

Лекція 5. Випадкові вектори. Багатовимірні розподіли.

Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ – імовірнісний простір, де Ω – простір елементарних подій даного експерименту, \mathfrak{F} – σ -алгебра випадкових (вимірних) подій, P – ймовірність випадкової події із \mathfrak{F} . На даному імовірнісному просторі розглянемо сукупність n випадкових величин $\xi_1 = \xi_1(\omega), \xi_2 = \xi_2(\omega), \dots, \xi_n = \xi_n(\omega)$.

Означення 1. *Випадковим вектором* або n -вимірною випадковою величиною на імовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ називається вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

Очевидно, що множина $\{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, \dots, \xi_n(\omega) < x_n\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\}$ є випадковою подією при всіх значеннях $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, отже, визначена функція n змінних $F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\}$, яка називається **n -вимірною функцією розподілу** випадкового вектора $\bar{\xi}$ або **сумісним розподілом** випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Наступні властивості n -вимірних функцій розподілу **доведіть самостійно**.

Теорема 1. (Властивості багатовимірних розподілів).

- $F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – монотонно неспадна функція по кожному своєму аргументу, тобто:
 $F_{\xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x'_k, \dots, x_n) \leq F_{\xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x''_k, \dots, x_n)$ при довільних $x'_k < x''_k \quad \forall x'_i, i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$.
- $F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – неперервна зліва функція по кожному своєму аргументу, тобто:
 $\lim_{x_k \rightarrow x_0 - 0} F_{\xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = F_{\xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_0, \dots, x_n) \quad \forall x_k, k = \overline{1, n}$.
- $\lim_{x_k \rightarrow -\infty} F_{\xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = 0 \quad \forall x_k, k = \overline{1, n}$.
- $\forall x_k, k = \overline{1, n} : \lim_{x_k \rightarrow +\infty} F_{\xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = F_{\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$, тобто є $(n-1)$ -вимірною функцією розподілу випадкового вектора $(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$.
- $\lim_{\substack{x_1 \rightarrow +\infty, \\ \vdots \\ x_n \rightarrow +\infty}} F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = 1$.

Зокрема, при $n=2$ сумісний розподіл $F_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2\}$ дозволяє визначити одновимірні (маргінальні) розподіли як границі: $F_{\xi_1}(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} F_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)$, $F_{\xi_2}(x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} F_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)$, проте невірно, що одновимірні розподіли визначають сумісний розподіл, тобто відомостей про поведінку компонент випадкового вектора, взагалі кажучи, недостатньо для визначення поведінки всього вектора.

Якщо ξ, η – дискретні випадкові величини, причому ξ набуває значень $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$, а η набуває значень $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$, то розподіл випадкового вектора (ξ, η) часто задають у вигляді таблиці:

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_2	\dots	y_n	\dots
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1n}	\dots
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2n}	\dots
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	
x_m	p_{m1}	p_{m2}	\dots	p_{mn}	\dots
\vdots					

Тут $p_{mn} = P(\xi = x_m, \eta = y_n)$, $m, n = \overline{1, \infty}$, отже, можна визначити розподіли випадкових величин ξ, η :

$P(\xi = x_m) \stackrel{\text{def}}{=} p_m^\xi = \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn}, \quad \forall m = \overline{1, \infty}, \quad P(\eta = y_n) \stackrel{\text{def}}{=} p_n^\eta = \sum_{m=1}^{\infty} p_{mn}, \quad \forall n = \overline{1, \infty}$, тобто суми рядків таблиці сумісного розподілу

задають розподіл випадкової величини ξ , а суми стовпчиків таблиці – розподіл випадкової величини η .

Означення 2. Випадковий вектор (ξ, η) називається **неперервним**, якщо існує неперервна функція $p_{\xi, \eta}(x, y)$, яка

при довільних значеннях $x, y \in \mathbb{R}$ задовольняє рівність: $F_{\xi, \eta}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_{\xi, \eta}(u, v) du dv$. (1)

Функція $p_{\xi, \eta}(x, y)$ називається **сумісною щільністю** розподілу випадкових величин ξ, η . Очевидно, що у всіх точках

неперервності функції $p_{\xi, \eta}(x, y)$ має місце рівність $p_{\xi, \eta}(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$

Очевидні властивості сумісної щільності містяться у наступній теоремі.

Теорема 2. (Властивості сумісної щільності розподілу двох випадкових величин).

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi, \eta}(u, v) du dv = 1$ (2)
2. $p_{\xi, \eta}(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
3. $P((\xi, \eta) \in G) = \iint_G p_{\xi, \eta}(u, v) du dv \quad \forall G \subseteq \mathbb{R}^2$

Знаючи сумісну щільність розподілу випадкового вектору (ξ, η) , можна визначити щільність кожної випадкової величини, його ще називають маргінальним розподілом, на відміну від сумісного (обернений перехід, взагалі кажучи, неможливий): $F_{\xi}(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi, \eta}(u, v) du dv$, звідки $p_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi, \eta}(x, v) dv$. Аналогічно,

$$p_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi, \eta}(u, y) du$$

Приклад 1. Випадковий вектор (ξ, η) називається **рівномірно розподіленим в області** $G \subseteq \mathbb{R}^2$, якщо сумісна щільність розподілу його компонент визначається рівністю: $p_{\xi, \eta}(x, y) = \begin{cases} c, & (x, y) \in G \\ 0, & (x, y) \notin G \end{cases}$ (3)

Для визначення константи c скористаємось властивістю (2) сумісної щільності розподілу. Нехай $S(G)$ – площа області G , тоді маємо: $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi, \eta}(u, v) du dv = \iint_G c \cdot du dv = cS(G)$, звідки $c = \frac{1}{S(G)}$. Отже,

$P((\xi, \eta) \in D) = \iint_D p_{\xi, \eta}(u, v) du dv = \frac{1}{S(G)} \iint_D du dv = \frac{S(D)}{S(G)}$, тобто поняття геометричної ймовірності пов'язане саме з рівномірним розподілом в області.

Приклад 2. Випадковий вектор (ξ, η) називається **нормально розподіленим** з параметрами $a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ та r , якщо сумісна щільність розподілу його компонент визначається формулою:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2r(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)\right\} \quad (4)$$

Завдання для самостійної роботи. Покажіть, що при $r=0$ випадкові величини ξ та η мають розподіли $N(a_1, \sigma_1^2)$ та $N(a_2, \sigma_2^2)$ відповідно.

Означення 3. Випадкові величини ξ та η називаються **незалежними**, якщо

$$P\{\xi < x, \eta < y\} = P\{\xi < x\} \cdot P\{\eta < y\} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Іншими словами, випадкові величини незалежні тоді і тільки тоді, коли сумісна функція їх розподілу є добутком їх функцій розподілу: $F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Зауваження 1. Справедливе і більш загальне твердження: випадкові величини ξ та η незалежні тоді і тільки тоді, коли події $P\{\xi \in B_1\}$ та $P\{\eta \in B_2\}$ – незалежні для будь-яких борелівських множин B_1 та B_2 .

Зауваження 2. Поняття незалежності, звісно, природно розповсюджується на довільну кількість випадкових величин.

Зауваження 3. Якщо ξ та η – дискретні випадкові величини з розподілами $P(\xi = x_m) = p_m^{\xi}$, $m = \overline{1, \infty}$ та $P(\eta = y_n) = p_n^{\eta}$, $n = \overline{1, \infty}$, то незалежні вони тоді і тільки тоді, коли $p_{mn} = P(\xi = x_m, \eta = y_n) = p_m^{\xi} \cdot p_n^{\eta} \quad \forall m, n \geq 1$

Зауваження 4. Якщо ξ та η – неперервні випадкові величини, що мають щільності розподілів $p_{\xi}(x)$ та $p_{\eta}(y)$ відповідно, то незалежні вони тоді і тільки тоді, коли їх сумісна щільність розподілу є добутком їх щільностей: $p_{\xi, \eta}(x, y) = p_{\xi}(x) \cdot p_{\eta}(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Приклад 3. (Розподіл суми двох випадкових величин). Нехай ξ та η – випадкові величини із сумісною щільністю розподілу $p_{\xi, \eta}(x, y)$. Знайдемо розподіл випадкової величини $\varsigma = \xi + \eta$.

Отже, $F_{\varsigma}(x) = P(\varsigma < x) = P(\xi + \eta < x) = P((\xi, \eta) \in D_x)$, де $D_x = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u + v < x\}$. Тоді $F_{\varsigma}(x) = \iint_{D_x} p_{\xi, \eta}(u, v) du dv =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{x-u} p_{\xi, \eta}(u, v) dv, \text{ звідки} \quad p_{\varsigma}(x) = F'_{\varsigma}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi, \eta}(u, x-u) du \quad (6)$$

Якщо випадкові величини ξ та η незалежні, то $p_{\varsigma}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(u) p_{\eta}(x-u) du$, тобто щільність суми випадкових величин є згортою щільностей доданків.

Використаємо формулу (6), щоб знайти розподіл суми двох незалежних випадкових величин рівномірно розподілених відповідно на відрізках $[-1,0]$ та $[0,1]$. Отже, маємо $p_{\xi}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1,0] \\ 0, & x \notin [-1,0] \end{cases}$ та $p_{\eta}(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0,1] \\ 0, & y \notin [0,1] \end{cases}$,

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = p_{\xi}(x) \cdot p_{\eta}(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

Тоді для випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$ одержимо:

$$p_{\zeta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(u) p_{\eta}(x-u) du = \int_{-1}^0 p_{\eta}(x-u) du = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -1) \\ \int_{-1}^x du, & x \in [-1,0] \\ \int_{-1}^0 du, & x \in (0,1] \\ 0, & x \in (1, +\infty) \end{cases} = \begin{cases} x+1, & x \in [-1,0] \\ -x+1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [-1,1] \end{cases}$$

Назва цього розподілу – трикутний на відріжку $[-1,1]$ стає зрозумілою, якщо подивитись на графік щільності на рис. 1:

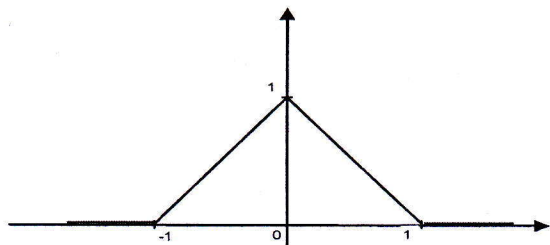


Рис. 1

Приклад 4. (χ^2 -квадрат розподіл з n степенями свободи)

Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – незалежні випадкові величини з розподілами $N(0,1)$. Розглянемо випадкову величину $\eta = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2$, яка задає довжину випадкового вектора з компонентами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Можна показати, що

щільність розподілу випадкової величини η рівна

$$p_{\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \end{cases} \quad (7)$$

χ^2 -квадрат розподіл має широке застосування у математичній статистиці, зокрема для перевірки гіпотези про узгодженість емпіричних даних з деякою гіпотетичною функцією розподілу.

Приклад 6. (Γ розподіл з параметрами α та β)

Випадкова величина має Γ розподіл з параметрами α та β , якщо її щільність задається формулою:

$$p_{\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x > 0 \end{cases} \quad (8)$$

Цей розподіл є досить універсальним – при $\alpha = 0$ він збігається із показниковим розподілом, при $\alpha = \frac{n}{2}, \beta = \frac{1}{2}$ – з χ^2 -квадрат розподілом з n степенями свободи.