

## Лекція 8. Центральна гранична теорема.

Доведена нами раніше інтегральна гранична теорема Муавра-Лапласа показала, що із зростанням кількості  $n$  випробувань в схемі Бернуллі центрована та нормована сума випадкових величин  $\sum_{k=1}^n \xi_k$ , яка визначає кількість успіхів в серії  $n$  випробувань, поводить себе майже як випадкова величина із стандартним нормальним розподілом. Дійсно, враховуючи відомі значення числових характеристик біноміального розподілу можна записати:

$$P\left\{n_1 \leq \sum_{k=1}^n \xi_k \leq n_2\right\} = P\left\{a \leq \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right\} = P\left\{a \leq \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - \sum_{k=1}^n M\xi_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n D\xi_k}} \leq b\right\} \approx \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad (1)$$

$$\text{де } a = \frac{n_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad b = \frac{n_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Цілий ряд вчених, зокрема П.Л. Чебишов та його учні А.А. Марков і А.М. Ляпунов присвятили свої зусилля дослідженню того, наскільки формула (1) залежить від конкретного характеру розподілів величин  $\xi_k$ , та які вимоги необхідно накладати на ці випадкові величини, щоб ця формула мала місце. Їх дослідження привели до **центральної граничної теореми** теорії ймовірностей, найпростіший варіант якої буде розглянуто нижче.

Грандіозність значення цієї теореми визначається тим фактом, що численні результати природничих та технічних наук підтверджують дію цього центрального закону теорії ймовірностей. Адже будь-який природний чи технічний процес відбувається під впливом великої кількості випадкових, діючих незалежно, факторів, кожний з яких здатний лише несуттєво змінити хід процесу. Тому спостерігач має справу із сумарною дією всіх цих факторів. Центральна гранична теорема дозволяє робити висновки про граничний характер всієї суми випадкових впливів. Виявляється, що граничний розподіл близький до стандартного нормального розподілу. (Саме цьому факту завдячує назва «стандартний нормальний розподіл»).

Доведення центральної граничної теореми базується на тому факті, що між функціями розподілу та характеристичними функціями існує взаємно однозначний зв'язок, який поширюється навіть на відповідні граничні функції при збіжності розподілів та характеристичних функцій.

**Означення 1.** Послідовність функцій розподілу  $F_n(x)$ ,  $n \geq 1$  випадкових величин  $\{\xi_n\}$ ,  $n \geq 1$  **слабко збігається** при  $n \rightarrow \infty$  до функції розподілу  $F(x)$  деякої випадкової величини  $\xi$  (цей вид збіжності позначається наступним чином

$F_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cl} F(x)$ ), якщо для кожної обмеженої неперервної на  $\mathfrak{R}$  функції  $f(x)$  виконується гранична рівність:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dF_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dF(x).$$

**Зауваження.**  $F_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cl} F(x)$  означає збіжність числової послідовності  $Mf(\xi_n) \rightarrow M\xi$ .

**Теорема 1. (Леві).** Для того, щоб послідовність функцій розподілу  $F_n(x)$  слабко збігалась до деякого розподілу  $F_0(x)$ , необхідно та достатньо, щоб послідовність характеристичних функцій  $\varphi_n(t)$  розподілів  $F_n(x)$  збігалась при кожному  $t$  до деякої функції  $\varphi(t)$ , неперервної в нулі. При цьому  $\varphi(t)$  є характеристичною функцією розподілу  $F_0(x)$ .

Таким чином, слабка збіжність послідовності розподілів еквівалентна збіжності відповідних характеристичних функцій.

**Теорема 2. (Центральна гранична теорема для послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин).** Нехай  $\{\xi_n\}$ ,  $n \geq 1$  – послідовність незалежних випадкових величин, що

мають однаковий розподіл. Позначимо:  $M\xi_n = a$ ,  $D\xi_n = \sigma^2$ ,  $v_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$   $\forall n = 1, 2, \dots$ . Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{v_n - Mv_n}{\sqrt{Dv_n}} < x\right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{рівномірно по } x \in \mathfrak{R}, \quad (2)$$

тобто послідовність розподілів  $F_n(x)$  випадкових величин  $\eta_n = \frac{v_n - Mv_n}{\sqrt{Dv_n}}$  слабко збігається до стандартного нормального розподілу.

**Доведення.** Позначимо через  $\varphi_n(t)$  характеристичні функції випадкових величин  $\eta_n$ . Згідно теореми Леві, досить

показати, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ . Оскільки  $\eta_n = \frac{v_n - Mv_n}{\sqrt{Dv_n}} = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - a}{\sigma\sqrt{n}}$ , то на підставі властивостей 2 та 3

характеристичної функції можна стверджувати, що  $\varphi_n(t) = \left[\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n$ , де  $\varphi(t)$  – характеристична функція випадкової



величини  $\xi_n - a$ ,  $n \geq 1$ . Оскільки існує дисперсія  $D\xi_n$ , то існує друга похідна функції  $\varphi(t)$ . Скористаємось розкладом ряд Тейлора при  $n \rightarrow \infty$  (тоді  $\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow 0$ ) функції  $\varphi(t)$  із залишковим членом у формі Пеано:

$$\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \varphi(0) + \varphi'(0)\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{\varphi''(0)}{2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 = 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{2n}\right)$$

Тут враховано, що  $\varphi(0) = 1$ ,  $\varphi'(0) = iM(\xi_k - a) = 0$ ,  $\varphi''(0) = i^2 M(\xi_k - a)^2 = -\sigma^2$ . Звідси випливає, що  $\varphi_n(t) = \left[\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{2n}\right)\right]^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2}}$  рівномірно по  $t: |t| \leq T < \infty$ .

Більш загальне твердження центральної граничної теореми міститься нижче (без доведення).

**Теорема 3. (Ляпунова).** Нехай  $\{\xi_n\}$ ,  $n \geq 1$  – послідовність незалежних випадкових величин (не обов'язково однаково розподілених), для якої існує таке число  $\delta > 0$ , що  $M|\xi_n|^{2+\delta} < +\infty \forall n \geq 1$ . Позначимо

$$M\xi_n = a_n, v_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, B_n^2 = Dv_n \forall n \geq 1. \text{ Припустимо, що виконано умову Ляпунова: } L_n = \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n M|\xi_k - a_k|^{2+\delta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$$\text{Тоді } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{v_n - Mv_n}{\sqrt{Dv_n}} < x\right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (3)$$

Безпосереднім наслідком центральної граничної теореми є інтегральна теорема Мавра-Лапласа.

**Теорема 4. (Інтегральна теорема Муавра-Лапласа).** Нехай  $v_n$  – кількість успіхів і серії  $n$  незалежних випробувань Бернуллі з ймовірністю успіху  $p$  та ймовірністю невдачі  $q$ , де  $p+q=1$ . Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{v_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ рівномірно по } x \in \mathbb{R}$$

**Наслідок. (Довірчий інтервал для ймовірності).** Нехай  $p$  – невідома ймовірність здійснення деякої події  $A$ . Якщо провести серію із  $n$  незалежних випробувань, для якої обчислити кількість  $v_n$  з'явлення події  $A$ , то з

теореми Муавра-Лапласа випливає, що  $P\left\{\left|\frac{v_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = P\left\{\left|\frac{v_n - np}{\sqrt{npq}}\right| < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\} \approx 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$ , де  $\Phi_0(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

Отже, якщо задатись деякою ймовірністю  $p_0$ , близькою до одиниці, то можна визначити по таблицях функції нормального розподілу таке значення  $\varepsilon$ , що  $\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \frac{p_0}{2}$ . Тоді невідома ймовірність  $p$  події  $A$  з ймовірністю,

наближено рівною  $p_0$ , міститься в інтервалі  $\left[\frac{v_n}{n} - \varepsilon, \frac{v_n}{n} + \varepsilon\right]: P\left\{p \in \left[\frac{v_n}{n} - \varepsilon, \frac{v_n}{n} + \varepsilon\right]\right\} \approx p_0$ .

## Лекція 8 (продовження). Поняття про випадковий процес.

Найчастіше спостерігач має справу не з окремими значення випадкової величини, а з деякою функцією, залежною від часу. Наприклад, величина напруги у електричній мережі коливається навколо деякого номінального значення і змінює випадковим чином своє значення у кожний момент часу. Те саме стосується багатьох інших природних чи фізичних процесів. Дамо точне означення випадкової функції.

Нехай  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  – деякий імовірнісний простір, а  $T$  – деяка підмножина множини дійсних чисел:  $T \subseteq \mathbb{R}$ .

**Означення 2. Випадковою функцією** дійсного аргументу  $t \in T$  називається функція  $\xi(\omega, t): T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , яка при кожному значення аргументу  $t$  є випадковою величиною на імовірнісному просторі  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ .

При позначенні випадкової функції, так само, як і при позначенні випадкової величини, залежність від елементарної події  $\omega \in \Omega$  часто не записують:  $\xi(\omega, t) = \xi_\omega(t) = \xi(t) = \xi_t$ .

**Означення 3.** Якщо множина значень  $T$  відіграє роль часу, то випадкова функція  $\xi(\omega, t)$  називається **випадковим** або **стохастичним процесом**. Цей процес називають **випадковою послідовністю**, якщо множина  $T$  – дискретна. Якщо  $T = \mathbb{R}^n$ , то  $\xi(\omega, t)$  називається **випадковим полем**.

Отже, якщо зафіксувати значення  $\omega = \omega_0 \in \Omega$ , то маємо не випадкову функцію  $\xi(\omega_0, t)$ , яка називається **траєкторією** або **реалізацією** випадкового процесу. Якщо ж зафіксувати момент часу  $t = t_0 \in T$ , то матимемо випадкову величину  $\xi(\omega, t_0)$ , яку називають **перерізом** процесу. Таким чином, випадковий процес – це сукупність всіх його траєкторій або сукупність всіх його перерізів.

**Приклад 1.** Кількість  $N(t)$  радіоактивних частинок, зареєстрованих лічильником за час  $t$ , – випадковий процес з цілими значеннями.



**Приклад 2.** Значення атмосферного тиску  $P(t)$  в залежності від значення  $t$  – висоти над рівнем моря – є випадковим процесом з дійсними значеннями.

**Приклад 3.** Координати  $X(t), Y(t), Z(t)$  деякої молекули рідини, що перебуває в процесі дифузії, в залежності від часу  $t$  – неперервний випадковий процес з дійсними значеннями.

**Означення 4.** Функція  $F(x, t) = P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega, t) < x\} \stackrel{\text{def}}{=} P\{\xi(t) < x\}, x \in \mathfrak{R}$  називається функцією **розподілу випадкового процесу**.

**Означення 5.** **Математичним сподіванням (середнім)** випадкового процесу називається функція  $m(t) = M\xi(t), t \in T$ .

**Означення 6.** **Дисперсією** випадкового процесу називається функція  $D(t) = D\xi(t) = M[\xi(t) - m(t)]^2, t \in T$ .

**Означення 7.** **Кореляційною функцією** випадкового процесу називається функція  $R(t_1, t_2) = M[(\xi(t_1) - m(t_1))(\xi(t_2) - m(t_2))], t_1, t_2 \in T$ .

**Приклад 4.** Розглянемо для прикладу міркування, які привели до основного рівняння в теорії дифузії. (Ця задача розглядалась Максом та Фоккером).

Припустимо, що деяка частинка, що рухається вздовж прямої, стартує в нульовий момент часу із точки  $x = 0$ . Нехай у дискретні моменти часу  $k\Delta t, k = 1, 2, \dots$  під впливом незалежних випадкових поштовхів вона пересувається на величину  $h$  праворуч з ймовірністю  $p$  або ліворуч із ймовірністю  $q = 1 - p$ . Позначимо через  $P(x, t)$  ймовірність того, що дана частинка опиниться у момент  $t = n\Delta t$  (тобто через  $n$  кроків) в точці з абсцисою  $x$ . Очевидно, що функція  $P(x, t)$  задовольняє різницевою рівнянню:

$$P(x, t + \Delta t) = pP(x - h, t) + qP(x + h, t) \quad (4)$$

із початковими умовами  $P(0, 0) = 1, P(x, 0) = 0$  при  $x \neq 0$ . Спробуємо зробити граничний перехід при  $h \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ . Із фізичних міркувань зрозуміло, що на параметри задачі мають бути накладені деякі обмеження, зокрема:

$$t = n\Delta t, x = nh, \frac{h^2}{\Delta t} \rightarrow 2D, \frac{p - q}{h} \rightarrow \frac{c}{D}, \quad (5)$$

де  $c$  та  $D$  – деякі сталі.

Віднімемо від обох частин рівності (4)  $P(x, t)$ :

$$P(x, t + \Delta t) - P(x, t) = p[P(x - h, t) - P(x, t)] + q[P(x + h, t) - P(x, t)] \quad (6)$$

Припустимо, що функція  $P(x, t)$  диференційована по  $t$  та двічі диференційована по  $x$ . Тоді

$$\begin{aligned} -P(x, t) + P(x - h, t) &= -h \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} + o(h^2), & P(x + h, t) - P(x, t) &= h \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} + o(h^2), \\ P(x, t + \Delta t) - P(x, t) &= \Delta t \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} + o(\Delta t) \end{aligned}$$

Підставивши ці рівності у (6), матимемо:  $\Delta t \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} + o(\Delta t) = -h(p - q) \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} + o(h^2)$ , звідки з допомогою

(5) перейдемо до границі при  $h \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ :  $\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -2c \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}$  – відоме рівняння дифузії, що носить назву рівняння Фоккера - Планка.

Один із класів випадкових процесів був розглянутий Н.Вінером – в теорію ймовірності він ввійшов під назвою **вінерівського процесу** або **броунівського руху**. На випадковий процес  $w(t)$  були накладені наступні вимоги:

1.  $w(0) = 0; Mw(t) = 0 \quad \forall t \in \mathfrak{R}^+$
2. Функція розподілу різниці  $w(t_0 + t) - w(t_0)$  не залежить від початкового моменту  $t_0$ :  $P\{w(t_0 + t) - w(t_0) < x\} = F_t(x)$  (однорідність процесу у часі).
3.  $w(t)$  – процес із незалежними приростами, тобто прирости процесу за моменти часу, що не перетинаються, – незалежні:  $\forall n \quad \forall t_1, \dots, t_n \quad w(t_1), w(t_2) - w(t_1), \dots, w(t_n) - w(t_{n-1})$  – випадкові величини, незалежні у сукупності.
4.  $M[w(t + h) - w(t)]^3 = o(h), h \rightarrow 0$ .

**Зауваження 1.** Властивості 2 та 3 визначають ОПНП – однорідний процес з незалежними приростами

**Теорема 1.** За припущень 1. – 4. вінерівський процес  $w(t)$  має нормальний розподіл із параметрами 0 та  $\sigma^2 t$ , де  $\sigma^2$  – деяка стала.

**Доведення.** Розглянемо  $M[w(t + h) - w(t)]^2 = \sigma^2(h), h > 0$  – деяка функція, що залежить лише від  $h$  (із-за припущення

2). Покажемо, що насправді  $\sigma^2(h) = \sigma^2 \cdot h$  – лінійна по  $h$  функція. Нехай  $h_1 > 0, h_2 > 0$ . Тоді

$$\begin{aligned} \sigma^2(h_1 + h_2) &= M[w(t + h_1 + h_2) - w(t)]^2 = M[(w(t + h_1 + h_2) - w(t + h_1)) + (w(t + h_1) - w(t))]^2 = \\ &= \sigma^2(h_1) + \sigma^2(h_2) + 2M[(w(t + h_1 + h_2) - w(t + h_1)) \cdot (w(t + h_1) - w(t))] = \sigma^2(h_1) + \sigma^2(h_2), \end{aligned} \quad (7)$$

в силу припущення 3. Крім того,  $\sigma^2(h)$  – монотонна функція:  $\sigma^2(h_1 + h_2) \geq \sigma^2(h_1)$  і  $\sigma^2(0) = 0$ . Відомо, що в класі моно-



тонних функцій властивість адитивності (7) має лише лінійна функція, отже,  $\sigma^2(h) = \sigma^2 h$ . Позначимо  $\varphi(z, t) = Me^{izw(t)}$  – характеристична функція вінерівського процесу. Тоді

$$\varphi(z, t+h) = Me^{izw(t+h)} = Me^{iz[w(t+h)-w(t)]+izw(t)} = \varphi(z, t) \cdot Me^{iz[w(t+h)-w(t)]}.$$

Скористаємось розкладом в ряд Тейлора при  $h \rightarrow 0$ :

$$\varphi(z, t+h) = \varphi(z, t) \cdot M \left[ 1 + \frac{iz[w(t+h)-w(t)]}{1!} - \frac{z^2[w(t+h)-w(t)]^2}{2!} + R \right] = \varphi(z, t) \left[ 1 - \frac{z^2}{2!} M[w(t+h)-w(t)]^2 + M(R) \right].$$

Оскільки  $R = e^{iz\theta[w(t+h)-w(t)]} \cdot \frac{[w(t+h)-w(t)]^3}{3!}$ , то в силу припущення 4,  $M(R) = o(h)$ . Отже, при  $h \rightarrow 0$ :

$$\varphi(z, t+h) = \varphi(z, t) \left[ 1 - \frac{z^2 \sigma^2 h}{2} + o(h) \right] = , \text{ тобто } \frac{\varphi(z, t+h) - \varphi(z, t)}{h} = -\varphi(z, t) \frac{z^2 \sigma^2}{2} + \frac{o(h)}{h} \varphi(z, t), \quad \text{звідки}$$

$$\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial t} = -\frac{z^2 \sigma^2}{2} \varphi(z, t). \text{ Оскільки } \varphi(z, 0) = 1, \text{ то } \varphi(z, t) = e^{-\frac{z^2 \sigma^2}{2} t} - \text{характеристична функція розподілу } N(0, \sigma^2 t).$$

**Зауваження 2.** Можна показати, що траєкторії вінерівського процесу неперервні із ймовірністю 1:  $P\{\omega: w(t, \omega) \in C([0, T])\} = 1$ .

**Зауваження 3.** Можна показати, що траєкторії вінерівського процесу ніде не диференційовані із ймовірністю 1.

**Теорема 2.** Стандартний вінерівський процес має кореляційну функцію, рівну  $R(t, s) = \min(t, s) \quad \forall t, s \in [0, T]$ .

**Доведення.** Для стандартного вінерівського процесу  $\forall t \in \mathbb{R}: Mw(t) = 0, Mw^2(t) = t \quad (\sigma^2 = 1)$ . Припустимо, що  $t > s$ . Тоді

$$R(t, s) = M[(w(t) - m(t))(w(s) - m(s))] = Mw(t)w(s) = M[(w(t) - w(s))w(s) + w^2(s)] = M[(w(t) - w(s))w(s)] + Mw^2(s) = Mw^2(s) = s$$

Одним із класів випадкових процесів, що описує так звані «рідкі» події, є **процес Пуассона**. Припустимо, що деяка подія може відбуватись у випадкові моменти часу. Нехай  $\xi(t)$  – кількість з'явлень цієї події на інтервалі  $[0, t]$ . Відносно процесу  $\xi(t)$  зробимо наступні припущення.

1. Ймовірність  $k$  з'явлень цієї події на інтервалі  $[t, t+\Delta t]$  залежить лише від  $k$  та  $\Delta t$  – **стаціонарність** процесу, зокрема ймовірність з'явлення цієї події принаймні раз на інтервалі  $[t, t+\Delta t]$  рівна  $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ ;
2. ймовірність з'явлення цієї події більше ніж один раз на інтервалі  $[t, t+\Delta t]$  рівна  $o(\Delta t)$  – **ординарність** процесу;
3. ймовірність  $k$  з'явлень цієї події на інтервалі  $[t, t+\Delta t]$  не залежить від того, як і коли відбувались події раніше, – процес **без післядії**. Зокрема це означає взаємну незалежність з'явлення тієї чи іншої кількості подій протягом проміжків часу, що не перетинаються.

**Теорема 3.** З припущень 1. – 3. випливає, що процес  $\xi(t)$  має розподіл Пуассона з параметром  $\lambda$ . Він називається **процесом Пуассона**.

**Доведення.** Позначимо  $P_k(t) = P\{\xi(t) = k\}, k = 0, 1, \dots$ . Тоді  $P_0(t+\Delta t) = P_0(t)[1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)]$ , тому

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} P_0(t), \text{ звідки в границі при } \Delta t \rightarrow 0 \text{ одержимо } \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t), \text{ тому } P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

(оскільки  $P_0(0) = 1$ ). Нехай тепер  $k \geq 1$ . Тоді за формулою повної ймовірності при  $\Delta t \rightarrow 0$ ,

$$P_k(t+\Delta t) = P_k(t)[1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)] + P_{k-1}(t)[\lambda \Delta t + o(\Delta t)] + o(\Delta t), \text{ звідки}$$

$$\frac{P_k(t+\Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} [P_k(t) + P_{k-1}(t) + 1], \text{ тому для } k \geq 1:$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) \quad (8)$$

із початковими умовами  $P_0(0) = 1$  та  $P_k(0) = 0$ . Систему диференціальних рівнянь (8) розв'яжемо з допомогою заміни

$P_k(t) = e^{-\lambda t} v_k(t), k \geq 1$ . Початковими умовами для нових шуканих функцій  $v_k(t)$ , очевидно будуть наступні:

$$v_0(0) = 1, v_k(0) = 0, k \geq 1. \text{ З (8) випливає, що } e^{-\lambda t} \frac{dv_k(t)}{dt} - \lambda e^{-\lambda t} v_k(t) = -\lambda e^{-\lambda t} v_k(t) + \lambda e^{-\lambda t} v_{k-1}(t), \text{ або } \frac{dv_k(t)}{dt} = \lambda v_{k-1}(t), k \geq 1.$$

$$\text{Тоді } \frac{dv_1(t)}{dt} = \lambda v_0(t) = \lambda P_0(t) e^{\lambda t} = \lambda, \text{ тобто } v_1(t) = \lambda t. \text{ Аналогічно, } v_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2} \text{ і взагалі, } v_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}, k \geq 1. \text{ Остаточнo}$$

маємо  $P_k(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$ , що й треба було довести.

**Зауваження 4.** Система припущень 1. – 3. виконується з великою точністю у багатьох фізичних явищах та технічних процесах, зокрема, їй відповідає кількість атомів при радіоактивному розпаді за певний проміжок часу або кількість космічних частинок, що потрапили на одиничну площадку за проміжок часу  $t$ , а також кількість деталей деякої системи, що вийшли з ладу протягом певного часу.