

ТЕМА 2. Загальні системи диференціальних рівнянь

2.1. Метод виключення невідомих

Як уже говорилося в п. 1.1, явне диференціальне рівняння

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (1)$$

для \mathbb{R}^n -значної функції $x(\cdot)$ рівносильне системі рівнянь

$$\dot{x}^i(t) = f^i(t, x(t)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

для її компонент. Таку систему називають *нормальною*. Там же показано, що довільне явне рівняння n -го порядку зводиться до нормальної системи рівнянь. Виконаємо тепер зворотнє зведення.

Для довільної диференційовної векторної функції F позначаємо $\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t}$, $F' = \frac{\partial F}{\partial x}$. Якщо $F(t, x)$ – m -вимірний вектор-стопчик, то $F'(t, x)$ – $m \times n$ -матриця. Нехай $x(\cdot)$ довільна диференційовна \mathbb{R}^n -значна функція. Тоді за формулою диференціювання складної функції

$$\frac{d}{dt}F(t, x(t)) = \dot{F}(t, x(t)) + F'(t, x(t))\dot{x}(t). \quad (3)$$

Якщо при цьому $x(\cdot)$ – розв'язок рівняння (1), то

$$\frac{d}{dt}F(t, x(t)) = \dot{F}(t, x(t)) + F'(t, x(t))f(t, x(t)). \quad (4)$$

Диференціюючи якесь із рівнянь системи (2), наприклад перше, і використовуючи щоразу формулу (4), дістанемо

$$\frac{d^k x^1}{dt^k}(t) = F^k(t, x^1(t), \dots, x^n(t)), \quad k = 1, \dots, n, \quad (5)$$

де

$$F^1 = f^1, \quad F^k = \dot{F}^{k-1} F^{k-1'} f, \quad k = 2, \dots, n. \quad (6)$$

Теорема 1. Система (2) рівносильна системі (5) у тих точках t , в яких

$$\frac{D(F^1, \dots, F^{n-1})}{D(x^2, \dots, x^n)}(t, x(t)) \neq 0. \quad (7)$$

◀ Вище ми вивели (5) і (6) із (2) навіть не спираючись на (7). Виведемо тепер (1) (векторний запис (2)) з (5) і (6).

Позначимо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \frac{\partial F^1}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F^{n-1}}{\partial x^1} & \frac{\partial F^{n-1}}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial F^{n-1}}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

Це матричнозначна функція тих же змінних t, x , від яких залежать елементи матриці. Нехай $x(\cdot)$ – розв’язок системи (5), у якій функції F^k задаються рівностями (6). Тоді при $k = 2, \dots, n$

$$F^k(t, x(t)) \stackrel{(5)}{=} \frac{d^k x^1}{dt^k}(t) \equiv \frac{d}{dt} \frac{d^{k-1} x^1}{dt^{k-1}}(t) \stackrel{(5)}{=} \frac{d}{dt} F^{k-1}(t, x(t)) \stackrel{(3)}{=} \dot{F}^{k-1}(t, x(t)) F^{k-1'}(t, x(t)) \dot{x}(t).$$

Порівнявши це з (6), бачимо, що

$$F^{i'}(t, x(t)) (\dot{x}(t) - f(t, x(t))) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Приєднавши до цих рівностей спереду перше рівняння системи (5) (воно ж перше рівняння у (2)), дістанемо

$$A(t, x(t)) (\dot{x}(t) - f(t, x(t))) = 0. \quad (8)$$

Розкривши визначник матриці A по першому рядку, бачимо, що

$$\det A = \begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F^{n-1}}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial F^{n-1}}{\partial x^n} \end{vmatrix} \equiv \frac{D(F^1, \dots, F^{n-1})}{D(x^2, \dots, x^n)}.$$

Таким чином, умова (7) означає невиродженість матриці $A(t, x(t))$. Тоді (1) випливає з (8). ►

За умови

$$\frac{D(F^1, \dots, F^{n-1})}{D(x^2, \dots, x^n)} \neq 0$$

(сильнішої ніж (7), бо тепер x^1, \dots, x^n – вільні змінні, а не функції від t) рівності

$$F^k(t, x^1, \dots, x^n) = a^{k+1}, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

із довільними правими частинами визначають x^2, \dots, x^n як однозначні неявні функції від a^2, \dots, a^n , а також від t і x^1 , які в цих рівностях відіграють роль параметрів:

$$x^i = H^{i-1}(t, x^1, a^2, \dots, a^n), \quad i = 2, \dots, n.$$

Це дозволяє, перепозначивши x^1 на u , переписати перші $n-1$ рівностей (які перестають бути рівняннями) системи (5) у вигляді

$$x^i(t) = H^{i-1}\left(t, u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(n-1)}(t)\right), \quad i = 2, \dots, n.$$

У результаті остання рівність системи набуває вигляду

$$u^{(n)}(t) = F^n\left(t, u(t), H^1\left(t, u(t), \dots, u^{(n-1)}(t)\right), \dots, H^{n-1}(\dots)\right). \quad (9)$$

Це і є диференціальне рівняння n -го порядку, рівносильне системі (2).

Описаний спосіб зведення системи рівнянь до одного рівняння вищого порядку називається *методом виключення невідомих*. Він має невелике практичне значення, бо рівняння (9), узагалі кажучи, не простіше за систему (2). Але в деяких випадках метод працює.

Приклад 1.
$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - \frac{1}{y}, \\ \dot{y} = \frac{1}{x-t}. \end{cases}$$

Продиференціювавши перше рівняння і замінивши \dot{y} правою частиною другого, дістанемо

$$\ddot{x} = \frac{1}{(x-t)y^2}.$$

Замінивши тут, згідно з першим рівнянням, y^{-2} на $(\dot{x} - 1)^2$, одержимо

$$\ddot{x} = \frac{(\dot{x} - 1)^2}{x - t}.$$

Увівши нову функцію $z = x - t$, перепишемо останню рівність у вигляді $\ddot{z} = \frac{\dot{z}^2}{z}$, або, рівносильно, $\frac{d}{dt} \frac{\dot{z}}{z} = 0$. Звідси знаходимо

$$\dot{z} = C_1 z, \quad z = C_2 e^{C_1 t}, \quad x = t + C_2 e^{C_1 t}.$$

При цьому $C_2 \neq 0$, бо в другому рівнянні системи $x - t$ стоїть у знаменнику. Рівність $C_1 = 0$ також неможлива, бо з неї мали б $\dot{z} = 0$, $\dot{x} = 1$, що разом із першим рівнянням системи дає $1/y = 0$. Отже, $C_1 \neq 0$. Тоді, переписавши перше рівняння у вигляді $y = -1/\dot{z}$, знаходимо $y = -(C_1 C_2)^{-1} e^{-C_1 t}$.

2.1. Пониження порядку системи методом інтегровних комбінацій

Порядок системи можна понизити, знаючи якісь її інтеграли. Справді нехай

$$\varphi_j(t, x(t)) = C_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad m < n. \quad (1)$$

Припустимо, що інтеграли φ_j функціонально незалежні, тобто існують номери i_1, \dots, i_m такі, що

$$\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x^{i_1}, \dots, x^{i_m})} \neq 0. \quad (2)$$

Позначимо: i_{m+1}, \dots, i_n – номери решти змінних, $y^1 = x^{i_{m+1}}, \dots, y^{n-m} = x^{i_n}$. Нерівність (2) означає, що при фіксованих t, y^1, \dots, y^{n-m} між $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ і x^{i_1}, \dots, x^{i_m} існує взаємно однозначна відповідність, а значить

$$x^{i_k} = g^k(t, y^1, \dots, y^{n-m}, \varphi_1, \dots, \varphi_m).$$

Тоді з (1) маємо

$$x^{i_k}(t) = g^k(t, y^1(t), \dots, y^{n-m}(t), C_1, \dots, C_m) \quad k = 1, \dots, m.$$

Замінивши в рівняннях із номерами i_{m+1}, \dots, i_n системи (2.1.2) $x^{i_1}(t), \dots, x^{i_m}(t)$ правими частинами цих рівностей, одержимо систему $n - m$ рівнянь відносно $y^1(\cdot), \dots, y^{n-m}(\cdot)$. Решта m рівнянь системи (2.1.2) функціонально залежать від цих і тому в нову систему не включаються.

Універсального способу знаходження інтегралів системи не існує. Наступна теорема описує одну ситуацію, коли це вдається зробити.

Теорема 1. Нехай $\theta = \theta(t, x)$ – \mathbb{R}^m -значна диференційовна функція така, що $\dot{\theta} + \theta' f$ залежить від x тільки через θ , тобто існує функція $q = q(t, p)$ ($p \in \mathbb{R}^m$) така, що

$$\dot{\theta}(t, x) + \theta'(t, x)f(t, x) = q(t, \theta(t, x)). \quad (3)$$

Тоді: якщо $Q = Q(t, u)$ – інтеграл рівняння

$$\dot{u}(t) = q(t, u(t)), \quad (4)$$

то задана рівністю

$$\psi(t, x) = Q(t, \theta(t, x)) \quad (5)$$

функція ψ – інтеграл системи (2.1.2).

◀ Якщо $x(\cdot)$ – розв’язок рівняння $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, то, зважаючи на (3), функція $u(\cdot) = \theta(\cdot, x(\cdot))$ задовольняє рівняння (4), а значить $Q(t, u(t)) = C$. Тоді з (5) маємо $\psi(t, x(t)) = C$. ▶

Щоб скористатись теоремою при $m = 1$, потрібно вгадати функції α (скалярну) і β (зі значеннями в просторі n -вимірних вектор-рядків) такі, що:

- 1) $\alpha dt + \beta dx$ є повним диференціалом деякої функції θ , тобто $\alpha = \dot{\theta}$, $\beta = \theta'$;
- 2) існує функція $q = q(t, p)$ така, що

$$\alpha(t, x) + \beta(t, x)f(t, x) = q(t, \theta(t, x)).$$

Оснований на теоремі 1 спосіб знаходження інтегралів системи (2.1.2) називається *методом інтегровних комбінацій*.

Приклад 1.
$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 y, \\ \dot{y} = \frac{y}{t} - xy^2. \end{cases}$$

Помноживши перше рівняння на y , а друге на x і додавши, одержимо $\frac{d}{dt}(xy) = \frac{xy}{t}$, звідки

$$\frac{xy}{t} = C_1. \quad (6)$$

У цих викладках $\alpha = 0$, $\beta = (y \ x)$, $\theta(t, x, y) = xy$, $q(t, p) = p/t$.

Записавши з урахуванням (6) перше рівняння системи у вигляді $\dot{x} = C_1 tx$, знаходимо $x = C_2 e^{C_1 t^2/2}$. Звідси і з (6) маємо при $C_2 \neq 0$

$$y = \frac{C_1}{C_2} t e^{-C_1 t^2/2}.$$

Якщо ж $C_2 = 0$, то $x = 0$ і друге рівняння системи набуває вигляду $\dot{y} = y/t$. Тоді $y = Ct$.

Метод інтегровних комбінацій зручно застосовувати до систем, записаних у симетричній формі:

$$\frac{dx^0}{P^0(x^0, \dots, x^m)} = \frac{dx^1}{P^1(x^0, \dots, x^m)} = \dots = \frac{dx^m}{P^m(x^0, \dots, x^m)}. \quad (7)$$

У пропорції, як відомо, знаменники можуть бути і нулями. Рівність $P^i = 0$ означає, що й $dx^i = 0$, тобто $x^i = \text{const}$. У симетричному записі зникає відмінність між незалежною і залежними змінними. Розподіливши ролі довільним чином, наприклад, поклавши $t = x^0$, зводимо (7) до (2.1.2) з $f^i = P^i/P^0$. Щоб перетворити нормальну форму в симетричну, достатньо переписати i -те рівняння (2.1.2) у вигляді $dt = dx^i/f^i$, після чого прирівняти праві частини всіх рівнянь.

Застосовуючи метод інтегровних комбінацій до систем у симетричній формі, користуються відомою властивістю пропорцій:

$$\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_m}{b_m} = h \quad \implies \quad \forall c_1, \dots, c_m \quad \frac{c_1 a_1 + \dots + c_m a_m}{c_1 b_1 + \dots + c_m b_m} = h.$$

Приклад 2.

$$\frac{dx}{2xy} = \frac{dy}{y^2 - x^2 - z^2} = \frac{dz}{2yz}.$$

Із рівності крайніх членів маємо $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$, звідки знаходимо інтеграл

$$\frac{z}{x} = C_1. \quad (8)$$

Також із рівнянь маємо за властивістю пропорцій

$$\frac{x dx + y dy + z dz}{2x^2 y + y^3 - x^2 y - y z^2 + 2y z^2} = \frac{dx}{2xy},$$

або, рівносильно,

$$\frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dx}{x}.$$

Звідси одержуємо ще один інтеграл:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x} = C_2,$$

який разом із (8) дає загальний інтеграл системи.