

## Лекція 2. Властивості ймовірності, що впливають з аксіом.

Нехай  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  – ймовірнісний простір, де  $\Omega$  – простір елементарних подій даного експерименту,  $\mathfrak{F}$  –  $\sigma$ -алгебра випадкових (вимірних) подій,  $P$  – ймовірність випадкової події із  $\mathfrak{F}$ . Розглянемо властивості цієї ймовірнісної міри, які безпосередньо впливають із аксіом, що її визначають.

**Теорема 1.** Для будь-якої випадкової події  $A \in \mathfrak{F}$ :  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ . (1)

**Доведення.** Безпосередньо з аксіоми P3 випливає, що  $P(\bar{A}) + P(A) = P(\Omega) = 1$  оскільки події  $A$  та  $\bar{A}$  несумісні.

**Теорема 2.**  $P(\emptyset) = 0$ .

**Доведення.** Дійсно, з попереднього маємо:  $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0$ . (2)

**Теорема 3.** Якщо подія  $B$  є наслідком події  $A$ :  $A \subseteq B$ , то для ймовірності різниці цих подій справедлива рівність

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A). \quad (3)$$

**Доведення.** Справді, для таких подій вірно, що  $B = A \cup (B \setminus A)$ , причому події  $A$  та  $B \setminus A$  несумісні, тому  $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$ , звідки й випливає твердження.

**Теорема 4.** Для довільних подій  $A, B \in \mathfrak{F}$ :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ . (4)

**Доведення.** Подію  $A \cup B$  легко подати у вигляді суми попарно несумісних подій:  $A \cup B = (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B) \cup (A \cap B)$ , причому як подія  $A$ , так і подія  $B$  є наслідками події  $A \cup B$ . Тому з аксіоми P3 та теореми 3 маємо:  $P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

**Зауваження.** Теорема 4 може бути узагальнена на довільну кількість  $n$  випадкових подій  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{F}$ :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{\substack{k_1, k_2=1 \\ (k_1 \neq k_2)}}^n P(A_{k_1} \cap A_{k_2}) + \dots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right). \quad (5)$$

Зокрема, для трьох випадкових подій:  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$ .

**Доведення** теореми 4, наприклад, методом математичної індукції пропонується провести самостійно.

**Приклад.** Розглянемо так звану задачу «про збіг», а саме:  $n$  чисел випадковим чином переставляють на  $n$  місцях. Яка ймовірність, що принаймні одне з чисел  $1, 2, \dots, n$  виявиться на своєму місці. (Ця задача відома і з більш ліричним змістом: дехто випадковим чином розкладає  $n$  листів у  $n$  конвертів. Знайти ймовірність, що принаймні один адресат одержить «свій» лист.)

Позначимо  $A_k$  – подію, що число  $k$  опиниться на своєму місці. Тоді  $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$  – подія, що принаймні одне число виявиться на своєму місці. З формули (5) випливає, що  $P(A) = \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{\substack{k_1, k_2=1 \\ (k_1 \neq k_2)}}^n P(A_{k_1} \cap A_{k_2}) + \dots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)$ .

Вважаючи, що всі перестановки чисел  $1, 2, \dots, n$  рівноможливі, легко одержати, що  $P(A_k) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$  для будь-якої

події  $A_k$ . Аналогічно,  $P(A_{k_1} \cap A_{k_2}) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$  для довільної пари подій  $A_{k_1}, A_{k_2}$ . Продовжуючи, одержимо, що

$$P(A) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} - \sum_{\substack{k_1, k_2=1 \\ (k_1 \neq k_2)}}^n \frac{1}{n(n-1)} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = 1 - C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \rightarrow 1 - \frac{1}{e}, n \rightarrow \infty$$

**Теорема 5 (властивість неперервності ймовірності).** Для монотонно зростаючої послідовності випадкових подій  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots \in \mathfrak{F}$ :

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n). \quad (6)$$

Для монотонно спадної послідовності випадкових подій  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots \in \mathfrak{F}$ :  $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ . (7)

**Доведення.** Доведемо першу частину твердження. Розглянемо події  $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, B_n = A_n \setminus A_{n-1}, \dots$

Оскільки вони попарно несумісні, то згідно аксіоми P3, маємо:  $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(B_k) =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( P(A_1) + \sum_{k=1}^{n-1} (P(A_{k+1}) - P(A_k)) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n). \text{ Аналогічно доводиться і друга частина твердження.}$$

**Зауваження.** Якщо ввести позначення  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  для суми монотонно зростаючої послідовності подій та

$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  відповідно для добутку монотонно спадної послідовності випадкових подій, то властивості (7) та (8)

можна записати однією формулою, яка більш наочно передає зміст властивості неперервності ймовірності, а саме:



$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

## Умовні ймовірності, незалежні події. Формула повної ймовірності та формули Байеса.

Нехай в деякому стохастичному експерименті сталася подія  $B$ . Як впливатиме цей факт на ймовірності інших подій? З'ясуємо це спочатку на прикладі.

Нехай відомо, що при двох підкиданнях кубика на першому з них випала цифра «1». Позначимо цю подію через  $B$  і з'ясуємо, якою буде за цієї умови ймовірність події  $A$  – сума цифр парна. Таку умовну ймовірність позначають як  $P(A/B)$ . Зрозуміло, що  $B = \{“11”, “12”, “13”, “14”, “15”, “16”\}$  і  $|B| = 6$ . За умови, що відбулась подія  $B$ , події  $A$  сприяють

лише 3 елементарні події –  $\{“11”, “13”, “15”\} = A \cap B$ , тому  $P(A/B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ . З іншого боку, ця відповідь може

$$\text{бути визначена, як } P(A/B) = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

**Означення 1.** Нехай  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  – імовірнісний простір, пов'язаний з деяким стохастичним експериментом. Умовна ймовірність події  $A$  при умові, що сталась подія  $B$  (тобто  $P(B) \neq 0$ ) визначається формулою:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (8)$$

**Зауваження.** З очевидних властивостей умовної ймовірності, а саме: 1)  $P(A/B) \geq 0 \forall A \in \mathfrak{F}$ ; 2)  $P(\Omega/B) = 1$ ; 3)

$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n / B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n / B)$  для довільних попарно несумісних подій  $A_n \in \mathfrak{F}$ ; випливає, що при фіксованій події  $B$   $(\Omega, \mathfrak{F}, P(\cdot/B))$  – також імовірнісний простір.

З формули (8) випливає, що

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) \quad (9)$$

Формула (9) носить назву **формули множення**.

**Теорема 1.** Формула множення має узагальнення для довільної кількості  $n$  випадкових подій  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{F}$ :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n / A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \quad (10)$$

Доведення цієї теореми пропонується провести самостійно методом математичної індукції.

Цікавим є питання, які події не впливають одна на одну, тобто відбуваються або не відбуваються незалежно? Всі інтуїтивно розуміють, що означає незалежність подій – наприклад, результат окремого підкидання кубика чи монети не повинен впливати на наступні результати. Тобто розглядаючи дві події  $A$  та  $B$ , природно вважати їх незалежними, якщо  $P(A/B) = P(A)$  або  $P(B/A) = P(B)$ .

**Означення 2.** Випадкові події  $A$  та  $B$  називаються **стохастично незалежними** (або просто незалежними), якщо

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (11)$$

**Зауваження.** За умови, що  $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$ ,  $P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(A/B) = P(A) \Leftrightarrow P(B/A) = P(B)$ .

**Означення 3.** Випадкові події  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{F}$  називаються **незалежними у сукупності**, якщо  $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$  і  $\forall A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ , де всі індекси належать множині  $\{1, 2, \dots, n\}$ , має місце рівність:

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}) \quad (12)$$

**Зауваження.** Якщо  $k = 2$ , рівність (12) виражає попарну незалежність. Зрозуміло, що попарна незалежність недостатня для незалежності у сукупності.

**Зауваження.** Не плутайте співзвучні поняття **незалежності** та **несумісності** випадкових подій! Більш того, якщо для деяких несумісних випадкових подій  $A$  та  $B$   $P(A) > 0, P(B) > 0$ , то  $A$  та  $B$  – залежні:  $P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B) > 0$

**Приклад 1.** (приклад Бернштейна демонструє різницю між попарною незалежністю та незалежністю у сукупності). Розглянемо правильний тетраедр, три грані якого пофарбовані відповідно у червоний, зелений та синій кольори, на четверту грань нанесені всі три вказані кольори. Припустимо, що тетраедр кидається на площину. Нехай випадкові події  $A$ ,  $B$  та  $C$  – означають що площини торкнулась грань, на якій присутні відповідно червоний, зелений та синій кольори. Тоді  $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ . Далі,  $P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ , що означає попарну незалежність подій  $A$ ,  $B$  та  $C$ . Проте  $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ , тобто події  $A$ ,  $B$  та  $C$  не є незалежними в сукупності.

**Означення 4.** Випадкові події  $H_1, H_2, \dots, H_n \in \mathfrak{F}$  утворюють **повну групу подій**, якщо:

$$1) \bigcup_{k=1}^n H_k = \Omega; \quad 2) P(H_k) > 0 \quad \forall k = \overline{1, n}; \quad 3) H_i \cap H_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

**Теорема 2 (Формула повної ймовірності).** Для повної групи подій  $H_1, H_2, \dots, H_n \in \mathfrak{F}$  та ймовірності довільної

$$\text{випадкової події } A \in \mathfrak{F} \text{ має місце формула: } P(A) = \sum_{k=1}^n P(A/H_k) \cdot P(H_k) \quad (13)$$



**Доведення.**  $P(A) = P(A \cap \Omega) = P\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n H_k\right)\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^n (A \cap H_k)\right) = \sum_{k=1}^n P(A \cap H_k)$ . Далі скористаємось формулою

множення (9):  $P(A \cap H_k) = P(H_k) \cdot P(A/H_k)$  і одержимо твердження теореми.

Формула повної ймовірності (13) дозволяє безумовну ймовірність деякої події  $A$  визначити через умовні відносно набору деяких гіпотез ймовірності.

**Приклад 2.** Нехай група студентів складає залік, для одержання якого досить правильної відповіді на одне питання випадково витягнутого білета. Припустимо, що з  $N$  питань є  $n$  ( $n < N$ ) «нещасливих», відповіді на які не знає жоден студент. Відповіді на решту питань знають всі студенти. Знайти ймовірність здати залік для першого та другого студента.

Позначимо через  $H_1$  випадкову подію, яка полягає в тому, що перший студент склав залік (вона означає, що студент витяг «щасливий» білет) і через  $H_2 = \overline{H_1}$  – що не склав (тобто витяг «нещасливий» білет). Очевидно, що  $P(H_1) = \frac{N-n}{N}$ ,  $P(H_2) = \frac{n}{N}$ . Знайдемо ймовірність випадкової події  $A$  – що залік одержав другий студент. Очевидно, що ймовірність цієї події неможливо визначити безпосередньо, адже вона відбувається або ні після того, як сталася одна з подій  $H_1$  або  $H_2$ . Скористаємось формулою повної ймовірності, адже події  $H_1$  та  $H_2$  утворюють повну групу подій, а умовні ймовірності  $P(A/H_k)$ ,  $k=1,2$  легко визначити. Отже,

$$P(A) = P(A/H_1) \cdot P(H_1) + P(A/H_2) \cdot P(H_2) = \frac{N-n-1}{N-1} \cdot \frac{N-n}{N} + \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{n}{N} = \frac{N-n}{(N-1)N} (N-n-1+n) = \frac{N-n}{N}$$

На перший погляд видається дивним, що ймовірності витягнути «щасливий» білет, а отже, здати залік однакові і для першого, і для другого студента. Проте, це лише стохастичне підтвердження загальної справедливості. Переконайтесь, що взагалі, ймовірність скласти залік однакова для кожного студента, незалежно від того, яким по черзі він витягає білет.

**Приклад 3.** Двоє стрільців можуть влучити у мішень відповідно із ймовірностями 0,1 та 0,8. Вони підкидають монету, щоб визначити, хто буде стріляти, і один з них робить постріл по мішені. Яка ймовірність влучити в мішень при даному пострілі.

Оскільки невідомо, який стрілець робить постріл, зробимо всі можливі припущення щодо цього та використаємо формулу повної ймовірності. Отже, нехай  $H_1$  та  $H_2$  – випадкові події, що постріл зроблений відповідно першим або другим стрільцем. Вони утворюють повну групу подій, і крім того,  $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$ . Нехай випадкова подія  $A$  – це влучання в мішень. Тоді  $P(A/H_1) = 0,1$ ;  $P(A/H_2) = 0,8$ .  $P(A) = P(A/H_1) \cdot P(H_1) + P(A/H_2) \cdot P(H_2) = 0,1 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,5 = 0,45$ .

Розглянемо, як змінюються ймовірності подій повної групи, якщо напевно відомо, що сталася деяка випадкова подія  $A$ . При цьому початкові ймовірності гіпотез  $P(H_k)$  називаються «апостеріорними ймовірностями» на відміну від «апостеріорних ймовірностей»  $P(H_k/A)$ .

**Теорема 3 (Формули Байеса).** Для апостеріорних ймовірностей повної групи подій  $H_1, H_2, \dots, H_n \in \mathfrak{Z}$  та довільної випадкової події  $A \in \mathfrak{Z}$  справедливі формули:

$$P(H_k/A) = \frac{P(A/H_k) \cdot P(H_k)}{\sum_{i=1}^n P(A/H_i) \cdot P(H_i)} \quad \forall k = \overline{1, n} \quad (14)$$

**Доведення.** З означення умовної ймовірності для довільної гіпотези  $H_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  маємо:  $P(H_k/A) = \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)}$ . Далі

використаємо формули множення (11) та повної ймовірності (13):  $P(H_k/A) = \frac{P(A/H_k) \cdot P(H_k)}{P(A)} = \frac{P(A/H_k) \cdot P(H_k)}{\sum_{i=1}^n P(A/H_i) \cdot P(H_i)}$ .

**Приклад 4.** В умовах прикладу 3 визначити ймовірності випадкових подій, що постріл зроблений першим та другим стрільцем, якщо відомо, що при пострілі стався промах.

Нам необхідно визначити апостеріорні ймовірності  $P(H_1/\bar{A})$  та  $P(H_2/\bar{A})$ . Оскільки  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,55$ , то формули Байеса дають такі результати:

$$P(H_1/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}/H_1) \cdot P(H_1)}{P(\bar{A})} = \frac{0,9 \cdot 0,5}{0,55} = \frac{9}{11}; \quad P(H_2/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}/H_2) \cdot P(H_2)}{P(\bar{A})} = \frac{0,2 \cdot 0,5}{0,55} = \frac{2}{11}.$$

Зверніть увагу, як змінились рівні 0,5 апостеріорні ймовірності при відомому промаху.

**Приклад 5.** В урні знаходиться  $n$  куль білого та чорного кольорів. Всі припущення про склад урни вважати рівноможливими. Навмання витягнута куля виявилась білою. Обчислити ймовірності всіх гіпотез про склад урни. Яка з них найбільш ймовірна?

Позначимо через  $H_0, H_1, \dots, H_n$  випадкові гіпотези, де  $H_k$ ,  $k = \overline{0, n}$  означає, що в урні знаходиться рівно  $k$  білих куль. За умовою задачі  $P(H_k) = \frac{1}{n+1}$ . Сталась випадкова подія  $A$  – навімання витягнута куля виявилась білою. Тоді

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A/H_k) \cdot P(H_k) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2n(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

Необхідно визначити ймовірності  $P(H_k/A) \forall k = \overline{0, n}$ . Маємо:  $P(H_k/A) = \frac{P(A/H_k) \cdot P(H_k)}{P(A)} = \frac{2k}{n(n+1)}$ . Найбільш ймовірною при умові  $A$  є гіпотеза  $H_n$ :  $P(H_n/A) = \frac{2}{(n+1)}$ .

**Приклад 5.** Яку найменшу кількість пострілів треба зробити стрільцеві, який здатен влучити в мішень у 7 випадках з 10, щоб ймовірність враження мішені була не менше 0,9?

Вважаючи постріли незалежними, знайдемо ймовірність події  $A$  – враження мішені стрільцем при  $n$  пострілах. Оскільки для цього досить принаймні одного влучання, то  $P(\bar{A}) = (1 - 0,7)^n = (0,3)^n$ , а отже, для відшукування значення  $n$  потрібно розв'язати нерівність  $P(A) \geq 0,9$ , тобто  $1 - (0,3)^n \geq 0,9$ , звідки  $(0,3)^n \leq 0,1$ . Тоді  $n(\lg 3 - 1) \leq -1$ , або  $n \geq \frac{1}{1 - \lg 3}$ .

Найменше ціле, яке задовольняє цю нерівність – це 2. Отже, двох пострілів досить, щоб вразити мішень з ймовірністю не меншою від 0,9.