{\theta(x) \sin x + x_+ \cos x}{2}.$$

Нехай  $\phi(x) \in \mathcal{D}$ . Тоді можна ввести операцію перетворення Фур'є:

$$F[\phi](k) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{i(k, x)} dx, \quad (3.18)$$

де  $(k, x) = \sum_{i=1}^n x_i k_i$  — скалярний добуток в  $\mathbb{R}^n$ . Зворотнє перетворення Фур'є:

$$\phi(k) = \int \mathbb{R}^n F[\phi](k) e^{-i(x,k)} \frac{dk}{(2\pi)^n}. \quad (3.19)$$

Перетворення Фур'є узагальненої функції:

$$(F[f], \phi) \triangleq (f, F[\phi]). \quad (3.20)$$

### Приклад 3.15

◁ Покажемо, що

$$F[\delta(x - x_0)] = e^{i(k, x_0)}. \quad (3.21)$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} (F[\delta(x - x_0)], \phi) &= (\delta(x - x_0), F[\phi]) = F[\phi](x_0) \\ &= \int \phi(k) e^{i(k, x_0)} dk = (e^{i(k, x_0)}, \phi). \end{aligned}$$

Зокрема, поклавши у (3.21)  $x_0 = 0$ , матиме

$$F[\delta] = 1, \quad (3.22)$$

звідки

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$

тобто

$$F[1] = (2\pi)^n \delta(k). \quad (3.23)$$

▷

### Приклад 3.16

◁ Знайдемо  $F[\theta(x)e^{-ax}]$ .

$$\begin{aligned} (F[\theta(x)e^{-ax}], \phi) &= (\theta(x)e^{-ax}, F[\phi]) = \int_0^\infty dx e^{-ax} \int_{-\infty}^\infty dk \phi(k) e^{ikx} \\ &= \int_{-\infty}^\infty dk \phi(k) I(k) = (I, \phi), \\ I(k) &= \int_0^\infty dx \exp[ikx - ax] = \int_0^\infty dx \exp[i(k + ia)x] = \frac{i}{k + ia}. \end{aligned}$$

$$\text{звідки} \quad F[\theta(x)e^{-ax}] = \frac{i}{k + ia}.$$

Зокрема, якщо  $a \rightarrow +0$ , матимемо:

$$F[\theta(x)] = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{i}{k + ia} = \frac{i}{k + i0} = i\mathcal{P}\frac{1}{k} + \pi\delta(k).$$

▷

Основні властивості перетворення Фур'є узагальнених функцій:

1° Диференціювання перетворення Фур'є:  $\partial^\alpha F[f] = F[(ix)^\alpha f]$ .

2° Перетворення Фур'є похідной:  $F[\partial^\alpha f] = F[(ix)^\alpha f](x)$ .

3° Перетворення Фур'є зсуву:  $F[f(x - x_0)] = e^{i(x_0, k)} F[f]$ .

4° Зсув перетворення Фур'є:  $F[f](k + k_0) = F[e^{i(k_0, x)} f](k)$ .

5° Перетворення Фур'є згортки:  $F[f \star g] = F[g]F[f]$ .

В прикладах (360)–(379) довести співвідношення.

$$\begin{aligned} \mathbf{360} \quad F[\theta(-x)] &= \pi\delta(k) - i\mathcal{P}\frac{1}{k} = \\ &= -\frac{i}{k - i0}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{361} \quad F[\text{sign } x] = 2i\mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

$$\mathbf{362} \quad F[\delta'(x)] = -ik.$$

$$\mathbf{363} \quad F[\delta^{(n)}(x)] = (-ik)^n.$$

$$\mathbf{364} \quad F[\delta^{(2n)}(x)] = (-1)^n k^{2n}.$$

$$\mathbf{365} \quad F[\delta^{(2n+1)}(x)] = (-1)^{n+1} i k^{2n+1}.$$

$$\mathbf{366} \quad F[\theta(a - |x|)] = 2\frac{\sin ak}{k}, \quad a > 0.$$

$$\mathbf{367} \quad F[x_+] = -\frac{1}{(k + i0)^2}.$$

$$\mathbf{368} \quad F[x_+^n] = -\frac{n!i^{n+1}}{(k + i0)^{n+1}}, \quad \text{де } n \in \mathbb{N}.$$

$\mathbb{N}$ .

$$\mathbf{369} \quad F[x] = -2i\pi\delta'(k).$$

$$\mathbf{370} \quad F[|x|] = -2\mathcal{P}\frac{1}{k^2}.$$

$$\mathbf{371} \quad F[\mathcal{P}(1/x)] = i\pi \text{sign } k.$$

$$\mathbf{372} \quad F[x^n] = 2(-i)^n \pi \delta^{(n)}(k).$$

$$\mathbf{373} \quad F[x^n \delta^{(m)}(x)] = (-i)^{n+m} \cdot \frac{m!}{(m-n)!} k^{m-n}.$$

$$\mathbf{374} \quad F[\sin ax] = i\pi [\delta(k - a) - \delta(k + a)].$$

$$\mathbf{375} \quad F[\cos ax] = \pi [\delta(k - a) + \delta(k + a)].$$

$$\mathbf{376} \quad F[\text{sh } ax] = \pi [\delta(k - ia) - \delta(k + ia)].$$

$$\mathbf{377} \quad F[\text{ch } ax] = \pi [\delta(k - ia) + \delta(k + ia)].$$

$$\mathbf{378} \quad F[x^2 \sin 2x](\xi) = i\pi [\delta''(\xi + 2) - \delta''(\xi - 2)],$$

$$\mathbf{379} \quad F[e^{-a|x|}] = \frac{2a}{a^2 + k^2}.$$

В прикладах (380)–(382) обчислити вказаний Фур'є образ.

$$\mathbf{380} \quad F[(2 + x)^3 \delta(x)].$$

$$y(x) = \theta(x^2 + 2x - 15).$$

$$\mathbf{381} \quad F[y(x)], \quad F[y'(x)], \quad F[y''(x)], \quad \text{де}$$

$$\mathbf{382} \quad F[|x|^k \theta(a - |x|)], \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

**Приклад 3.17**

◁ Знайти всі розв'язки алгебраїчного рівняння

$$x^3 u(x) = 0 \quad (3.24)$$

в класі узагальнених функцій. ▷

**Розв'язання** ◀ Обчислимо Фур'є образ (3.24),  $F[x^3 u(x)] = 0$ . За властивістю диференціювання Фур'єж перетворення матимемо:

$$F[(ix)^3 u(x)] = \partial^3 F[u] = 0 \implies F[u](k) = c_1 + c_2 k + c_3 k^2/2$$

В прикладі 363 доводиться, що  $k^n = i^n F[\delta^{(n)}(x)]$ . Перепозначаючи сталі остаточно матимемо:

$$u(x) = A\delta(x) + B\delta'(x) + C\delta''(x).$$

►

В прикладах (383)–(385) методом перетворення Фур'є знайти всі розв'язки рівнянь в класі узагальнених функцій.

$$383 \quad x^n u(x) = 0.$$

$$384 \quad x^n \frac{du^n(x)}{dx^n} = 0.$$

$$385 \quad x^n \frac{du^m(x)}{dx^m} = 0, \text{ де } n > m.$$

### §3.2.5. Фундаментальний розв'язок лінійного диференціального оператора

Узагальненим розв'язком рівняння

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha u = f(x), \quad a_\alpha = \text{const} \quad (3.25)$$

в області  $G$  називають будь-яку узагальнену функцію  $u \in \mathcal{D}'$ , що задовольняє це рівняння в  $G$  в узагальненому сенсі, тобто для будь-якої  $\phi \in \mathcal{D}$ ,

$$(Lu, \phi) = (f, \phi).$$

Фундаментальним розв'язком (функцією впливу) оператора  $L$  називають узагальнену функцію  $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'$ , що задовольняє у  $\mathbb{R}^n$  рівняння

$$L\mathcal{E} = \delta(x). \quad (3.26)$$

Для будь-якого лінійного диференціального оператора  $L$  існує фундаментальний розв'язок повільного зростання і цей розв'язок задовольняє алгебраїчне рівняння:

$$L(-ik)F[\mathcal{E}] = 1$$

Нехай  $f \in \mathcal{D}'$  така, що  $\mathcal{E} \star f$  існує в  $\mathcal{D}'$ . Тоді розв'язок рівняння (3.25) єдиний та має вигляд

$$u = \mathcal{E} \star f. \quad (3.27)$$

Розгляньмо лінійний диференціальний оператор із звичайними похідними

$$L = \sum_{k=0}^n a_{n-k} \frac{d^k}{dx^k}. \quad (3.28)$$

Фундаментальний розв'язок оператора (3.28) має вигляд:

$$\mathcal{E} = \theta(x)X(x), \quad (3.29)$$

де функція  $X(x)$  є розв'язком однорідного диференціального рівняння  $LX = 0$  з початковими умовами:

$$X(0) = X'(0) = \dots = X^{(m-2)}(0) = 0, \quad X^{(m-1)}(0) = 1.$$

### Приклад 3.18

◁ Знайти фундаментальний розв'язок  $\mathcal{E}(x)$  оператора

$$L = \frac{d}{dx} + p, \quad p = \text{const.}$$

За допомогою  $\mathcal{E}(x)$  розв'язати рівняння:

$$y'(x) + py(x) = q(x).$$

▷

**Розв'язання** ◀ Фундаментальний розв'язок  $\mathcal{E} = \theta(x)X(x)$ , де  $X(x)$  є розв'язком задачі

$$X'(x) + pX = 0, \quad X(0) = 1.$$

Очевидно, що розв'язком цієї задачі є функція  $X(x) = e^{-px}$ , тому

$$\mathcal{E}(x) = \theta(x)e^{-px}.$$

Тоді розв'язком неоднорідного рівняння  $Ly = q$  є згортка

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathcal{E} \star q = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(\xi - x)q(\xi)d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi - x)e^{-p(\xi-x)}q(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^x e^{-p(\xi-x)}q(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

►

В прикладах (386)–(410) знайти фундаментальний розв'язок  $\mathcal{E}$  оператора  $L$ . За допомогою  $\mathcal{E}$  розв'язати рівняння  $Ly(x) = f(x)$ .

$$386 \quad L = \frac{d^2}{dx^2} - 2\frac{d}{dx} + 1, \quad f(x) = x - e^x.$$

$$387 \quad L = \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y, \quad f(x) = 1 + x.$$

$$388 \quad L = \frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y, \quad f(x) = 1 + \sin x.$$

$$389 \quad L = \frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}, \quad f(x) = e^{2x} - \cos x.$$

$$390 \quad L = \frac{d^3y}{dx^3} - a^3y, \quad f(x) = 2 \operatorname{tg} x.$$

$$391 \quad L = \frac{d^4y}{dx^4} - a^4y, \quad f(x) = 2 \sin x + x^7.$$

$$392 \quad L = \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y, \quad f(x) = 1 - x + 2 \ln x.$$

$$393 \quad L = \frac{d^2y}{dx^2} - a^2y, \quad f(x) = e^{2x} - x^2.$$

$$394 \quad L = \left( \frac{d}{dx} \mp a \right)^m y, \quad f(x) = x^3 - \operatorname{tg} x.$$

$$395 \quad L = \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx}, \quad f(x) = 3x^2.$$

$$396 \quad L = \frac{d^4y}{dx^4} - 40\frac{d^2y}{dx^2} - 441y, \quad f(x) = \exp(3x - 2).$$

$$397 \quad L = \frac{d^4y}{dx^4} - 9\frac{d^2y}{dx^2} - 400y, \quad f(x) = 1 + 3x \exp 3x.$$

$$398 \quad L = \frac{d^3y}{dx^3} - 3n\frac{d^2y}{dx^2} - (3n^2 - 1)\frac{dy}{dx} -$$

$$n(n^2 - 1)y, \quad f(x) = x - 2 \sin x.$$

$$399 \quad L = \frac{d^2y}{dx^2} - (1 + i4)\frac{dy}{dx} - (5 + i)y, \quad f(x) = \sin(x + 2).$$

$$400 \quad L = \frac{d^2y}{dx^2} - (4 + i11)\frac{dy}{dx} + (-29 + i31)y, \quad f(x) = (x - 1)^2 \sin x.$$

$$401 \quad L = \frac{d^3y}{dx^3} - 21\frac{dy}{dx} + 20y, \quad f(x) = (x + 1)^3 - x.$$

$$402 \quad L = \frac{d^3y}{dx^3} + 10\frac{dy}{dx} + 25y, \quad f(x) = \cos(x + 1) + x^3.$$

$$403 \quad L = \frac{d^2y}{dx^2} - 1,5\frac{dy}{dx} - 2,5y, \quad f(x) = x \ln(x + 2x^3).$$

$$404 \quad L = \frac{d^4y}{dx^4} - 5\frac{d^3y}{dx^3} - 14\frac{d^2y}{dx^2}, \quad f(x) = x \exp(x + 2).$$

$$405 \quad L = \frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} - 91y, \quad f(x) = x \sin x.$$

$$406 \quad L = \frac{d^6y}{dx^6} - 7\frac{d^4y}{dx^4} - 144\frac{d^2y}{dx^2}, \quad f(x) = 1 + x.$$

$$407 \quad L = \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y, \quad f(x) = 1 + e^x.$$

$$408 \quad L = \frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2} - 221\frac{dy}{dx}, \quad f(x) = 2 \cos x.$$

$$409 \quad \frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 25\frac{dy}{dx}, \quad f(x) = 1.$$

$$410 \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx}, \quad f(x) = 2x + \sin(x^3).$$

411 Довести, що фундаментальними розв'язками оператора  $L = \Delta_2 + k^2$  в  $\mathbb{R}^2$  є функції

$$\mathcal{E}_{1,2}(x) = \begin{cases} -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|x|), \\ \frac{i}{4}H_0^{(2)}(k|x|). \end{cases}$$



За допомогою  $\mathcal{E}_{1,2}(x)$  розв'язати рівняння

$$(\Delta_2 + k^2)y = \theta(|x| - 3)\theta(8 - |x|).$$

**412** Довести, що фундаментальними розв'язками оператора  $L = \Delta_3 + k^2$  в  $\mathbb{R}^3$  є функції

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|}.$$

За допомогою  $\mathcal{E}(x)$  розв'язати рівняння

$$(\Delta_3 + k^2)y = \theta(2 - |x|).$$

**413** Довести, що фундаментальними розв'язками оператора  $L = \Delta_2 - k^2$  в  $\mathbb{R}^2$  є функції

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(ik|x|).$$

За допомогою  $\mathcal{E}(x)$  розв'язати рівняння

$$(\Delta_2 - k^2)y = \delta(|x| - 3).$$

**414** Довести, що фундаментальними розв'язками оператора  $L = \Delta_3 - k^2$  в  $\mathbb{R}^3$  є функції

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{e^{-k|x|}}{4\pi|x|}.$$

За допомогою  $\mathcal{E}(x)$  розв'язати рівняння

$$(\Delta_3 - k^2)y = |x|\theta(2 - |x|).$$

**415** Довести, що фундаментальний розв'язок оператора

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b \frac{\partial}{\partial x} - c \quad \text{де } a, b, c - \text{const},$$

має вид

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(ct - \frac{(x + bt)^2}{4a^2 t}\right).$$

За допомогою  $\mathcal{E}(x)$  розв'язати рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b \frac{\partial}{\partial x} - c\right)y = \theta(|x| - 1)\theta(2 - |x|).$$

**416** Довести, що фундаментальний розв'язок оператора

$$L = \left( \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta_d \right)^k \quad \text{в } \mathbb{R}^d$$

має вид

$$\mathcal{E}(x) = \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)} \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^d} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4a^2 t}\right).$$

За допомогою  $\mathcal{E}(x)$  розв'язати рівняння

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta_d \right)^k y = 3e^{|x|} \theta(2 - |x|).$$

**417** Довести, що фундаментальний розв'язок оператора

$$L = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

має вид

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{\pi z}.$$

За допомогою  $\mathcal{E}(x)$  розв'язати рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{z - a}{z - \bar{z}}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

**418** Довести, що фундаментальний розв'язок оператора

$$L = \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda \right)^k$$

має вид

$$\mathcal{E}(x) = \frac{\bar{z}^{k-1} \exp(\lambda \bar{z})}{\Gamma(k) \pi z}.$$

За допомогою  $\mathcal{E}(x)$  розв'язати рівняння

$$\left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda \right)^k u = \prod_{j=1}^N (z - a_j), \quad z \in \mathbb{C}.$$

**419** Довести, що фундаментальний розв'язок оператора

$$L = \frac{\partial^{k+m}}{\partial \bar{z}^k \partial z^m}$$

має вид

$$\mathcal{E}(x) = \frac{2\bar{z}^{k-1}z^{m-1}}{\Gamma(k)\Gamma(m)\pi} \ln |z|, \quad k, m = 1, 2, \dots$$

За допомогою  $\mathcal{E}(x)$  розв'язати рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \lambda\right)^k u = \prod_{j=1}^N (z - a_j)^{-1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

**420** Довести, що якщо фундаментальний розв'язок оператора

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + A(D_x) \quad \epsilon \quad \mathcal{E}_0(x, t),$$

то фундаментальний розв'язок оператора

$$L = \left(\frac{\partial}{\partial t} + A(D_x)\right)^k \quad \epsilon \quad \mathcal{E}(x) = \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)} \mathcal{E}_0(x, t).$$

За допомогою  $\mathcal{E}(x)$  розв'язати рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + A(D_x)\right)^k u = \theta(1 - |x|)e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0.$$

## Глава 4

# Фундаментальні розв'язки та задачі для лінійних диференціальних операторів математичної фізики

### §4.1. Фундаментальний розв'язок і задача Коші для рівняння дифузії

Рівняння дифузії має вигляд

$$Lu = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, \quad (4.1a)$$

$$L \triangleq \partial_t - a^2 \Delta_n, \quad (4.1b)$$

де  $\Delta_n$  —  $n$ -вимірний оператор Лапласа,  $L$  має назву *оператора дифузії*.

Диференціальний оператор дифузії має фундаментальний розв'язок

$$\mathcal{E}_n(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}. \quad (4.2)$$

Задача Коші для рівняння дифузії ставиться наступним чином. Потрібно знайти розв'язок рівняння дифузії (4.1a) при  $t > 0$ , що задовольняє початкову умову

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.3)$$

Розв'язок задачі Коші для рівняння дифузії (4.1a), (4.3) збігається з розв'язком рівняння

$$\begin{aligned} (\partial_t - a^2 \Delta_n) u(x, t) &= F(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ F(x, t) &= \theta(t)f(x, t) + \delta(t)u_0(x), \end{aligned} \quad (4.4)$$

що має вигляд

$$u(x, t) = (\mathcal{E}_n * F)(x, t), \quad (4.5)$$

В прикладах (421)–(448) розв'язок наступних задач Коші для одновимірного рівняння дифузії:

$$421 \quad \left\{ \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + xe^x, \\ u(x, 0) &= \theta(x)x^2. \end{aligned} \right.$$

$$422 \quad \left\{ \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + e^{-t} \cos x, \\ u(x, 0) &= \cos x. \end{aligned} \right.$$

$$423 \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t} \cos x, \\ u(x, 0) = \cos x. \end{cases}$$

$$424 \quad \begin{cases} u_t = 2u_{xx} + t \cos x, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$425 \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + e^t \sin x, \\ u(x, 0) = \sin x. \end{cases}$$

$$426 \quad \begin{cases} 4u_t = u_{xx}, \\ u(x, 0) = \sin x \exp(-x^2). \end{cases}$$

$$427 \quad \begin{cases} 4u_t = u_{xx} + \sin t, \\ u(x, 0) = \exp(-x^2). \end{cases}$$

$$428 \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + \sin t \sin x, \\ u(x, 0) = 1. \end{cases}$$

$$429 \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + e^x, \\ u(x, 0) = \theta(x)x. \end{cases}$$

$$430 \quad \begin{cases} 4u_t = u_{xx}, \\ u(x, 0) = e^{2x-x^2}. \end{cases}$$

$$431 \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + x^2, \\ u(x, 0) = x^2. \end{cases}$$

$$432 \quad \begin{cases} 4u_t = u_{xx}, \\ u(x, 0) = x^2 + x^4. \end{cases}$$

$$433 \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + xe^x, \\ u(x, 0) = \theta(x)x^2. \end{cases}$$

$$434 \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t} \cos x, \\ u(x, 0) = \cos x. \end{cases}$$

$$435 \quad \begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u(x, y, 0) = \delta'(x_0 - x). \end{cases}$$

$$436 \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + \theta(t)\delta(x), \\ u(x, 0) = \delta(x - x_0). \end{cases}$$

$$437 \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + e^t \sin x, \\ u(x, 0) = \sin x. \end{cases}$$

$$438 \quad \begin{cases} 4u_t = u_{xx}, \\ u(x, 0) = \sin x \exp(-x^2). \end{cases}$$

$$439 \quad \begin{cases} 4u_t = u_{xx} + \sin t, \\ u(x, 0) = \exp(-x^2). \end{cases}$$

$$440 \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + \sin x, \\ u(x, 0) = \sin x. \end{cases}$$

$$441 \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + e^x, \\ u(x, 0) = \theta(x)x. \end{cases}$$

$$442 \quad \begin{cases} 4u_t = u_{xx}, \\ u(x, 0) = e^{2x-x^2}. \end{cases}$$

$$443 \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + x^2, \\ u(x, 0) = x^2. \end{cases}$$

$$444 \quad \begin{cases} u_t = 9u_{xx} + \sin x, \\ u(x, 0) = 1. \end{cases}$$

$$445 \quad \begin{cases} 4u_t = u_{xx}, \\ u(x, 0) = x^2 + x^4. \end{cases}$$

$$446 \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + e^x, \\ u(x, 0) = \theta(x)x. \end{cases}$$

$$447 \quad \begin{cases} u_t = 16u_{xx} + t^2 \sin x, \\ u(x, 0) = x^3 \theta(5 - x). \end{cases}$$

$$448 \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{\alpha t} \delta(x), \\ u(x, 0) = \delta(1 - |x|). \end{cases}$$

В прикладах (449)–(464) розв'язок наступних задач Коші для багатовимірного рівняння дифузії:

$$449 \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + 2xyz, \\ u(x, y, z, 0) = x^2 + y^2 - 2z^2. \end{cases}$$

$$450 \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + \sin t \cos x, \\ u(x, y, z, 0) = e^{-y} \cos z. \end{cases}$$

$$451 \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + e^{-3t} \cos x, \\ u(x, y, z, 0) = y \sin z. \end{cases}$$

$$452 \quad \begin{cases} u_t = 2\Delta u + t \cos x, \\ u(x, y, z, 0) = \cos y \cos z. \end{cases}$$

$$453 \quad \begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, \\ u(x, y, z, 0) = (x^2 + y^2 + z^2)^2. \end{cases}$$

$$454 \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + 2xyz, \\ u(x, y, z, 0) = x^2 + y^2 - 2z^2. \end{cases}$$

$$455 \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + 6xyt, \\ u(x, y, 0) = x^2 - y^2. \end{cases}$$

$$456 \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + \sin t \sin x \sin y, \\ u(x, y, 0) = 1. \end{cases}$$

$$457 \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + 2y, \\ u(x, y, 0) = x. \end{cases}$$

$$458 \quad \begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, \\ u(x, y, z, 0) = \cos r. \end{cases}$$

$$459 \quad \begin{cases} u_t = 9\Delta u + e^{-4t} x^2 z^2 \sin y, \\ u(x, y, z, 0) = \theta(1 - |x|) \cdot \\ \cdot \theta(1 - |y|) \theta(1 - |z|). \end{cases}$$

$$460 \quad \begin{cases} u_t = 25\Delta u + \theta(4 - t) \sin x \cdot \\ \cdot \sin z \sin y, \\ u(x, y, z, 0) = 1 - 3(x^2 + \\ + y^2 + z^2). \end{cases}$$

$$461 \quad \begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + (x^2 + y^2 + z^2) e^t, \\ u(x, y, z, 0) = 0. \end{cases}$$

$$462 \quad \begin{cases} u_t = 4\Delta u + e^{-(x^2+y^2+z^2)} \frac{t}{1+t^2}, \\ u(x, y, z, 0) = 1. \end{cases}$$

$$463 \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + e^{-2t} \frac{x}{1+x^2} \frac{y}{1+y^2} \frac{z}{1+z^2}, \\ u(x, y, z, 0) = xy\delta(4 - z^2). \end{cases}$$

$$464 \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + \cos(x^2 + y^2 + z^2) e^{-t}, \\ u(x, y, z, 0) = 0. \end{cases}$$

## §4.2. Фундаментальний розв'язок і задача Коші для хвильового рівняння

$n$ -вимірне хвильове рівняння має вигляд

$$\square_n u(x, t) = f(x, t), \quad \square_n \triangleq \partial_t^2 - a^2 \Delta_n. \quad (4.6)$$

Фундаментальний розв'язок хвильового оператора  $\square_n$  має вигляд

$$\mathcal{E}_n(x, t) = \theta(t) F_k^{-1} \left[ \frac{\sin a|k|t}{a|k|} \right]. \quad (4.7)$$

Для 1, 2 і 3-вимірного хвильового рівняння фундаментальний розв'язок має вигляд, відповідно:

$$\mathcal{E}_1(x, t) = \frac{1}{2a} \cdot \theta(at - |x|), \quad (4.8a)$$

$$\mathcal{E}_2(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \cdot \frac{\theta(at - |x|)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}, \quad (4.8b)$$

$$\mathcal{E}_3(x, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a|x|} \delta(at - |x|). \quad (4.8c)$$

$$(4.8d)$$

Задача Коші для хвильового рівняння ставиться наступним чином:

$$\begin{aligned} \square_n u(x, t) &= f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Розв'язок задачі Коші (4.9) збігається з розв'язком рівняння

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - a^2 \Delta_n) u(x, t) &= F(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ F(x, t) &= \theta(t) f(x, t) + \delta'(t) u_0(x) + \delta(t) u_1(x), \end{aligned} \quad (4.10)$$

що має вигляд

$$u(x, t) = (\mathcal{E}_n * F)(x, t),$$

В прикладах (465)–(489) розв'язок наступних задач Коші для одновимірного хвильового рівняння:

$$465 \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x, \\ u(x, 0) = \delta(x), \\ u_t(x, 0) = 1. \end{cases}$$

$$466 \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(x, y, 0) = 0, \\ u_t(x, y, 0) = \delta'(x_0 - x). \end{cases}$$

$$467 \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)\delta(x), \\ u(x, 0) = \delta(x - x_0), \\ u_t(x, 0) = x\delta(x). \end{cases}$$

$$468 \quad \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = x^2, \\ u_t(x, 0) = x^4. \end{cases}$$

$$469 \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x, \\ u(x, 0) = \delta(x), \\ u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$470 \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin x, \\ u(x, 0) = \sin x, \\ u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$471 \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2, \\ u(x, 0) = x, \\ u_t(x, 0) = \delta(x). \end{cases}$$

$$472 \quad \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = \cos x, \\ u_t(x, 0) = \cos x. \end{cases}$$

$$473 \quad \begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x, \\ u(x, 0) = 1, \\ u_t(x, 0) = \delta(x). \end{cases}$$

$$474 \quad \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + x^2 \cdot e^t, \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = \delta(x). \end{cases}$$

$$475 \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^{\alpha t} \delta(x), \\ u(x, 0) = \delta(1 - |x|), \\ u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$476 \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + xe^x, \\ u(x, 0) = \theta(x)x^2, \\ u_t(x, 0) = \theta(1 - x). \end{cases}$$

$$477 \quad \begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} + e^{-t} \cos x, \\ u(x, 0) = \cos x, \\ u_t(x, 0) = \sin 2x. \end{cases}$$

$$478 \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)\delta(x), \\ u(x, 0) = \delta(x - x_0), \\ u_t(x, 0) = x\delta(x). \end{cases}$$

$$479 \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^t \sin x, \\ u(x, 0) = \sin x, \\ u_t(x, 0) = e^{-x}. \end{cases}$$

$$480 \quad \begin{cases} 4u_{tt} = u_{xx} - \theta(2 - t) \exp(-x), \\ u(x, 0) = \sin x \exp(-x^2), \\ u_t(x, 0) = 3\delta(x - 2). \end{cases}$$

$$481 \quad \begin{cases} 4u_{tt} = u_{xx} + x \sin t, \\ u(x, 0) = \exp(-x^2), \\ u_t(x, 0) = \exp(-2x). \end{cases}$$

$$482 \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^{-2t} e^x, \\ u(x, 0) = x\theta(x), \\ u_t(x, 0) = x^2\theta(x). \end{cases}$$

$$483 \quad \begin{cases} 4u_{tt} = u_{xx} + e^t \theta(2 - |x|), \\ u(x, 0) = e^{2x - x^2}, \\ u_t(x, 0) = e^{x - 2x^2}. \end{cases}$$

$$484 \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x^2, \\ u(x, 0) = x^2, \\ u_t(x, 0) = (1 - |x|)^{-2}. \end{cases}$$

$$485 \quad \begin{cases} 4u_{tt} = u_{xx}, \\ u(x, 0) = x^2 + x^4, \\ u_t(x, 0) = 3x^6. \end{cases}$$

$$486 \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^x, \\ u(x, 0) = \theta(x)x, \\ u_t(x, 0) = \delta'(2x). \end{cases}$$

$$487 \quad \begin{cases} u_{tt} = (1/9)u_{xx} + \delta(t-1)e^x, \\ u(x, 0) = \sin x \theta(x), \\ u_t(x, 0) = \cos(2x). \end{cases}$$

$$488 \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + (t-1)^3 \sin(e^x), \\ u(x, 0) = x \sin x, \\ u_t(x, 0) = 3. \end{cases}$$

$$489 \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2t^4 \sin(x-1), \\ u(x, 0) = \sin x^2, \\ u_t(x, 0) = 2 + e^{-4x}. \end{cases}$$

В прикладах (490)–(505) розв'язок наступних задач Коші для багатовимірних хвильових рівнянь:

$$490 \quad \begin{cases} u_{tt} = \Delta u + e^{-2t} 2xyz, \\ u(x, y, z, 0) = x^2 + y^2 - 2z^2, \\ u_t(x, y, z, 0) = 1. \end{cases}$$

$$491 \quad \begin{cases} u_{tt} = \Delta u + \cos 3t \cdot \\ \cdot \theta(1 - (x^2 + y^2)^{1/2}), \\ u(x, y, 0) = 0, \\ u_t(x, y, 0) = \delta'(x_0 - x) \cdot \\ \cdot \delta(y_0 - y). \end{cases}$$

$$492 \quad \begin{cases} u_{tt} = 2\Delta u + t \cos x, \\ u(x, y, z, 0) = \cos x \cos y, \\ u_t(x, y, z, 0) = \cos y \cos z. \end{cases}$$

$$493 \quad \begin{cases} u_{tt} = 2\Delta u, \\ u(x, y, z, 0) = (x^2 + y^2 + z^2)^2, \\ u_t(x, y, z, 0) = (x^2 + y^2 + z^2)^2. \end{cases}$$

$$494 \quad \begin{cases} 3u_{tt} = \Delta u + 2xyz, \\ u(x, y, z, 0) = x^2 + y^2 - 2z^2, \\ u_t(x, y, z, 0) = 1. \end{cases}$$

$$495 \quad \begin{cases} u_{tt} = 4\Delta u + 6xyt, \\ u(x, y, 0) = x^2 - y^2, \\ u_t(x, y, 0) = xy. \end{cases}$$

$$496 \quad \begin{cases} u_{tt} = \Delta u + \sin t \sin x \sin y, \\ u(x, y, 0) = 1, \\ u_t(x, y, 0) = x^2 e^{-x}. \end{cases}$$

$$497 \quad \begin{cases} 9u_{tt} = \Delta u + \sin r, \\ u(r, 0) = r \cos r, \\ u_t(r, 0) = r^2. \end{cases}$$

$$498 \quad \begin{cases} u_{tt} = \Delta u + 2 \sin t \theta(1 - |x|) \cdot \\ \cdot \theta(1 - |y|), \\ u(x, y, 0) = x, \\ u_t(x, y, 0) = y. \end{cases}$$

$$499 \quad \begin{cases} u_{tt} = 2\Delta u, \\ u(x, y, z, 0) = \cos r, \\ u_t(x, y, z, 0) = r \cos r. \end{cases}$$

$$500 \quad \begin{cases} u_{tt} = 9\Delta u + \cos t \sin r, \\ (r, 0) = 1, \\ u_t(r, 0) = (2 + r^2)^{-1}. \end{cases}$$

$$501 \quad \begin{cases} u_{tt} = 25\Delta u + (x^2 + y^2 + z^2)e^t, \\ u(x, y, z, 0) = 0, \\ u_t(x, y, z, 0) = 1. \end{cases}$$

$$502 \quad \begin{cases} u_{tt} = 5\Delta u + e^{\alpha t} \delta(2 - r), \\ u(r, 0) = \theta(1 - r), \\ u_t(r, 0) = 3 \sin 3r. \end{cases}$$

$$503 \quad \begin{cases} u_{tt} = \Delta u + \cos(\omega t - \alpha) \theta(1 - x) \cdot \\ \cdot \theta(2 - y) \theta(3 - z), \\ u(x, y, z, 0) = xy, \\ u_t(x, y, z, 0) = 3 \sin 3z. \end{cases}$$

$$504 \quad \begin{cases} u_{tt} = \Delta u + \cos(\omega t - \\ - \alpha(x^2 + y^2 + z^2)), \\ u(x, y, z, 0) = (x - y + z)^2, \\ u_t(x, y, z, 0) = \delta(x - 2). \end{cases}$$

$$505 \quad \begin{cases} 10u_{tt} = \Delta u + (\theta(5 - t) - \\ - \theta(2 - t)) \delta((x^2 + y^2 + z^2) - 1), \\ u(x, y, z, 0) = \sin x \cos y e^{z^2}, \\ u_t(x, y, z, 0) = x. \end{cases}$$



### §4.3. Фундаментальний розв'язок і межові задачі для рівнянь Лапласа і Пуассона

Оператор Лапласа в  $n$ -вимірному просторі має вигляд:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}. \quad (4.11)$$

Фундаментальний розв'язок  $n$ -вимірного оператора Лапласа має вигляд

$$\mathcal{E}_2(x) = \frac{1}{\sigma_2} \ln r = \frac{1}{2\pi} \ln r, \quad n = 2, \quad (4.12a)$$

$$\mathcal{E}_n(x) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \cdot \frac{1}{r^{n-2}}, \quad n \geq 3, \quad (4.12b)$$

де  $\sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$  — площа поверхні одиничної  $n$ -сфери.

Функцією Гріна задачі Діріхле для області  $D$  називають функцію  $G(x, y)$ ,  $x, y \in D \subset \mathbb{R}^n$ , якщо вона задовольняє дві вимоги:

1.  $\Delta_y G(x, y) = \delta(x - y)$ ,  $x, y \in D \subset \mathbb{R}^n$ ;
2.  $G(x, y) \Big|_{y \in \partial D} = 0$ .

Функцію Гріна задачі Діріхле можна представити у вигляді

$$G(x, y) = \mathcal{E}_n(x - y) + g(x, y), \quad (4.13)$$

де гармонічна функція  $g(x, y)$  знаходиться з однорідних межових умов

$$g(x, y) \Big|_{y \in \partial D} = -\mathcal{E}_n(x - y) \Big|_{y \in \partial D}. \quad (4.14)$$

Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Пуассона  $\Delta_n u = f(x)$  в області  $D$  має вигляд

$$u(x) = \int_D f(y) G(x, y) dy + \int_{\partial D} u_0(y) \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y) dS_y. \quad (4.15)$$

В прикладах (506)–(512) знайти функцію Гріна задачі Діріхле для заданих об'єктів.

**506** Напівпростір  $x_3 > 0$  в  $\mathbb{R}^3$ .

**507** Двогранний кут  $x_2 > 0, x_3 > 0$  в  $\mathbb{R}^3$ .

**508** Октант  $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$  в  $\mathbb{R}^3$ .

**509** Куля  $|x| < R$  в  $\mathbb{R}^3$ .

**510** Напівкуля  $|x| < R, x_3 > 0$  в  $\mathbb{R}^3$ .

**511** Четверта частина кулі  $|x| < R, x_2 > 0, x_3 > 0$  в  $\mathbb{R}^3$ .

**512** Восьма частина кулі  $|x| < R, x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$  в  $\mathbb{R}^3$ .

В прикладах (513)–(519) методом функцій Гріна розв'язати задачу Діріхле.

$$\mathbf{513} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = f(x), \quad x_3 > 0, \\ f(x) = 0, \\ u|_{x_3=0} = \cos x_1 \cos x_2. \end{array} \right.$$

$$\mathbf{514} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = f(x), \quad x_3 > 0, \\ f(x) = e^{-x_3} \sin x_1 \cos x_2, \\ u|_{x_3=0} = 0. \end{array} \right.$$

$$\mathbf{515} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = f(x), \quad x_3 > 0, \\ f(x) = 0, \\ u|_{x_3=0} = \theta(x_2 - x_1). \end{array} \right.$$

$$\mathbf{516} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = f(x), \quad x_3 > 0, \\ f(x) = 0, \\ u|_{x_3=0} = (1 + x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}. \end{array} \right.$$

$$\mathbf{517} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = f(x), \quad x_3 > 0, \\ f(x) = 0, \\ u|_{x_3=0} = \begin{cases} -1 & x_1 < 0, \\ +1 & x_1 > 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{518} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = f(x), \quad x_3 > 0, \\ f(x) = 2(x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2)^{-2}, \\ u|_{x_3=0} = (1 + x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}. \end{array} \right.$$

$$\mathbf{519} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad x_2 > 0, x_3 > 0 \\ u|_{x_2=0} = 0, \\ u|_{x_3=0} = e^{-4x_1} \sin 5x_2. \end{array} \right.$$

$$\mathbf{520} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad x_2 > 0, x_3 > 0 \\ u|_{x_2=0} = 0, \\ u|_{x_3=0} = x_2 (1 + x_1^2 + x_2^2)^{-3/2}. \end{array} \right.$$

$$\mathbf{521} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad x_2 > 0, x_3 > 0 \\ u|_{x_2=0} = 0, \\ u|_{x_3=0} = \theta(x_2 - |x_1|). \end{array} \right.$$

$$\mathbf{522} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = f(x), \quad |x| < R, \\ f(x) = a = \text{const}, \\ u|_{|x|=R} = 0. \end{array} \right.$$

$$\mathbf{523} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = f(x), \quad |x| < R, \\ f(x) = |x|^n, \quad n \in \mathbb{N} \\ u|_{|x|=R} = a = \text{const}. \end{array} \right.$$

$$\mathbf{524} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = f(x), \quad |x| < R, \\ f(x) = e^{|x|}, \\ u|_{|x|=R} = 0. \end{array} \right.$$

# Абетковий покажчик

- добуток
  - прямиий, 59
- формула
  - Сохоцького, 55
- формула Лапласа, 36
- функція
  - $\delta$ -функція Дірака, 54
  - Гріна, 73
  - характеристична, 5
  - основна, 52
  - узагальнена, 53
  - регулярна, 53
  - впливу, 62
- характеристичний напрямок, 5
- характеристика, 5
- крива характеристична, 5
- лінійний диференціальний оператор, 52
- метод зображень, 39
- носій функції, 52
- оператор
  - дифузії, 68
- перетворення Фур'є, 59
- поліном
  - Лежандра, 15
- псевдофункція, 54
- регуляризація, 54
- розв'язок
  - фундаментальний, 62
  - узагальнений, 62
- ряд
  - Фур'є, 11
  - Фур'є–Бесселя, 44
- рівняння
  - Бесселя, 42
- символ оператора, 52
  - головний, 53
  - повний, 52
- згортка, 59

# Рекомендована література

- [1] *Владимиров В., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. — Москва: Физматлит, 2000. — 400 с.
- [2] *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики. — Москва: Наука, 1982. — 336 с.
- [3] *Бицадзе А. В., Калинин Д.* Сборник задач по уравнениям математической физики. — Москва: Наука, 1977. — 224 с.
- [4] *Боголюбов А. Н., Кравцов В. В.* Задачи по математической физики. — Москва: Изд-во МГУ, 1998. — 350 с.
- [5] *Білоко́лос Є. Д., Юрачківський А. П., Шека Д. Д.* Спеціальні функції в задачах математичної фізики: Навчальний посібник для студентів природничих факультетів. — Київ: ВПЦ Київський університет, 2000. — 92 с.
- [6] *Будак Б. М., Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Сборник задач по математической физики. — Москва: Наука, 1972. — 688 с.
- [7] Задачи по математическим методам физики / И. В. Колоколов, Е. А. Кузнецов, А. И. Мильштейн и др. — Москва: Эдиториал УРСС, 2002. — 288 с.
- [8] Сборник задач по уравнениям математической физики / Под ред. В. С. Владимирова. — Москва: Физматлит, 2001. — 288 с.
- [9] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — Москва: Наука, 1972. — 736 с.
- [10] *Шубин М. А.* Лекции об уравнениях математической физики. — Москва: МЦМНО, 2001. — 303 с.
- [11] *Юрачківський А. П., Грязнова В. О.* Метод відокремлення змінних у задачах математичної фізики: Навчальний посібник для студентів природничих факультетів. — Київ: РВЦ Київський університет, 1998. — 143 с.

Навчальне видання

Білококос Євген Дмитрович  
Шека Денис Дмитрович

## Збірник задач з курсу «Рівняння математичної фізики»

Навчальний посібник для студентів природничих факультетів

*Оригінал-макет виготовлено авторами за допомогою видавничого  
пакету  $\text{\LaTeX}$ 2 $\epsilon$  з використанням шрифтів PSCyr*