

Лекція 4. Випадкові величини. Функція розподілу випадкової величини.

Приклад 1. Розглянемо деякий стохастичний експеримент, наприклад, підкидання двох монет. Його простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1 = "ЦЦ", \omega_2 = "ГЦ", \omega_3 = "ЦГ", \omega_4 = "ГГ"\}$ складається із 4 рівноможливих випадків. Спробуємо «виміряти» числом кожний з них. Одна з можливостей – поставити у відповідність кожній елементарній події $\omega_k (k = \overline{1,4})$ кількість випадіння герба. Таким чином, матимемо функцію $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, значення якої залежать від випадку. Така функція називається **випадковою величиною**. Її можна характеризувати ймовірностями, з якими вона набуває своїх значень: $P\{\xi(\omega) = 0\} = P\{\xi(\omega) = 2\} = 1/4$, $P\{\xi(\omega) = 1\} = 1/2$.

Приклад 2. Розглянемо інший приклад – відбувається стрільба по мішені до першого влучного пострілу з ймовірністю p влучання в кожному окремому пострілі. Позначаючи влучання літерою «У», а промах – «Н», простір елементарних подій запишемо наступним чином: $\Omega = \{\omega_1 = "У", \omega_2 = "НУ", \omega_3 = "ННУ", \dots, \omega_n = \underbrace{"Н \dots Н"}_n "У", \dots\}$. Визначимо випадкову

величину $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ як кількість пострілів до першого влучання. Тоді $P\{\xi(\omega) = k\} = P\{\omega = \omega_k\} = p(1-p)^k \quad \forall k = \overline{1, \infty}$. Ця випадкова величина визначена на нескінченному, проте знов таки дискретному просторі елементарних подій.

Приклад 3. Нехай точка випадковим чином кидається на відрізок $[a, b]$. В даному прикладі маємо неперервний простір елементарних подій $\Omega = \{\omega: \omega \in [a, b]\}$. Тоді випадкова величина, визначена як координата випадкової точки,

$\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ також має неперервний простір аргументів, при цьому, як відомо, $P\{\xi \in [\alpha, \beta]\} = \frac{\beta - \alpha}{b - a} \quad ([\alpha, \beta] \subset [a, b])$.

Дамо точне означення випадкової величини. Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ – ймовірнісний простір, де Ω – простір елементарних подій даного експерименту, \mathfrak{F} – σ -алгебра випадкових (вимірних) подій, P – ймовірність випадкової події із \mathfrak{F} .

Означення 1. **Випадковою величиною** на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ називається функція $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, **вимірна** відносно σ -алгебри \mathfrak{F} , тобто така, що $\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < x\} \in \mathfrak{F} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Надалі будемо вважати фіксованим деякий ймовірнісний простір $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Теорема 1. Нехай ξ – випадкова величина. Тоді $\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \leq x\}, \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x\}, \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) > x\}, \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \geq x\}, \{\omega \in \Omega: a \leq \xi(\omega) < b\} \quad \forall x, a, b \in \mathbb{R}$ є випадковими подіями.

Доведення. Розглянемо, наприклад, $\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \leq x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < x + 1/n\} \in \mathfrak{F}$, тобто це випадкова подія $\forall x \in \mathbb{R}$.

Тоді $\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x\} = \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \leq x\} \setminus \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < x\} \in \mathfrak{F}$. Якими б не були числа a, b : $\{\omega \in \Omega: a \leq \xi(\omega) < b\} = \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < b\} \setminus \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < a\} \in \mathfrak{F}$. Інші твердження доводяться аналогічно.

Зауваження. Доведені властивості означають, що ймовірності цих подій цілком визначені.

Означення 2. **Функцією розподілу** випадкової величини $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ називається функція

$F_{\xi}(x) = P\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < x\} \stackrel{\text{def}}{=} P\{\xi < x\}$ визначена $\forall x \in \mathbb{R}$.

Приклад 4. Нехай ξ – випадкова величина, визначена у прикладі 1. Тоді

$$\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < x\} = \begin{cases} \emptyset, & x \leq 0 \\ \{\xi(\omega) = 0\} = \omega_1, & 0 < x \leq 1 \\ \{\xi(\omega) = 0, \xi(\omega) = 1\} = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3, & 1 < x \leq 2 \\ \{\xi(\omega) = 0, \xi(\omega) = 1, \xi(\omega) = 2\} = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4 = \Omega, & x > 2 \end{cases} \quad \text{Отже,} \quad F_{\xi}(x) = P\{\xi < x\} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1/4, & 0 < x \leq 1 \\ 3/4, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Таким чином, $F_{\xi}(x)$ – кусково-стала функція. Графік функції $F_{\xi}(x)$ на рисунку 1.

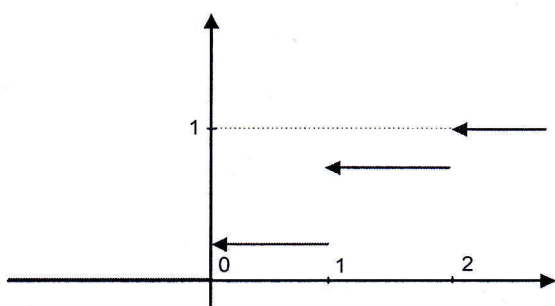


Рис. 1

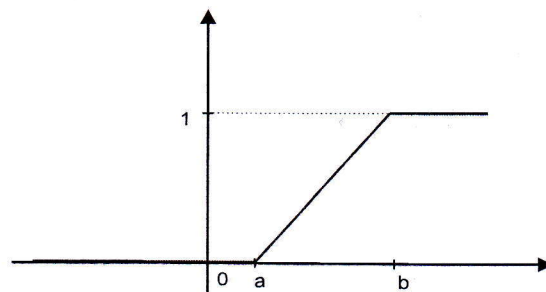


Рис. 2

Приклад 5. Нехай ξ – випадкова величина, визначена у прикладі 3. Тоді

$$\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < x\} = \begin{cases} \emptyset, & x \leq a \\ \{\omega \in \Omega: \omega < x\} = [a, x), & a < x \leq b \\ \Omega = [a, b], & x > b \end{cases} \quad \text{Отже,} \quad F_{\xi}(x) = P\{\xi < x\} = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

В даному прикладі функція $F_{\xi}(x)$ – неперервна. Її графік на рисунку 2.

Зауваження. Графіки функцій розподілу цих двох випадкових величин демонструють дещо схожу поведінку. (Як саме?) Дослідимо детально властивості функції розподілу довільної випадкової величини ξ .

Теорема 2 (про властивості функції розподілу випадкової величини).

1. $F_{\xi}(x)$ монотонно не спадає на всій числовій осі;
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x) = 1$;
3. $F_{\xi}(x)$ неперервна зліва, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F_{\xi}(x) = F_{\xi}(x_0)$;
4. $P\{\omega \in \Omega : a \leq \xi(\omega) < b\} = F(b) - F(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$;
5. $P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leq x\} = F_{\xi}(x + 0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Доведення.

1. Розглянемо довільні $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, де $x_1 < x_2$. Тоді $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x_1\} \subseteq \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x_2\}$, тому $F_{\xi}(x_1) \leq F_{\xi}(x_2)$, тобто $F_{\xi}(x)$ – монотонно не спадає на всій числовій осі.

2. Розглянемо довільну числову послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$, яка монотонно спадає до $-\infty$: $x_n \downarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Введемо в розгляд події $A_n = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x_n\}$. Зрозуміло, що $A_{n+1} \subseteq A_n \quad \forall n \geq 1$. Згідно властивості неперервності ймовірності (теорема 5 з лекції 2) $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi}(x_n) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x)$ (Тут використано означення границі функції за

Гейне). З іншого боку, $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(\emptyset) = 0$, отже, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0$. Аналогічно можна визначити і другу границю.

3. Розглянемо довільну числову послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$, яка монотонно зростає до x_0 : $x_n \uparrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$. Тоді $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x_0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x_n\}$. Для монотонно зростаючої послідовності подій $A_n = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x_n\}$ з

неперервності ймовірності випливає, що $F_{\xi}(x_0) = P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x_0\} = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi}(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F_{\xi}(x)$.

4. Нехай $a < b$. Тоді $\{\omega \in \Omega : a \leq \xi(\omega) < b\} = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < b\} \setminus \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < a\}$, і оскільки перша подія є наслідком другої, то з теореми 3 з лекції 2 випливає, що $P\{\omega \in \Omega : a \leq \xi(\omega) < b\} = P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < b\} - P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < a\} = F(b) - F(a)$.

5. Нехай довільна числова послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ монотонно спадає до деякого числа x : $x_n \downarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Тоді $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leq x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x_n\}$. Для монотонно спадаючої послідовності подій $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x_n\}$ справедливо, що

$$P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leq x\} = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x_n\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x_n\}) = F_{\xi}(x + 0).$$

Наслідок. $\forall x \in \mathbb{R} : P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x\} = F_{\xi}(x + 0) - F_{\xi}(x)$, отже, якщо функція розподілу деякої випадкової величини неперервна, то $\forall x \in \mathbb{R} : P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x\} = 0$.

Зауваження. Виявляється, що визначальними для функції розподілу є властивості 1 – 3. Іншими словами, якщо деяка функція $F(x), x \in \mathbb{R}$ має властивості 1 – 3, то можна визначити ймовірнісний простір (Ω, \mathcal{F}, P) та випадкову величину ξ на ньому такі, що $F_{\xi}(x) \equiv F(x)$.

Дискретні випадкові величини.

Означення 3. Випадкова величина $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ називається **дискретною**, якщо множина її значень скінчена або злічевна.

Теорема 3. Дискретна випадкова величина повністю характеризується набором своїх значень та ймовірностями, з якими ці значення набуваються.

Доведення. Дійсно, нехай випадкова величина ξ набуває значень x_1, x_2, \dots , причому $P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_k\} = p_k \geq 0$, де $\sum_k p_k = 1$. Тоді $F_{\xi}(x) = P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} = \sum_{k: x_k < x} P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_k\} = \sum_{k: x_k < x} p_k$.

Означення 4. Набір ймовірностей $p_k, k \geq 1$ називається **розподілом** дискретної випадкової величини ξ .

Приклад 6. Нехай n – кількість незалежних випробувань в схемі Бернуллі з ймовірністю успіху p в кожному випробуванні. Нехай величина ξ визначає кількість успішних випробувань. Тоді, як відомо,

$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, k = \overline{0, n}$. Ця випадкова величина має **біномний розподіл** (або **розподіл Бернуллі**) з параметрами n та p .

Приклад 7. Повернемося до випадкової величини, розглянутої в прикладі 2. Ця дискретна випадкова величина має **геометричний розподіл** з параметром $p > 0$. Геометрично розподілена випадкова величина має властивість

відсутності післядії. А саме: $P\{\xi = n + m / \xi \geq n\} = P\{\xi = m\} \quad \forall m \geq 0, n \geq 1$ (доведіть це самостійно). Можна дати наступну ілюстрацію цієї властивості. Нехай ξ означає випадкову тривалість телефонної розмови, причому на початку кожної хвилини розмови вона або продовжується ще на хвилину з ймовірністю p , або припиняється із ймовірністю $1 - p$. Тоді ймовірність того, що розмова триватиме ще m хвилин, якщо вона вже триває не менше ніж n хвилин збігається із ймовірністю, що розмова від початку триватиме рівно m хвилин незалежно від n . Крім того, можна показати, що в класі дискретних розподілів лише геометричний має властивість відсутності післядії.

Приклад 8. Випадкова величина ξ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda > 0$, якщо вона має своїми значеннями всі

цілі невід'ємні числа, причому $P\{\xi = n\} = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \quad \forall n \geq 0$.

Завдання для самостійної роботи. Випадкова величина ξ – це кількість успіхів в серії із 3 незалежних випробувань Бернуллі з ймовірністю успіху $p = \frac{2}{3}$. Визначити функцію розподілу даної випадкової величини та побудувати її графік.

Неперервні випадкові величини.

Означення 5. Випадкова величина $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ називається **абсолютно неперервною**, якщо $\forall x \in \mathbb{R}$ значення її

функції розподілу $F_\xi(x)$ може бути представлене у вигляді: $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p_\xi(u) du$, де функція $p_\xi(x), x \in (-\infty, \infty)$ називається

щільністю розподілу випадкової величини ξ .

Теорема 4 (про властивості щільності розподілу випадкової величини).

1. $p_\xi(x)$ – невід'ємна: $p_\xi(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(u) du = 1$;

3. $P\{\omega \in \Omega : a \leq \xi(\omega) < b\} = \int_a^b p_\xi(u) du \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$;

Доведення.

1. З означення щільності випливає, що $F_\xi(x)$ – диференційована функція і $F_\xi'(x) = p_\xi(x)$. А оскільки $F_\xi(x)$ монотонно не спадає, то $p_\xi(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Ця властивість випливає з того, що $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(u) du = 1$.

3. Це прямий наслідок теореми Ньютона-Лейбніца. Дана властивість означає, що ймовірність $P\{a \leq \xi < b\}$ рівна площі фігури під графіком щільності випадкової величини на відрізку $[a, b]$.

Наслідок. З даної теореми та теореми про середнє значення інтегралу випливає, що $P\{x \leq \xi(\omega) < x + \Delta x\} = p_\xi(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ – точка неперервності $p_\xi(x)$. Саме для неперервної випадкової величини ймовірність набути будь-яке значення дорівнює нулю, проте, взагалі кажучи, не є неможливою подією.

Приклад 9. Повернемося до випадкової величини з прикладу 3. Якщо знайти похідну від її функції розподілу,

одержимо: $F_\xi'(x) = p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$

Означення 6. Випадкова величина, що має таку щільність розподілу, називається **рівномірно розподіленою** на відрізку $[a, b]$.

Означення 7. Випадкова величина, яка має щільність розподілу, визначену формулою: $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$,

називається **нормально розподіленою** з параметрами a та σ^2 . Для нормального розподілу використовують позначення $N(a, \sigma^2)$. Графік функції нормального розподілу схематично представлений на рис.3.

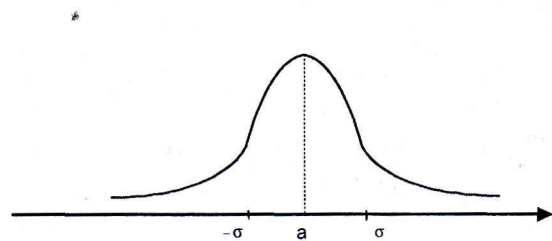


Рис. 3

Зауваження. Пригадайте функцію $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ із граничної теореми Муавра-Лапласа. То була щільність розподілу випадкової величини із нормальним $N(0,1)$ розподілом.

Означення 8. Випадкова величина, яка має щільність розподілу, визначену формулою $p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ називається **показниково розподіленою** з параметром $\lambda > 0$.

Її функція розподілу визначається формулою:
$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Надалі часто виникатиме задача відшукування розподілу деякої функції від випадкової величини. Тому перш за все треба з'ясувати, які саме функції від випадкових величин в свою чергу будуть випадковими величинами. Відповідь на це питання дає наступна теорема, яку ми змушені будемо лишити без доведення.

Теорема. Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ – імовірнісний простір і ξ – випадкова величина на ньому. Нехай $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ – борелівська функція (тобто, вимірна відносно σ -алгебри борелівських множин $\mathcal{B}(\mathfrak{R})$ на прямій \mathfrak{R} : $\{x \in \mathfrak{R} : f(x) < c\} \in \mathcal{B}(\mathfrak{R}) \quad \forall c \in \mathfrak{R}$). Тоді $f(\xi)$ – випадкова величина на $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Зауваження. Перевіряти, чи є функція борелівською – не проста справа, проте принаймні всі неперервні функції є борелівськими, і це дає нам досить широкі можливості по створенню нових випадкових величин від уже відомих.

Приклад 10. Нехай ξ – рівномірно розподілена на відрізку $[0,1]$ випадкова величина. Визначити розподіл випадкової величини $\eta = \ln \frac{1}{\xi}$.

Зрозуміло, що $\eta = \ln \frac{1}{\xi}$ так само, як і ξ , буде неперервною випадковою величиною в області визначення. І хоча характеризувати її треба щільністю розподілу, шукатимемо спочатку її функцію розподілу:

$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(\ln \frac{1}{\xi} < x) = P(\frac{1}{\xi} < e^x) = P(\xi > e^{-x})$, оскільки значення ξ з ймовірністю 1 зосереджені на проміжку $[0,1]$. Отже, $F_\eta(x) = P(\xi > e^{-x}) = 1 - P(\xi \leq e^{-x}) = 1 - e^{-x}$, тому що $P(\xi \leq e^{-x}) = F_\xi(x) = x$ при $0 < x < 1$. Одержаний результат означає, що випадкова величина η має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 1$. Її щільність рівна

$$p_\eta(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Приклад 11. Нехай ξ – випадкова величина із неперервною функцією розподілу $F(x)$. Визначити розподіл випадкової величини $\eta = F(\xi)$.

Знайдемо функцію розподілу випадкової величини η : $F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(F(\xi) < x)$. Оскільки $F(x)$ – це функція розподілу, то $F_\eta(x)$ рівна 0 при $x \leq 0$ і $F_\eta(x)$ рівна 1 при $x > 1$. Нехай $0 < x \leq 1$. Розглянемо точку $z \in \mathfrak{R}$, для якої $F(z) = x$, тобто $z = F^{-1}(x)$ (із-за неперервності та монотонності функції $F(x)$ така точка визначається однозначно). Тоді $F_\eta(x) = P(F(\xi) < x) = P(\xi < F^{-1}(x)) = P(\xi < z) = F(z) = F(F^{-1}(x)) = x$. Отже, при $0 < x \leq 1$ щільність розподілу випадкової величини η рівна 1, тобто η – рівномірно розподілена на $[0,1]$.

Зауваження 1. Дискретними та неперервними випадковими величинами далеко не вичерпуються всі можливі розподіли. Крім випадкових величин, які в деякому інтервалі ведуть себе як дискретні, а в іншому – як неперервні, існують ще так звані сингулярні розподіли. Їх функція розподілу може бути неперервна, проте похідна від неї рівна нулю в усіх точках прямої \mathfrak{R} , крім множини точок міри 0. Надалі такі розподіли не розглядатимуться, оскільки вони вимагають для свого вивчення більш потужного математичного апарату, ніж той, яким в ідеалі має володіти студент-радіофізик.

Зауваження 2. Нехай $y = f(x)$ – взаємно-однозначне відображення із \mathfrak{R} в \mathfrak{R} . Тоді існує обернене відображення $f^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} g$, тобто $x = g(y)$. Якщо випадкова величина ξ має щільність розподілу $p_\xi(x)$, то випадкова величина $\eta = f(\xi)$ також має щільність розподілу, яка визначається формулою: $p_\eta(y) = p_\xi(g(y)) \cdot |g'(y)|$.