

Лекція 6. Числові характеристики випадкових величин.

Нехай ξ – випадкова величина на даному імовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Означення 1. Математичним сподіванням або середнім випадкової величини ξ називається число $M\xi$, яке визначається формулою

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k, \quad (1)$$

якщо ξ – дискретна випадкова величина, що набуває значень x_1, \dots, x_k, \dots із ймовірностями p_1, \dots, p_k, \dots тобто $P\{\xi = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$;

або формулою

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx, \quad (2)$$

якщо ξ – неперервна випадкова величина із щільністю розподілу $p(x)$.

Зауваження 1. Формули (1) та (2) мають сенс лише, коли ряд (1) або невласний інтеграл (2) абсолютно збігаються. Тоді випадкова величина ξ називається **інтегрованою**.

Зауваження 2. Число $M\xi$ ще називають **першим моментом** випадкової величини ξ .

Зауваження 3. Використовується також позначення $E\xi$ для математичного сподівання.

Зауваження 4. Точною формулою для визначення $M\xi$ є інтеграл Лебега-Стіл'єса: $M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{\xi}(x), \quad (3)$

де $F_{\xi}(x)$ – функція розподілу випадкової величини ξ .

Наступні приклади пояснюють зміст терміну «середнє».

Приклад 1. Нехай ξ – рівномірно розподілена на відрізку $[a, b]$ випадкова величина. Тоді

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}. \text{ В даному разі середнє – це середина відрізка } [a, b].$$

Приклад 2. Нехай ξ – дискретна випадкова величина, яка набуває значень x_1, x_2, \dots, x_n із рівними ймовірностями

$$\frac{1}{n}. \text{ Згідно формулі (1), маємо } M\xi = \sum_{k=1}^n x_k p_k = \sum_{k=1}^n x_k \cdot \frac{1}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}. \text{ В даному разі середнє – це середнє арифметичне}$$

значень дискретної випадкової величини ξ .

Означення 2. Випадкова величина, математичне сподівання якої рівне нулю, називається **центрованою**.

Зауваження. Математичне сподівання має фізичний зміст: якщо набір мас p_1, \dots, p_k, \dots деякої системи знаходиться в точках x_1, \dots, x_k, \dots , або розподілений по прямій із щільністю розподілу $p(x)$, то центр ваги цієї системи знаходиться в точці $M\xi$.

Теорема 1. (Властивості математичного сподівання).

1. Якщо $\xi = c(const)$, то $M\xi = c$.
2. Якщо ξ – інтегрована невід'ємна випадкова величина, то $M\xi \geq 0$.
3. Якщо ξ – інтегрована випадкова величина, то випадкова величина $c\xi$, де c є деякою константою, інтегрована також, причому $M(c\xi) = cM\xi$.
4. Якщо ξ та η – інтегровані випадкові величини, то $\xi + \eta$ – також інтегрована, причому $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$.
5. Для кожної борелівської функції $g(x), x \in \mathfrak{X}$ та будь-якої інтегрованої випадкової величини ξ існує $Mg(\xi)$, причому, якщо ξ – дискретна випадкова величина, що набуває значень x_1, \dots, x_k, \dots із ймовірностями

p_1, \dots, p_k, \dots : $P\{\xi = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$, то $Mg(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$, а якщо ξ – неперервна випадкова величина із

щільністю розподілу $p(x)$, то $Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx. \quad (4)$

6. Якщо ξ та η – незалежні інтегровані випадкові величини, то існує $M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta, \quad (5)$

Доведення. Властивості 1. – 3. неважко довести самостійно. Доведемо деякі з решти властивостей.

4. Нехай ξ та η – дискретні випадкові величини для яких існують $M\xi$ та $M\eta$. Припустимо, що ξ набуває значень x_1, \dots, x_k, \dots із ймовірностями $p_1^{\xi}, \dots, p_k^{\xi}, \dots$: $P\{\xi = x_k\} = p_k^{\xi}, k = 1, 2, \dots$, а η набуває значень y_1, \dots, y_k, \dots із ймовірностями $p_1^{\eta}, \dots, p_k^{\eta}, \dots$: $P\{\eta = y_k\} = p_k^{\eta}, k = 1, 2, \dots$. Тоді випадкова величина $\xi + \eta$ набуває значень $x_m + y_n, m, n = \overline{1, \infty}$ з ймовірностями $P\{\xi = x_m, \eta = y_n\}$, які позначимо через p_{mn} . Тоді

$$M(\xi + \eta) = \sum_{m,n=1}^{\infty} (x_m + y_n)p_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_m p_{mn} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} y_n p_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} x_m p_m^{\xi} + \sum_{n=1}^{\infty} y_n p_n^{\eta} = M\xi + M\eta$$

З даної рівності, крім того видно, що із існування $M\xi$ та $M\eta$ випливає існування $M(\xi + \eta)$.

Якщо ж ξ та η – неперервні випадкові величини із щільностями розподілів $p_\xi(x)$ та $p_\eta(x)$ відповідно, то, як було

показано, $p_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(u, x-u) du$, де $p_{\xi,\eta}(x, y)$ – спільна щільність розподілу випадкових величин ξ та η . Отже,

$M(\xi + \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{\xi+\eta}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x dx \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(u, x-u) du$. В останньому інтегралі зробимо заміну змінної $x: x-u = z$, тоді

маємо: $M(\xi + \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u+z) dz \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(u, z) du = \int_{-\infty}^{+\infty} u du \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(u, z) dz + \int_{-\infty}^{+\infty} z dz \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(u, z) du = \int_{-\infty}^{+\infty} u p_\xi(u) du + \int_{-\infty}^{+\infty} z p_\eta(z) dz = M\xi + M\eta$

5. Нехай ξ – дискретна випадкова величина з розподілом $P\{\xi = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$, для якої існує $M\xi$. Тоді, очевидно, що випадкова величина $g(\xi)$ набуває значень $g(x_k), k = 1, 2, \dots$ з тими самими ймовірностями:

$P\{g(\xi) = g(x_k)\} = p_k, k = 1, 2, \dots$. Отже, $Mg(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k$, що й треба було довести.

6. Для доведення властивості 6, скористаємось попередньою властивістю, вважаючи її вірною для будь-якої випадкової величини. Припустимо, що ξ та η – неперервні випадкові величини із щільностями розподілів $p_\xi(x)$ та

$p_\eta(x)$ відповідно. Розглянемо $M(\xi \cdot \eta) = Mg(\xi, \eta)$, де $g(x, y) = x \cdot y$. Тоді $Mg(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) p_{\xi,\eta}(x, y) dx dy$, а оскільки

випадкові величини ξ та η – незалежні, $p_{\xi,\eta}(x, y) = p_\xi(x) p_\eta(y)$, тому

$$Mg(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy p_\xi(x) p_\eta(y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y p_\eta(y) dy = M\xi \cdot M\eta$$

Наслідок 1. Якщо існує $M\xi$, то випадкова величина $\xi - M\xi$ – центрована.

Наслідок 2. Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – інтегровані випадкові величини, c_1, c_2, \dots, c_n – довільні сталі, тоді існує

математичне сподівання $M(c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_n \xi_n) = \sum_{k=1}^n c_k M\xi_k$.

Приклад 3. Нехай ξ – випадкова величина, що має біномний розподіл з параметрами p та n . Знайдемо її математичне сподівання. Для цього зауважимо, що випадкову величину ξ , яка означає кількість «успіхів» в серії

незалежних випробувань Бернуллі, можна подати у вигляді суми n випадкових величин: $\xi = \sum_{k=1}^n \xi_k$, де випадкова величина ξ_k набуває значення 1, якщо в k -му випробуванні стався «успіх», та значення 0, якщо сталась «невдача».

Зрозуміло, що для будь-якого $k: M\xi_k = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$, а отже, $M\xi = \sum_{k=1}^n M\xi_k = np$

Приклад 4. Нехай ξ – випадкова величина, що має розподіл Пуассона з параметром λ . Знайдемо її математичне

сподівання: $M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda$

Приклад 5. Нехай випадкова величина ξ має нормальний розподіл $N(a, \sigma^2)$. Тоді

$$\begin{aligned} M\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \left| \begin{matrix} x-a = y, \\ dx = dy \end{matrix} \right| = \int_{-\infty}^{+\infty} (a+y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy = \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy = a, \end{aligned}$$

оскільки другий інтеграл рівний нулю, як інтеграл від непарної функції по симетричному проміжку інтегрування.

Таким чином, зрозумілий імовірнісний зміст параметру a нормального розподілу – це математичне сподівання даної випадкової величини.

Приклад 6. Нехай ξ – випадкова величина, що має розподіл Коші: $p_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$. Знайти математичне

сподівання випадкової величини $\eta = \min(1, \xi)$.

$$\begin{aligned} \text{За властивістю 5, } M\eta &= M \min(1, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \min(1, x) \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \min(1, x) \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 + \arctg x \Big|_1^{+\infty} \right) = \frac{\ln 2}{\pi} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Зауваження 3. До речі, випадкова величина, розподілена за законом Коші, – неінтегровна: $M\xi = \infty$.

Означення 3. *Дисперсією* випадкової величини ξ називається число $D\xi$ (якщо воно існує), рівне:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2. \quad (6)$$

Зауваження 4. Дисперсію випадкової величини називають також *другим центральним моментом*. Взагалі, якщо існує математичне сподівання $M(\xi^k)$, то воно зветься k -тим моментом випадкової величини.

Зауваження 5. Дисперсія випадкової величини вочевидь характеризує міру розсіювання її значень навколо її середнього.

Означення 4. Випадкова величина, дисперсія якої рівна одиниці, називається *нормованою*.

Означення 5. Число $\sigma = \sqrt{D\xi}$ називається *середньоквадратичним* або *стандартним відхиленням* випадкової величини ξ .

Теорема 2. (Властивості дисперсії).

1. Для будь-якої випадкової величини, $D\xi \geq 0$.

2. $Dc = 0$

$$3. D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2. \quad (7)$$

$$4. D(c\xi) = c^2 D\xi. \quad (8)$$

5. Якщо ξ та η – незалежні випадкові величини, які мають дисперсію, то існує $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$,

Доведення. Властивості 1 – 4 доведіть самостійно. Доведемо властивість 5. За означенням,

$$\begin{aligned} D(\xi + \eta) &= M[(\xi + \eta) - M(\xi + \eta)]^2 = M[(\xi - M\xi) + (\eta - M\eta)]^2 = M(\xi - M\xi)^2 + M(\eta - M\eta)^2 + 2M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = \\ &= D\xi + D\eta + 2M[(\xi - M\xi) \cdot (\eta - M\eta)] \end{aligned} \quad (9)$$

Якщо випадкові величини ξ та η незалежні, то випадкові величини $\xi - M\xi$ та $\eta - M\eta$ – незалежні також, тому

$$M[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)] = M(\xi - M\xi)M(\eta - M\eta) = 0, \text{ отже, для незалежних величин дисперсія суми рівна сумі дисперсій:}$$

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta.$$

Приклад 7. Нехай ξ – випадкова величина, що має біноміальний розподіл з параметрами p та n . Відомо, що

$\xi = \sum_{k=1}^n \xi_k$, причому величини $\xi_k, k = \overline{1, n}$ – незалежні, як результати окремих незалежних дослідів. Тому $D\xi = \sum_{k=1}^n D\xi_k$.

Далі, $D\xi_k = M(\xi_k - M\xi_k)^2 = M(\xi_k - p)^2 = M(\xi_k)^2 + p^2 - 2pM\xi_k = p + p^2 - 2p^2 = p - p^2 = pq$, отже, $D\xi = npq$

Приклад 8. Нехай випадкова величина ξ має нормальний розподіл $N(a, \sigma^2)$. Тоді, як відомо, $M\xi = a$, обчислимо дисперсію ξ :

$$\begin{aligned} D\xi &= M(\xi - a)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x - a)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x - a}{\sigma\sqrt{2}} = \sqrt{y}, \\ dx = \frac{\sigma dy}{\sqrt{2y}} \end{array} \right| = 2 \int_0^{+\infty} 2\sigma^2 y \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-y} \cdot \frac{\sigma dy}{\sqrt{2y}} = \\ &= 2\sigma^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} y^{\frac{1}{2}} e^{-y} dy = 2\sigma^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sigma^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sigma^2 \end{aligned}$$

Таким чином, параметр σ^2 нормального розподілу – це дисперсія даної випадкової величини.

Приклад 9. Нехай випадкова величина ξ має середнє $M\xi = a$ та дисперсію $D\xi = \sigma^2$. Неважко зрозуміти тоді, що

випадкова величина $\eta = \frac{\xi - a}{\sigma}$ – центрована та нормована, оскільки $M\eta = M\frac{\xi - a}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} M(\xi - a) = 0$,

$$D\eta = D\frac{\xi - a}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^2} D(\xi - a) = \frac{D\xi}{\sigma^2} = 1.$$

Означення 6. *Коваріацією* випадкових величин ξ та η називається число $\text{cov}(\xi, \eta)$ (якщо воно існує), рівне

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M[(\xi - M\xi) \cdot (\eta - M\eta)]. \quad (10)$$

$$\text{Неважко перевірити, що} \quad \text{cov}(\xi, \eta) = M(\xi \cdot \eta) - M\xi \cdot M\eta. \quad (11)$$

Зауваження 6. Доведено, що для двох довільних випадкових величин $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$ (див. формулу (9)).

Зауваження 7. Доведено, що, якщо ξ та η – незалежні випадкові величини, то $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$

Означення 7. *Коефіцієнтом кореляції* випадкових величин ξ та η з ненульовими дисперсіями називається

$$\text{число } r(\xi, \eta) \text{ (якщо воно існує), рівне} \quad r(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi} \cdot \sqrt{D\eta}}. \quad (12)$$

Означення 8. Випадкові величини ξ та η називаються *некорельованими*, якщо існує $r(\xi, \eta) = 0$.

В наступній теоремі зібрані властивості коефіцієнта кореляції двох випадкових величин. В усіх твердженнях припускається існування $r(\xi, \eta)$.

Теорема 3. (Властивості коефіцієнта кореляції).

1. Для будь-яких випадкових величин $r(\xi, \eta) \leq 1$.
2. Якщо ξ та η – незалежні випадкові величини, то вони некорельовані. Обернене твердження, взагалі кажучи, невірне.
3. Якщо (ξ, η) – випадковий вектор з нормальним розподілом з параметрами $a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ та r (див. попередню лекцію), то а) параметр $r = r(\xi, \eta)$; б) з некорельованості компонентів, тобто $r = 0$, випливає, що ξ та η – незалежні випадкові величини.

Доведення. Твердження 2 вже обговорене у зауваженні 7. Твердження 3 перевірте самостійно. Доведемо

властивість 1. З цією метою спрощуватимемо очевидну нерівність:

$$M \left[\frac{(\xi - M\xi)}{\sqrt{D\xi}} \pm \frac{(\eta - M\eta)}{\sqrt{D\eta}} \right]^2 \geq 0 \quad (13)$$

$$\Rightarrow M \frac{(\xi - M\xi)^2}{D\xi} + M \frac{(\eta - M\eta)^2}{D\eta} \pm 2M \frac{(\xi - M\xi)}{\sqrt{D\xi}} \cdot \frac{(\eta - M\eta)}{\sqrt{D\eta}} \geq 0 \Rightarrow 2 \pm 2r(\xi, \eta) \geq 0, \text{ звідки й випливає потрібна нерівність.}$$

Зауваження 8. З нерівності (13) додатково випливає, що $|r(\xi, \eta)| = 1$ тоді і тільки тоді, коли одна з випадкових величин лінійно виражається через іншу, наприклад, $\xi = A\eta + B$, де A та B – деякі числа (причому $\text{sign } A = \text{sign}(r(\xi, \eta))$). Тобто коефіцієнт кореляції рівний ± 1 характеризує лінійну залежність випадкових величин ξ та η . Проте, наступний приклад демонструє, що випадкові величини, пов'язані нелінійною залежністю можуть бути взагалі некорельовані, тобто коефіцієнт кореляції проявляє чутливість лише до лінійної залежності величин.

Приклад 10. Нехай випадкова величина ξ – рівномірно розподілена на відрізку $[0, 2\pi]$. Розглянемо випадкові величини $\eta_1 = \sin \xi$ та $\eta_2 = \cos \xi$. Очевидно, що $\eta_1^2 + \eta_2^2 = 1$, тобто величини η_1, η_2 – функціонально залежні. Проте,

$$M\eta_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{2\pi} dx = 0. \text{ Аналогічно, } M\eta_2 = 0. \text{ Крім того, } M\eta_1 \cdot \eta_2 = M \sin \xi \cdot \cos \xi = \frac{1}{2} M \sin 2\xi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2x}{2\pi} dx = 0, \text{ тобто з}$$

формул (11) та (12) випливає, що $r(\eta_1, \eta_2) = 0$.