

# Лекція 1. Предмет теорії ймовірностей. Випадкові події, їх ймовірності. Аксіоматика теорії ймовірностей. Елементи комбінаторики.

## 1. Що вивчає теорія ймовірностей?

Будь-яка наука базується на початкових поняттях. Часто вони не визначаються, а вважаються інтуїтивно зрозумілими. В геометрії Евкліда до таких понять відносяться, наприклад, точка та пряма. З теорією ймовірностей ситуація складніша, тому що термінами, якими оперує ця наука, ми користуємось повсякденно. Ми говоримо про ймовірності можливих у майбутньому подій, отже, маємо на увазі певний фактор випадковості. І хоча всі слова для нас зрозумілі, проте спроба пояснити їх зміст може видатись проблематичною. Фактор випадковості очевидний, коли ми говоримо про карти, фішки, рух молекули, відмови приладів, аварії, катастрофи, примхи погоди. Важливо зрозуміти, відомості про які явища можна систематизувати та зробити їх предметом наукового вивчення.

Власне, теорія ймовірностей і починалась з азартних ігор. Її виникнення та становлення датують серединою 17-го сторіччя та пов'язують з іменами Блеза Паскаля, П'єра Ферма, Християна Гюйгенса та Якоба Бернуллі. Висновки, зроблені великими вченими, полягали у тому, що **масові випадкові явища демонструють певні закономірності**. Так зрозуміло, що хоча й неможливо наперед точно передбачити, якою стороною впаде підкинута монета, проте можна стверджувати, що при достатній кількості повторень цього експерименту ви побачите герб приблизно в половині випадків. І чим більш наполегливим виявиться експериментатор, тим точніше він одержить значення 0,5 для відносної кількості випадіння герба.

Отже, **теорія ймовірностей вивчає закономірності випадкових явищ**. Проте не будь-яких явищ, а таких, які можуть бути багаторазово повторені при незмінних умовах і демонструють при цьому так звану **статистичну стійкість**, тобто відносна кількість появи даного явища прямує до сталого значення із збільшенням кількості спостережень.

Сучасний розвиток теорії ймовірностей пов'язаний з багатьма галузями знань від квантової механіки та статистичної фізики до стратегій фінансових ринків, економіки, теорії хаосу, тощо. Неможливо не згадати про величезний внесок у розвиток теорії ймовірностей радянських вчених, зокрема і вчених київської школи. Наука про випадкові явища ще з часів Пафнутія Львовича Чебишова вважалась «російською» наукою. Її примножували багато російських вчених, проте сучасним своїм виглядом вона повністю завдячує Андрію Миколайовичу Колмогорову, який на початку 30-х років минулого сторіччя сформулював систему аксіом теорії ймовірностей.

## 2. Випадкові події та їх ймовірності.

Відправним поняттям теорії ймовірностей є **стохастичний експеримент** – дія, яку можна повторювати багато разів, спостерігаючи за її випадковими наслідками. Прикладами стохастичного експерименту можуть бути: підкидання монети або грального кубика, витягання карти з колоди, дані про народжуваність або смертність, влучання у мішень, тощо. Множину всіх можливих наслідків стохастичного експерименту називають **простором елементарних подій** (відповідний російський термін звучить більш характерно – «пространство элементарных исходов»). Цей простір позначають великою грецькою літерою омега:  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ . Кожній елементарній події  $\omega_k$  у відповідність ставиться число  $p_k \in [0, 1]$ , яке визначається стохастичним експериментом, таким чином, щоб  $\sum p_k = 1$ . Це число  $p_k$  і є ймовірністю даної елементарної події  $\omega_k$ . Правда, така схема діє лише у випадку, коли простір елементарних подій  $\Omega$  **дискретний**, тобто **скінченний** або **злічений**. Тоді для будь-якої складної події  $A \subset \Omega$  (вона називається **випадковою подією**) її ймовірність визначається так:  $P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k$ . Тут  $\Omega$  – множина всіх можливих випадкових подій.

$\mathfrak{I}$ , а трійка об'єктів  $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$  називається **імовірнісним простором**. У випадку, коли простір  $\Omega$  континуальний, ситуація дещо складніша і буде з'ясована пізніше. Слід зазначити, що таким чином ми прискореним темпом проходимо шлях розвитку теоретико-імовірнісної науки. Першими досліджувались експерименти із **скінченими та рівноможливими** елементарними подіями. Такі експерименти описуються **класичною імовірнісною моделлю**. Її сенс полягає у тому, що якщо в експерименті відбуваються  $n$  **рівноможливих** наслідків, то кожному приписується ймовірність  $1/n$ , а ймовірність будь-якої випадкової події визначається через кількість  $k$  елементарних подій, що їй

сприяють:  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{n}$ . Тут знаком  $|A|$  позначається потужність множини  $A$ , для скінченної множини – це просто кількість елементів в ній.

### Приклади.

- Нехай 1 раз підкидається монета. Тоді, очевидно, простір  $\Omega$  складається лише з двох елементарних подій – випадіння герба та випадіння цифри:  $\Omega = \{Г, Ц\}$ , причому  $P(Г) = P(Ц) = 1/2$ .
- Нехай 1 раз підкидається гральний кубик. Тоді  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , і кожна елементарна подія має ймовірність  $1/6$ . В цьому експерименті можна розглядати і складні випадкові події, наприклад, подія  $A$  – випала парна цифра, тоді  $A = \{2, 4, 6\}$ , отже,  $P(A) = 3/6 = 1/2$ . Можна розглянути випадкову подію  $B$  – випала цифра більша за 4, тоді  $B = \{5, 6\}$ , отже,  $P(B) = 2/6 = 1/3$ . Очевидно також, що подія – випало число 10 – є неможливою і має ймовірність 0. Неможлива подія позначається знаком  $\emptyset$ . Сама множина  $\Omega$  називається вірогідною подією – це подія, яка відбувається завжди. Для нашого експерименту такою подією буде, наприклад, випадіння цифри від 1 до 6.
- Нехай монета підкидається до першого випадіння герба. Тоді  $\Omega = \{Г, ЦГ, ЦЦГ, ЦЦЦГ, \dots\}$  – простір елементарних подій нескінченний, проте злічений. (Цей стохастичний експеримент не підпадає під схему класичної ймовірності!). Позначимо елементарні події цього експерименту  $\omega_k = \underbrace{Ц \dots Ц}_{k-1} Г, k \geq 1$ . Тоді неважко



зрозуміти, що  $P(\omega_k) = 1/2^k$ , і умова  $\sum_{k=1}^{\infty} P_k = 1$  виконана.

**Зауваження.** Зазначимо, що ймовірності елементарних подій можна визначити і інакше. Наприклад, якщо маємо «независимий» кубик, одна з граней якого більш важка і тому вона опиняється внизу частіше, випадінню кожної цифри можна приписати, наприклад, ймовірності  $1/2, 1/10, 1/10, 1/10, 1/10, 1/10$ . Ймовірності випадкових подій  $A$  та  $B$  з прикладу 2 теж відповідним чином зміняться, проте математична модель залишиться вірною. Таким чином, для стохастичного експерименту ймовірнісний простір  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  може бути визначений неоднозначно.

Простір елементарних подій може бути незліченним, мати потужність континуум. Наприклад, для експерименту, коли точка кидається на відрізок  $[0,1]$ , простір  $\Omega$  – це всі точки відрізка. Тоді говорити про ймовірності окремих елементарних подій немає сенсу, а ймовірності випадкових подій вимірюють довжинами відрізків. В інших стохастичних експериментах такою мірою може слугувати площа або об'єм відповідних геометричних множин. В таких задачах маємо справу з «геометричними» ймовірностями. Наступний приклад ілюструє подібну ситуацію.

#### Приклад.

4. Розглянемо «задачу про зустріч»: дві особи домовляються про зустріч на інтервалі часу  $T$ . Тоді простір  $\Omega$  описується точками квадрату із стороною  $T$ :  $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq T, 0 \leq y \leq T\}$ . Якщо додати умову, що кожна особа чекає лише протягом часу  $\tau < T$ , то можна визначити випадкову подію  $A$  – зустріч відбулась, як підмножину  $\Omega$ . Дійсно,  $A = \{(x, y) \in \Omega : |x - y| \leq \tau\}$ . Тоді  $P(A) = \frac{\text{площа } A}{\text{площа } \Omega} = \frac{T^2 - (T - \tau)^2}{T^2} = 1 - \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2$ .

Подібні задачі беруть початок від відомої задачі про голку Бюффона: на поверхню, розліновану паралельними прямими на відстані  $a$  одна від одної кидається голка довжиною  $l < a$ . З якою ймовірністю голка перетне одну з прямих? (Відповідь:  $2l/\pi a$ ).

Слід зазначити, що геометричні ймовірності можуть привести до ще більшої неоднозначності при визначенні ймовірностей. Відомий **парадокс Бертрана**, який стосується наступної задачі: яка ймовірність що навмання вибрана хорда круга більша за сторону вписаного у цей круг правильного трикутника. Бертран запропонував 3 розв'язки, які приводили до відповідей  $1/4, 1/3, 1/2$ .

### 3. Дії з випадковими подіями.

Випадкові події є підмножинами простору елементарних подій  $\Omega$ , тому дії з ними такі ж, як і в теорії множин. Важливо, проте, розібратись з їх ймовірнісною інтерпретацією. У таблиці нижче наведені всі можливі дії з подіями. Тут  $A, B$  – випадкові події:  $A, B \subset \Omega$ .

Операція	Назва операції	Зміст результату операції
$A \cup B$ (інколи $A + B$ )	Сума подій $A$ та $B$	Подія, яка полягає у тому, що відбулась принаймні одна з подій $A$ або $B$
$A \cap B$ (інколи $A \cdot B$ )	Добуток подій $A$ та $B$	Подія, яка полягає у тому, що відбулись обидві події $A$ і $B$
$A \setminus B$ (інколи $A - B$ )	Різниця подій $A$ та $B$	Подія, яка полягає у тому, що подія $A$ відбулась, а подія $B$ не відбулась
$\bar{A}$	Подія протилежна до $A$	Подія, яка полягає у тому, що подія $A$ не відбулась
$A = B$	Рівносильні події $A$ та $B$	Події $A$ та $B$ відбуваються, або не відбуваються одночасно
$A \subset B$	Подія $A$ сприяє події $B$ (подія $B$ є наслідком $A$ )	Якщо відбувається подія $A$ , то відбувається подія $B$
$\emptyset$	Неможлива подія	Подія, яка не відбувається ніколи (не плутати з подією ймовірності 0!)
$\Omega$	Вірогідна подія	Подія, яка відбувається завжди (не плутати з подією ймовірності 1!)

Неважко довести деякі корисні властивості операцій над подіями, наприклад,

- 1)  $A \setminus B = A \cdot \bar{B} = A \setminus (A \cdot B)$       2)  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ;  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$  (правила двоїстості)  
 3)  $(A \cup B) \cdot C = (A \cdot C) \cup (B \cdot C)$

Повернемось до прикладу 2. Тут  $A \cup B$  – це подія, що випала або парна цифра, або цифра більша за 4, тобто  $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$ ;  $A \cap B$  – це подія, що випала парна цифра, причому більша за 4, тобто  $A \cap B = \{6\}$ ;  $A \setminus B$  – це подія, що випала парна цифра, причому не більша за 4, тобто  $A \setminus B = \{2, 4\}$  і нарешті  $\bar{A}$  – випала непарна цифра:  $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$ .

**Означення 1.** Випадкові події  $A$  та  $B$  називаються **несумісними**, якщо вони не відбуваються одночасно, тобто  $A \cap B = \emptyset$ .

### 4. Аксиоматика теорії ймовірностей.

Цей розділ змушено вносить ложку дьогтю. Справа в тому, що у випадку скінчених просторів  $\Omega$  множиною випадкових подій  $\mathfrak{F}$  є просто множина всіх підмножин простору  $\Omega$ . При спробі ж узагальнити ситуацію на випадок довільної множини  $\Omega$ , необхідно подбати про те, щоб операції над подіями не виводили нас за межі множини  $\mathfrak{F}$ . А оскільки  $\mathfrak{F}$  може містити нескінчену кількість елементів, необхідно забезпечити виконання нескінченної кількості додавань та добутоків подій. Більше того, необхідно слушним чином визначати ймовірності таких подій. Лад у цих справах наводить аксиоматика Колмогорова. Суть її у тому, що декларуються властивості множини випадкових подій  $\mathfrak{F}$ , а ймовірність випадкової події визначаються як особлива функція – ймовірнісна міра  $P(\cdot)$ .

**Означення 2.** Нехай  $\Omega$  – довільна множина. Клас  $\mathbf{A}$  підмножин  $\Omega$  називається **алгеброю** множин, якщо

- 1)  $\Omega \in \mathbf{A}$ ;      2)  $\forall A \in \mathbf{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathbf{A}$       3)  $\forall A, B \in \mathbf{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathbf{A}$  (властивість адитивності)



**Приклад.** Мінімальна алгебра складається всього з двох множин:  $\mathbf{A} = \{\Omega, \emptyset\}$ . Нехай  $A$  – деяка підмножина  $\Omega$ . Тоді  $\mathbf{A} = \{\Omega, \emptyset, A, \bar{A}\}$  – алгебра.

**Означення 3.** Нехай  $\Omega$  – довільна множина. Клас  $\mathfrak{I}$  підмножин  $\Omega$  називається  $\sigma$  – **алгеброю** множин, якщо

$$A1) \Omega \in \mathfrak{I}; \quad A2) \forall A \in \mathfrak{I} \Rightarrow \bar{A} \in \mathfrak{I} \quad A3) \forall A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{I} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{I} \text{ (властивість } \sigma \text{ – адитивності)}$$

**Означення 4.** Нехай  $\Omega$  – простір елементарних подій деякого експерименту,  $\mathfrak{I}$  –  $\sigma$  – **алгебра** випадкових подій. Будемо говорити, що визначена ймовірнісна міра (або просто ймовірність)  $P: \mathfrak{I} \rightarrow [0,1]$ , якщо

$$P1) P(\Omega) = 1; \quad P2) \forall A \in \mathfrak{I} \Rightarrow P(A) \geq 0 \quad P3) \forall A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{I} \text{ попарно несумісних, тобто } A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{I} \text{ (властивість } \sigma \text{ – адитивності ймовірності)}$$

**Зауваження.** Система аксіом A1-A3, P1-P3 не суперечна, проте неповна. Як уже зазначалось є певна довільність у визначенні ймовірності  $P$ , отже можливі різні ймовірнісні  $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$  простори для одного й того ж самого стохастичного експерименту. Події із  $\sigma$  – алгебри  $\mathfrak{I}$  називаються **вимірними**.

**Означення 5.** Нехай  $\Omega = [a, b]$  (стохастичним експериментом є вибір навмання точки на цьому інтервалі).  $\sigma$  – **алгебра**  $\mathbf{B}([a, b])$  множин на інтервалі  $[a, b]$  називається **борелівською**, якщо вона породжена напіввідкритими

інтервалами виду  $[\alpha, \beta) \subset [a, b]$ . Визначимо ймовірність:  $P([\alpha, \beta)) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$ . Тоді  $(\Omega, \mathbf{B}, P)$  – ймовірнісний простір з геометричною ймовірністю на відрізьку.

### 5. Основні комбінаторні формули.

Оскільки суттєва частина задач в теорії ймовірностей спирається на класичне означення ймовірності, комбінаторика дає цілу низку корисних ідей.

**Основний принцип комбінаторики** міститься в наступному твердженні. Із  $m$  елементів першої множини та  $n$  елементів другої множини можна утворити рівно  $mn$  пар, складених із елементів, взятих по одному відповідно з першої та другої множин.

Доводиться це твердження складанням двовимірної таблиці, в якій в рядках містяться елементи першої множини, а в стовпчиках – елементи другої. Перехрестя рядків та стовпчиків (їх рівно  $mn$ ) визначають всі можливі пари. Цей принцип узагальнюється методом математичної індукції на довільну кількість множин елементів.

Наведемо **основні комбінаторні схеми**.

1. **Кількість перестановок** із  $n$  елементів позначається  $P_n$  і рівна  $P_n = n!$ , оскільки на перше місце можна вибрати елемент  $n$  способами, на друге місце –  $n-1$  способом, і так далі, аж поки на останнє місце не залишиться єдиний елемент.
2. **Кількість розміщень** із  $n$  елементів по  $k$  місцях, де  $k \leq n$  позначається  $A_n^k$  і рівна  $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$  із тих самих міркувань. До цієї ж величини приводить підрахунок кількості виборів по  $k$  елементів із  $n$  можливих без повернення.
3. **Кількість сполучень (комбінацій)** із  $n$  елементів в групі по  $k$  елементів позначається  $C_n^k$  і рівна  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ , оскільки величину  $A_n^k$  треба зменшити у  $k!$  разів, врахувавши несуттєвість порядку у групах по  $k$  елементів.
4. **Кількість виборів по  $k$  елементів із  $n$  можливих з поверненням** рівна, очевидно,  $n^k$ .
5. **Кількість сполучень (комбінацій) з повтореннями** із  $n$  елементів в групі по  $k$  елементів рівна  $C_{n+k-1}^k$ .

### Приклади.

1. Нехай із колоди з 36 карт по черзі (тобто, враховуючи порядок карт) навмання витягаються 3 карти. Яка ймовірність, що всі вони пікової масті?  
При витяганні карт навмання ймовірності витягти будь-яку з них однакові, тобто маємо класичну схему. Різних способів витягти означеним чином 3 карти з колоди існує  $36 \cdot 35 \cdot 34$ . Нас цікавлять лише карти пікової масті, їх 9, отже витягти 3 пікові карти ми можемо  $9 \cdot 8 \cdot 7$  способами, тому ймовірність цієї події рівна  $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{36 \cdot 35 \cdot 34} \approx 0,012$ .
2. Нехай так само, як і в попередньому випадку витягаємо карти, проте нехтуємо порядком їх з'явлення у трійці. Чи зміниться ймовірність витягти 3 пікові карти?  
Позначимо подію, яка полягає у витяганні трьох пікових карт через  $A$ . Для цієї задачі маємо  $|\Omega| = C_{36}^3 = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 7140$ ,  $|A| = C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$ ,  $P(A) = \frac{84}{7140} \approx 0,012$ . Як бачимо ймовірність не змінилась.
3. Із троянд червоного, білого та рожевого кольору складаються всі можливі букети по 3 квітки. Яка ймовірність, що навмання вибраний букет буде із червоних троянд.  
При складанні букетів кольори квітів можуть повторюватись. Отже, маємо сполучення із трьох кольорів у букети по 3 квітки з повтореннями. Їх кількість рівна  $C_{3+3-1}^{3-1} = C_5^2 = 10$ . Тому ймовірність одержати букет із червоних троянд рівна 0,1, оскільки такий букет тільки один.