

Список позначень

$$a \wedge b = \min(a, b)$$

$$a \vee b = \max(a, b)$$

$\#A$ - число елементів у множині A ^{скінченній}

A^c - доповнення множини A (від complement)

~~A !~~

$\{a$ це теж саме, що \bar{A} - ~~замкненість~~ ^{замкненість} $\}$

2^X - с-ність усіх підмножин множини X

книга

Гурбаченко

(коли так позначити? якщо $X < \infty$ то підмножина 2^X)

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin \Omega \setminus A \end{cases}$$

індикатор
множини
події.

Гніденко
Ширяев

$$a_+ = a \vee 0$$

Тема 1 Теор. фундаменти

1.1 Імплікації простору

Експеримент, який при даному наборі умов дає істинно нульну результат наз. стохастичним. Такі експериментальні пропорції стот. законотвірності.

Щоб сформулювати поняття стат. експерименту потрібно спершу зробити це для поняття вибіркової порції. Фігуральною означає не окрему вит. порцію а суц. функ. можливих у даному скл. порції. Порядно рз того тек вектор - це точка вект. "р-у а не цього окреме.

Як і в о вект. п-ру потрібно поєднувати наявність і виаст. операції над ним, то ми означаємо. Як вектор про наявність порції це логічне висновкування, то природно як над порціями пж операції, що над висновкуваннями - логічні.

Так² порція $A \cup B$ означає в настанні хоча б одної з цих двох порцій;

а $A \cap B$ в настанні обох;

A^c ("не A ") в не настанні A

Через ці операції виражаються інші:

$$A \setminus B = A \cap B^c \text{ ("A, але не B")}$$

$$A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A = A \cup B \setminus (A \cap B)$$

нашама рівно одна з двох порцій

написати членивник цифрами від 1-3

Також можна розшир. вірнімими і для порцій

Так, $A \subset B$ означає "A умовно B"

Крім того вносять для двох порцій вносять недивідуальні позначення:

\mathbb{R} \mathbb{P} - досягає, або достовірні, порція -
- означає в настанні хоча б одної ^{фізично} \mathbb{P} \mathbb{P} можливих в експерименті вибірків (рз. походів)

\emptyset - неможлива порція ("в настанні жодного з можливих вибірків")

Зрозуміло, що порції можна інтерпретувати

як ірраціональні ілюстр. \mathbb{P} і порції введення вище ^{логічне} операціями над порціями вірно. позначувані так само теоретико-імаїнними опер-і.

А лог. вірношення є вірноб. висновчення ілюстра. Порція, що ствар. з одного вибірку поз. елементарним. Так, при киданні (в роз. нап.)

гранного кубика є 6^{ть} елемент. порцій (вибірки кожн. грані) як і вибірків а всього 2⁶ порцій.

Не елемент. порцією є напр. випадення парного числа очок. Воно складається

$A = \{2, 4, 6\}$ - тризначна мекана.

Щоб мати описати стох. експр. потрібно задати три об'єкти:

мекана Ω всіх можливих вибірків.

С-мек (каліграф. шрифт !!) $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ всіх можливих подій (якщо Ω ^{визначений строк} визначена, то завжди можна взяти $\mathcal{F} = 2^\Omega$).

i , ω - імовірність як функцію P :

$P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ з певними властивостями.

які ми пошуємо втілюються врівнян. каштом (раніше імовірність мисли як граничну каштом в n -повтореннях) експерим. при $n \rightarrow \infty$, але це збільшення не піддається суворій формалізації (форм.).

(Забудьте, що мов. ч. гран. частот)

Однак якщо врів цього не відстоюватися, то теорія буде стохастичною ми побудуємо що це власт.

Щоб сформулювати ці властивості введемо нур поняття

Введемо нур поняття

(щоб операції над подіями не виходили з \mathcal{F})

$\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ (це не експон \mathcal{E} каліграфічне,)

Скупність \mathcal{E} наз.

• алгеброю, якщо вона містить ^{об'єднання} ^{перетин} ^{усяк} кожного свого елемента і ^{об'єднання} ^{перетин} ^{усяк} двох своїх елем. \bar{A} також належ. Ω

• σ -алгеброю, якщо вона містить Ω , доповнення кожного свого елемента і ^{об'єднання} ^{перетин} ^{усяк} $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ^{усякої послідовності} $(A_n, n \in \mathbb{N})$ своїх елементів.

Введемо $A_2 = A_3 = \dots$, бачимо, що σ -алгебра є кращою алгеброю.

Рівності: $\emptyset = \Omega^c$, $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$

показує, що алгебра містить і перетин усіх своїх двох елем.

А значить $A \cap B$, $A \cup B$ ок. оп-ї \cap, \cup виражаються $\cap, \cup, ^c$

Рівність $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c$ показує, що

σ алгебра містить також і перетин ^{усякої} ^{послідовності} ^{своїх елементів}.

Оскільки σ -фільтрація породжена не повинна відображати
з кінця порів'я, то сума \mathcal{F} повинна бути
прикритою алгеброю (показано 1933)

Потребні математичної теорії - деякі з
сильніших умов σ -фільтрації

$\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$; $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ також не повинні відображати
з \mathcal{F} так, що \mathcal{F} повинна бути σ -алгеброю.
Це показується.

Потребні такі, узгоджені втралості,
власності ймовірності:

- (1) $P(A) \geq 0$
- (2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ $\text{якщо } A \cap B = \emptyset$
- (3) $P(\Omega) = 1$

і ще одна, яку наведемо пізніше.
Власність (2) дозволяє σ -фільтрації P на алгебрі
(не обов'язково σ) наз. аддитивністю.
Оскільки σ -аддитивних σ -фільтрацій
довільно, можна, об'єднати \mathcal{F} (остатнє
на Ω , де Ω скінченна)

Замовок (логіка) $A \cap B = \emptyset$

Довідаємося як зміниться властивість аддитивності?

З цих властив. можна вивести такі:

$$A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \quad \text{субтрактивність} \quad (4)$$

$$A \cap (B \setminus A) = \emptyset, \quad A \cap (B \setminus A) = \emptyset \quad \xrightarrow{(2)} \quad P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$$

Δ

$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ (монотонність) (5)

з $P(B \setminus A) \xrightarrow{(4)} P(B) - P(A)$ але зва частину

з власності (2) $P(B \setminus A) \geq 0 \Rightarrow P(B) \geq P(A)$

Нехай μ аддитивна σ -фільтрація на алгебрі \mathcal{A} (нормована)

для довільних $A, B \in \mathcal{A}$ маємо

$$A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B)), \quad A \cap (B \setminus (A \cap B)) = \emptyset$$

звідси, оскільки μ аддитивна,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus (A \cap B)) \xrightarrow{(4)} \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

це узагальнення
власності (2)

У свою чергу це рівність з індукцією так

Лема: Нехай μ аддитивна σ -фільтрація на алгебрі \mathcal{A} ,
тоді для $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ має місце
 σ -аддитивність.

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mu(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j})$$

Триєдка але не ванка!

— властивостей триєдки не достатньо для формулювання поняття імов. ок. вимір, не втрачає найвищої у σ -алгебрі граничних переходів.

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$$

— мікроскоп. ок.

Пов'язану з граничними переходами поняття імов. можна сформулювати в 4х еквів. формах.

Лема 1: Насправді власт. адитивної ф-ції

на алгебрі \mathcal{A} рівносильно (у всіх $A_n \in \mathcal{A}$):

1) (злітання ад-ть) 1) (злітання ад-ть)

Якщо $\bigcup A_n \in \mathcal{A}$ і $A_n \cap A_k = \emptyset$ при $n \neq k$, то

$n=1, \dots$

$$\mu(\bigcup A_n) = \sum \mu(A_n)$$

2) (неперервність знизу) Якщо $A_1 \subset A_2 \subset \dots$

$$\bigcup A_n \in \mathcal{A}, \text{ то } \mu(\bigcup A_n) = \lim \mu(A_n)$$

3) (неперервність зверху)

Якщо $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, $A_n \in \mathcal{A}$, то

$$\mu(\bigcap A_n) = \lim \mu(A_n)$$

4) (неперервність зверху в нулі (в нульовій множині))

Якщо $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, $A_n = \emptyset$ то $\mu(A_n) \rightarrow 0$

Ді: Злітання-адитивна невід'ємна ф-ція на алгебрі наз. мірою

Замість звичайної адитивності можна замінити простою адит. + орнент. з 3х вимірів мір. з \mathcal{A} (частини 4)

Ді: Нормована злітання (власн. (3)) міра на σ -алгебрі наз. імовірністю (або імовірнісною мірою).

Трійка (Ω, \mathcal{F}, P) де Ω - довільна множина, \mathcal{F} деяка σ -алгебра її підмножин, а P - імовірнісна \mathcal{F} наз. імовірнісним простором. Це і є матем. модель стохастичного експерименту.

Спосіб приписування імовірностей подіям замінюється пошуком частоти подій.

Тимчасово: не може бути (!!!), якщо ми

хотіли спосіб моральних вимірювань фіз. реальності, а не матем. факт.

1. Невипадковий герб факт фіз. (ств. строго камуфаж не імов., а частота) а не математична хоча б тому, що в мов. не має пон. монети.

Таким чином, імов. іст. задається
множинними даними про ймовірності
імов. іст. подій. Але чи можна вважати
новими бути деякі моделі??

Побуд. імов. по аксіоматичній основі, згідно Колмогорова (1933)

1.2 Класична "імовірність"

2.03.12

Нехай множина Ω всіх можливих
вибірків експерименту скінченна так, що
можна вважати $(\mathcal{F} = 2^\Omega)$, з фізичних
міркувань усі вибірки рівноправні.

Тоді імовірність кожного елементарного
подія приймає вигляд $\frac{1}{\#\Omega}$ зв'язки з

(1) з аксіом $\forall A \subset \Omega$ зв'язки з адитивністю
 $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$ (можливо лише вужчого)
класу моделей.

Тоді у партії з n деталей є k бракованих.
Яка імовірність того, що з m
навмання вибраних деталей є ℓ бракованих
(моделі A).

В цій задачі вибіркою є m елем. вибірок
 n -елементної множини A моделі A складає
 $\#\Omega = C_n^m$ з тих вибірок, у яких
 ℓ елементів вибрано з множини

так бракованих, а решта z $n-k$ справних.
 $\#A = C_k^\ell C_{n-k}^{m-\ell} \Rightarrow P(A) = \frac{C_k^\ell C_{n-k}^{m-\ell}}{C_n^m}$

Пр. 2: m студентів 3 року народилися одна імовірність
у кожного з у серпні і жовтні в один день народилися.
(моделі A)

n - число днів у році

Тоді A^c - у всіх студентів різні дні народилися
 $n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \in$

Очевидно що $\#\Omega = n^m$ зв'язки з фізикою
(1) $\Rightarrow P(A^c) = \frac{n!}{(n-m)! n^m} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{n!}{(n-m)! n^m}$

1.3 Геометричні імовірності

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, \mathcal{F} - σ -алгебра на Ω

μ - міра на \mathcal{F} , $\mu(\Omega) > 0$.

Тоді задана рівністю $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$ (1)

міра P - імовірнісна

Якщо \mathcal{F} містить d -мірний (лінійний)
(многомірний)

паралелепіпеди ($\|du\|$) : міра μ кожного
паралелепіпеда дорівнює добутку його ребер.

з одної вершини. (може ліра наз.
Левевою - від лева) то задана рвимою

(1) імовірність наз. геометричного.

Тут Ω фіксований $\Phi \neq 2^{\Omega}$ (а корабель в тилі 2)

Зрештою (задача Бюффона) на площинку
розграфлену n -лінійкою приймають $2a$ ^{з відстанню між лініями}

навішки кидають палику $2l < 2a$

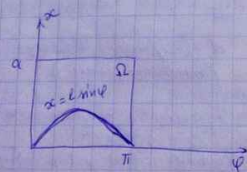
Яка імовірність того, що вона перетне хоча б
одну (линію) орку, оскільки $2l < 2a$) з приєднаних

Подіями відрізняються вір
сирини орки до найближчої
лінійки x .
Але лінійки нахилених
лінійки, ліва - направо,
а палику жидку - вгору
через Φ

Тоді $\Omega \{(\Phi, x) : 0 \leq \Phi \leq \pi, 0 \leq x \leq a\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu(\Omega) = \pi a$

$A \{(\Phi, x) \in \Omega : \frac{x}{\sin \Phi} \leq l\}$



$$\mu(A) = \int_0^{\pi} l \sin \Phi d\Phi = 2l \Rightarrow$$

маємо

$$P(A) = \frac{2l}{\pi a} \quad (2)$$

що формулу можна перевірити експериментально

Подіями є Ω та експ. з n проведених
чисельних виразів істини
растворю пастилу.

Тоді при великих n $P(A) \approx \frac{2l}{\pi a} \Rightarrow$
 $\pi \approx \frac{2nl}{aP(A)}$

Якщо відома π та a для експерименту
визначимо Φ - лінійку π

Направді це узгодження π з теоретичним π
лише поодиножні експерим. моделі

1.4 Умовні імовірності

Інформація про настання однієї події має
значення тільки якщо настане інша подія

Зрештою Тричі прокидають монету. Яка імовірність
того, що хвіст Φ один раз випаде
при (події A). Якщо врахувати що хвіст Φ
один раз випаде при (події B)

Щоб врахувати інформацію про настання
події B потрібно знати умову Φ та Φ (1.2.1)
залежності Ω на B, а в чисельнику врахувати
такі випадки A які входять і в B. Тобто
залежності A на $A \cap B$. Умовні імовірності A
буде імовірність A, що настане умова B

Омне в морей нуркы 1.2

$$P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} \quad (1)$$

(1) $P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B}$ (1)

$$A \cap B = \{zpr, prz, rzz, prr, rrp, rrp\}$$

$$P(A|B) = \frac{6}{7} \left(\neq \frac{7}{8} = P(A) \right)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$(2) \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

світланки висміюють Тетяно сестру, казавши
був віршиків вір мене.

В: Умовною ймовірністю події $A \in \mathcal{X}$ відносно події B такої що $P(B) > 0$

Р.В.Кісов (2) переписано у вигляді:

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B) \text{ наз. ф-ла множення (3)}$$

$$P(A \cap B) \quad P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

$$\bullet P(A_{n-1} | A_1 \cap \dots \cap A_{n-2}) \times \dots \times P(A_2 | A_1) P(A_1)$$

0: $\log_{10} A \cdot B$ таке, що

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \text{наз. независимыми} \quad (4)$$

Ал пожелтея екранът, а после дъг хоризонтално
3 ф. ил. върхо, що изобразява хоризонт е
вдясно Автоматично илюз. А издясно В,
така В издясно А
Това, че илюз. че пожелтея издясно не така ек
у екран и екран

З (4) видно, що порів з властивістю

$P(A)^2 = P(A)$ ($= 0$ або 1) не змінить вр
буде якої, іншої, зокрема,
вр себе.

 $\emptyset \quad \Omega$

Що внаслідок мають не всі люди, але не обов'язково тільки такі (в класі).

(4) Якщо $P(B) > 0$ рівномірна залежності на Ω (3), тоді $P(A|B) = P(A)$.

У нас лише 34 ситуації рідаткового мотивацію однаково незалежності подій.

Інформ. події. Все впливає на події.

Якщо події ділять Ω на дві частини незалежності умовності.

Ω події $A_i, i \in I$, де I - довільна множина індексів (> 1 елементів) назв. незалежністю умовності, якщо для будь-якої скінченної множини $J \subset I$

$$(5) P(\bigcap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

$$\emptyset \cap \emptyset \cap \emptyset \dots = \emptyset$$

Неважко вивести, що для \neq скінченної множини $J \subset I$

$$P(\bigcap_{i \in J} B_i) = \prod_{i \in J} P(B_i) \text{ де } B_i = \begin{bmatrix} A_i \\ A_i^c \end{bmatrix}$$

Незалежності умовності означає властивість или попарно незалежності

Зр2: Нехай $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$

$$A_i = \{\omega_i, \omega_{i+1}\} \quad i=1,2,3$$

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{4} \quad (\text{моделі } n=1,2)$$

$$A_i \cap A_j = \{\omega_i\} \text{ при } i \neq j$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{\omega_1\}$$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{4} = P(A_i) P(A_j) \quad i \neq j$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \prod_{i=1}^3 P(A_i)$$

Отже ці події попарно незалежні, але не є незалежними сукупністю.

0. Скінченна або злісна сукупність $\{H_i, i \in I\} \subset \mathcal{F}$ з властивостями

$$1) H_i \cap H_j = \emptyset \text{ при } i \neq j$$

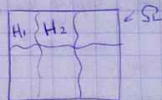
$$2) \bigcup_{i \in I} H_i = \Omega \quad \text{к. скінченна сукупність}$$

назв. повною групою подій (ПГП)

Ці дві властивості можна одержати в одну

$$\sum_{i \in I} \chi_{H_i} = 1$$

Геометрично повна група подій це розбиття розбіжності подій.



Нехай $\{H_i\}$ - ПГП

$$\text{Тоді } \forall A \in \mathcal{F} \quad A \equiv A \cap \Omega = A \cap \bigcup_{\text{Тоді}} H_i = \\ = \bigcup A \cap H_i$$

(6)

За першою властивістю ПГП маємо

$$(A \cap H_i) \cap (A \cap H_j) = \emptyset \quad \text{при } i \neq j$$

(6) Застосовуючи адитивність $P_{\text{повн}}$

$$P(A) = \sum P(A \cap H_i) \quad (\{H_i\} \text{ ПГП})$$

з урахуванням (3)

Потворивши цю формулу заміною з (3)

отримали ф-лу повної ймовірності.

(7)

$$P(A) = \sum_i P(A|H_i) P(H_i) \quad (\{H_i\} \text{ ПГП})$$

овдовіжимо

Нехай з парії m справних i та бракованих деталей навмання вибирають n деталей а з наслідком цих дій яка ймовірність того, що вона бракована (порівн A)

Введемо порівн

$$H_i = \{ \text{серед вибраних } n \text{ деталей } i \text{ бракованих} \}, \quad i = \overline{0, m+n} \quad \text{овдовіжимо}$$

Введемо умов. ймовірність

$$\text{Тоді } P(A) = \sum_{i=0}^{m+n} P(A|H_i^{m,n}) P(H_i^{m,n}) \quad (8)$$

Три маємо очевидною заміною

$$P(A|H_i^{m,n}) = \frac{C_i^i}{C_{m+n}^{m,n}}$$

$$\text{заміною з Т.2.1} \quad P(H_i^{m,n}) = C_{m+n}^i$$

$$C_n^0 = n C_{n-1}^{0-1}, \quad i > 0$$

$$C_{m+n}^i = (m+n) C_{m+n-1}^{i-1} \quad \text{перетворимо (8) до вигляду}$$

$$P(A) = \frac{n}{m+n} \sum_{i=1}^{m+n} P(H^{m-1, n-1, i-1}) \equiv \frac{m}{m+n} \sum_{j=0}^{m-1, n-1} P(H^{m-1, n-1, j}) =$$

$$= \frac{m}{m+n}$$

$$\{H_j^{m-1, n-1}, j = \overline{0, m-1, n-1}\} \text{ має ПГП}$$

Висновок: Введемо $P(A)$ як загальний вибір

Тобто праґнемо вибір як загальну ймовірність.

У загальному випадку маємо можливість вибрати 16.03.2
можливо попарно бракувати з розподілом експерименту
за ф-лою (3) $P(H_i|A) P(A) = P(A \cap H_i) = P(A|H_i) P(H_i)$

$$\Rightarrow P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) P(H_i)}{P(A)}$$

Возмиславши заміною до ф-ли повної ймовірності
отримали ф-лу Байєса

$$\Rightarrow P(H_i | A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_j P(A|H_j)P(H_j)} \quad (\{H_i\} - \text{ПГП})$$

Зр. 4. З урн, що містять кулі, колір яких може бути червоним або білим, вивелися білою (колір А). Усі умовні припущення про стан урн рівновірні. Знайти ймовірності умовні в'єсно А імовір. гіпотези про стан урн.

Введемо познач. $H_i = \{ \text{в урні було } i \text{ білих кулі} \}$
 за умовою $P(H_i) = \frac{1}{n+1} \quad i = \overline{0, n}$

Очевидно, що $P(A|H_j) = \frac{j}{n}$, імові за ф. ією

Баяса
$$P(H_j | A) = \frac{\frac{j}{n}}{\sum_{i=0}^n \frac{i}{n}} = \frac{2j}{n(n+1)}$$

Тема 2: Матричний апарат теорії ймовірності

2.1. Вимірні вображення

О: найменша із σ -алгебр $\mathcal{B}(X)$, що містить сукупність $E \subset 2^X$ наз. σ -алгеброю породженою ранішою сукупністю і познач. $\sigma(E)$. Зі множи \mathcal{O} і конструктивно, як прийняти всіх σ на X які містять E , (такі σ -алгебри існують, хоча $\sigma(2^X)$)

О: σ породжена вкритими множи пр.ру

X σ -алгебра наз. борелівською (вд Борелі), позначається $\mathcal{B}(X)$ (\mathcal{B} -ручонина), а множина Z неї наз. борелівською (ручонина, пазка)

Замість $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ пишуть \mathcal{B}^d , а при $d=1$

просто \mathcal{B} . Окр. доповнення до вкритої множи замкнена і навпаки, то σ -алгебра $\mathcal{B}(X)$ можна означити як породжену замкнутими множинами.

\mathcal{B}^d породжується деякими вкритими множи вкритими (замкнутими кривими !!!), або II дані (параметризація).

Нехай \mathcal{X}_i - σ -алгебра на X_i , $i=1,2$. вображення $f: X_1 \rightarrow X_2$ наз. $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ -вимірним в'єсно σ -алгебр, якщо для $\forall B \in \mathcal{X}_2$ $f^{-1}(B) \in \mathcal{X}_1$.

Якщо $X_2 = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{X}_2 = \mathcal{B}^d$, то замінить

" $\mathcal{X}_1 | \mathcal{X}_2$ -вимірне" говорять " \mathcal{X}_1 -вимірне". (можливо $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ за умовчаннями) (тобто який σ -алгебр ми не розглядаємо).

Якщо X_1, X_2 - метричні простори, тоді $\mathcal{B}(X_1) | \mathcal{B}(X_2)$ - вимірні (вображення наз. Борелівськими)

У вимірну $X_2 = \mathbb{R}^d$ (а X довільно) замінить вображення, говорять f -цїе.

Зр. 1. Нехай $\{A_i, i \in I\}$ - сім'я або збірка сукупн. попарно взаємноперетинних $\mathcal{F} \subset 2^X$ множин.

(1) Тоді задана рівністю $f = \sum_{i \in I} a_i X_{A_i}$ ($a_i \in \mathbb{R}$)
 ф-ція f \mathcal{F} -вимірна.

Справді для $\forall B \in \mathcal{R}$ (маємо не обов'язково $B \in \mathcal{B}$, але тільки в даному прикладі)

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{i \in I, a_i \in B} A_i \in \mathcal{F}, \text{ оскільки } A_i \in \mathcal{F} \text{ і існують}$$

певні n найбільших значень a_i (або значень індексів)

Л1: Якщо \mathcal{F} -вимірна ф-ція на $\Omega \in$
 гранично рівномірно збіжної послідовності
 ф-цій виду (1)

то й f \mathcal{F} -вимірна. Позначимо

$$A_{nk} = \left\{ \omega : \frac{k-1}{n} < f(\omega) \leq \frac{k}{n} \right\}, (\in \mathcal{F} \text{ за вибором } f)$$

$$f_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} X_{A_{nk}} \text{ за побудовою}$$

$$|f_n - f| \leq \frac{1}{n} \Delta$$

Л2: гранично послідовно збіжної послідовності
 \mathcal{F} -вимір. ф-цій саме такою \mathcal{F} -вимірна.

Позначимо клас \mathcal{R}^d значних (або \mathbb{C}^d значних)
 (область значень і розмірність вимірюваного
 континууму) \mathcal{F} -вим. ф-цій на Ω через
 $\mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{F})$

Л2 (можна перетворити) поміжкові граничні
 переходить на виводить з $\mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{F})$

Очевидно рівність лін. комбінацій і добуток
 ф-цій виду (1) \in ф-цій того ж виду і
 так само $f \wedge g$ і $f \vee g$ -максим. і мінім.

(так само для операцій \wedge, \vee) як розглянути
 нормальні 1, 2, приверне до такого
 висновку.

Н1: $\forall f, g \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{F})$ і $\forall a, b \in \mathbb{R}$ (або \mathbb{C})

ф-ції $af + bg, fg, f \wedge g, f \vee g$ також належать
 $\mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{F})$

Л2 і Н1 стверд

Коментар до Н1: замислимо

$$|f| = \frac{f \vee 0 - f \wedge 0}{2}$$

Замислимо, що \mathcal{L}_0 мінімальний і
 модуль кожного свого елемента.

Лема 1: Нехай \mathcal{X}_i - σ -алгебра на X_i , $i=1, 2$

$E \subset X_2$, $\sigma(E) = \mathcal{X}_2$. Тоді для $\mathcal{X}_1 | \mathcal{X}_2$ -вимір.

Визначення $f: X_1 \rightarrow X_2$ досконалим (і очевидно
 зображенням) щоб $\forall B \in E$ було $f^{-1}(B) \in \mathcal{X}_1$

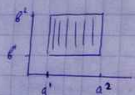
Контин.: у випадку $X_2 = \mathbb{R}^d$, $X_2 = \mathbb{B}^d$ за E
 можна взяти одну з перших σ -алгебр \mathcal{B} до
 \mathbb{R} або \mathbb{C} σ -алгебри сукупності.

Ці розгляди Н1 приверне до такого висновку.

Пр. 2: для того щоб \mathbb{R}^d значна ф-ція f на Ω
була \mathbb{F} вимірною необхідно, дост. щоб
 σ -алгебра \mathbb{F} міниміа всі прообрази $f^{-1}(B)$, B
в пробіах мусу \mathcal{U} сукупностей:

- 1) всіх вікритих кубів;
- 2) всіх закритих кубів;
- 3) всіх вікр. Π пірв.
- 4) всіх закритих Π пірв.
- 5) мінімалі всіх ортантв (при $d=1$ - променів)
виду $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$

Твердження в \mathbb{R}^d - координатній, $a \leq b \Leftrightarrow a' \leq b'$
так, що $[a, b] = \bigcap_{i=1}^k [a'_i, b'_i]$ закритий Π пірв.



Д: $F(x) = \mu([-\sigma, x])$ ф-ція F на \mathbb{R}^d поз.
ф-цією розподілу мери μ на \mathcal{B}^d

Пр. 3: мери на \mathcal{B}^d визначаються своєю ф-цією
розподілу однозначно.

1 Нехай $\mu_1([-\sigma, x]) = \mu_2([-\sigma, x])$, $x \in \mathbb{R}^d$

назначимо $\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{B}^d, \mu_1(B) = \mu_2(B)\}$

із властивостей міри (1.1.1)
вінше, що \mathcal{D} σ -алгебра. За умовою
вона містить сукупність всіх мінімалі
 $[-\sigma, x]$, $x \in \mathbb{R}^d$ яка дає меншою і породжує
 σ -алгебру \mathcal{B} , тому $\mathcal{D} = \mathcal{B}^d$

2.2 Віпаркові вимірювання

Значимо, нехай (Ω, \mathbb{F}, P) імовірнісний простір
 \mathbb{R}^d значна \mathbb{F} вимірна ф-ція на Ω поз.

випаркового вимірювання.

Тоді, щоб розрізнити скалярні $(d=1)$ вимірні $(d>1)$
випаркові вимірювання останні поз. випарковими
векторними.

Вип. елементи пр-ру $\mathcal{L}(\Omega, \mathbb{F})$ за умови що
на \mathbb{F} задано му імов. мери.

За \mathbb{F} випаркової вимірювання $\forall B \in \mathcal{B}^d$

$\mathbb{F}^{-1}(B) \equiv \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathbb{F}$ тому з випаркового
тіла, що

випарковим, мірою P на \mathbb{F} можна побудувати
нову імовірнісну мери P_{ξ} - введемо на \mathbb{F} ана
 \mathcal{B}^d поклавши

$$P_{\xi}(B) = P(\mathbb{F}^{-1}(B)) \equiv P\{\xi \in B\} \quad (1)$$

Кам: Ця заданість має сенс тільки якщо \mathbb{F} вимірності
однаковий вип. вимірювання. Саме заданість ії
права наведена (1) дозволяє у як ф-ма
визначена.

Д: Імовірнісний простір $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, P_{\xi})$ поз.
випарковим пр-ром \mathbb{R}^d значна випаркової
випарковості \mathbb{F} тільки йод і доміть експерим.

Тоді як пр-пр (Ω, \mathbb{F}, P) дозволяється
максимізувати з вимірюваннями сукупності
рівностей його рахує така ж як с-ми
коорд. у векторній алгебрі

Означимо розв'язок розширеної стрічки ↑
в \mathbb{R}^d $\{1, \dots, n\}$ як упорядкований набір

каждого числа, тобто \mathbb{R} -ф-цію на $\{1, \dots, n\}$

Тодісно з метр. \mathbb{R}^d , Фіне (1)

(Ф-цію розподілу ліній \mathbb{R}_ξ наз. ф-цією розподілу самої викинути ξ)

Задана рівністю (1) ліній розподілу \mathbb{R}_ξ наз. розподілом, а ф-цію розподілу ліній \mathbb{R}_ξ наз. ф-цією розподілу самої ξ і позначається

F_ξ . Означимо за означенням

$$(2) \quad F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\}$$

Записавши цю скалярну вибірку

$$\{a < \xi \leq b\} = \{\xi \leq b\} \setminus \{\xi \leq a\}$$

$$(3) \quad (a) \quad P\{a < \xi \leq b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$$

(!! тільки в скалярній вибірці!)

Щоб узагальнити цю ф-лу на ~~скін~~

визначимо скінченні лінійні оператори

$$\Delta F(x) = F(x^1, \dots, x^{d-1}, b^1, x^d, \dots, x^d) - F(x^1, \dots, x^{d-1}, a^1, x^d, \dots, x^d)$$

$$(\text{очевидно } \Delta^i \Delta^j = \Delta^j \Delta^i),$$

$$\Delta^1 \dots \Delta^d = \Delta^1 \dots \Delta^d$$

Тоді рівність (3) узагальнюється за індукцією по d так

$$P\{a < \xi \leq b\} = \Delta^{1,b} F_\xi \quad (\text{нижче аргументи, до них рівно по всіх напрямках}) \quad (4)$$

зберігає той і при нелінійності

П1. Для того щоб ф-ція F на \mathbb{R}^d була ф-цією розподілу деякої лінійної \mathbb{R}^d необхідно і достатньо щоб ФР1

$$\text{ФР1: } \forall a, b \in \mathbb{R}^d \quad (b \geq a) \quad \Delta^{1,b} F \geq 0$$

$$\text{ФР2: } \forall x \in \mathbb{R}^d \quad F(x + \vec{0}) = F(x) \quad (\text{неперервність "справа", при } d=1 \text{ друківсько справа})$$

$$\text{ФР3: } \forall \epsilon \in \{1, \dots, d\} \quad \lim_{x^\epsilon \rightarrow \infty} F(x) = 0$$

Для того щоб ця лінійна була лінійною мовою і достатньо, щоб F достатньо мало викинутість

$$\text{ФР4: } \lim_{x^1 \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

Зав. : при $d=1$ викинутість ФР1 рівносильна достатньо F

Камітар : історі ф-цію розподілу однозначно визначають викинутість і нерівності за доп. рівності

$$F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\}$$

У загальній вибірці викинутість ФР2 визначається

$$FP_2' \quad \forall x = F(x - \vec{0}) = F(x)$$

0: Векторы векторы \vec{F}_1, \vec{F}_n лежат в одной размерности, наз. нулевым пространством (при $n=2$ просто нулевым) или для n ортогональных векторов B_1, \dots, B_n у которых их диагональ.

$$P \{ \vec{F}_1 \in B_1, \dots, \vec{F}_n \in B_n \} = \prod_{i=1}^n P \{ \vec{F}_i \in B_i \}$$

30.03.12 1.2 Дана матрица, чтоб найти векторы $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ будем искать в нулевом пространстве. Нужно, чтоб для $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ было

$$\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \prod_{i=1}^n \vec{F}_i(\vec{x}_i)$$

нужно, чтоб F -член функцией скалярного вектора была линейной комбинацией F -членов функцией скалярных x_i .

Задача: итерационный процесс можно, что такой процесс в нуле можно считать входящим z_i (свойства функции), вычисления аргументов

(III) Пусть F_1, \dots, F_n нулевыми в сук. скалярных. Тогда $\forall a, b > 0$

$$\Delta F_1, F_n = \prod_{i=1}^n (F_{F_i}(b_i) - F_{F_i}(a_i))$$

2.3 Интеграл Лебега

\mathcal{F} σ -алгебра на Ω , а μ -мера на \mathcal{F}

0: Векторный пр-пр F -член наз. линейным, если разложим z комбинацией F -членов B_i .

линейность F -членов. Тотальность

$$f \vee g = \frac{f+g - |f-g|}{2}; \quad f \wedge g = \frac{f+g + |f-g|}{2}$$

показываем, что линейные функции таковы

$$f, g \quad f \vee g \quad f \wedge g$$

Лемма 1.1: линейные функции над ними, которые про них, что

$L_0(\Omega, \mathcal{F})$ - линейны

0: Интеграл. Пусть \mathcal{U} -дискретный линейный F -член на Ω . Интегралом на \mathcal{U} наз. функционал I \mathcal{U} линейно-аддитивный

$$1. I(af + bg) = aIf + bIg \quad (\text{линейность})$$

$$2. f \geq 0 \Rightarrow If \geq 0 \quad (\text{позитивность})$$

$$3. \text{Если } f_n \downarrow 0 \quad (\text{монотонно убывает до } 0) \\ \text{то } If_n \downarrow 0 \quad (\text{монотонно убывает до } 0)$$

Комп. : непрерывность, допустимости замещения z и z влест. у F -член

$$2' \quad f \leq Ig \leq If$$

3'. Если монотонно убывает f_n в \mathcal{U} монотонно убывает до $f \in \mathcal{U}$, то $If_n \rightarrow If$ (монотонно-непрерывность I на \mathcal{U})

0: Интеграл области значений z в \mathcal{U} монотонно F и линейность в $L_0(\Omega, \mathcal{F})$ называем \mathcal{F} -структурированными.

Будем считать z \mathcal{F} структурированными интегралами.

таким як $\forall A \in \mathcal{F}$ $I \chi_A = \mu(A)$, наз.
інтегралом заміром μ
показав. $I\mu$

\circ : Множина $A \subset \Omega$ наз. μ -нехтовною,
якщо для $\forall \varepsilon > 0$ \exists покриття (A_n^{ε}) в
 \mathcal{F} така, що $A \subset \bigcup_n A_n^{\varepsilon}$;

$$\sum_n \mu(A_n^{\varepsilon}) < \varepsilon.$$

Клас усіх μ -нехтовних множин

$$\mathcal{N}_{\mu} \quad (\text{N-готини})$$

Л1: \mathcal{N}_{μ} містить об'єднання довільної послідов.
своїх елементів.

Очевидно також, що кожна нульовина
 μ -нехтовна нульова μ -нех. множина.
саме μ -нехтовна.

Позначимо $\tilde{\mathcal{F}}_{\mu} = \{A \Delta N, A \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}_{\mu}\}$

(1) і покладемо $\tilde{\mu}(A \Delta N) = \mu(A)$

Л2: $\tilde{\mathcal{F}}_{\mu}$ σ -алгебра, а задано рівністю (1)
функція $\tilde{\mu}$ - міра

Линію переходу від \mathcal{F}, μ до $\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mu}$ можна
в тому, що в похиті $\tilde{\mu}$ -нехтовності
формулюється значно простіше:

$$\mathcal{N}_{\tilde{\mu}} = \{A \in \tilde{\mathcal{F}}_{\mu} : \tilde{\mu}(A) = 0\}$$

Як. цей перехід можна вик. завжди, то

не обмежуючи загальності, вважалимо що μ
самого початку \mathcal{F} σ -алгебра \mathcal{F} містить
 μ -нехтовні множини. (можливо $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mu}$ $\mu = \tilde{\mu}$)

\circ говорить, що в тому \mathcal{F} містить
функція $\omega \in \Omega$ справджується μ -найменше
швидкості μ -м.с. що містить. тих
як для яких вона зростає
 μ -нехтовна.

\circ : дві ф-ції співпадають μ -м.с. наз.
 μ -еквівалентними.

$\mu = P$ -імовірність міра, то функція м.с.
називають "найменше напевно" (без P !)

скорочено "м.н."

Л3: (Лебег) Серед \mathcal{F} -функціонованих інтегралів.
за мірою μ існує інтеграл із найменшого
обмежено виміщення.
(множина μ не ширше, але вона обов'язково
за мірою μ ($\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{F})$)).

\circ (Основні озн.) Інтеграл із теор. 1 наз.
інтегралом Лебега за мірою μ
а значення його на f

$$\int f(\omega) \mu(d\omega) \quad \text{або} \quad \int f d\mu. \quad \text{Це виміщення}$$

а не міра. Тобто за умовностями позначення

$$\int f d\mu$$

Якщо не інтегрування ведеться по множині
 $A \subset \Omega$ ($A \in \mathcal{F}$!!) то пишуть

$\int f d\mu$, що означає $\int f \chi_A d\mu$

Оск. за σ інтеграл Лебега змисл $\int I_{\mu}$, то
інтеграл $\int \chi_A d\mu = \mu(A)$

Л2. Область визначення інтеграла Лебега
тобто клас інтегрованих по мірою μ
Ф-ції позначимо $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

($\subset L_0(\Omega, \mathcal{F})$) оск. \int Лебега \mathcal{F} -сигма-мірою.

Л3. Основні власт. \int Лебега

Нехай $f \in L_0(\Omega, \mathcal{F})$: $\exists F \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ така,
що $|f| \leq F$ тоді $f \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

Л3. Для $f \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$\int |f| d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ -м.с

Л4. (теор. Лебега про мажорановану збіжність)

Нехай (f_n) -посл. в $L_0(\Omega, \mathcal{F})$ μ -м.с ^{збіжна до} f
і така, що $|f_n| \leq F$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і деякої
 $F \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ (так що $f_n \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ за Л2)

тоді $f \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ і $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$

Для нас розглядаємо \mathbb{R} значні Ф-ції. Числ.
мірою визначимо на \mathbb{R}^d значні Ф-ції показові,
і далі на \mathbb{R}^d значні

$$(\int f d\mu = \int \operatorname{Re} f d\mu + i \int \operatorname{Im} f d\mu)$$

(Позначення) Побудуємо мірою μ : \mathbb{R}^d знач.

\mathcal{F} -вимірною Ф-цією $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ нову міру

$$\mu_f(B) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(f^{-1}(B)) \text{ на } \mathcal{B}^d$$

(описали вибіркою якої є означення у п.2.2
 $\mathcal{P}_{\mathcal{F}} \mathcal{F}$).

Л5. (зміна міри в \int Лебега)

Для будь-якої \mathcal{F} -вимірної Ф-ції $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$,
 $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \mu_f)$ і $B \in \mathcal{B}^d$

$$\int \varphi(x) \mu_f(dx) = \int \varphi(f(w)) \mu(dw) \quad (2)$$

$$\forall A \in \mathcal{B}^d \quad \int \chi_A(x) \mu_f(dx) = \int \mu_f(dx) = \mu_f(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} \int \chi_A(x) \mu_f dx &= \int \chi_A \cdot \chi_B d\mu_f = \int \chi_{A \cap B} d\mu_f = \mu_f(A \cap B) = \\ &= \mu(f^{-1}(A \cap B)) \\ &= \mu(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)) = \int \chi_{f^{-1}(A)}(w) \mu(dw) \end{aligned}$$

Для цього мв. $\chi_{f^{-1}(A)}(w) = \chi_A(f(w))$

Отже р-ність (2) доведена, а значить і для
скалярних к-ть мв. індикаторів.

Далі аналогічно до Л4, узагальнюємо і
для дійсних каєд. значні індикаторів. Тоді узагальнюється

на ТЗ.1.1: ми роз ТН. з'ясуємо (2)
в новий рахунок:

ТН.6: (Радон, Ніндзіне). Нехай

\mathcal{H} -мод-алгебра σ -алгебри \mathcal{F} тоді для
 $\forall f \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ існує єдиний (!) з точністю
до рівності, $\Phi \in \mathcal{H} \cap L_1(\Omega, \mathcal{H}, \mu)$
(випадок відносно відносно σ -алгебри) така, що
$$\forall h \in \mathcal{H} \int_{\Omega} f h d\mu = \int_{\Omega} \Phi h d\mu$$

Позначимо $L_0(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = \{f \in L_0(\Omega, \mathcal{F}) : \int_{\Omega} f d\mu = 0\}$
лише нульові функції

$\|f\| \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Тоді якщо обмежити
 μ -св.в. Φ -чи то ми $p \geq 1$ протр L_p
нормований із нормою $\|f\|_p = (\int_{\Omega} |f|^p d\mu)^{1/p}$
зв'язує L_2 з усіх p -р-в L_p також зв'язує,
а також $\|\cdot\|_2$ породжується скаляр. доб.
 $(fg) = \int f g d\mu$

(для \mathbb{R}^d -знач. Φ -чи $\int_{\Omega} f^T g d\mu$
для σ -знач. $\int_{\Omega} f g d\mu$)

Тема 3. Числові і функціональні
характеристики випадкових
випадків

3.1. Скорочення

Φ : Скорочення випадкової величини

$\xi \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ (негативна $M\xi$ або $E\xi$)
наз. інтеграл Лебєга від ξ . застаріле Тобто за означенням
сучасне

$$M\xi = \int \xi d\mu \quad (M\xi \neq \int \xi d\mu, \text{ якщо } \xi \notin L_1)$$

Оск. Нехай $\xi \in \mathbb{R}^d$ значна випадкова величина і
 g

$g \in L_1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, P_{\xi})$ позначимо в ТЗ.3.5

$\mu = P, f = \xi, \mathcal{B} = \mathbb{R}^d (\Rightarrow \xi^{-1}(\mathcal{B}) = \Omega)$ перевіряємо
 $\chi = g$ рівність (2) до випадку

$$Mg(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) P_{\xi}(dx) \quad (1)$$

Зокрема $M\xi = \int_{\mathbb{R}^d} x P_{\xi}(dx)$ рівність (1)

показує, що Φ -чи $g(\xi)$ зокрема саме ξ
випадкової розмірності ξ , таким чином
не залежить від вибору довільності в задані
мір P на \mathcal{F} .

(Експериментально бачимо P_{ξ} , а P залишає теоретич)

Оск. за ТЗ.1.3 міра P_{ξ} випадкової Φ -чи
розподілу F_{ξ} можна перемістити Φ -м

31.03.12

(2) $Hg(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dF_{\xi}(x)$, де інтеграл у
правій частині є кратним інтегралом від суми
залишків відносно деякої деякої природи
Ф-ції F вимірює, які одиниці вимірює

на одиниці $\Delta^{10,67} F = \Delta^1 \dots \Delta^n F$
 \mathbb{R}^d розбивається на Π і Δ ; приріст F на
 Π і $\Delta^{10,67} F$ з п. 2.2

(2) $Hg(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dF_{\xi}(x)$
Н1. (з ф. 1.2.1) і Н2. 2.1)

незалежні в сумі скалярні вимаркові вимірює

$$Hg(\xi_1, \dots, \xi_n) = \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int_{\mathbb{R}^n} g(u_1, \dots, u_n) dF_{\xi_1}(u_1) \dots dF_{\xi_n}(u_n)$$

для вимірює борелівської Ф-ції g і такої, що
інтеграл збігається ?)

Н2. Нехай $\xi_1, \xi_2 \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ незалежні
вимаркові вимірює, тоді можна розглянути
розривності, тоді

$$M_{\xi_1} M_{\xi_2}^T = M_{\xi_1} M_{\xi_2}^T \quad (\text{матриця кативного власивіть})$$

Пр1. (до Н1) Нехай ξ_1, ξ_2 незалежні
скалярні вимаркові вимірює
розривності ξ_1, ξ_2 . Знайти Ф-цію розривності
вимаркові вимірює $\xi_1 + \xi_2$

За Н1 ($n=2$, $g(u_1, u_2) = \chi_{\{u_1+u_2 \leq x\}}$, x -норматр)

$$P\{\xi_1 + \xi_2 \leq x\} = \int_{u_1+u_2 \leq x} dF_1(u_1) dF_2(u_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dF_1(u_1) \int_{-\infty}^{x-u_1} dF_2(u_2) \quad (2)$$

$$P\{\xi_1 + \xi_2 \leq x\} = \int_{-\infty}^{\infty} F_{2-k}(x-u) dF_k(u) \quad k=1 \text{ або } 2, \text{ тобто } (3)$$

$k=1 \text{ або } 2 \text{ (на наш раз)} \Rightarrow$

Послеки: $\int \dots dF(u)$

не можна брати калікути інаші \int до треба
для кожного з калікути вказувати чи калікути в'ї
ро області інтегрує

$$\int_{a < u \leq b} \quad \int_{a \leq u \leq b}$$

0: Вимаркові вимірює ξ_1, ξ_2 такі, що

$$M_{\xi_1} M_{\xi_2}^T = M_{\xi_1} M_{\xi_2}^T \quad \text{мож. некорельованість Н2. свідчить.}$$

$\xi_1, \xi_2 \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

що некорельованість необхідна умова незалежності
скалярних пр. показує, що ця умова не є
достатньою

Пр2: $\Omega = [0, 1] \quad P(dw) = dw$

$$\xi(w) = \cos \pi w \quad \eta(w) = \sin \pi w, \text{ тоді } M_{\xi} = \int_0^1 \cos \pi w dw = 0$$

$$\xi(w) \eta(w) = \frac{1}{2} \sin 2\pi w \Rightarrow M_{\xi} \eta = 0 \Rightarrow M_{\xi} M_{\eta} = 0$$

Пр3. Чому $\xi^2 + \eta^2 = 1 \Rightarrow P\{|\xi| > \frac{1}{\sqrt{2}}, \eta > \frac{1}{\sqrt{2}}\} = 0$
 $\neq P\{|\xi| > \frac{1}{\sqrt{2}}\} \cdot P\{\eta > \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ тож, що ξ і η залежні

Лемма: Если φ - невариантная квадратичная форма, то

$\forall t > 0 \quad \varphi(t) > 0$ тогда и только тогда, когда

векторы ξ и η удовлетворяют

$$n \cdot \sigma \text{ Маркова } P\{|\xi| > \varepsilon\} \leq \frac{M\varphi(|\xi|)}{\varphi(\varepsilon)}$$

$$\Delta M\varphi(|\xi|) \geq M\varphi(|\xi|) \chi\{|\xi| > \varepsilon\} \geq$$

$$\geq \varphi(\varepsilon) M\chi\{|\xi| > \varepsilon\} = \varphi(\varepsilon) P\{|\xi| > \varepsilon\} \quad \square$$

(Почему момент или сам по себе или...)

0: если $M|\xi|^p, p > 0$ (або сильное σ)

то абсолютный момент порядка p вектора ξ .

Если ξ - вектор, то

$M|\xi|^p < \infty$, то $M\xi^p$ наз.

вариантной величиной ξ . В чистоте означен

$n \in \mathbb{N}$.

Моменты вектор. велич. $\xi - M\xi$ наз.

центрированными моментами ξ . Аналогично

означаются абсолютные моменты

вариантного вектора.

3.2. Ковариантная Дисперсия

Корреляция

$$0: \text{ задана величина } R_{\xi\eta} = M\xi\eta^T - M\xi M\eta^T \quad (1)$$

матрица $R_{\xi\eta}$ наз. ковариантной матрицей (или ковариантной матрицей) векторов $\xi, \eta \in L_2(\mathbb{R}, \mathcal{F}, P)$.

Значимость свойства (неинтеграл) можно

$$M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)^T) \equiv M(\xi\eta^T - \xi M\eta^T -$$

$$- (M\xi)\eta^T + M\xi(M\eta)^T) = M\xi\eta^T - M\xi M\eta^T - M\xi M\eta^T + M\xi M\eta^T$$

что дает эквивалентный выраж ковариантной матрицы

$$R_{\xi\eta} = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)^T$$

$$\text{Позначившие } \tilde{\xi} = \xi - M\xi, \tilde{\eta} = \eta - M\eta \quad (\Rightarrow M\tilde{\xi} = 0 \text{ и } M\tilde{\eta} = 0 \text{ нулевых размерности})$$

Получим $R_{\xi\eta} = M\tilde{\xi}\tilde{\eta}^T$

$$R_{\xi\eta} = M\tilde{\xi}\tilde{\eta}^T \quad (2)$$

Свойства

$$R1. \quad R_{\eta\xi} = R_{\xi\eta}^T$$

2. Если A, B - невариантные матрицы тех же размерности, что и ξ, η , то

$$R_{A\xi B\eta} = A R_{\xi\eta} B^T$$

R3. якщо ξ такої же розмірності, що й η

$$R_{\xi, \eta+\zeta} = R_{\xi, \eta} + R_{\xi, \zeta}$$

R4. для + кватерніонних a, b ($\dim a = \dim \xi$, $\dim b = \dim \eta$)

$$R_{\xi, a+b} = R_{\xi, \eta}$$

Зоб. R4. $\Delta \tilde{\xi} + a = \tilde{\xi} \Rightarrow \Delta$

(3) R5. якщо $\dim \xi = \dim \eta$ і $R_{\xi, \eta} + R_{\eta, \xi} = 0$
то $R_{\xi, \eta} = R_{\eta, \xi} = 0$ (також нульові матриці)

Δ + векторів-символів a, b і вектора-реша z (чи однакові розмірності)

$$z a b^T + z b a^T z^T = z(z a)(z b)$$

$a = \tilde{\xi}$, $b = \tilde{\eta}$ і врівнявши відповідно від обох частин рівності з урахуванням R2

$$z(R_{\xi, \eta} + R_{\eta, \xi})z^T = z z R_{\xi, \eta} z^T$$

$$\forall z \quad z R_{\xi, \eta} z^T \Rightarrow R_{\xi, \eta} = 0 \quad \Delta$$

Якщо ξ, η симметричні векторні вектори, то $R_{\xi, \eta}$ мають $\cos(\xi, \eta)$ (big covariance) поз. число коваріаційною (фривін не вектор.) даних векторних векторів

Отже для векторних векторів

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}$$

$$R_{\xi, \eta} = (\cos(\xi_i, \eta_j)), \quad i = \overline{1, n} \quad j = \overline{1, m}$$

Для вектор. вектора $\xi \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ матрицю $R_{\xi, \xi}$ називають $D\xi$ і наз. дисперсією векторного вектора ξ (по анал. variance, тому коваріаційною наз. кодисперсією)

З властивостей коваріаційної матриці і свого D виводяться такі властивості дисперсії:

D1. $D\xi > 0$ (це означає невід'ємно визначеність матриці)

Δ для + вектора-реша z такої же розмірності, що й ξ

$$z D \xi z^T \stackrel{(2)}{=} H z \xi \xi^T z^T \stackrel{(2)}{=} H(z \tilde{\xi})^2 \Delta$$

D2. для + кватерніонної матриці C такої, що добуток $D C \xi$ існує дисперсія

$$D C \xi = C^T D \xi C$$

докинемо $\forall C \in R$ $D C \xi = C^2 D \xi$

D3. для + кватерніонного вектора a ($\dim a = \dim \xi$)

$$D(\xi + a) = D\xi \quad \text{це наслідок властивості R4.}$$

D4. $D\xi = 0 \iff \xi = H\xi$ м.н. (тобто ξ нульовий)

$$\Delta \forall z \quad H(z \tilde{\xi})^2 = 0 \iff$$

$$\forall z \quad z \tilde{\xi} = 0 \quad \text{м.н.} \iff \tilde{\xi} = 0 \quad \Delta$$

D5. $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + R_{\xi, \eta} + R_{\eta, \xi}$
($\dim \xi = \dim \eta$)

$$A(\tilde{x} - \tilde{y})(\tilde{x} - \tilde{y})^T = \tilde{x}\tilde{x}^T + \tilde{y}\tilde{y}^T + \tilde{y}\tilde{x}^T + \tilde{x}\tilde{y}^T$$

визначимо оператори впр обох частин D

МН. (з D5, D5)

$$D(\tilde{x} + \tilde{y}) = D\tilde{x} + D\tilde{y} \iff R_{\tilde{x}\tilde{y}} = \mathbb{O} \iff \tilde{x}, \tilde{y} \text{ некорреливані}$$

Замітимо, в н-сті матриця \tilde{E} на $|\tilde{E}|^2$

сформувати н-сті Чебишова

$$(4) \quad R + |\tilde{E}| \quad R + |\tilde{E} - H\tilde{E}| > \varepsilon \leq \frac{\text{tr } D\tilde{E}}{\varepsilon^2}$$

$(|x|^2 = \text{tr } x x^T \text{ тут враховано})$

Це перші два розділи з вищ. Д1 і Д4 показує, що розміри є лінійною функцією його навантажувального середнього значення

$$\text{Д1: Задана } \rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\text{cov}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\sqrt{D\tilde{x}} \sqrt{D\tilde{y}}} \text{ число}$$

$\rho(\tilde{x}, \tilde{y})$ нод. кореляцією випадкових величин

$$\tilde{x}, \tilde{y} \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P) \quad D\tilde{x} > 0 \quad D\tilde{y} > 0$$

Ак. $\text{cov}(\tilde{x}, \tilde{y}) = H\tilde{x}\tilde{y}^T$, то означимо кореляційну матрицю

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{H\tilde{x}\tilde{y}^T}{\sqrt{D\tilde{x}} \sqrt{D\tilde{y}}}$$

увеличимо як випадкові величини

$$\tilde{x}' = \frac{\tilde{x}}{\sqrt{D\tilde{x}}} \quad \tilde{y}' = \frac{\tilde{y}}{\sqrt{D\tilde{y}}} \quad \text{так, щоб } H\tilde{x}' = 0 = H\tilde{y}'$$

можливо приписати останню рівність у вигляді (5)

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = H\tilde{x}'\tilde{y}'$$

Властивості кореляції

$$\text{Cor 1. } |\rho(\tilde{x}, \tilde{y})| \leq 1$$

$$\Delta (\tilde{x}' \pm \tilde{y}')^2 = \tilde{x}'^2 \pm 2\tilde{x}'\tilde{y}' + \tilde{y}'^2 \xrightarrow{(5)} H(\tilde{x}' \pm \tilde{y}')^2 = 2(1 \pm \rho(\tilde{x}', \tilde{y}')) \Rightarrow \text{ліва частина}$$

$$\Delta H(\tilde{x}' \pm \tilde{y}')^2 = 2(1 \pm \rho(\tilde{x}', \tilde{y}')) \Rightarrow \text{ліва частина}$$

$\Delta \geq 0$

Cor 2. для $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b, d \in \mathbb{R}$

$$\rho(a\tilde{x} + b, c\tilde{y} + d) = \rho(\tilde{x}, \tilde{y}) \text{ згідно а.с.}$$

$$\Delta \text{ cov}(a\tilde{x} + b, c\tilde{y} + d) \xrightarrow{\text{згідно } R_1, R_2} ac \text{ cov}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

$$\text{згідно властивості Д2 і Д3 } D(a\tilde{x} + b) \xrightarrow{D_2, D_3} a^2 D\tilde{x}, \quad D(c\tilde{y} + d) = d^2 D\tilde{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\text{cov}(a\tilde{x} + b, c\tilde{y} + d)}{\sqrt{D(a\tilde{x} + b)} \sqrt{D(c\tilde{y} + d)}} = \frac{ac}{|a||c|} \frac{\text{cov}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\sqrt{D\tilde{x}} \sqrt{D\tilde{y}}} \quad \Delta$$

Cor 3. $|\rho(\tilde{x}, \tilde{y})| = 1 \Rightarrow \exists$ невід'язкові a, b

$\tilde{y} = a\tilde{x} + b$ (лінійно залежні) м.н

$$\Delta \rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \pm 1 \xrightarrow{(6)} H(\tilde{x}' \pm \tilde{y}')^2 = 0 \xrightarrow{T_{2.3.3}} \tilde{x}' = \tilde{y}' \text{ м.н } \Delta$$

Згідно з останніми результатами пункту 2.3 простір

$L_2(\mathcal{R}, \mathcal{F}, P)$ є векір'юю скінченним розмірним

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = H\tilde{x}\tilde{y} \quad \text{з} \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) = \text{cov}(\tilde{x}, \tilde{y}) \text{ тоді}$$

$\rho(\vec{z}, \eta) = \cos \vec{z} - H\vec{z}, \eta - M\eta$
 нормированность — ортогональности
 в крайних точках

(1) $\int_{\mathbb{R}^d} \eta(x) dx = 1$

$$M_{\vec{z}} \int_{\mathbb{R}^d} \eta(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \eta(x) dx$$

$$M_{\vec{z}} \int_{\mathbb{R}^d} \eta(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \eta(x) dx$$

$$M_{\vec{z}} \int_{\mathbb{R}^d} \eta(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \eta(x) dx$$

Ф-ція вимаркової вимірності

як приклад Фур'є-стінкеса і.о. ф-ція розподілу

Щоб продемонструвати з'ясувати характер ф-цією з і.о. ф-цією розподілу

$\hat{F}_{\vec{z}}$ з рівності (1) випливає

Лема 1. Нехай $M|\vec{z}| < \omega$

Тоді $M\vec{z} = -i\vec{F}_{\vec{z}}(0)$. Якщо ж показати
 $M|\vec{z}|^2 < \omega$ то $M\vec{z}\vec{z}^T = -\hat{F}_{\vec{z}}''(0)$

Лема 2. Ф-ція розподілу визначається своєю
 χ -функцією ф-цією ортогональності

Лема 3. Для того щоб вимаркові вектори $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n$
 мали різні розмірності були не в сумішності
 між, розт. між

$$\vec{F}_{\vec{z}_1} \dots \vec{F}_{\vec{z}_n}(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n) = \prod_{k=1}^n \vec{F}_{\vec{z}_k}(\vec{z}_k), \text{ тобто } \chi\text{-функція (2)}$$

Ф-ція вимаркової вимірності була χ -функцією
 розподілу χ -функції векторів вимірності.

$\left(\begin{smallmatrix} \vec{z}_1 \\ \vec{z}_2 \end{smallmatrix} \right)$ між.

$$M\vec{z}\vec{z}^T = M\vec{z}M\vec{z}$$

Лема 4. Розширення вимаркової вимірності
 $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n$

і такі що $\vec{F}_{\vec{z}_k}' = \vec{F}_{\vec{z}_k}$, $k = \overline{1, n}$

За умови (2) вектори $\left(\begin{smallmatrix} \vec{z}_1 \\ \vec{z}_2 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} \vec{z}_1' \\ \vec{z}_2' \end{smallmatrix} \right)$ мають
 та ж. ортогональний розподіл.

Лема 5. χ -функція ф-ції суми незалежних вимаркових
 векторів ортогонального розподілу є розподілом
 χ -функції ф-ції розподілу.

Лема 6. Рівність $\vec{z}_k = \vec{z}$, $k = \overline{1, n}$

Лема 7. Якщо область значень вим. вектора \vec{z} виходить
 за \mathbb{R}^d , то функція вим. вектора інтегральна
 неперервна.

Лема 8. Функція розподілу Фур'є-стінкеса розподілу
 приклад Лемма - стінкеса, що дається
 ф-цією розподілу

②) $\tilde{F}(s) = M e^{-sF} = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x)$, $s \in \mathbb{R}_+$ (тоді інтеграл збігається)
тобто це перетворення Фур'є - і добуток всіх невід'ємних частини, що

Якщо всі компоненти век. F невід'ємні, тобто \mathbb{Z}_+ значна, то рівність цих перетворень век. перетворює або ті ж самі Φ -функції

$$g_s(s) = M s^{\frac{d}{2}} \quad s \in [0, 1]^d \quad (d \text{ - мірність кубу})$$

визначається не через Φ -функцію розподілу, а через розподіл.

де $s^{\frac{d}{2}} = s_1^{\frac{d_1}{2}} \cdot \dots \cdot s_d^{\frac{d_d}{2}}$ (місцеві експоненти)
вектор у шкільній вектор

Отже $\tilde{F}_z(s) = \tilde{F}_z(is)$

$$\tilde{F}_z(z) = \tilde{F}_z(-iz)$$

аналогічні Φ -м. добуток шкільні g_z , \tilde{F}_z

Тому властивості цих перетворень аналогічні власт. x -співвідношень функцій. Зокрема згадуємо в сисі. Найважливіше перетворення Фур'є, T_2 , T_3 , iH .

34. (Згадані умовні співвідношення)

Умовні співвідношення

Нехай $(\mathcal{Q}, \mathcal{F}, P)$ повільно з мірою

$H \in \mathcal{F}$ $P(H) > 0$ ввирини шовірину міру
 $P_H(A) = P(A|H)$ \mathbb{R}^d знач

①: Умовних вірності H шовірину вираховує
визначені $F \in L_1(\mathcal{Q}, \mathcal{F}, P)$

$$\int F dP_H \quad \text{чи}$$

(чи область змінних, якщо немає мисли інтегрування)

індикаторна умовна шовірину $M(F|H)$

$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ де $\forall A \in \mathcal{H} : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ лебелі

$M(X_A|H) = P(A|H)$ звідси найпоширеніше
обов'язково частини цієї рівності отримуємо за

$$M(F|H) P(H) = M(F X_H) \quad (1)$$

де $F = X_A$ перекідо до індикаторів шовірину
рогального вирахову рогальний, тому
рівність (1) роведена де $F \in L_1(\mathcal{Q}, \mathcal{F}, P)$

②: Умовними шовірину вірності σ -алгебри

$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ наз. вирахову вел. $\mathcal{G} \in L_1(\mathcal{Q}, \mathcal{H}, P)$

$(\Rightarrow \mathcal{H}$ вирахову вірності вужчої σ -алгебри)

$\forall H \in \mathcal{H}$

$$M(F X_H) = M(\int F dP_H)$$

(чи інтеграл лебелі)

(2)

або що це саме $\int_H F dP = \int_H \int F dP$

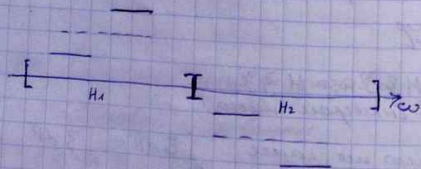
Визначимо, єдиність з точністю до Радікавельності
 ви. виши. ξ з Т.2.3.6 (Радона-Никодима
 (фактично μ довільно імовірнісна міра)
 Умовні шовівання ξ вісноно \mathcal{H} позначається
 $H(\xi | \mathcal{H})$

Лр.1 Нехай $\mathcal{H} = \{\phi, \Omega\}$ (нап. кінтегральна
 σ -алгебра)
 вимірний вісноно цієї σ -алгебри є тільки
 стали ф.ч. ξ наму виши. ξ направді не
 вимаркова, а значить $\xi = H\xi$

Тоді імовірісн $\mu(\xi)$ $H = \Omega$ дісноно
 $\xi = H\xi$ таким чином безумовні шовівання
 - окрімні вимарок умовно.

Якщо безумовні шовівання це результат
 повного осереднення ви. виши, то умовна
 це результат неповного осереднення

Лр.2



Нехай сама ξ набуває 4 ре значення (вісь
 ординат - ξ)

$$--- \xi \quad M(\xi | \mathcal{H})$$

Лр.3. Нехай $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$; $\mathcal{F} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, де
 $\mathcal{A}_i \in \mathcal{F}_i$; $P(dw) = P(dw_1)P(dw_2)$;

$\mathcal{H} = \{ \mathcal{A}_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \in \mathcal{F}_1 \}$ тобто фактично \mathcal{H}
 це іпримозначення \mathcal{F}_1 .

$$\text{Тоді} \quad H(\xi | \mathcal{H})(w_1) = \int_{\Omega_2} \xi(w_1, w_2) P_2(dw_2)$$

(нашкоче усереднення)

Лр.4 (Формульна версія Лр.2)

Нехай \mathcal{H} породжується повною групою порів,
 покочено, що в цьому вимарку $\mathcal{H} = \{H_i, i \in I\}$

$$H(\xi | \mathcal{H}) = \sum_{i \in I} H(\xi | H_i) \chi_{H_i} \quad (3)$$

з позначено праву нашіну рівності через
 $\xi \in L_1(\Omega, \mathcal{H}, P)$ треба тільки перевірити власт.2.
 Очевірно \mathcal{H} співпадає з усіма імовірнісними

$$\bigcup_{j \in I} H_j, \quad J \in I. \quad H = H_j \quad (2)$$

$$\text{Очевірно} \quad M \xi H_j = M(\xi | H_j) \chi_{H_j} \xrightarrow{(1)} (2)$$

Умовні шовівання узагальнює вір безумовного
 ті властивості інтеграла: лінійність,
 монотонність, уникнення перехр, але
 є і специфічні властивості.

Теорема Вієна

0. покажемо що вст. випадок \mathcal{F} не дає нам
всіх випадків \mathcal{H} , то для $\forall B \in \mathcal{F}$
 $\forall H \in \mathcal{H}$

можіть $\mathcal{F}'(B)$ і H незалежні.

1.1: якщо \mathcal{F} незалежить від H , то для

$$\forall H \in \mathcal{H} \quad M(\mathcal{F} | H) = P(H) M(\mathcal{F})$$

і $\forall A \in \mathcal{F}$, незалежної від усіх на \mathcal{H} ,

$$M(\mathcal{A} | H) = M(\mathcal{A} | H \cap H) = P(A | H) = P(A) P(H) = P(H) M(\mathcal{A})$$

Переходимо до індикаторів до загального випадку стандартний.

$$1.2: \mathcal{Z} = M(\mathcal{F} | \mathcal{H}) \Rightarrow \mathcal{Z} \in L(\Omega, \mathcal{H}, P)$$

і обчислюємо \mathcal{H} випадкової \mathcal{A}

$$M(\mathcal{F} | \mathcal{A}) = M(\mathcal{Z} | \mathcal{A})$$

і переходимо до загального випадку до загального стандартний Δ

\mathcal{H} (умовне сировання)

1.1. Якщо \mathcal{F} незалежить від \mathcal{H} , то

$$M(\mathcal{F} | \mathcal{H}) = M(\mathcal{F})$$

і права частина дорівнює незалежності \mathcal{H} випадкової
тому потрібно перевірити рівність (2), а
вока і твердженням лемми Δ

і \mathcal{H} випадкової випадкової \mathcal{H}

1.2

$$M(\mathcal{F} | \mathcal{H}) = M(\mathcal{F} | \mathcal{H}) \eta$$

і як права частина рівності \mathcal{H} випадкової
потрібно лише перевірити рівність (2) яка
в подальшому показує рівність даних

$$M(M(\mathcal{F} | \mathcal{H}) | \mathcal{H}) = M(\mathcal{F} | \mathcal{H})$$

для $\eta = \mathcal{A}$, де $A \in \mathcal{H}$. Оскільки рівність має
випадок $M(M(\mathcal{F} | \mathcal{H}) | \mathcal{A}) = M(\mathcal{F} | \mathcal{A})$,

як і це випливає з умовного сировання
ок. $A \cap H \in \mathcal{H}$.

1.3

Нехай $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$

$$M(M(\mathcal{F} | \mathcal{H}_2) | \mathcal{H}_1) = M(\mathcal{F} | \mathcal{H}_1) \quad (\text{виставить поштовання})$$

і формально $\mathcal{Z}_1 = M(\mathcal{F} | \mathcal{H}_1)$

можемо записати $M(\mathcal{Z}_2 | \mathcal{H}_1) = \mathcal{Z}_1$.

ок. $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}_1$ \mathcal{H} -випадкової

$$\forall H \in \mathcal{H}_1 \quad M(\mathcal{Z}_2 | H) = M(\mathcal{Z}_1 | H)$$

як вибори H і σ -алгебри $H \in \mathcal{H}_i$, $i=1,2$

$$M(\mathcal{Z}_1 | H) = M(\mathcal{F} | H)$$

Q: породжену випадкового випадкою η пораджають \mathcal{H} ? найменша з σ -алгебр (через яку) $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, таких що випадковий η

\mathcal{G} випадковий.

ЛЗ: довівши \mathcal{F}^{η} -випадковий випадковий випадковий η випадковий доведення випадковий \mathcal{F} -функції η

$$M(\xi | \eta) \stackrel{\text{def}}{=} M(\xi | \mathcal{F}^{\eta})$$

Л1 (з Л2, Л3 і з умовного сподівання)

Наступні властивості випадковий випадковий \mathcal{F} -функції

h

$$1) M(\xi | \eta) = h(\eta)$$

$$2) \forall h \in \mathcal{H} \quad M(\xi | \eta) = M(h(\eta) | \eta)$$

3) для η однієї з доведень випадковий \mathcal{F} -функції

$$M(\xi | \eta) = M(\eta(h) | \eta)$$

Л1: Нехай ξ і η розподілені d і m відповідно. Тоді для η випадковий \mathcal{F} -функції g на \mathcal{H}^m

$$M(g(\xi, \eta) | \eta) = M(g(\xi, \eta) | g = \eta)$$

за умови, що всі сподівання існують при $\forall \eta \in \mathcal{H}^m$

Q: Умовні сподівання $M(\chi_A | \mathcal{H})$ наз. умовним випадковим χ випадковим випадковим випадковим, пораджає

$P(A | \mathcal{H})$. Узявши в \mathcal{H} $\mathcal{H}_1 = \{ \emptyset, \Omega \}$, отримаємо $\mathcal{F} = \mathcal{H}_1$, одержимо випадковий \mathcal{F} -функцію $P(A)$ імовірності

$$P(A) = M(P(A) | \mathcal{H})$$

Тема 4. Абсолютно неперервний розподіл

4.1. Точково абсолютно неперервного розподілу, випадковий.

Функція розподілу F і сама розподілені випадковий \mathcal{F} -функції f та така, що $\forall x$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad (1)$$

(в одновимірному випадку)

Функція f - наз. щільністю або щільністю розподілу.

З (1) маємо в одновимірному випадку

$$f(x) = F'(x) \quad \text{м.с. (мають скрізь)} \quad (2)$$

(але не обов'язково скрізь)

Функція "м.с." не дозволяє приймати рівності (2) за \mathcal{H} випадковий, з цієї рівності випадковий випадковий, що

$$\int_a^b f(x) dx \leq F(b) - F(a)$$

(~~не~~ неперервність) можуть бути строгою (!) м.д.

$$(1) \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du = \int_{-\infty}^x \dots \text{ якщо } d=1$$

$$(1) \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du = \int_{-\infty}^x \dots, \quad d=1$$

$$(2) \quad f(x) = F'(x) \text{ м.д.}$$

Трп. У пункті 3.1.1 ми знайдемо $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, F_1, F_2$

$$(3) \quad F(x) = \int_{-\infty}^x F_k(x-v) dF_{3-k}(v) \quad k=1 \text{ або } 2$$

Покажемо що за умови абсолютної неперервності розподілу функції мають або неперерв з

$$(4) \quad \text{суцільного} \quad f(x) = \int_{-\infty}^x f_k(x-v) dF_{3-k}(v)$$

$$\text{Маємо} \quad \int_{-\infty}^x f(u) du = \int_{-\infty}^x du \int_{-\infty}^u f_k(u-v) dF_{3-k}(v) =$$

$$\text{Змінивши порядок інтегрування} = \int_{-\infty}^x dF_{3-k}(v) \int_{-\infty}^x f_k(u-v) dv =$$

$$= \int_{-\infty}^x dF_{3-k}(v) \int_{-\infty}^{x-v} f_k(t) dt \stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^x F_k(x-v) dF_{3-k}(v)$$

\Rightarrow заради рівності (3) і (4) $\phi \cdot \psi$ повинні співвідноситися (1).

За умови (1) $dF(x) = f(x)dx$ тому всі раніше дані в шерегах $\phi \cdot \psi$ розподілу і шерегах поведінки в шерегах шукати лише одна і та ж

Так (3.1.1) і (3.1.2) (обидві) набувають вигляду

$$M\Phi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) f_{\xi}(x) dx \quad (5)$$

$$\text{Зокрема} \quad Me^{i\langle x, \xi \rangle} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} f_{\xi}(x) dx$$

ліну нашім рівності ми маємо в. 3.4 асимптотичного ϕ -функції вибіркової вибірки та її розподілу (міри).

Там же кинем

як перетвір Фур'є його шукати

у зв'язку з чим x -співну ϕ -функція неперервного розподілу познач.

$$\hat{f}_{\xi} \text{ (а не } \hat{F}_{\xi} \text{, як у заг. виборки)}$$

3.2.22 Т1: конкретизується для абсолютно неперервних розподілів формулюється так:

для того щоб компоненти вибіркового вектора абсолютно неперервними розподілами

коб. і дост. щоб щільності розподілу цього вектора були мінорантами добутку йог компонент:

$$f_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{\xi_i}(x_i)$$

Т2. Нехай вибіркової вектори ξ_i у ортаковій розмірності мають ортаковій розмірності d абсолютно неперерв. і пов'язані рівністю

$$h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ нелинійне диференціальне відображення таке, що } \det h'(x) \neq 0 \text{ м.д. (якобіан)}$$

\Rightarrow тоді $\exists h^{-1}$ визначене зворотним образом

$$(6) \quad \text{Топі } f_{\eta}(x) = \frac{f_{\xi}(h^{-1}(x))}{|\det h'(h^{-1}(x))|}$$

(7) Або що ми маємо $f_{\xi}(x) = f_{\eta}(x) |\det h'(x)|$
 і для \forall об'єктів розмірності P_{ξ} і P_{η} вимірювань
 вимірювань пов'язані рівністю

$$(8) \quad P_{\eta}(B) = P_{\xi}(h^{-1}(B))$$

ймовірність того, що $y \in B$

Топі за Т.З.3.5 для \forall об'єктів "Борелівської"
 ф.ч. φ на \mathbb{R}^d

$$\text{Буде } \int \varphi(x) P_{\xi}(dx) = \int \varphi(h(x)) P_{\eta}(dx)$$

$$(\mu \leftrightarrow P_{\xi}, f \leftrightarrow h, \mu_{\eta} \leftrightarrow P_{\eta})$$

$$\text{Але } P_{\xi}(dx) = f_{\xi}(x) dx$$

$$P_{\eta}(dx) = f_{\eta}(x) dx \Rightarrow$$

$$\int \varphi(x) f_{\eta}(x) dx = \int \varphi(h(x)) f_{\xi}(x) dx = \left| y = h(x) \right| =$$

$$\left(\int_B \varphi(x) \mu_{\eta}(dx) = \int_{h^{-1}(B)} \varphi(h(w)) \mu(dw) \right)$$

$$= \int \frac{\varphi(y)}{|\det h'(h^{-1}(y))|} f_{\eta}(y) dy.$$

$$\xRightarrow{\varphi \text{ гл.}} (6) \quad \Delta$$

4.2. Дімовні абсолютно

неперервного розмірності

$A - \mathbb{R}^d$ дивета об'єкт рівномірна A (або на A , якщо
 ввізрок) розмірності дивається нульовою

$$f(x) = \frac{\chi_A(x)}{\int \chi_A(x)}$$

Наприклад якщо $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$
 то $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$

Така розмірність з параметром α і
 параметром масштабу β дивається нульовою
 $\alpha, \beta > 0$

$$g(x|\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{Тоді маємо } \tilde{g}(s|\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-sx} g(x|\alpha, \beta) dx$$

$$\xRightarrow{(9)} \tilde{g}(s|\alpha, \beta) = \left(\frac{\beta}{\beta + s} \right)^{\alpha} \quad (10)$$

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^n \tilde{g}(s|\alpha_k, \beta) = \tilde{g}(s|\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}, \beta)$$

Н 4.3.4.1

\Rightarrow

(11): сума незалежних вимірних вимірювань
 розмірності за такою ж законом з
 однаковими параметрами масштабу має
 таку ж параметр масштабу і з тис

те параметры роз.

0: Таблица розширення параметри форм

$\alpha = 1$ (тоді β призначають на x)

ноу. показником із параметром λ .

Як видно з (9) кінцевого такого розподілу є $f(x|\lambda)$ буде

$$f(x|\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

торі згідно з (1) ф-цією розподілу

$$(11) \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Ці вирази показують роботу показниковий розподіл.
Нехай E рівняння невідомо випаркова
випадкова

$$G(t) = P\{\varepsilon > t\}$$

Очевидно $\{F \geq t\} \subset \{F \geq 1\}$ то же означением
условной вероятности можно

$$P\{X > s+t | X > s\} = \frac{G(s+t)}{G(s)}$$

Отсюда легко найти разность ε затрат
равенство (11), тогда $G(t) = e^{-\lambda t}$

(12) mo $G(s+t) = G(s)G(t)$

(13) $P\{X > 1+t | X > 1\} = P\{X > t\}$

Визначено рівність (43) властивість розпорядку
набірської ~~гвинт~~ вип. ~~випадковий~~ φ наз. виродженою імплементацією

Укажи Е. Владимирову требования уголовного процесса, т.е. условия, которые должны быть выполнены в уголовном процессе, чтобы не допустить нарушения прав и законных интересов личности и не допустить нарушения принципов уголовного права.

У класі абсолютно чистих розчинів на R_1 що властивість має тільки показниковий розчин

справді більше ніж встановили еквів. (13), (12)

а функциональные р-тис (тн) явля в массовости.
нмер. Ф-тис ермий ρ точністю до 1 мевіртн. р-док

$$G(t) = e^{-\lambda t}$$

Розподіл з нульовою $q(x|a) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}$ наз.

розподілом Коші з параметром $\alpha > 0$.

випаркова випливає \exists з такою рідністю
на місці спроби \exists ок.

$\int \frac{x}{a^2+x^2} dx$ результат
 Итого $\hat{g}(t|a) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{a^2+x^2} dx$ (14)

аргумент якої подано +

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{a^2+x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itix}}{a^2+x^2} dx = 2\pi i \operatorname{res}_{a i} \frac{e^{itix}}{a^2+z^2} = \pi e^{-a|t|} / a$$

$$\Rightarrow \tilde{g}(z|a) = e^{-a|z|} \quad \text{H.3.41} \quad \Rightarrow$$

12. F_1, \dots, F_n незалежні випадкові вел. розподілені за законом χ^2_k розподілені з параметром

параметром $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}$
 0. Нормальный або Гауссовий розподіл на \mathbb{R} із параметрами $a \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ задається щільною

$$(15) \quad \varphi(x|a, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

даючи $\varphi(x|a, 1)$ пишемо $\varphi(x)$ так, що

$$(16) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

ξ_j (15) мають n незалежних x -сильну ϕ -функцію розподілу

$$\hat{\varphi}(z|a, \sigma^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{i z x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i z x} \varphi(x|a, \sigma^2) dx \quad (15), (16)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i z x} \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) dx = e^{i z a} \hat{\varphi}\left(\frac{z}{\sigma}\right),$$

$$\hat{\varphi}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i z x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{-\frac{z^2}{2}} \Rightarrow$$

отже маємо $\hat{\varphi}(z|a, \sigma^2) = e^{i z a - \frac{1}{2} \sigma^2 z^2}$

зауважимо, що вираз x -сильної ϕ -функції на відрізку \mathbb{R} пустини має $\sigma=0$ іррегулярності тоді на вираз x -сильної ϕ -функції "нелинійно"

визначає раціональну \mathbb{Q} багаточлен.

нормальний розподіл на \mathbb{R}^d із параметрами $a \in \mathbb{R}^d$ і R (симетрична

невід'ємно визначена $d \times d$ матриця)?

кож. розподіл ρ x -сильної ϕ -функції

$$\hat{\varphi}(z|a, \sigma^2) = e^{i z a - \frac{1}{2} z R z^T} \quad (17)$$

лино векторний вектор ξ має розподіл то

мають $\xi \sim \mathcal{N}(a, R)$ а в одновим. випадку

$\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Розподіл $\mathcal{N}(0, 1)$ наз. стандартним

нормальним. Цю x -сильну ϕ -функцію позначають

кратко $\hat{\varphi}(z)$ не визначаючи параметр. $\hat{\varphi}_j$ (17) мають

$$\hat{\varphi}(z) = e^{-\frac{1}{2} z^2} \quad (18)$$

Лемма 1: раціональну серед коефіцієнтів нормального розподіленого вектора буде нуль. В сукупності мовлять, іррегулярності, щоб вони були некорельованими.

Лема 2: Нехай ξ має розподіл \mathcal{N} тоді

$$M\xi = a, \quad D\xi = R$$

$$\Delta \quad \xi_j \neq 0 \Rightarrow \hat{\varphi}'(0|a, \sigma^2) = i a$$

$$\hat{\varphi}''(0|a, \sigma^2) = -R - a a^T \Rightarrow \text{Лема 3.4.1}$$

$$M\xi = -i \hat{F}'_{\xi}(0)$$

$$M\xi \xi^T = -\hat{F}_3(0) \Rightarrow \Delta$$

Дов. Лема 1:

Δ лінійні компоненти вектора некорельовані \Rightarrow

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (17) \quad \hat{\varphi}(z|a, R) = \prod_{j=1}^n \hat{\varphi}(z_j|a_j, \sigma_j^2)$$

тензорний добуток. А це згідно ТЗ.4.2

те саме, що компоненти незалежності D.

(18) $\Rightarrow \hat{\varphi}(z) = \prod_{j=1}^n \hat{\varphi}(z_j)$. При цьому $\hat{\varphi}(t) \in$
 n -вимірною функцією розподілу $N(0,1)$ щільно-
 сті якого дається рівністю (16). При цьому да-

ТЗ.4.1: 4.1.1 компоненти випадкового вектора z
 $\hat{\varphi}$ незалежні, а значить щільність $\varphi \in$ тензорний
 добуток. Цим же узагальненим рівністю (16)
 на багатовимірні випадки.

$$(19) \quad \varphi(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2} x^T x} \equiv (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} x^T x}$$

14. Нехай $\xi \sim N(a, R)$ в Q -вимір. вектор
 такий що матриця було
 і матриця $v \in v+Q\xi$

$$\text{тоді } \eta \sim N(v+Qa, QRQ^T)$$

$$(20) \quad \text{а за умовою } H e^{i z \xi} = \hat{\varphi}(z | a, R), \text{ і також за умовою}$$

$$H e^{i z \eta} = H e^{i z (v+Q\xi)} \stackrel{(20)}{=} e^{i z v} \hat{\varphi}(z Q | a, R)$$

$$\stackrel{(17)}{=} \hat{\varphi}(z | v+Qa, QRQ^T)$$

З (19), 14. і ТЗ.4.2 випливає такий результат

ТЗ.2 : нехай $\xi \sim N(a, R)$ і матриця R
 невід'ємна, тоді розподіл ξ абсолютно

неперервний з щільною $\varphi(x | a, R) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det R}}$.

$$\cdot \exp \left(-\frac{1}{2} (x-a)^T R^{-1} (x-a) \right)$$