

Лекція 7. Нерівність Чебишова. Закон великих чисел та його наслідки.

Одним з найбільш переконливих проявів закономірностей, що виникають при спостереженні великої кількості випадкових величин, є теореми про закони «великих чисел». Ці теореми стверджують, що конкретні особливості окремих випадкових явищ майже не впливають на їх **середній результат**, якщо кількість цих явищ досить велика. В цій стійкості середніх і полягає фізичний зміст законів великих чисел. Зокрема, нам відомий той факт, що в схемі незалежних випробувань Бернуллі частота успіху, яка є випадковою величиною, приймає значення, близькі до сталої ймовірності успіху p , якщо кількість випробувань досить велика.

Доведення законів великих чисел базується на нерівності, вперше надрукованій російською та французькою мовами у 1867 році в роботі Пафнутій Львович Чебишова «Про середні величини».

Твердження 1. (Нерівність Чебишова).

Для довільної випадкової величини ξ із скінченною дисперсією $D\xi$ при будь-якому значенні $\varepsilon > 0$ виконується

$$\text{нерівність} \quad P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \quad (1)$$

Доведення. Розглянемо випадок, коли ξ – неперервна випадкова величина із щільністю розподілу $p(x)$. Позначимо

$$M\xi = a. \text{ Тоді } P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} = \int_{\{x: |x-a| \geq \varepsilon\}} p(x) dx \leq \int_{\{x: |x-a| \geq \varepsilon\}} \frac{|x-a|^2}{\varepsilon^2} p(x) dx \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} |x-a|^2 p(x) dx = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}. \text{ У випадку дискретної}$$

випадкової величини доведення цілком аналогічне із заміною інтегралів на відповідні суми – спробуйте провести його самостійно.

Приклад 1. Нехай ξ – випадкова величина із математичним сподіванням $M\xi = a$ та дисперсією $D\xi = \sigma^2$. З

нерівності Чебишова випливає, що $P\{|\xi - a| \geq 3\sigma\} \leq \frac{D\xi}{9\sigma^2} = \frac{1}{9}$. Якщо припустити, що ξ має нормальний розподіл, то

значення лівої частини нерівності можна визначити по таблицях: $P\{|\xi - a| \geq 3\sigma\} \approx 0,0027$, в той час, як значення оцінки нерівності Чебишова «гірше» майже у 40 разів. Проте, значимість даної нерівності саме в її універсальності та незалежності від характеру розподілу випадкової величини.

Теорема 1. (Теорема Чебишова про закон великих чисел).

Нехай $\{\xi_n\}, n \geq 1$ – послідовність незалежних випадкових величин, що мають дисперсії, обмежені сталою величиною:

$$\forall n \geq 1 \quad D\xi_n \leq c. \text{ Тоді } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M\xi_k\right| < \varepsilon\right\} = 1 \quad (2)$$

Доведення. Розглянемо випадкову величину $\eta_n = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{n}$. Її середнє рівне: $M\eta_n = \frac{\sum_{k=1}^n M\xi_k}{n}$, а дисперсія –

$$D\eta_n = \frac{D\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right)}{n^2} = \frac{\sum_{k=1}^n D\xi_k}{n^2} \leq \frac{cn}{n^2} = \frac{c}{n}. \text{ Застосуємо до величини } \eta_n \text{ нерівність Чебишова:}$$

$$P\{|\eta_n - M\eta_n| < \varepsilon\} = 1 - P\{|\eta_n - M\eta_n| \geq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\eta_n}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}. \text{ Перейдемо до границі при } n \rightarrow \infty:$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\eta_n - M\eta_n| < \varepsilon\} \geq 1, \text{ звідки й випливає, що } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M\xi_k\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Зауваження. Теорема Чебишова стверджує, таким чином, що середнє арифметичне великої кількості незалежних випадкових величин проявляє статистичну стійкість – поводить себе майже як середнє арифметичне їх математичних сподівань.

Розглянемо для прикладу певний об'єм газу, що міститься у деякому посуді. Його молекули перебувають у постійному хаотичному русі, причому для кожної окремої молекули неможливо передбачити її місцезнаходження та швидкість у деякий момент часу. Проте можна оцінити долю частинок газу, що рухаються з деякою заданою швидкістю або містяться у певному об'ємі – саме це і цікавить фізика. Якщо ж говорити про тиск цього газу, то він визначається середньою кількістю ударів молекул різних швидкостей, що приходяться на пластинку одиничної площі за одиницю часу. Зрозуміло, що тут ми маємо справу з випадковими величинами, проте, як відомо, тиск газу – величина стала у незмінних умовах. Це прояв усереднення, яке є наслідком закону великих чисел. Саме фізичні явища яскраво демонструють дію закону великих чисел.

Означення 1. Будемо говорити, що послідовність випадкових величин $\{\xi_n\}, n \geq 1$ **збігається за ймовірністю** до

випадкової величини ξ при $n \rightarrow \infty$, позначаючи цей факт наступним чином: $\xi_n \xrightarrow{p} \xi, n \rightarrow \infty$, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\} = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$.

Зауваження 1. Збіжність за ймовірністю $\xi_n \xrightarrow{p} \xi, n \rightarrow \infty$ **не означає**, що значення випадкових величин прямують до значень випадкової величини ξ при $n \rightarrow \infty$, а означає лише, що відхилення цих значень більші як завгодно малої величини ε мають нульову ймовірність – проте з'явлення такого відхилення не є неможливою подією.

Зауваження 2. Теорема Чебишова стверджує, таким чином, що $\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{n} \xrightarrow{p} \frac{\sum_{k=1}^n M\xi_k}{n}, n \rightarrow \infty$.

Зауваження 3. Теорема Чебишова для **незалежних однаково розподілених** випадкових величин $\{\xi_n\}, n \geq 1$ з

$$M\xi_n = a, D\xi_n = \sigma^2 \text{ стверджує, що } \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{n} \xrightarrow{p} a, n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Зауваження 4. Вже відома нам теорема Бернуллі таким чином, є прямим наслідком теореми Чебишева про закон великих чисел. Сформулюємо її тут ще раз.

Теорема 2. (Теорема Бернуллі про закон великих чисел).

Нехай $\{v_n\}, n \geq 1$ – кількість успіхів в серіях з n незалежних випробувань Бернуллі із сталою ймовірністю успіху

$$\text{окремого випробування рівною } p. \text{ Тоді } \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{v_n}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1, \text{ тобто } \frac{v_n}{n} \xrightarrow{p} p, n \rightarrow \infty \quad (4)$$

Доведення. Розглянемо випадкові величини $\xi_k, 1 \leq k \leq n$, які набувають значення 1, якщо в k -му випробуванні

стався «успіх», та значення 0, якщо сталась «невдача». Було визначено, що $M\xi_k = p$, а $v_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Тоді твердження

(4) прямо випливає з (3).

Наслідок 1. (Застосування закону великих чисел для вимірів фізичних величин).

Нехай v – деяка фізична величина з теоретичним значенням a , яке необхідно визначити шляхом фізичного експерименту. Останній полягає у проведенні n незалежних вимірів цієї величини, наслідком яких є випадкові величини $\{v_n\}, n \geq 1$. Зрозуміло, що ці випадкові величини – незалежні та однаково розподілені з величиною v .

Причому $Mv_n = a$ внаслідок відсутності систематичної похибки вимірювання, а $Dv_n = Dv = \sigma^2$. Розглянемо випадкову

величину $\eta_n = \frac{\sum_{k=1}^n v_k}{n}$. Для неї $M\eta_n = a$, $D\eta_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n Dv_k = \frac{\sigma^2}{n}$. Отже, з теореми Чебишова випливає, що

$\frac{\sum_{k=1}^n v_k}{n} \xrightarrow{p} a, n \rightarrow \infty$, тому шукане значення a величини v може бути досить точно замінене середнім арифметичним послідовності вимірів цієї величини $\{v_n\}, n \geq 1$ для великих значень n .

Наслідок 2. (Метод Монте-Карло обчислення інтегралів виду $\int_0^1 f(x)dx$).

Нехай $\{\xi_n\}, n \geq 1$ – послідовність незалежних випадкових величин рівномірно розподілених на відрізку $[0,1]$. Якщо $f(x)$

– деяка борелівська функція, $\{f(\xi_n)\}, n \geq 1$ – також незалежні випадкові величини з $Mf(\xi_n) = \int_0^1 f(x)dx$. Отже,

$\frac{\sum_{k=1}^n f(\xi_k)}{n} \xrightarrow{p} \int_0^1 f(x)dx, n \rightarrow \infty$. Таким чином, для обчислення значення інтегралу виду $\int_0^1 f(x)dx$ можна запропонувати

наступний метод: змоделювати досить велику кількість n рівномірно розподілених випадкових величин $\{\xi_k\}, 1 \leq k \leq n$ та

$$\text{обчислити } \int_0^1 f(x)dx \approx \frac{\sum_{k=1}^n f(\xi_k)}{n}.$$

Лекція 7 (продовження). Характеристична функція випадкової величини та її властивості.

Нехай ξ – випадкова величина на даному імовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Означення 2. **Характеристичною функцією** випадкової величини ξ називається комплекснозначна функція

$$\text{дійсного аргументу } \varphi_\xi(t) = Me^{it\xi}, t \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Зауважимо, що характеристична функція визначена для будь-якої випадкової величини в силу нерівності

$$|e^{it\xi}| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \text{ Якщо згадати позначення, введені у лекції 6, можна написати, що } \varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_\xi(x) \quad (6)$$

Зауваження 5. З рівності (6) випливає, що характеристична функція випадкової величини є перетворенням Фур'є її функції розподілу.

Приклад 2. Нехай ξ – випадкова величина рівномірно розподілена на симетричному проміжку $[-a, a]$. Тоді

$\varphi_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_{\xi}(x) dx = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} e^{itx} dx = \frac{e^{ita} - e^{-ita}}{2a \cdot it} = \frac{\sin at}{at}$ – характеристична функція цієї випадкової величини має дійсні

значення.

Приклад 3. Нехай ξ – випадкова величина розподілена за законом Пуассона з параметром λ . Знайдемо її

характеристичну функцію: $\varphi_{\xi}(t) = M e^{it\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{itn} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{it} \lambda)^n}{n!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^{it}} = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}$

Теорема 3. (Властивості характеристичної функції).

1. $|\varphi_{\xi}(t)| \leq 1 \forall t \in \mathbb{R}; \varphi_{\xi}(0) = 1$
2. Якщо ξ та η – незалежні випадкові величини, то $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t) \cdot \varphi_{\eta}(t)$.
3. $\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{ibt} \varphi_{\xi}(at)$ для довільної випадкової величини ξ та будь-яких констант a і b .
4. $\varphi_{\xi}(t)$ – рівномірно неперервна функція на \mathbb{R} , тобто $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall t_1, t_2 : |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |\varphi_{\xi}(t_1) - \varphi_{\xi}(t_2)| < \varepsilon$.
5. Нехай випадкова величина ξ має k -ий момент: $\exists m_k = M\xi^k$. Тоді існує k -та похідна характеристичної функції і для всіх $n \leq k$ виконується рівність $\varphi_{\xi}^{(n)}(0) = i^n M\xi^n$, тобто $M\xi^n = \frac{\varphi_{\xi}^{(n)}(0)}{i^n} \forall n \leq k$.
6. $\varphi_{\xi}(-t) = \overline{\varphi_{\xi}(t)}$
7. $\varphi_{\xi}(t)$ – **додатно визначена** функція на \mathbb{R} , тобто $\forall n \in \mathbb{N} \forall t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R} \forall c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C} :$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_{\xi}(t_k - t_j) c_k \overline{c_j} \geq 0$$

Доведення. Властивість перша очевидно випливає з означення характеристичної функції.

2. Розглянемо для незалежних випадкових величин ξ та η характеристичну функцію їх суми:

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = M e^{it(\xi+\eta)} = M e^{it\xi} \cdot e^{it\eta} = M e^{it\xi} \cdot M e^{it\eta} = \varphi_{\xi}(t) \cdot \varphi_{\eta}(t).$$

3. Розглянемо $\varphi_{a\xi+b}(t) = M e^{it(a\xi+b)} = M e^{i(ta)\xi} \cdot e^{itb} = e^{itb} \cdot \varphi_{\xi}(at)$.

4. Нехай $\varepsilon > 0$ задано. Позначимо для довільних $t_1 < t_2 : h = t_2 - t_1$. Одержимо

$$\varphi_{\xi}(t_2) - \varphi_{\xi}(t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{it_2 x} - e^{it_1 x}) dF_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it_1 x} \cdot (e^{ihx} - 1) dF_{\xi}(x). \text{ Оскільки } |e^{ihx} - 1| \leq 2, \text{ а } \int_{-\infty}^{+\infty} dF_{\xi}(x) = 1, \text{ знайдеться така}$$

величина $A > 0$, що $\int_{|x|>A} dF_{\xi}(x) < \varepsilon/4$. Далі, для всіх $x : |x| < A$ знайдемо таке $h > 0$, що $|e^{ihx} - 1| \leq \varepsilon/2$. Це

можливо, оскільки функція e^{ihx} – рівномірно неперервна на \mathbb{R} . Тоді

$$|\varphi_{\xi}(t_2) - \varphi_{\xi}(t_1)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{ihx} - 1| dF_{\xi}(x) < 2 \cdot \int_{|x|>A} dF_{\xi}(x) + \int_{-A}^{+A} \varepsilon/2 \cdot dF_{\xi}(x) < 2 \cdot \varepsilon/4 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Таким чином, для заданого $\varepsilon > 0$ можна визначити таке число $\delta = h$, що з нерівності $|t_1 - t_2| < \delta$ випливає нерівність $|\varphi_{\xi}(t_1) - \varphi_{\xi}(t_2)| < \varepsilon$.

5. Припустимо, що існує $m_k = M\xi^k$ при деякому значенні k . Це означає абсолютну збіжність інтегралу :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x^k| dF_{\xi}(x) < \infty. \text{ Розглянемо рівність } \varphi_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_{\xi}(x) \text{ та візьмемо } n\text{-ту похідну, де } n \leq k \text{ (правомірність}$$

$$\text{цих дій буде обґрунтовано нижче): } \varphi_{\xi}^{(k)}(t) \Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^k e^{itx} dF_{\xi}(x) \Big|_{t=0} = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{itx} dF_{\xi}(x) \Big|_{t=0} = i^k M\xi^k = i^k m_k.$$

Оскільки $\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{itx} dF_{\xi}(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x^k| dF_{\xi}(x) < \infty$, то інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{itx} dF_{\xi}(x)$ від параметра t рівномірно збіжний за ознакою Вейерштрасса, тому диференціювання було законним.

$$6. \text{ Дійсно, } \varphi_{\xi}(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} dF_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{e^{itx}} dF_{\xi}(x) = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_{\xi}(x)} = \overline{\varphi_{\xi}(t)}$$

$$7. \text{ Розглянемо } \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_{\xi}(t_k - t_j) c_k \overline{c_j} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n M e^{i(t_k - t_j)\xi} c_k \overline{c_j} = M \left(\sum_{k=1}^n e^{it_k \xi} c_k \cdot \sum_{j=1}^n e^{-it_j \xi} \overline{c_j} \right) =$$

$$= M \left(\sum_{k=1}^n e^{it_k \xi} c_k \cdot \overline{\sum_{j=1}^n e^{it_j \xi} c_j} \right) = M \left| \sum_{k=1}^n e^{it_k \xi} c_k \right|^2 \geq 0$$

Приклад 3 (продовження). Нехай ξ – випадкова величина розподілена за законом Пуассона з параметром λ .

Була визначена її характеристична функція $\varphi_{\xi}(t) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}$. Згідно властивості 5, якщо існує математичне споді-

вання величини ξ , то його знайдемо за формулою $M\xi = \frac{\varphi'_{\xi}(0)}{i} = -i \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\} \lambda e^{it} i \Big|_{t=0} = \lambda$.

Приклад 4. Нехай ξ – випадкова величина, що має нормальний розподіл $N(a, \sigma^2)$. Визначимо її характеристичну функцію. Зауважимо спочатку, що випадкова величина $\eta = \frac{\xi - a}{\sigma}$ має стандартний нормальний розподіл $N(0, 1)$. Її

характеристична функція: $\varphi_{\eta}(t) = M e^{it\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_{\eta}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Оскільки існує $D\eta$, функція $\varphi_{\eta}(t)$ має і першу, і другу похідні, тоді

$$\begin{aligned} \varphi'_{\eta}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} i x e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty} + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} i t e^{itx} dx = \\ &= -t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \text{ тобто функція } \varphi_{\eta}(t) \text{ задовольняє диференціальне рівняння: } \frac{d\varphi_{\eta}(t)}{dt} = -t\varphi_{\eta}(t). \end{aligned}$$

Його розв'язками є $\varphi_{\eta}(t) = c e^{-t^2/2}$. Оскільки $\varphi_{\eta}(0) = 1$, то $c = 1$. Отже, якщо випадкова величина η має стандартний

нормальний розподіл, то її характеристична функція рівна $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$. Розглянемо тепер випадкову величину

$$\xi = \sigma\eta + a \text{ з розподілом } N(a, \sigma^2). \text{ Згідно властивості 3, } \varphi_{\xi}(t) = e^{iat} \cdot e^{-\sigma^2 t^2/2} = \exp\left\{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\} \quad (7)$$

Позначимо $\phi(t) = \ln \varphi_{\xi}(t)$. Тоді з припущення про існування моментів відповідних порядків випливає, що

$$\phi'(t) = [\ln \varphi_{\xi}(t)]' = \frac{\varphi'_{\xi}(t)}{\varphi_{\xi}(t)}. \text{ Отже, } \phi'(0) = \frac{\varphi'_{\xi}(0)}{\varphi_{\xi}(0)} = i M\xi. \text{ Аналогічно, } \phi''(t) = [\ln \varphi_{\xi}(t)]'' = \frac{\varphi''_{\xi}(t)\varphi_{\xi}(t) - [\varphi'_{\xi}(t)]^2}{\varphi_{\xi}^2(t)}, \text{ тому}$$

$\phi''(0) = i^2 M\xi^2 - [i M\xi]^2 = -D\xi$. Взагалі, виявляється, що числа $s_k = i^k \phi^{(k)}(0), k \in \mathbb{N}$ – дійсні. Вони називаються **семі-інваріантами (кумулянтами)** випадкової величини ξ .

Сформулюємо (без доведення) дуже важливу теорему, яка пояснює етимологію терміну «характеристична функція».

Теорема 4. (єдиності для характеристичної функції).

Кожній характеристичній функції $\varphi_{\xi}(t)$ відповідає одна і тільки одна функція розподілу $F_{\xi}(x)$, тобто з того, що

$$\varphi_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_1(x) \text{ і } \varphi_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_2(x) \text{ впливає тотожність розподілів: } F_1(x) \equiv F_2(x).$$

Приклад 5. Нехай випадкові величини ξ та η мають нормальні розподіли $N(a_1, \sigma_1^2)$ та $N(a_2, \sigma_2^2)$. Тоді

$$\text{характеристичною функцією їх суми буде } \varphi_{\xi+\eta}(t) = \exp\left\{iat - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}\right\} \cdot \exp\left\{iat - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}\right\} = \exp\left\{i(a_1 + a_2)t - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 t^2}{2}\right\},$$

тобто сумарний розподіл також нормальний – $N((a_1 + a_2), (\sigma_1 + \sigma_2)^2)$ в силу теореми єдиності.

Означення 3. Нехай ξ – дискретна випадкова величина, що набуває цілих невід'ємних значень:

$P\{\xi = k\} = p_k, k = 0, 1, 2, \dots$ **Твірною (генераторною) функцією** випадкової величини ξ називається комплексна

$$\text{функція } \psi_{\xi}(z) = M z^{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k, z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1. \quad (8)$$

Неважко зрозуміти, що $\psi_{\xi}(e^{it}) = \varphi_{\xi}(t)$. Твірна функція однозначно визначає розподіл: $p_k = \frac{1}{k!} \psi_{\xi}^{(k)}(0), k \geq 0$. Крім того,

твірна функція суми незалежних випадкових величин ξ та η рівна добутку їх твірних: $\psi_{\xi+\eta}(z) = \psi_{\xi}(z) \cdot \psi_{\eta}(z)$.

Приклад 5. Нехай ξ – випадкова величина, що має розподіл Бернуллі з параметрами n та p . Визначимо її твірну

$$\text{функцію } \psi_{\xi}(z) = \sum_{k=0}^n z^k C_n^k p^k q^{n-k} = (pz + q)^n.$$

Приклад 6. Нехай ξ – випадкова величина, що має розподіл Пуассона з параметром λ . Її твірна функція є такою:

$$\psi_{\xi}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda z} = \exp\{-\lambda(1 - z)\}.$$