

Білокалоє Євген Дмитрович

1) Определение комп. числа

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}; \quad i^2 = -1$$

Леонард Эйлер  $x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$

$$\mathbb{C} = \{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \}$$

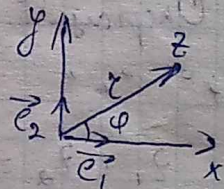
$$1^\circ \quad z = x + iy = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0$$

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

$$2^\circ \quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2$$

$$\text{T.1} \quad \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$$\mathbb{R} = \{ z = x + iy \mid y = 0 \}$$



$$z = x e_1 + y e_2; \quad e_1 = 1; \quad e_2 = i$$

①  $z = x + iy$  - алг. форма комп. числа

②  $x = z \cos \varphi, \quad y = z \sin \varphi$  - ПСК

$$z = z (\cos \varphi + i \sin \varphi) \text{ - тригон. ф-ма;}$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ - модуль комп. числа; } z \Leftrightarrow |z| \geq 0$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \text{ - аргумент}$$

$$\varphi = \arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$



2) Ф-ас Ейлер:  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

T.2  $e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Доб.:  $e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$   
 $= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

T.3  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$

Доб.:  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} =$   
 $= \cos n\varphi + i \sin n\varphi$

3) Операции в  $\mathbb{C}$

1° "+"

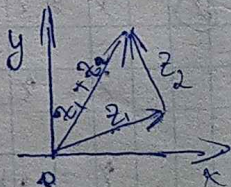
$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) +$   
 $+ i(y_1 + y_2) = z_3$

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$  — ком-асс.

$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$  — ас-асс.

2° "-"

$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$



3° "x"

$z_1 \cdot z_2 = z_1 e^{i\varphi_1} \cdot z_2 e^{i\varphi_2} = (z_1 \cdot z_2) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = z_3$



$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 - \text{ком.}$$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) - \text{ас.}$$

4° " / "

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 e^{i\varphi_1}}{z_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{z_1}{z_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = z_3, \quad z_2 \neq 0$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \left\{ \begin{array}{l} z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \\ z \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

4) Відмінності  $\mathbb{C}$  від  $\mathbb{R}$  чисел

1° Невпорядкованість

$x \in \mathbb{R}$

①  $x \geq 0$

②  $x > 0$

③  $-x > 0$

Лемо  $x_1 > 0, x_2 > 0 \Rightarrow x_1 + x_2 > 0, x_1 x_2 > 0$

Т.4. Комплексні числа не впорядковані.

Дов. від супротивного:

$z \in \mathbb{C}$

1)  $z \geq 0$

2)  $z > 0$

3)  $-z > 0$

Лемо  $z \geq 0, z_2 > 0 \Rightarrow z_1 + z_2 > 0, z_1 \cdot z_2 > 0$



$$-z_1 > 0, (-z_2 > 0) \Rightarrow (z_1, z_2) > 0$$

$$(-z_1)(-z_2) = (-1)^2 \cdot z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot z_2 > 0$$

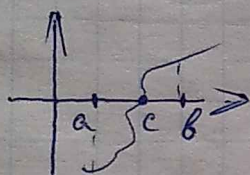
Возьмем так комплекс. числа:  $1, i$

Масло  $1^2 > 0, i^2 > 0$  - супер

$$1^2 + i^2 > 0 \Rightarrow 0 > 0$$

Пример

III. Роль



$$\text{если } f(a) < 0, f(b) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists c, f(c) = 0 \text{ - не пере-}$$

копится на  $\mathbb{C}$ , до  $\mathbb{C}$ -из впер

5) Алгебраические замкнутость  $\mathbb{C}$

Рез. полином:  $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$

$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$$P_n(x) \geq 0$$

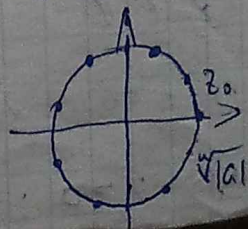
Т. 5 (Жакс) - основная теор. алг.

Полином  $P_n(x)$  с коэф.  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, a_0 \neq 0$

мае  $n$  корней  $z_k, k = \overline{1, n}, z_k \in \mathbb{C}$

$$P_n(z) = z^n - a, a \in \mathbb{C}$$

$$z^n = a$$





Легко  $z = r e^{i(\varphi + 2\pi k)}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$$e^{i2\pi k} = \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k = 1$$

$$a = |a| e^{i\alpha}$$

$$r^n e^{in(\varphi + 2\pi k)} = |a| e^{i\alpha}$$

$$z e^{i(\varphi + 2\pi k)} = \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{(\alpha + 2\pi m)}{n}}, m \in \mathbb{Z}$$

$$z e^{i\varphi} = \sqrt[n]{|a|} \exp(i(\alpha + 2\pi m)/n) = z_m$$

$m = 0, n-1$

Идеальный элемент  $\infty$

16.02.12

$\mathbb{R}$ , если  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x < \infty$

$$x + \infty = \infty, \quad \frac{x}{0} = \infty, \text{ если } x \neq 0$$

$$x \cdot \infty = \infty, \text{ если } x > 0$$

$$-\infty < x < +\infty$$

Полное множество действительных чисел:

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup +\infty \cup -\infty, \quad \pm\infty \text{ не } \in \text{ числам}$$

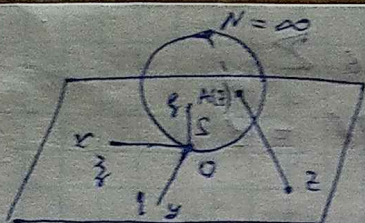
$$\mathbb{C}, \infty$$

$$\mathbb{C} \cup \infty = \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{CP} \quad - \text{ полное мн. комп. чисел}$$

$$\frac{z}{0} = \infty, \text{ если } z \in \mathbb{C}; \quad z + \infty = \infty$$

$$\frac{z}{\infty} = 0, \text{ если } z \in \mathbb{C} \quad \text{Тейлор, Риман}$$





$$z = x + iy$$

$$R = \frac{1}{2}$$

сфера Римана

$$z^2 + \eta^2 + \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}$$

$$\eta = \frac{y}{1+|z|^2}$$

$$\xi = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}$$

$$x = \frac{\xi}{1-\xi}$$

$$y = \frac{\eta}{1-\xi}$$

стереометрические выражения

сфера Римана с отображением  $\overline{\mathbb{C}}$

Функции

$$f: X \rightarrow Y$$

1) последовательность  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$f: N \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z_1, z_2, \dots$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Озн. 1

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$$

$$z_n, a \in \mathbb{C}$$

$$\begin{bmatrix} z_n \\ a \end{bmatrix}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : n > N(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$$

$$\overline{\mathbb{C}}$$

$$\forall R > 0 \exists N(R) : n > N(R) \Rightarrow |z_n| > R$$

$$\begin{bmatrix} z_n \\ R \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

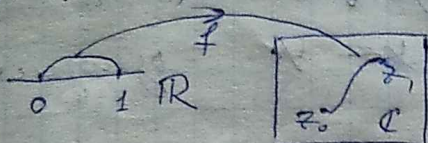
$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} i n = \infty$$



2)  $f: [0;1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$



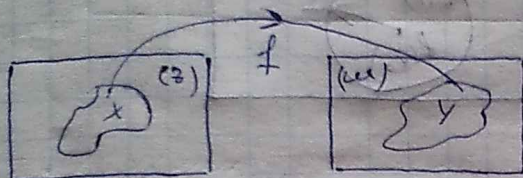
$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

$$t \in [0;1]$$

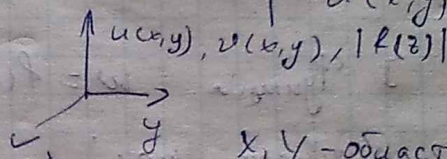
любая (Жорданова) кривая  
(имеет самопересечения)

3)  $f: X \subset \mathbb{C} \rightarrow Y \subset \mathbb{C} \quad \mathbb{C} = \mathbb{C}(\bar{z})$

$$w = f(z) = u(x,y) + i v(x,y) \quad ; \quad z = x + iy;$$



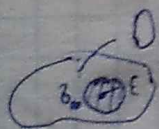
$$w = f(z) \quad \begin{array}{l} u(x,y) \\ v(x,y) \end{array}$$



$X, Y$  - области

Озн. 2

Область  $D \subset \mathbb{C}$  называется звездообразной относительно  $z_0$ .

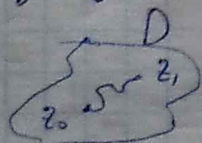


1) выпуклость

$$z_0 \in D \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow U(z_0, \varepsilon) \subset D \quad - \text{круг}$$

2) звездообразность



$$z_0, z_1 \in D \Rightarrow \exists \gamma(t): \gamma(0) = z_0 \quad ;$$

$$\gamma(1) = z_1, \quad \gamma(t) \in D$$

Различают звезду однозвезду однажды :



звезда



однозвезда

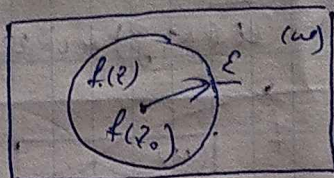
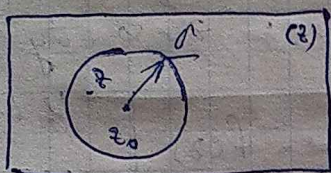


Взаимнооднозначная функция

$f: X \rightarrow Y$   $f^{-1}: Y \rightarrow X$  — взаимнооднозначно.

Непрерывность  $\rho$ -норм. функции в  $z_0$ .

Озн.  $\rho$ -н  $w = f(z)$  — непрерывна в  $z_0$ , если  
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$



I функция  $w = f(z)$  — непрерывна в  $z_0$ , тогда  
 ее действительная и мнимая части — непрерывны в  $z_0$ .  
 Если  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  — функции

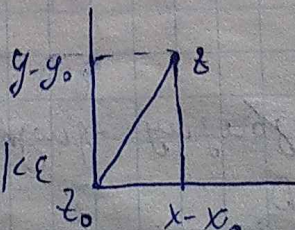
$$\text{Дов.: } |z - z_0| \leq |x - x_0| + |y - y_0|$$

$$|z - z_0| \geq |x - x_0|, |y - y_0|$$

$$|u - u_0|, |v - v_0| \leq |f(z) - f(z_0)| \leq |u - u_0| + |v - v_0|$$

$$u_0 = u(x_0, y_0); \quad v_0 = v(x_0, y_0)$$

$$z_0 = x_0 + iy_0$$



$$1) |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

$$|x - x_0|, |y - y_0| < \frac{\delta}{2} \Rightarrow |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$



$$|u - u_0|, |v - v_0| < \varepsilon$$

Полігона . Аналітична функція . Теорема Коші - Ріманна

23.02.12

Озн. Якщо  $w = f(z)$ , де  $z \in E \subset \mathbb{C}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) \text{ - похідна в } z$$

$h \in E$ ,  $h \rightarrow 0$  дійсним способом  $h$  - комплексне число

Якщо  $f(z)$  є диференційовною  $\forall z \in E$ , то  $f(z)$  наз. диференційовною в  $E$

Озн. Якщо (одн.)  $f(z)$  є диф. в одн.  $D$ , то  $f(z)$  наз. аналітичною в  $D$

$$w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$f(z) \in C(D) \text{ (є непервною в одн. } D) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u(x, y), v(x, y) \in C(D)$$

Т. 1 (умови Коші - Ріманна)

1) Якщо  $f(z)$  є аналітичною в  $D$ , то  $u(x, y), v(x, y)$  мають в  $D$  похідні 1-го порядку  $u_x, u_y, v_x, v_y$ , які пов'язані зго-



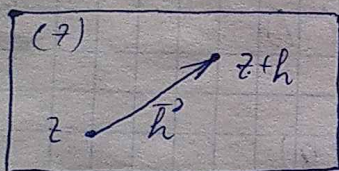
вспомогательные функции Коши-Римана:  
(C-R)

$$u_x = v_y;$$

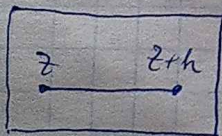
$$u_y = -v_x.$$

2) Если  $u(x,y), v(x,y) \in C^1$  дифференцируемые, имеют производные первого порядка, и удовлетворяют условиям Коши-Римана, и эти функции имеют непрерывные производные, то  $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$  — аналитическая.

Дов.: 1)  $f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$



$$h = \Delta x, \quad \Delta x \rightarrow 0$$



$$f'(z) = \lim_{h = \Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta x) - f(z)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x} \frac{u(x+\Delta x, y) + i v(x+\Delta x, y) - (u(x, y) + i v(x, y))}{\Delta x}$$

$$= u_x + i v_x$$



$$\boxed{\begin{array}{c} z+h \\ \bullet z \quad (z) \end{array}}$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z+i\Delta y) - f(z)}{i\Delta y}$$

$$h = i\Delta y \quad = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y+\Delta y) + i v(x, y+\Delta y) - u - i v}{i\Delta y}$$

$$= \frac{1}{i} u_y + v_y$$

$$f'(z) = u_x + i v_x = -i u_y + v_y \Rightarrow \\ \Rightarrow u_x = v_y, \quad v_x = -u_y$$

$$2) \quad \Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + o(\Delta x, \Delta y)$$

$$\Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta y + o(\Delta x, \Delta y)$$

$$\Delta f(z) = \Delta u + i \Delta v = \underline{u_x \Delta x} + \underline{u_y \Delta y} + \\ + \underline{i v_x \Delta x} + \underline{i v_y \Delta y} + o(\Delta x, \Delta y) =$$

$$= u_x \Delta x + i v_y \Delta y + u_y \Delta y + v_x \Delta x + o(\Delta x, \Delta y) = \\ = u_x (\Delta x + i \Delta y) + i v_x (\Delta x + i \Delta y) = (u_x + i v_x) \cdot (\Delta x + i \Delta y) = f'(z) \Delta z$$

$$\Delta f = f'(z) \Delta z, \quad \boxed{df = f'(z) dz}$$



Властивості аналітичних функцій

$$1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

Нормальний аналіт. ф-ція так як і в гл. 1  
спону аналізу.

$$(z^n)' = n z^{n-1}, \quad (\cos z)' = -\sin z$$

2)  $f(z) = \text{const}$  - аналітичне ф-е

$$f(z) = \text{const} = u + iv$$

$$u_x = v_y = 0$$

константа - завжди аналіт.  
такі ф-е

$$u_y = -v_x = 0$$

$$f(z) = z^2 - \text{ан. ф-е}$$

$$f(z) = z = x + iy = u + iv$$

$$u = x, \quad v = y; \quad \underline{u_x = v_y = 1}; \quad \underline{v_y = -v_x = 0}$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad \text{якщо } g(z) \neq 0, z \in D$$

$A(D)$  - множина всіх аналітичних ф-ій  
в обл.  $D$ .



$z^2, z^n$  - аналітичні гр-ї.

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

Т. Всі полиноми  $P_n(z) \in A(D)$

Фізична інтерпретація аналітичних функцій

$$w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \in A(D)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right. \quad \text{умови } C-R$$

$$u_{xx} = v_{xy};$$

$$u_{yy} = -v_{xy}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\Delta u(x, y) = 0 \quad - \text{р-ня Лапласа.}$$

$$v_{xx} + v_{yy} = 0$$

$$\Delta v(x, y) = 0$$

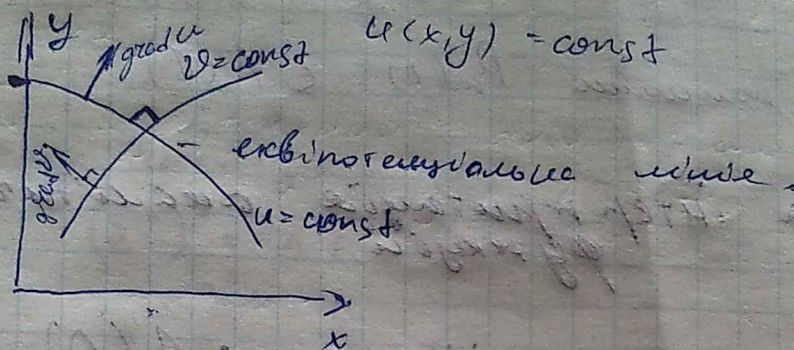
Озн.

Математик: Розв'язок р-ня Лапласа уз  
заданої області

Фізик: розв. р-ня Лапласа уз поте-  
нциалом.



Комплексный потенциал — анал. ф-я  
в плоскости.



Т. линии  $U(x, y) = \text{const}$ ,  $V(x, y) = \text{const}$  представляют собой взаимно перпендикулярные.

Доб..

$$\text{grad } U = (U_x, U_y)$$

$$\text{grad } V = (V_x, V_y)$$

$$(\text{grad } U, \text{grad } V) = U_x V_x + U_y V_y = 0.$$

$$\begin{cases} U_x = V_y \\ V_x = -U_y \end{cases} - \text{ГР},$$

$U$  — потенциал (электростатический)

$\vec{E} = -\text{grad } U$  — силовые линии электростатического поля.

$\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ,  $\sigma$  — проводимость.

$V$  — силовая ф-я, ф-я скорости



# Теорема интегрируемости аналитичности

## 1) Конформное отображение

$z_1 = z, z_0$  ,  $z = z e^{i\varphi}$



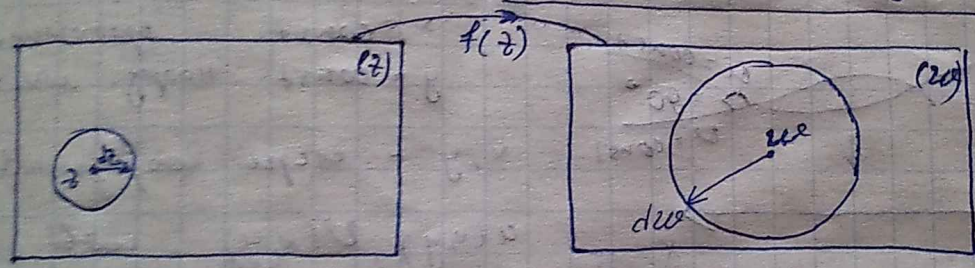
$z_2 e^{i\varphi_2} = z_0 e^{i\varphi_0} z_1 e^{i\varphi_1} = z_0 z_1 e^{i(\varphi_0 + \varphi_1)}$

$z_2 = z_0 z_1$  ;  $\varphi_2 = \varphi_0 + \varphi_1$

$w = f(z) \in A(D)$

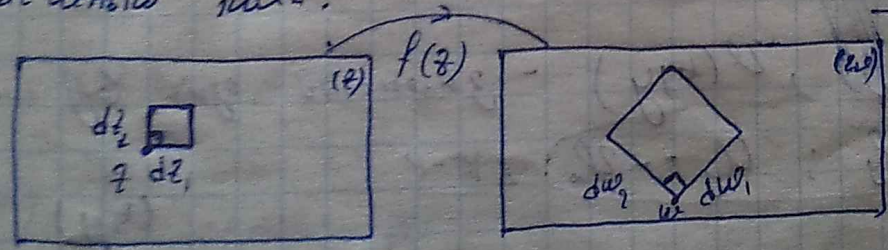
$z = const$

$dw = f'(z) dz$  ;  $|dw| = |f'(z)| |dz|$   
 $arg dw = arg f'(z) + arg dz$



При конформном отображении при малом переходе в малом поле.

$f'(z) \neq 0$



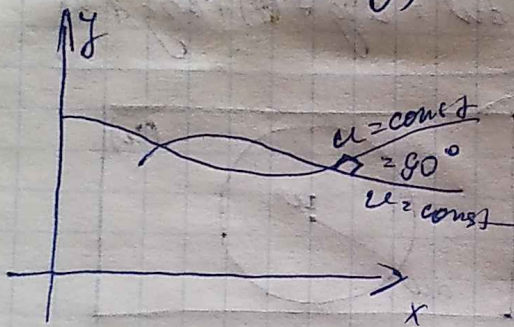
При выпр. анал. ф-то анал. (w) малый и переход у малый квадрат.



Таки відображення наз. конформними  
(локальн відображення) - зберігають  
кути

Т. Відображення аналитичного функціоналу  
 $w = f(z) \in A(D)$ ,  $f'(z) \neq 0$ ,  $z \in D$  є  
конформним.

2) Протономальні кривинієві координати.  
 $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ ,  $z = x + iy$



$x = \text{const}$  протономальні  
 $y = \text{const}$  координати  
 $x, y$  - старі координати  
 $u(x, y), v(x, y)$  - нові.  
 $u = \text{const}, v = \text{const}$  -  
нові координати

$(\text{grad } u, \text{grad } v) = 0$

$u, v$  - протономальні,  
кривинієві координати

3)  $u(x, y), v(x, y)$  - залежать від  $x, y$  однаково.

$u_x = v_y ; u_y = -v_x$  - К-Р.

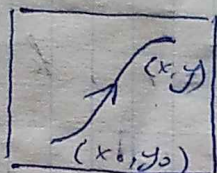
Т. 1) Якщо дана  $u(x, y)$ , то  $v(x, y) = \int (-u_y dx + u_x dy)$   
 $(x, y)$



2) Пусть дана  $u(x, y)$

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (u_y dx - u_x dy)$$

Доб. "1) :



$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} du = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (u_x dx + u_y dy) =$$

$$= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u_y dx + u_x dy + \text{const.}$$

2) глб. аналитич

Единицы группы

1) Единичные гл. аналитич:

$$z^n, n \in \mathbb{N} \quad z_n \in A(\mathbb{C})$$

$$P_n(z) \in A(\mathbb{C})$$

2) Рациональные функции

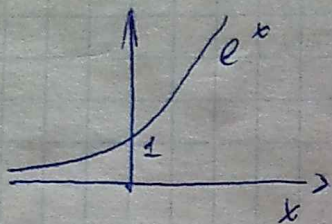
$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} \in A(\mathbb{C} \setminus R_n); \quad R_n = \{z : Q_n(z) = 0\}$$



3) Показательные функции

$$w = z^z \in A(\mathbb{C})$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$



$$e^{2\pi i k} = 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

4) Логарифм

$$\ln z = \ln z e^{i\varphi} = \ln z + i(\varphi + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

5) Значение степеней: функции

$$w = z^a, \quad a \in \mathbb{C}$$

$$\textcircled{2} \quad e^{a \ln z}$$

6) Тригонометрические функции:

$$\cos z := \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z := \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})$$

$$\operatorname{ch} z := \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}), \quad \operatorname{sh} z := \frac{1}{2} (e^z - e^{-z})$$

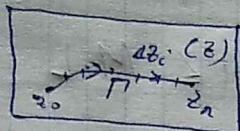
$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1; \quad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2;$$



# Интеграл

Опр.

$$1) \int_{\Gamma} f(z) dz \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(z_i) \Delta z_i$$

$$\Delta > \max_{1 \leq i \leq N} |\Delta z_i|$$

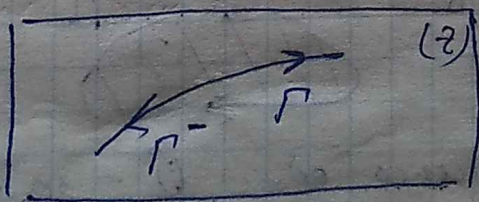
$$\begin{aligned} 2) \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\Gamma} [u(x,y) + i v(x,y)] (dx + i dy) = \\ &= \int_{\Gamma} [u(x,y) dx - v(x,y) dy] + i \int_{\Gamma} [v(x,y) dy + u(x,y) dx] \end{aligned}$$

Т.1. Интеграл  $\int_{\Gamma} f(z) dz$  имеет такие свойства:

$$\begin{aligned} 1^{\circ} \text{ линейности: } \int_{\Gamma} [f(z) + g(z)] dz &= \\ &= \int_{\Gamma} f(z) dz + \int_{\Gamma} g(z) dz \end{aligned}$$

$$2^{\circ} \text{ аддитивности: } \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz$$

$$3^{\circ} \text{ ориентированности: } \int_{\Gamma} f(z) dz = - \int_{\Gamma^{-}} f(z) dz$$





T.2 Оценки интеграла не möglich

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot L, \text{ где } M = \max_{z \in \Gamma} |f(z)|$$

$L = \int_{\Gamma} |dz|$  - длина контура  $\Gamma$ .

Доб.:  $\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \lim_{d \rightarrow 0} \left| \sum_{i=1}^N f(z_i) \Delta z_i \right|$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  - неравенство треугольника

$$\leq \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N |f(z_i)| |\Delta z_i| \leq$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

(Верхняя оценка)

$\leq$

$$M \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N |\Delta z_i| = M \int_{\Gamma} |dz| =$$

$$\leq ML$$

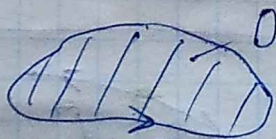
15.03.12

Теорема существования и интеграл

T.1 Пусть  $f(z) \in A(D) \cap C(\bar{D})$ , то

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0$$

$\partial D$  - внутренняя граница



(I Теорема Коши)

Замечание 1 - если  $\partial D$  - замкнутая кривая



- условие:  $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0$  - тогда эквивалентно  
 условиям (глад, удовлетв. одн.) - тогда имеем

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

Доб.  $\int_{\partial D} f(z) dz = \int_{\partial D} (u + i v)(dx + i dy) =$   
 $= \int_{\partial D} (u dx - v dy) + i \int_{\partial D} (v dx + u dy) \quad \textcircled{=}$

Заметим:  $\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$

$P = P(x, y)$ ,  $Q = Q(x, y)$ ,  $P_y, Q_x$  - непрерывны.

$\textcircled{=}$   $\iint_D (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_D (u_x - v_y) dx dy = 0$

( $f(z)$  - анал. ф-я  $\Rightarrow$  век. фн. Римана  $\begin{pmatrix} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{pmatrix}$ )

Заяв. 2 Если одн.  $D$  с достаточно малым  
 то Т.Г. также верно.



- 3-губчатое одн.

$$\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} f(z) dz$$

$\partial D = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$

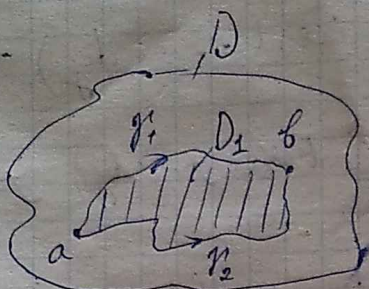


Т. 1' Пусть  $f(z) \in A(D)$ ; то

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_a^b f(z) dz$$

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \subset D$$

$$a, b \in \Gamma$$



$f(z)$  — комплексная функция.  
(Родою элементарных функций  
функций по  $a$  и  $b$ , а не  
выпущенных).

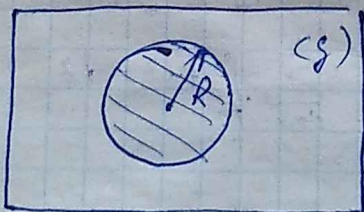
Доб.:  $\partial D_1 = \gamma_2 \cup \bar{\gamma}_1$

$$\stackrel{T.1}{0} = \int_{\partial D_1 = \gamma_2 \cup \bar{\gamma}_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\bar{\gamma}_1} f(z) dz =$$

$$= \int_{\gamma_2} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz = 0 \quad \checkmark$$

(ориент.  $\gamma_1$   
(и  $\gamma_2$ )).

Т. 2 Угловые теоремы Коши (теорема ортого-  
нальности)



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} z^n f(z) dz = \rho_{n,-1} = \begin{cases} 1, n=-1 \\ 0, n \neq -1 \end{cases}$$

(кож., R)

$$n \in \mathbb{Z}, \forall R > 0$$



Доб : Показување интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} z^n dz = \left| z = R e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right|$$

$$dz = i d\varphi R e^{i\varphi}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} R^{n+1} e^{i(n+1)\varphi} i d\varphi = \frac{R^{n+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi [\cos(n+1)\varphi + i \sin(n+1)\varphi] = \begin{cases} 1, & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases} \quad (\text{интеграл отворено.})$$

Зг. Фурје

$$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi = 0, \quad m \neq 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin m\varphi = 0, \quad m \neq 0$$

Функциа интерпретација

Врне.  $f(z) = \ln z = \ln r e^{i\varphi} = \ln r + i(\varphi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$

$f'(z) = \frac{1}{z}$  - потекло токовно, јереду 63 вим. пр.

$$f(z) = u + iv$$

$$\int_{C_R} \frac{dz}{z} = 1 - \text{интеграл виу потону нае}$$



Теореме Гаусс для 3-х вим. простору

спреведливе для 2-х вим.

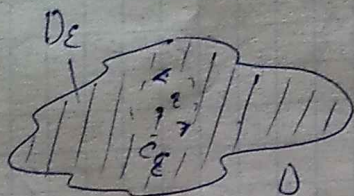
Поиск је имам нае 6 јереду вим.



T.2 (Kouei)

Assumo  $f(z) \in A(D) \cap C(\bar{D})$ ,  $\infty$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(s)}{s-z} ds = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ 0, & z \in \bar{D} \end{cases}$$



$$\partial D_\epsilon = \partial D \cup C_\epsilon^-$$

Obb.:  $z \in \bar{D}$   $f(s) \in A(D)$ ,  $\frac{1}{s-z} \in A(D \setminus \{z\})$

(~~lavoro~~ anche go-w e anche go-0)  $z \in \bar{D}$

$f(s) \in A(D)$ ,  $\frac{1}{s-z} \in A(D \setminus \{z\})$

$$C_\epsilon = \{s \mid |s-z| = \epsilon\}$$

$$\frac{f(s)}{s-z} \in A(D \setminus \{z\}) = A(D_\epsilon)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\epsilon} \frac{f(s)}{s-z} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(s)}{s-z} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\epsilon} \frac{f(s)}{s-z} ds$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(s)}{s-z} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\epsilon} \frac{f(s)}{s-z} ds =$$

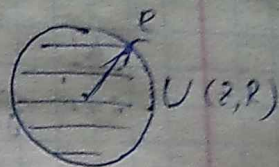
$$= \frac{1}{2\pi i} f(z) \int_{C_\epsilon} \frac{1}{s-z} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\epsilon} \frac{f(s) - f(z)}{s-z} ds =$$

$$= f(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\epsilon} \frac{f(s) - f(z)}{s-z} ds$$



$$\left| \int_{\Gamma} \frac{f(s) - f(z)}{s - z} ds \right| \leq \max_{s \in C_\varepsilon} \left| \frac{f(s) - f(z)}{s - z} \right| 2\pi\varepsilon \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0$$

— это контур



T<sub>2</sub> (при условии замкнутости)

Если  $f(s) \in A(U(z, R)) \cap C(\overline{U(z, R)})$ , то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} f(z + Re^{i\varphi}) d\varphi \quad \text{— среднее по окружности}$$

Тогда имеем: формулу Грина для круга  $D(z, R)$

Доб.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + Re^{i\varphi})}{Re^{i\varphi}} Re^{i\varphi} d\varphi$$

Найдем производные от формулы Коши — аналог!

T<sub>3</sub> Если  $f(z) \in A(D) \cap C(\overline{D})$ , то

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_D \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} ds = \begin{cases} f^{(n)}(z), & z \in D \\ 0, & z \in D^c \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}$

Если  $f$  — много раз дифференцируема, то



17.03.12

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \left( \frac{f(\xi)}{\xi - z} \right) d\xi = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ 0, & z \notin D \end{cases}$$

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi = \begin{cases} f^{(n)}(z), & z \in D \\ 0, & z \notin D \end{cases}$$

$$\xi \in \partial D, z \in D \Rightarrow \xi - z \neq 0$$

$$\partial D \cap D \neq \emptyset$$

T. always  $f(z) \in A(U(z, R)) \therefore |f(z)| \leq M$ ,  
 $z \in U(z, R)$  so  $|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{R^n} M$

Doob:  $|f^{(n)}(z)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial U(z, R)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \right|$

$$\xi = z + R e^{i\varphi}, d\xi = i dy R e^{i\varphi}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{n!}{2R} \max_{\xi} |f(\xi)| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

T. (Liouville) always  $f(z) \in A(\mathbb{C}) \therefore |f(z)| \leq M$ ,  
 $(M = \text{const})$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ; so  $f(z) = \text{const}$

Doob:  $|f'(z)| \leq M/R$ ,  $R \rightarrow \infty \Rightarrow |f'(z)| = 0$   
 $\Rightarrow f'(z) = 0$ ,  $z \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z) = \text{const}$

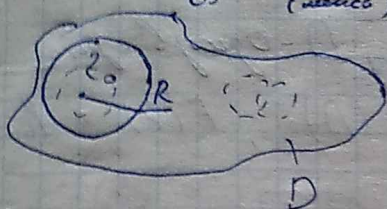


Т. Лемо  $f(z) \in A(D) \cap C(\bar{D})$ , то

1)  $\max_{\bar{D}} |f(z)| = |f(z_0)|, z_0 \in \partial D$ , то

2)  $|f(z)| = \text{const}, z \in \bar{D}$

$z_0$  (не внутренняя точка области  $D$ )



Рейс-формула

( $\varphi$  — обход области  $D$  по границе с н.п.ч. и с.п.ч.)

Доб.:  $z_0 \in D, |f(z_0)| = M \geq |f(z)|, z \in U(z_0, R)$

$M = |f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi \right| \leq$   
(теор. про ср. зн.)

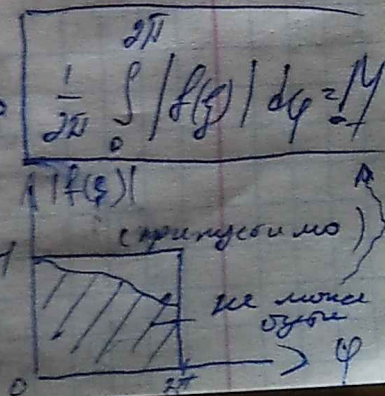
$\leq \frac{1}{2\pi} \max_{\xi \in C_R} \int_0^{2\pi} |f(\xi)| d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \max_{\xi \in C_R} |f(\xi)| \cdot 2\pi =$

$\max_{\xi \in C_R} |f(\xi)| (\leq M) = |f(z_0)| \leq M$

$M \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\xi)| d\varphi \leq M \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\xi)| d\varphi = M$

$\Rightarrow |f(\xi)| = M, \xi \in C_R$

$\ln f(z) = \ln |f(z)| + i \arg f(z)$   
с.п.ч. в  $D$

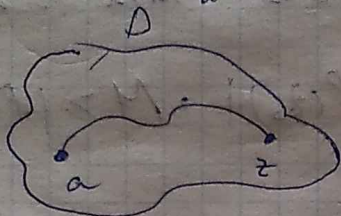




Теорема Грина.

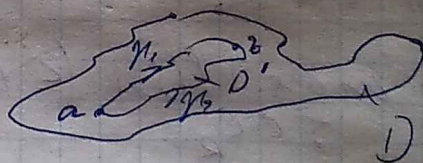
Из любых точек области  $D$  можно провести кривую, не выходящую за границы  $D$ , и соединяющую их.

I. Если  $f(z) \in A(D)$ ,  $D$  - область, то  $F(z) = \int_a^z f(\zeta) d\zeta \in A(D)$ ,  $F'(z) = f(z)$



II. (Морера) Если  $f(z) \in C(D)$  и  $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$  где  $\forall D' \subset D$ ,  $D'$  - область, то

$f(z) \in A(D)$



Доб.

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz \Rightarrow \int_a^z f(\zeta) d\zeta = \int_a^z f(\zeta) d\zeta$$

$$F(z) = \int_a^z f(\zeta) d\zeta \Rightarrow F'(z) = f(z) \Rightarrow F(z) \in A(D)$$

$$\Rightarrow f(z) \in A(D)$$



Аналитична ф-я є степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$$



I.  $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}$ ,  $R$  - радіус збіжності  
- ф-я є функцією Адамара

I.  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n \in A(U(a, R))$

$R$  - радіус збіжності.

об.:  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$ ;  $|z-a| < R$

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n (z-a)^{n-1}$$

$R_1$  - радіус збіжності  $f'(z)$ .

$$\frac{1}{R_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|nC_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{|C_n|} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} = \frac{1}{R}$$

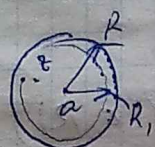
$$R = R_1$$

Т. Якщо ф-я (аналитична у вузлі  $(R)$ ,  
то її можна представити у вигляді  
ряду Тейлора.



class  $f(z) \in A(V(a, R))$  1.00  
 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ ,  $a = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \in V(a, R)$   
 $R_1 < R$

Doś.  
 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{CR} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \text{---}$



$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a} \left( \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}} \right) = \frac{1}{\xi - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-a}{\xi-a} \right)^n$$

jeżeli  $\frac{|z-a|}{|\xi-a|} < 1$  --- i to obiegowe

$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{CR} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \right] \cdot z$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = c_n$

22.03.12

Skąd dodatkowy czynnik

T. Jeżeli  $f(z) \in A(V(a, R))$  i  $f(a) = 0$ , toż

1)  $f(z) \equiv 0$ ,  $z \in V(a, R)$  albo

2)  $f(z) = (z-a)^m g(z)$ ,  $g(z) \in A(b, R)$ ;  $g(a) \neq 0$



$m$  - порядок нуля,  $m \geq 1, 2, \dots$

Доб.:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

1)  $c_0 = c_1 = \dots = c_m = 0$

2)  $c_0 = c_1 = \dots = c_{m-1} = 0; \quad c_m \neq 0$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^{n-m} \\ &= g(z) (z-a)^m \end{aligned}$$

Ф-я  $g(z)$  представлена рядом, сумма кое-  $\in A(D)$  в круге, не являясь тождественно нулем.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

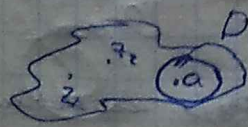
— радиус круга, в котором  $g(z) \in A(D)$  в

той же самой окружности, что и  $f(z)$ .

$$g(a) = c_m \neq 0$$

Существование аналогичного ф-й.

$f(z) \in A(D)$



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$$



Т. Дано:  $f(z) \in A(D)$ ,  $\{z_n\}$ ,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ ,  $z_n, a \in D$   
 $f(z_n) = 0$ , тогда  $f(z) \equiv 0$ ,  $z \in D$

Доб.:  $f(z) \in A(V(a, R))$ ,  $V(a, R) \subset D$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n = C_0 + C_1(z-a) + \dots$$

$$0 = f(z_n) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z_n - a)^n$$

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(a) = C_0$$

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-a} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k (z-a)^{k-1} = C_1 + C_2(z-a) + \dots$$

$$g(z_n) = \frac{f(z_n)}{z_n - a} = 0$$

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = g(a) = C_1$$

Далее мы имеем аналогичное рассуждение, что  
 для всех  $C_2, C_3, \dots = 0$ . Откуда  
 $g(z_n) = 0$  в круге. Тогда  $f(z) \equiv 0$



годей, что если  $u$  — г-е в  $u$  и  $v$  в  $u$ , то  $u$  и  $v$  — г-е в  $u$ .

Т. Дано:  $f(z), g(z) \in A(D)$   
 $\{z_n\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ ,  $z_n, a \in D$

$$f(z_n) = g(z_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Тогда } f(z) = g(z), \quad z \in A(D)$$

Доказ. Прообраз функции  $g(z) =$

$$h(z) = f(z) - g(z) \quad \text{— нулевая}$$

на непрерывно соединен.

Ф-я  $h(z)$  в точках  $z_n$  и  $a$  — 0. По непрерывности, в каждой точке  $z \in D$ ,  $h(z) = 0 \Rightarrow f(z) = g(z)$ .

Лемма о аксиоматическом разложении

$$y = f(x), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

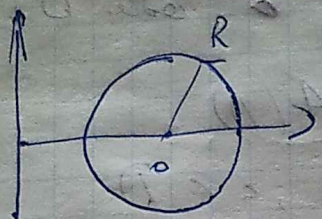


$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

Ф-я, если представима  
 в виде степенного ряда  
 с аксиоматическим разложением.



$$w = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n, \text{ где } C_n \text{ — произвольные}$$



Пр.:  $y = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \frac{1}{n!}, R = \infty$  — Д-А  
где

$$w = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, R = \infty$$

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}, \text{ где } e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2} = 0$$

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} = 0$$

$$\sin(x_1+x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$$

$$\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

Ряды Лорана

$$\text{Опр.: } \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n}_{\text{ряд Тейлора}} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z-a)^n}_{\text{ряд Лорана}}$$

$$\text{def } f_1(z) + f_2(z)$$

Т. Область збіжності ряду Лорана є кільце

$$V(a, r, R) = \{z \mid r < |z-a| < R\}$$





$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}; \quad r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_{-n}|}$$

Заб.  $f_1(z) \in A(V(a, R)) \quad \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}$

$$f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z-a)^n = \left\{ \frac{1}{z-a} + \dots \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} (z-a)^{-k} =$$

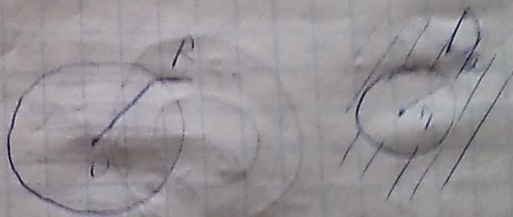
$$\Rightarrow \left\{ \frac{1}{z-a} + \dots \right\} \in \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} z^{-k}$$

$$r = \frac{1}{R^*} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_{-n}|} \quad \frac{1}{12-1} < |z-a| < R^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R^*} < |z-a|$$

$$r = \frac{1}{R^*} < |z-a|$$

$$f_2(z) \in A(D_a)$$



поэтому  $f_2(z)$  суммируема

I. Показано, что  $f_2(z)$  суммируема в каждой точке  $V(a, r, R)$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} \quad , \quad r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_{-n}|}$$



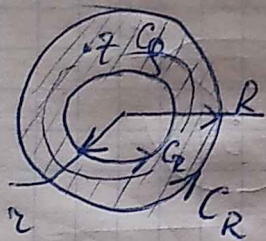
Т. Пусть  $f(z)$  — анал. ф-ция в круге  $V(a, r, R)$ , то была представима в виде ряда.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n \quad \text{— гдр. в круге } (a, r', R') \\ \text{бл } r < r' < R' < R$$

Тогда  $V(a, r', R') \subset V(a, r, R)$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|g-a|=p} \frac{f(g)}{(g-a)^{n+1}} dg, \quad r < p < R$$

Доб.:



$$\partial D = C_R \cup C_r^-$$

Зв. посп. Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi =$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}} = \frac{1}{\xi - a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$$



$$\frac{|z-a|}{|\xi-a|} < 1, \text{ so } \xi \in C_R$$

$$-\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{z-\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$$

$$\frac{|\xi-a|}{|z-a|} < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \right] +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} f(\xi) (\xi-a)^n d\xi \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_f} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \right] + \quad \underline{n=-m-1}$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^{-m}} \left[ -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_f} f(\xi) (\xi-a)^{-m-1} d\xi \right]$$

$$C_f = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho < R\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_f} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$$



I. (оценки коэффициентов  $C_n$ )

Пусть же  $f(z) \in A(V(a, r, R))$  и

$|f| \leq M$  (const),  $z \in V(a, r, R)$  то

$$|C_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$$

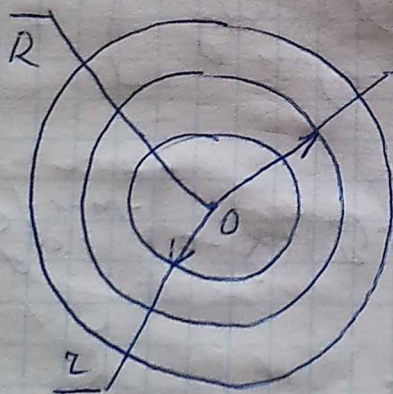
доб.:

$$|C_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{n+1}} \cdot 2\pi \rho = \frac{M}{\rho^n}$$

(оценки коэффициентов)

$f(z) \in A(V(a, r, R))$ ,  $r < |z| < R$



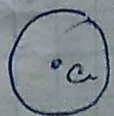
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

$$z-a = \rho e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\varphi}$$

Резюме  $f(z) \in A(V(a, 0, R))$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n$$





то может быть особым.

## Классификация особых точек аналитической функции

$$f(z) = A(V(a, z, \rho))$$

Опр. т. а. кс.

1) устранимой ос. т., если готовая часть  
ряды порождает вычитание.  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$

2) полюсом N-го порядку, если го-  
товая часть имеет конечную мощность  
показателя:  $\frac{1}{(z-a)^N}$  — наибольшая степень

$$\text{или } \frac{1}{(z-a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n + \sum_{k=-N}^{-1} C_k (z-a)^k$$

3) сущ. т. о. т. только, если готовая  
часть ряда порождает бесконечную  
мощность.

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n + \sum_{k=-\infty}^{-1} C_k (z-a)^k$$

Т. 1 Особые точки  $a$  — устранимой ос. т. только



тогда  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = C \neq \infty$

T.2. Если точка  $a$  является точкой разрыва, то  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$

T.3 ... утверждение то же, что и в T.1, но  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = a$

тогда  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = A$

(Критерий Коши)

Заб. 1.

Условие:  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ ;  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = C \neq \infty$

тогда:  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = C \neq \infty$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$$

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} \quad 0 < \rho < R$$

$$|c_n| \leq M \rho^n \Rightarrow c_n = 0$$

Заб. 2.

$$\text{Условие: } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=-N}^{-1} c_n (z-a)^n$$



$$z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \frac{1}{(z-a)^N} \sum_{k=-N}^{-1} c_k (z-a)^k \quad k=n+N$$

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0 + \lim_{z \rightarrow a} \frac{c_{-N}}{(z-a)^N} = \infty$$

Дов.:

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty; \quad g(z) = \frac{1}{f(z)} \in A(V(a, 0, R))$$

$$g(a) = 0, \quad g(z) = (z-a)^N h(z), \quad h(a) \neq 0;$$

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-a)^N} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

$a$  - особая точка,  $f(z) \in A(V(a, 0, R))$  29.03.12

Если  $a$  не является точкой, то тогда тогда (убор.)  
или  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0 \neq 0$

Заб. 3

Необх. 1) Существует  $\{z_n\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty$$

Если имеет место последовательность  $\{z_n\}$  не имеет  $\Rightarrow f(z) \leq M, |z| < R$



$\Rightarrow a$  - узувна точка

Пропорције

2) Изберемо неки  $A \in \mathbb{C}$  и  $\{z_n\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$   
 $f(z_n)$

a)  $f(z_n) = A$   $\{z_n\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$

б)  $f(z) \neq A$ ,  $\forall z \in U(a, R')$

$g(z) = \frac{1}{f(z) - A} \in A \cup V(a, 0, R)$

$a$  - суштина - особина точка где  $g(z)$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = \infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$

$\overline{\mathbb{C}}$

Доказ.

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A \implies \lim_{z \rightarrow a} f(z) \neq 0$

Пример

1)  $a$  - узувна особина точка

$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \sin z \cdot \frac{1}{z}$



$$z \rightarrow 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \right) = 1$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

$$2) f(z) = \frac{1}{z^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \neq 0 \quad - \text{no pole.}$$

$$3) f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n}$$

$z=0$

$$(*) \quad z_n = \frac{1}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0, \quad f(z_n) = e^n$$

$$(**) \quad z_n = -\frac{1}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0, \quad f(z_n) = e^{-n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^n = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0.$$

$$(***) \quad z_n = \frac{1}{2\pi i n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0, \quad f(z_n) = e^{\frac{1}{2\pi i n}} = 1$$

$$(***) \quad z_n = \frac{1}{2\pi i n + A}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0,$$

$$f(z_n) = e^{2\pi i n + A} = A \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$$

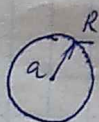


$\infty$  - ек особлива точка  
 $f(z)$ ,  $z \in \bar{D} = D \cup \infty$   
 $f(z) \in A(\bar{D} \setminus V(a, R))$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n}_{\substack{\text{РЗ} \text{ РЗУ и} \\ \text{в } \infty \text{ аус. покр.}}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n}_{\substack{\text{ПЗ} \\ \text{в } \infty}}$$

$\infty$  - уабува ос. точка или главна честина вужоги  
 - цртова ос. точка, или главна честина на  
 некои к-ти зоданки.  
 - поносот, или окрзена к-ти.

Лемма

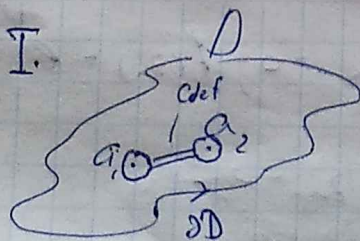


$V(a, 0, R)$

$a \in D$

гд.

$$\text{res}_a f := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z) dz$$



$$f(z) \in A(D \setminus \{a_i\})$$

Ако  $f(z) \in A(D \setminus \{a_i\})$ , то

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_i \text{res}_f$$



Prob. 1:

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \int_{C_{\text{domain}}} f(z) dz = \sum_{\partial D_i} \int_{\partial D_i} f(z) dz =$$

$$= 2\pi i \sum_i \text{res } f_{a_i}$$

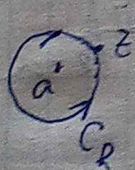
T. Suppose  $a \neq \infty$ , so  $\text{res } f_a = C_{-1}$ , &

$C_{-1}^{\frac{2\pi}{i}}$  = coeff. of  $z^{-1}$  in expansion

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

Prob. 2:

$$\text{res } f_a = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{C_R} (z-a)^n dz$$



$$z-a = Re^{i\varphi}$$

$$\int (z-a)^n dz = \int_0^{2\pi} e^{i n \varphi} R^n e^{i \varphi} R i d\varphi$$

$$= i R^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi = 0 \quad n \neq -1.$$

$$n = -1 \quad \varphi = 1$$

$$\textcircled{=} i R^{n+1} \frac{2\pi i}{n+1} e^{i(n+1)\varphi} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i R^{-1}$$

$$\boxed{=} \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n 2\pi i R^{-1} \delta_{n,-1} = C_{-1}$$



Ба нго меним

$$\text{Ge: } \operatorname{res}_a f := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z) dz$$

$$\text{I. } f(z) \in A(D \setminus \bigcup_{k=1}^n a_k)$$

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{res}_a f$$

случаю отпраним  $\operatorname{res}_a f$ , где  $a \neq \infty$ .

1) T.  $\operatorname{res}_a f = C_{-1}$  — коэф. при  $\frac{1}{z-a}$  в разл. степени

Если  $a$  — существенно-особенная точка — то не берем.

2) T. Если  $a$  — полюс  $k$ -го порядка, то

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-a)^k f(z)] \Big|_{z=a}$$

$$\text{Def: } \operatorname{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z) dz$$

$a$  — полюс  $k$ -го порядка.  $\Leftrightarrow f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$ ,  $g(z) \in A(D)$ ,  $g(a) \neq 0$ .

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^k h(z) ; h(z) \in A(D), h(a) \neq 0.$$



$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z-a)^k}{g(z)} ; \quad h(z) = \frac{1}{g(z)}$$

$$h(z) \in A(D), \quad h(a) \neq 0.$$

$$\frac{h!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} = h^{(k)}(a), \quad a \in D$$

$$k \geq n+1 ; \quad n \geq k-1,$$

$$\frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(a) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-a)^k f(z)]$$

T. Пусть  $a$  - нуль  $k$ -го порядка, то

$$\operatorname{res}_a f = (z-a) f(z) \big|_{z=a} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z)$$

T. Пусть  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$

1)  $\varphi(z) \in A(D), \quad \varphi(a) \neq 0.$

2)  $\psi(z) \in A(D), \quad \psi(a) = 0, \quad \psi'(a) \neq 0.$

тогда  $a$  - нуль  $k$ -го порядка.

$$\operatorname{res}_a f = \operatorname{res}_a \frac{\varphi}{\psi} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(a)}{z-a}} =$$

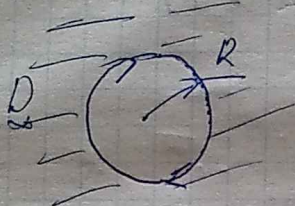
$$= \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \quad \left| \operatorname{res}_a f = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \right|$$



$$\underline{z = \infty}$$

1) I.  $\operatorname{res}_{\infty} f = -C_{-1}$

Def.:  $\operatorname{res}_{\infty} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\infty}} f(z) dz \quad \ominus \quad \infty \in D_{\infty}$



$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

$$\ominus \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\infty} = C_R} z^n dz = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} z^n dz$$

$$= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{n,-1} = -C_{-1}$$

T. Any  $f(z) \in A(\mathbb{C} \setminus \bigcup_{i=1}^n a_i)$ , so

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{a_i} f + \operatorname{res}_{\infty} f = 0.$$

Def.:  $a_i \in U(0, R)$ ,  $i=1, \dots, n$



$$\int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{a_i} f$$

$$\begin{aligned} \int_{C_R} f(z) dz &= - \int_{C_R^-} f(z) dz = \\ &= -2\pi i \operatorname{res}_{\infty} f \end{aligned}$$



$$\sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{a_i} f(z) + \operatorname{res}_{\infty} f(z) = 0.$$

Пример —

$$I = \int_{\partial D} \frac{\sin z \, dz}{(z-z_1)(z-z_2)^3} \quad \textcircled{=}$$

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z-z_1)(z-z_2)^3}; \quad \sin z \in A(D) = A(\mathbb{C})$$

$$P_4(z) = (z-z_1)(z-z_2)^3 \in A(\mathbb{C}) \quad z_1 - \text{узел первого порядка}$$

$z_2$  — узел 3-го порядка.

$z_1$  — где  $f(z)$  — имеет 1-ю,  $z_2$  — 3-го порядка.

$$\begin{aligned} \textcircled{=} 2\pi i \left( \operatorname{res}_{z_1} f + \operatorname{res}_{z_2} f \right) &= 2\pi i \left( (z-z_1) \frac{\sin z}{(z-z_1)(z-z_2)^3} \right) \Big|_{z=z_1} + \\ &+ \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[ (z-z_2)^3 f(z) \right] \Big|_{z=z_2} \end{aligned}$$

При этом интерпретив

$$I_1 = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = d\pi \sum_{\substack{z_1 \in \{z_1, z_2\} \\ \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right)}} \operatorname{res} \left[ \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) \right) \right]$$

$R(x, y)$  — рациональное г-е

$$\text{Доб.: } \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = \int_{C_1} R\left[\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) \right] \frac{1}{z} dz$$

$$z = z e^{i\varphi} = e^{i\varphi}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right).$$



$$d\varphi = \ln z \quad ; \quad (d\varphi = \frac{dz}{z} \quad ; \quad d\varphi = \frac{dz}{iz})$$

$$= \frac{1}{i} \int \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) dz \quad \text{--- (2e resp. born)} \\ C_1 = \partial U(0,1)$$

$$= 2\pi \sum_{z_0 \in U(0,1)} \text{res} \left[ \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \right]$$

T.2  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{z_i \in \mathbb{C}_+} \text{res } f$

$$z_i \in \mathbb{C}_+ = \{z = x+iy, y > 0\}$$

~~1)  $f(x) = f(z = x+iy | y=0)$~~

2)  $f(z) \in A(\mathbb{C}_+ \setminus \bigcup_i U(z_i))$

3)  $|f(z)| \leq \frac{M}{R^{1+\epsilon}}, \quad R > 0 \quad \text{born} \quad |z| = R \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz \quad \text{---}$$

$$(-R, R) \simeq \Gamma_R$$

(by name)

$$\Gamma_R \cup \Gamma_R \simeq \mathbb{C}_R$$

②  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi i \sum_{z_i \in \mathbb{C}_R} \text{res } f(z) =$



$$2\pi i \sum_{\substack{z_1, z_2 \\ \in \mathbb{C}_+}} \text{res } f$$

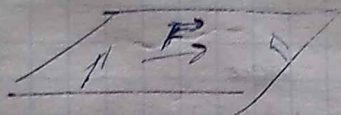
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M}{R^{1+\alpha}} \cdot \pi R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M\pi}{R^\alpha} = 0$$

Аналогично  $\varphi$ -ї та нульові вект. поле

$\vec{F}$

$F_x(x, y)$

$F_y(x, y)$



$$z = x + iy$$

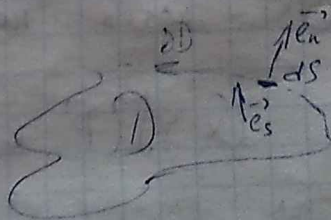
$$\vec{F} = F_x + i F_y$$

Потенціал  $u$  поле  $\vec{F}$  - є нульовим і  $u \in C^1(D)$

$F = \text{grad } u$ ,  $u$  - нульовий потенціал.

$$\Gamma = \oint_{\partial D} (\vec{F}, \vec{e}_s) ds$$

$$\vec{e}_s = i \vec{e}_n$$



$$\Gamma = \oint (F_x dx + F_y dy) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{\epsilon} = \text{res } \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} - \frac{\partial F_y}{\partial y}$$



$$\vec{F} = \text{grad } u$$

$$\text{rot } \vec{F} = \text{rot grad } u = 0$$

$u = \text{const}$  — эквипотенциалы  
 $\Gamma = 0$  — циркуляция

$$u = \int du = \int \left( \underbrace{u_x}_{\frac{du}{dx}} dx + u_y dy \right) = \int \left( \underbrace{F_x}_{F_x} dx + F_y dy \right)$$

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho \\ \text{rot } \vec{E} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

Консервативные поля

$$\vec{F}, v \in C^1(D)$$

$$\vec{F} = \text{rot } \vec{A}, \vec{A}(0,0,v)$$

$v$  — амплитуда  $q$ -я (  $q$  — частота )

$v = \text{const}$  — амплитуда волны (амплитуда частоты)

$$F_x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad F_y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$Q$  — поток поля

$$Q = \int (\vec{F}, \vec{e}_n) dS, \quad \vec{e}_s = i\vec{e}_n \Rightarrow \vec{e}_n = -i\vec{e}_s$$

$$\vec{e}_n dS = -i(dx + i dy) = dy - i dx$$

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{Q}{S} = \text{div } \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}$$



$$\operatorname{div} \vec{F}' = 0 \Rightarrow Q = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B}' = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{B}' = \frac{4\pi}{c} \vec{J}'$$

$$\vec{B}' = \operatorname{rot} \vec{A}$$

Нерави

$$\vec{F}'$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{F}' = 0 \\ \operatorname{div} \vec{F}' = 0 \end{cases}$$

$$F_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad CR$$

$$F_y = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f(z) = u + i v \text{ — конформ. отображ. } u, v$$

$$f(z) \in A(D)$$

$$\bar{F}(z) = \frac{\overline{df}}{dz} \text{ — не } i \text{ кон.}$$

$$\frac{\overline{df}}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial v}{\partial x} = \bar{F}'$$

Критерий точки нуль  $\bar{F}$ -мн. раз

$$\bar{F}'(a) = 0; \quad \bar{F}'(z) = \overline{f'(z)} = 0$$

$$z=a \quad f'(z) = (z-a)^k g(z)$$

$$g(z) \in A(U(a, \varepsilon)), \quad g(a) \neq 0.$$



$$f(z) = (z-a)^{n+1} \varphi(z) \quad \varphi(z) \in A(U(a, \epsilon))$$

$\varphi(a) \neq 0$ .

Особый ток н.б. н.а.

$$\vec{F} = \overline{f'} \quad ; \quad \overline{f'}(z) \text{ — сопр. ф-я — сопр. к } f(z) \text{ по сопр. к } f(z)$$

Упр. 0.7.

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \dots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 +$$

$$+ c_1(z-a) + \dots$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n + c_1 \ln(z-a)$$

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z$$

$z=0$  — точка разрыва

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i \arg z + 2\pi k i$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\oint f'(z) dz$$

$$\vec{F} = \overline{f'(z)} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$dz = dx + i dy$$



$$\oint f(z) dz = \left| \begin{array}{l} f'(z) = f_x - i f_y \\ dz = dx + i dy \end{array} \right| = \oint (f_x - i f_y)(dx + i dy)$$

$$\Rightarrow \oint (f_x dx + f_y dy) + i \oint (-f_y dx + f_x dy)$$

$$= \Gamma + iQ = 2\pi i C_1$$

$$C_1 = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} = \frac{Q}{2\pi} - \frac{i\Gamma}{2\pi}$$

Next we choose  $f(z) = 2q \ln z$ ,  $q \in \mathbb{R}$

$q \neq 0$ ,  $C_1 = 2q = \frac{Q}{2\pi} - \frac{i\Gamma}{2\pi}$

$\Gamma = 0$ ,  $Q = 4\pi q$

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint E' ds = 4\pi q \\ \oint E' d\vec{l} = 0 \end{array} \right.$$

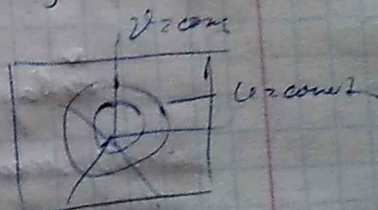
$$f = u + iv = 2q(\ln|z| + i \arg z)$$

$$z = \rho e^{i\varphi}$$

$$u = 2q \ln \rho$$

$$F' = \text{grad } u = \frac{2q}{\rho^2} \vec{e}_\rho$$

$$u = \text{const} \Rightarrow \rho = \text{const}$$



$$v = 2q \arg z = 2q\varphi$$

$$v = \text{const} \Rightarrow \varphi = \text{const}$$



$$f(z) = -\frac{2iI}{c} \ln z$$

$$C_1 = -\frac{2iI}{c} = \frac{Q}{2\pi} - \frac{c'}{2\pi} I$$

$$Q=0;$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{c} I$$

$$\begin{cases} \oint \bar{B}' d\bar{e}' = \frac{\sqrt{\pi}}{c} I \\ \oint \bar{B}' \cdot d\bar{S}' = 0 \end{cases}$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n +$$

$$+ C_1 \ln(z-a)$$

$$\frac{b_1}{z-a} = b_1 \frac{d}{dz} \ln(z-a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b_1 \ln(z+h-a) - b_1 \ln(z-a)}{h}$$

надежно

$$\frac{b_1}{(z-a)^2} = \text{важно}$$

Губарманієв рівняння Лапласа в комплексних перетвореннях

$$\Delta u(x, y) = 0;$$

$$\xi = f(z) \in A(D); \quad f'(z) \neq 0, \quad z \in D$$

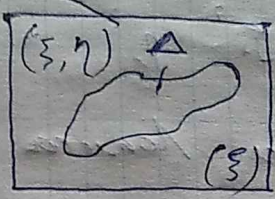
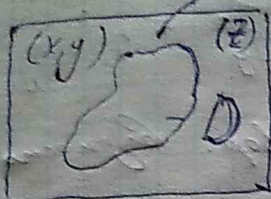
$$D \xrightarrow{f} \Delta$$

$$z = x + iy;$$

$$\xi = \xi + i\eta$$



$$(x, y) \longleftrightarrow (\xi, \eta)$$



$$\xi = \xi(x, y)$$

$$\eta = \eta(x, y)$$

$$\xi_x = \eta_y ; \xi_y = -\eta_x$$

Гл. к.р.

$$\text{I. } u_{xx} + u_{yy} = |f'(z)|^2 (u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta})$$

$$u(x, y) = v(\xi(x, y), \eta(x, y))$$

$$\Delta_{x,y} u = |f'(z)|^2 \Delta_{\xi,\eta} v(\xi, \eta)$$

Доб. Получаем из-за  $u$

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x ; u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} (\xi_x)^2 + u_{\eta\eta} (\eta_x)^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} (\xi_y)^2 + u_{\eta\eta} (\eta_y)^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{\xi\xi} (\xi_x^2 + \xi_y^2) + u_{\eta\eta} (\eta_x^2 + \eta_y^2) +$$

$$+ 2u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) + u_\xi (\xi_{xx} + \xi_{yy}) + u_\eta (\eta_{xx} + \eta_{yy})$$

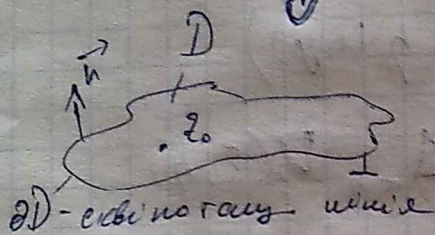


$$f'(z) = (\xi + i\eta)' = \xi_x + i\eta_x$$

$$|f'(z)|^2 = \xi_x^2 + \eta_x^2 = \xi_x^2 + \xi_y^2 = \eta_x^2 + \eta_y^2$$

Они при Липсцевой эквивалентности  
конкр. преобразуются.

Задача Дирихле



$$u(x,y): \begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{в } D \\ u(x,y)|_{\partial D} = \underline{g(x,y)} \end{cases}$$

Озн. Ф-я Грина  $G_D(z, z_0)$

$G$  - правильная функция Грина.

$z$  - переменная,  $z_0$  - полюс.

$G$  - с ф-той Грина функции  $(x, y)$

Восп. выр. 2 условия:

потенциал элект. поля  
- или потенциал жидк.

$$1) G_D(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln |z - z_0| + h(z, z_0), \text{ где}$$

$h(z, z_0) \in H(D)$  - многогр. гармон. ф-я.

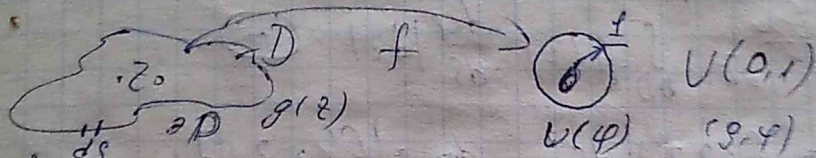
$z = z_0 \Rightarrow \logarithm \text{ имеет особенность}$



$$2) G_D(z, z_0) \Big|_{z \in \partial D} = 0.$$

Фигура интерпрет. :  $g$ -е Гринс е нормална ед. ед. поле, едн. отворено състояние готови за преход в  $z_0$  и едн. отворено главно ниво.

$$I \quad G_D(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln |f(z, z_0)|$$



$f(z, z_0)$  - аналог.  $g$ -е, ако възр-  $D \rightarrow U(0,1), z \rightarrow 0$

$$\text{Def. } 1) \quad f(z, z_0) = (z - z_0)g(z), \\ g(z) \in A(D), \quad g(z_0) \neq 0.$$

$$\frac{1}{2\pi} \ln |f(z, z_0)| = \frac{1}{2\pi} \ln |z - z_0| + \frac{1}{2\pi} \ln |g(z)|$$

$$2) \quad |f(z, z_0)| \Big|_{z \in \partial D} = 1;$$

$$\ln |f(z, z_0)| \Big|_{z \in \partial D} = 0$$



$$I. \quad u(z_0) = \int_{\partial D} g(z) \frac{\partial}{\partial n} G_D^*(z, z_0) |dz|$$

Doob.  $u(z_0) = V(0) \Leftrightarrow$

$$u(x, y) = V(\xi(x, y), \eta(x, y))$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underline{V(\varphi)} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} g(z) \frac{d\varphi}{ds} ds \rightarrow$$

$$ds = |dz|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} g(z) \frac{d\varphi}{ds} |dz| \quad \Leftrightarrow$$

$$d\varphi = |f'(z, z_0)| ds, \quad d\rho = |f'(z, z_0)| dn$$

$$\left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{z \in \partial D} = \left. \frac{d\rho}{dn} \right|_{\partial D} = \frac{1}{\rho} = \left. \frac{d\rho}{dn} \right|_{\partial D} = \left. \frac{d}{dn} \ln \rho \right|_{\partial D}$$

$$= \frac{\partial}{\partial n} \ln |f(z, z_0)| \Big|_{\partial D}, \text{ so } g = 1 - \text{the conjugate of } f$$

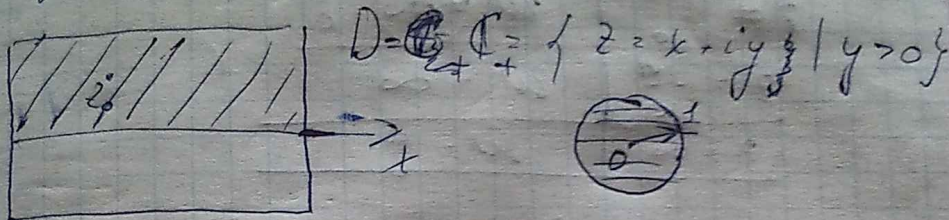
$$(x, y) = (\rho, u), \rightarrow (\rho, \varphi)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\partial D} g(z) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{2\pi} \ln |f(z, z_0)| |dz|$$



Функция Грина

1) для полуплоскости



$$f(z, z_0) = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right|$$

2) для круга



$$f(z, z_0) = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right|$$

Дробно-линейная

$$w = \sigma(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

преобразование

$$\Sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det \Sigma = ad - bc = 1$$

$$\det \Sigma = 0 \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow ad - bc = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma(z) = \text{const}$$



Власть восьм: 1)  $G(z)$  переводит  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$   
попарно,

$z \neq -\frac{d}{c}$	$w \neq \infty, \frac{a}{c}$
$z = -\frac{d}{c}$	$w = \infty$
$z = \infty$	$w = \frac{a}{c}$

$$G'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

- 2) Озн. Угловым коном  $C_R$   
 - (1)  $\in$  угловым коном радиуса  $R$ ,  
 если  $R \neq \infty$   
 - (2)  $\in$  прямою, если  $R = \infty$ .

Т.  $G(z)$  переводит угловый кон в угловый кон

$$\text{Дов. } G(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{ad-bc}{c(cz+d)} =$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{ad-bc}{c^2(z+\frac{d}{c})} = A + \frac{B}{z-C}$$

$a, b, c, d, A, B, C$  - константы

$$w = A + \frac{B}{z-C}; \quad w - A = \frac{B}{z-C} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow |w - A| = \frac{|B|}{|z - c|}$$

$$|z - c| = D \Rightarrow |w - A| = \frac{|B|}{D}$$

I. (уно 3 точки).

Пусть  $G(z) = w$ , где отображает  $z, z_1, z_2, z_3 \rightarrow w, w_1, w_2, w_3$ ,  
где  $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$  — заданные точки

Лоб.

$$\frac{w - w_1}{w_2 - w_3} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_3}$$

$$w = G(z) = \frac{Az + B}{Cz + D}$$

$$w = w_1 \Rightarrow 0 \Leftarrow z = z_1$$

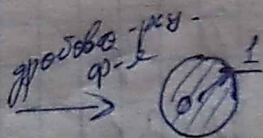
$$w = w_3 \Rightarrow \infty \Leftarrow z = z_3$$

$$w = w_2 \Rightarrow 1 \Leftarrow z = z_2$$

①  $\#p$

$$G_1 = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

$z_0$   
|||||



$$z = \bar{z} \Rightarrow |w| = 1$$

$$x + iy = x - iy; \quad y = 0$$

$$|w| = \frac{|z - z_0|}{|z - \bar{z}_0|} = \frac{|z - z_0|}{|z - z_0|} = 1$$



$$(2) \quad w = G_2(z_0) = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}z_0}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$



$$|z| = 1 \implies |w| = 1$$

$$|w| = \frac{|z - z_0|}{|1 - \bar{z}z_0|} = \frac{|z - z_0|}{|z| |z^{-1} - \bar{z}_0|} \rightarrow$$

Для кон.  $z^{-1} = \bar{z}$ ,  $z = e^{i\varphi}$   
внутр. ракурса.

$$\implies |w| = \frac{|z - z_0|}{|\bar{z} - \bar{z}_0|} = 1$$

$w$  — элемент  $\mathbb{D}$  с  $x$  заданным пересечением  
 $\alpha, x_0, y_0$ , где  $z_0 = x_0 + iy_0$ .

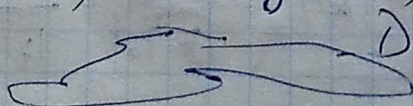
1861

Теорема  
Римана

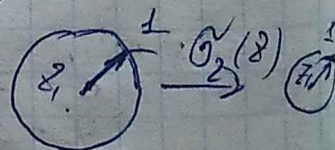
## Теорема Римана

Добавлю еще.  $D$  (граница  $\mathbb{C}, \mathbb{P}$ ) имеет  
образизом на  $V(0,1)$ .

$f(z_0) = 0, \arg f'(z_0) = \alpha$  || — условия нормирования



$f(z)$





Exp. 2 D to C. 7

*Tigridus* 2000 1000, 1000.

$$E = \frac{\rho V^2}{2} + p$$

$$F = F_x + i F_y = \int i p d\xi -$$

$$= i \int_C (E - \frac{1}{2} |V|^2) d\zeta - \frac{1}{2} \int_C \int_C |V|^2 d\zeta$$

$$v = \overline{f'(z)} = |v| e^{i\varphi} \quad \varphi = \arg d\zeta$$

$$|v|^2 = \left( \frac{p'(z)}{f(z)} \right)^2 - (2f)$$

$$F = -i \frac{p}{2} \int_0^1 (\bar{f}(z))^2 e^{-iz\varphi} dz e^{i\varphi}$$

$$\boxed{F = i \frac{\rho}{2} \int_0^1 (f'(z))^2 dz} \quad (1910)$$

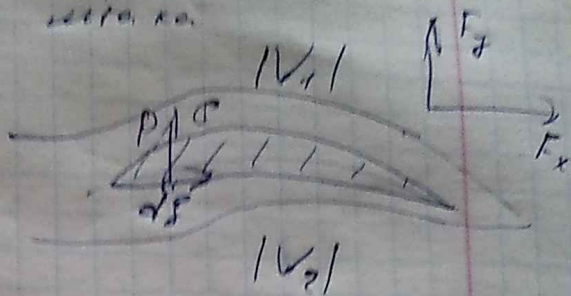
$$\bar{F} = 2\pi i \cdot i \rho \operatorname{res} [f'(z)]^2 = -\pi \rho \operatorname{res} [f'(z)]^2$$

$$f'(z) = V_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \dots$$

$$F = F_x - i F_y = -i \rho V_\infty \Gamma$$

180 4

(к словесной)





$$F_y = \rho V_\infty \Gamma$$

$\Gamma$  - циркуляция на  $\infty$