

1. Геометричний вектор. Властивості.

Означення 1. *Геометричним вектором* називатимемо напрямлений відрізок прямої.

Вектор характеризується напрямком та довжиною і цілком визначається двома точками.

Означення 2. Два геометричних вектори називаються *рівними*, якщо вони мають однакову довжину та напрямок – тобто лежать на паралельних прямих. Рівні вектори можуть бути суміщені паралельним перенесенням.

Означення 3. Нуль-вектором називають вектор $\mathbf{0}$, який має нульову довжину та невизначений напрямок.

Означення 4. Вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} називаються *колінеарними* (позначається цей факт так: $\mathbf{a} \uparrow \mathbf{b}$), якщо вони лежать на паралельних прямих.

У множині геометричних векторів визначені лінійні операції над ними – додавання векторів та множення вектора на скаляр (дійсне число).

Властивості цих операцій над геометричними векторами:

1. комутативність операції додавання: $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$;
2. асоціативність операції додавання: $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$;
3. існування нульового елементу (нуль-вектору): $\exists \mathbf{0} : \forall \mathbf{a} \quad \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$;
4. існування протилежного елементу: $\forall \mathbf{a} \quad \exists (-\mathbf{a}) : \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$;
5. асоціативність множення на скаляр: $\forall \mathbf{a} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{a}) = (\lambda \mu) \cdot \mathbf{a}$;
6. властивість множення на одиницю: $\forall \mathbf{a} \quad 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$;
7. дистрибутивність відносно множення на скаляр: $\forall \mathbf{a} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (\lambda + \mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}$;
8. дистрибутивність відносно додавання векторів: $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$.

2. Білінійні Форма.

Означення. Відображення b називаються *білінійною функцією (білінійною формою)*, якщо $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – лінійна функція по \mathbf{x} при фіксованому \mathbf{y} та навпаки, тобто

1. $b(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = b(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + b(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \in L_n$; 2. $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = b(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + b(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in L_n$
3. $b(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L_n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. 4. $b(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = \lambda b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L_n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Приклад 1. Очевидно, що білінійною формою є скалярний добуток $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \circ \mathbf{y}$ двох векторів довільного евклідового простору, в силу властивостей скалярного добутку.

Нехай $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n\}$ – довільний базис лінійного простору L_n . Знайдемо значення білінійної форми b для будь-яких векторів $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L_n$ заданих своїми координатними стовпчиками в цьому базисі – $|\mathbf{x}\rangle = (x^1 \ x^2 \ \dots \ x^n)^T$ та

$|\mathbf{y}\rangle = (y^1 \ y^2 \ \dots \ y^n)^T$ відповідно: $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b\left(\sum_{i=1}^n x^i \mathbf{g}_i, \sum_{j=1}^n y^j \mathbf{g}_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^i y^j b(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j)$. Позначимо $b_{ij} = b(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j)$ – елементи

матриці \mathbf{B} білінійної форми у базисі $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n\}$, тоді:
$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^i y^j b_{ij} = |\mathbf{x}\rangle^T \cdot \mathbf{B} \cdot |\mathbf{y}\rangle, \quad (3)$$

З'ясуємо, як змінюється матриця \mathbf{B} білінійної форми при заміні базису. Нехай \mathbf{T} – матриця переходу від базису $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n\}$ до базису $\{\mathbf{g}'_1, \dots, \mathbf{g}'_n\}$: $\mathbf{g}'_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} \mathbf{g}_i, j = \overline{1, n}$. Тоді формула (3) для довільних векторів $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L_n$

набуває вигляду: $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}\rangle^T \cdot \mathbf{B} \cdot |\mathbf{y}\rangle = |\mathbf{T} \cdot \mathbf{x}'\rangle^T \cdot \mathbf{B} \cdot |\mathbf{T} \cdot \mathbf{y}'\rangle = |\mathbf{x}'\rangle^T \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{T} \cdot |\mathbf{y}'\rangle$, де $|\mathbf{x}'\rangle$ та $|\mathbf{y}'\rangle$ – вектор-стовпчики координат відповідно векторів \mathbf{x} та \mathbf{y} в базисі $\{\mathbf{g}'_1, \dots, \mathbf{g}'_n\}$. З іншого боку, якщо $\tilde{\mathbf{B}}$ – матриця білінійної форми у цьому базисі, то $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}'\rangle^T \cdot \tilde{\mathbf{B}} \cdot |\mathbf{y}'\rangle$. Порівнюючи вирази білінійної форми у різних базисах та підставляючи у них $|\mathbf{x}'\rangle = |\mathbf{E}_i\rangle, |\mathbf{y}'\rangle = |\mathbf{E}_j\rangle \forall i, j = \overline{1, n}$, одержимо: $(\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{T})_{ij} = (\tilde{\mathbf{B}})_{ij} \forall i, j = \overline{1, n}$. Таким чином, маємо наступну формулу

заміни матриці білінійної форми при переході до нового базису:
$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}. \quad (4)$$

Або по елементах рівність:

$$\tilde{b}_{ij} = b(\mathbf{g}'_i, \mathbf{g}'_j) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{kl} t_i^k t_j^l \quad (4')$$

Означення 2. Білінійна форма $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ називається симетричною, якщо $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L_n$

15. Твердження. Білінійна форма $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ симетрична тоді і лише тоді, коли її матриця симетрична у деякому базисі.

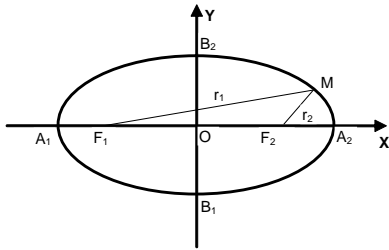
► **Необхідність.** Нехай білінійна форма симетрична, тоді елементи її матриці в деякому базисі $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n\}$ мають властивість: $b_{ij} = b(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j) = b(\mathbf{g}_j, \mathbf{g}_i) = b_{ji} \forall i, j = \overline{1, n}$, тобто $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$.

1. Еліпс та його властивості.

Еліпс означений своїм канонічним рівнянням: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1)

Еліпс є симетричним відносно обох координатних осей, оскільки разом з точкою (x, y) він обов'язково містить і точки $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$. Очевидно також, що всі точки еліпса знаходяться всередині прямокутника $|x| \leq a$, $|y| \leq b$. Точки $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$ та $B_2(0; b)$ називаються вершинами еліпса. Оскільки

$y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, то при зростанні x від 0 до a y спадає від b до 0. Дослідження першої та другої похідних y' та y'' дозволяють встановити гладкість еліпса та напрямки опуклості.



Означення 1. r_1 та r_2 називаються **фокальними радіусами** точки M . Покладемо $r_1 + r_2 = 2a$ (З очевидних геометричних міркувань випливає, що $2a > 2c$). Отже, маємо:

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$, або $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Оскільки обидві частини рівності додатні, піднесемо рівність до квадрату і виконаємо очевидні скорочення: $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$. Повторне піднесення до квадрату приводить до рівності: $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

Позначимо $b^2 = a^2 - c^2 > 0$ та поділимо обидві частини останньої рівності на a^2b^2 . Остаточно одержимо $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – це і є канонічне рівняння еліпса, **центр** якого знаходиться в початку координат.

Означення 2. **Ексцентриситетом еліпса** називають відношення відстані між фокусами до великої осі: $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Для еліпса очевидно, що $\varepsilon \in [0, 1)$. Корисними є формули, що зв'язують параметри еліпса з його ексцентриситетом: $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, або $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$.

$$r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = x^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + 2ax\varepsilon + (c^2 + b^2) = x^2\varepsilon^2 + 2ax\varepsilon + a^2 = (a + x\varepsilon)^2,$$

а отже, $r_1 = a + x\varepsilon$, $r_2 = a - x\varepsilon$, (4)

2. Векторний простір. Наслідки з означення. Приклади векторного простору.

Означення 1. Деяку множину елементів L будемо називати **векторним** або **лінійним простором** над полем \mathfrak{K} дійсних чисел, якщо в цій множині визначені операції додавання (+) елементів та множення (·) елементу на число:

1. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L \quad \exists! \mathbf{c} \in L: \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$

2. $\forall \mathbf{a} \in L \quad \exists! \mathbf{c} \in L: \mathbf{c} = \lambda \cdot \mathbf{a}$

причому ці операції задовольняють наступні 8 аксіом:

1. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a};$

2. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in L \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c});$

3. $\exists \mathbf{0} \in L: \forall \mathbf{a} \in L \quad \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a};$

4. $\forall \mathbf{a} \in L \quad \exists (-\mathbf{a}) \in L: \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0};$

5. $\forall \mathbf{a} \in L \quad \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{K} \quad \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{a}) = (\lambda\mu) \cdot \mathbf{a};$

6. $\forall \mathbf{a} \in L \quad 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a};$

7. $\forall \mathbf{a} \in L \quad \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{K} \quad (\lambda + \mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a};$

8. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L \quad \forall \lambda \in \mathfrak{K} \quad \lambda \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}.$

Всі елементи векторного простору називають векторами (інколи незважаючи на природу цих елементів). Наведемо деякі приклади векторних просторів.

1. Множина дійсних чисел \mathfrak{K} сама утворює векторний простір над полем дійсних чисел.

2. Множина комплексних чисел \mathbb{C} – комплексний векторний простір.

3. Множина квадратних матриць порядку n .

4. Множина поліномів порядку, що не перевищує n .

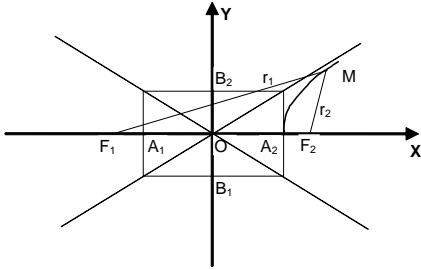
5. Нуль-вектор $\mathbf{0}$ утворює векторний простір і над полем дійсних і над полем комплексних чисел.

1. Гіпербола як крива II порядку, її властивості.

Канонічне рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Гіпербола, так само як і

еліпс є кривою симетричною відносно обох координатних осей. Гіпербола перетинає лише вісь ОХ в точках $A_1(-a;0)$ та $A_2(a;0)$ – вони називаються вершинами гіперболи, а відрізок $A_1A_2 = 2a$ – дійсною віссю. З віссю ОУ гіпербола спільних точок не має, тому відрізок $B_1B_2 = 2b$ називається уявною віссю. Для всіх точок гіперболи справедлива нерівність $|x| \geq a$.



Оскільки $y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$, то при зростанні x від a до $+\infty$ y в першій чверті

також зростає від 0 до $+\infty$. **Означення 1.** Прямі $y = \pm \frac{b}{a}x$ називаються **асимптотами гіперболи**.

Покажемо, що точки гіперболи мають видатну геометричну властивість – модуль різниці відстаней будь-якої точки гіперболи від двох фіксованих точок, що називаються фокусами, є сталою величиною.

З цією метою розглянемо ПДСК, початок якої знаходиться посередині відрізка, кінцями якого є фокуси, а фокальна вісь збігається з віссю ОХ. Нехай

точка M має координати (x, y) . Координати фокусів позначимо відповідно $F_1(-c;0)$ та $F_2(c;0)$, а фокальні радіуси точки M – $r_1 = |F_1M|$ та $r_2 = |F_2M|$. Покладемо

$$|r_1 - r_2| = 2a \quad (6)$$

Припустимо спочатку, що $x > 0$, тоді $r_1 > r_2$. Отже з рівності (6) маємо:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

або $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Оскільки обидві частини рівності додатні, піднесемо рівність до квадрату і виконаємо очевидні скорочення:

$$\begin{aligned} a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= xc - a^2, \text{ звідки випливає} \\ (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2). \end{aligned}$$

Позначивши $b^2 = c^2 - a^2 > 0$ остаточно одержимо: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – канонічне рівняння гіперболи. Йому

задовольняють і точки, для яких $x < 0$. Початок координат є **центром гіперболи**, так само як і у випадку з еліпсом.

2. Властивості лінійно залежних та лінійно незалежних систем векторів.

Означення 1. Лінійна комбінація називається **тривіальною**, якщо всі її коефіцієнти рівні нулю.

Означення 2. Система векторів $\{\mathbf{a}_k\}_{k=1, \dots, n}$ називається **лінійно незалежною**, якщо лише тривіальна лінійна комбінація векторів цієї системи рівна нуль-вектору.

Означення 3. Система векторів $\{\mathbf{a}_k\}_{k=1, \dots, n}$ називається **лінійно залежною**, якщо існує нетривіальна лінійна комбінація векторів цієї системи, рівна нуль-вектору.

Властивості лінійно залежних та лінійно незалежних систем векторів.

1. Система векторів $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$, серед яких є нуль-вектор – лінійно залежна.

Доведення. Дійсно, нехай маємо систему векторів $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$, причому $\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ ($1 \leq i \leq k$). Розглянемо лінійну комбінацію з коефіцієнтами $\alpha^1 = \dots = \alpha^{i-1} = \alpha^{i+1} = \dots = \alpha^n, \alpha^i = 1$. Вона нетривіальна, проте, вочевидь, рівна нуль-вектору.

2. **Критерій лінійної залежності векторів.** Для того, щоб система векторів $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ була лінійно залежною, необхідно та достатньо, щоб принаймні один із векторів системи був лінійною комбінацією інших.

Доведення. (Необхідність). Нехай система векторів $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ лінійно залежна. Розглянемо деяку нетривіальну нульову лінійну комбінацію цих векторів: $\sum_{k=1}^n \alpha^k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$. Припустимо, що деякий коефіцієнт цієї

комбінації, наприклад, $\alpha^1 \neq 0$ (якщо ненульовим є інший коефіцієнт – перенумеруємо вектори та коефіцієнти відповідним чином). Тоді маємо $\mathbf{a}_1 = \sum_{k=2}^n \left(-\frac{\alpha^k}{\alpha^1} \right) \mathbf{a}_k$ – вектор \mathbf{a}_1 є лінійною комбінацією інших векторів системи.

(Достатність). Нехай, наприклад, $\mathbf{a}_1 = \sum_{k=2}^n \alpha^k \mathbf{a}_k$. Тоді маємо нетривіальну лінійну комбінацію цих векторів, рівну

$$\text{нуль-вектору: } \mathbf{a}_1 + \sum_{k=2}^n (-\alpha^k) \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

3. Якщо серед k векторів системи $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ є лінійно залежна підсистема із яких-небудь m ($m \leq k$) векторів, то і вся система $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ – лінійно залежна.

Доведення. Вважатиме, що перші m векторів системи $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ утворюють лінійно залежну систему і розглянемо їх нульову нетривіальну лінійну комбінацію $\sum_{k=1}^m \alpha^k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$. Тоді лінійна комбінація векторів всієї

системи $\sum_{k=1}^m \alpha^k \mathbf{a}_k + \sum_{k=m+1}^n 0 \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ є також нетривіальною, проте рівною нуль-вектору.

4. Будь-яка підсистема векторів лінійно незалежної системи $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ – лінійно незалежна.

Доведення. Від супротивного припустимо протилежне: Нехай деякі m векторів системи $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ є лінійно залежними. Тоді, згідно властивості 3, вся система $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ є також лінійно залежною, що суперечить умові.

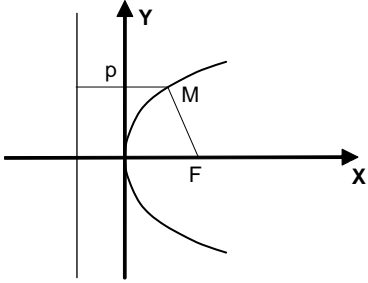
1.Парабола як крива II роду.

Повернемось до рівняння параболи: $y^2 = 2px$

Оскільки $p > 0$, то очевидно, що параболі належать пари точок симетрично розташованих відносно осі ОХ: $(x; y)$ та $(x; -y)$.

Покажемо, що для точок параболи характерна наступна властивість: відстань будь-якої точки до деякої прямої, що зветься **директрисою**, рівна відстані цієї точки до фокуса.

Введемо в розгляд ПДСК, вісь ОХ якої перпендикулярна директрисі, а початок координат є серединою відрізка проведеного від фокуса до директриси (див. **рис. 3.**).



Нехай точка M має координати (x, y) . Відстань від директриси до фокуса позначимо p ($p > 0$). Тоді координати фокуса – точки $F(p/2; 0)$. Позначимо $r = |FM|$ і одержимо:

$p/2 + x = r$, або $p/2 + x = \sqrt{(p/2 - x)^2 + y^2}$, звідки і випливає рівняння (9). Щоб узагальнити певним чином рівняння всіх трьох кривих, вважають ексцентриситет визначеним і для параболи і покладають його в цьому випадку рівним

одиниці: $\varepsilon = 1$. Рівняння директриси параболи: $x = -p/2$.

2. Базис та розмірність векторного простору. Координати вектора.

Означення 1. Базисом n -вимірного векторного простору L_n називається довільна **впорядкована** лінійно незалежна система із n векторів цього простору.

Означення 2. Базис називають ще впорядкованою **максимально лінійно незалежною системою** векторів у просторі. Слово «максимально» тут означає, що до системи базисних векторів неможливо приєднати жодного вектору простору так, щоб система залишалась лінійно незалежною.

Теорема. Кожний вектор $a \neq 0$ n -вимірного векторного простору L_n може бути поданий у вигляді лінійної комбінації векторів базису, причому таке подання єдине.

Доведення. Нехай $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ – деякий базис векторного простору L_n . Нехай $a \in L_n, a \neq 0$. Тоді система векторів $\{f_1, f_2, \dots, f_n, a\}$ є лінійно залежною, тобто існує нетривіальна лінійна комбінація:

$\sum_{k=1}^n \alpha^k f_k + \alpha^0 a = 0$. В цій лінійній комбінації коефіцієнт $\alpha^0 \neq 0$, інакше $\alpha^1 = \dots = \alpha^n = 0$ і тоді $a = 0$, що

суперечить умові. Отже, маємо: $a = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{\alpha^k}{\alpha^0} \right) f_k$, тобто вектор a є лінійною комбінацією базисних

векторів. Покажемо, що таке подання єдине. Від супротивного припустимо, що існує два різних розклади вектора a по системі базисних векторів: $a = \sum_{k=1}^n \beta^k f_k$ та $a = \sum_{k=1}^n \gamma^k f_k$. Звідси випливає, що

$\sum_{k=1}^n (\beta^k - \gamma^k) f_k = 0$, а оскільки вектори f_1, f_2, \dots, f_n лінійно незалежні, то $\beta^k - \gamma^k = 0 \quad \forall k = \overline{1, n}$.

Означення 3. Якщо $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ – базис векторного простору L_n і $a = \sum_{k=1}^n \alpha^k f_k$ – розклад деякого

вектору $a \in L_n$ по базису $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, то коефіцієнти цього розкладу $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ називаються **координатами вектора** $a \in L_n$ в базисі $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$.

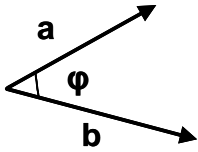
Наслідки з теореми.

1. Координат будь-якого вектору простору у фіксованому базисі визначаються однозначно.
2. Два вектори рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх координати у фіксованому базисі.
3. Якщо $a = \sum_{k=1}^n \alpha^k f_k$ та $b = \sum_{k=1}^n \beta^k f_k$ розклади довільних векторів простору L_n по базису $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$,

то вектор $a + b$ в цьому базисі матиме координати $\alpha^1 + \beta^1, \dots, \alpha^n + \beta^n$, а вектор λa – координати $\lambda \alpha^1, \dots, \lambda \alpha^n$. Доведіть цей факт самостійно.

4. Система векторів $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ простору L_n лінійно незалежна тоді і тільки тоді, коли лінійно незалежна система вектор-стовпчиків їх координат. Доведіть це самостійно.

Означення 1. Скалярним добутком двох векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ називається число $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, рівне: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi$, де φ – кут утворений векторами \mathbf{a} та \mathbf{b} , а через $|\mathbf{a}|$ позначено довжину вектора \mathbf{a} .



Неважко зрозуміти, що скалярний добуток двох ненульових векторів рівний 0 тоді і тільки тоді, коли **вектори ортогональні**: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pi/2$

Властивості скалярного добутку векторів.

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ – комутативність скалярного добутку очевидно випливає з його означення;
2. $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ – скалярний множник можна виносити за знак скалярного добутку (доведіть це самостійно);
3. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ – дистрибутивність скалярного добутку випливає із властивостей проєкцій, які вивчались у курсі шкільної програми:
 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = n p_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot |\mathbf{c}| = (n p_{\mathbf{c}} \mathbf{a} + n p_{\mathbf{c}} \mathbf{b}) \cdot |\mathbf{c}| = n p_{\mathbf{c}} \mathbf{a} \cdot |\mathbf{c}| + n p_{\mathbf{c}} \mathbf{b} \cdot |\mathbf{c}| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$
4. $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ – скалярний добуток визначає квадрат довжини вектора.

Нехай у просторі геометричних векторів вибрана деяка ПДСК. Як визначити скалярний добуток векторів \mathbf{a} та \mathbf{b} , якщо відомі їх координати? Отже, нехай маємо вектори $\mathbf{a} = \{a^1, a^2, a^3\}$ та $\mathbf{b} = \{b^1, b^2, b^3\}$. Визначимо скалярний добуток цих векторів, скориставшись властивостями скалярного добутку:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a^1 \mathbf{i} + a^2 \mathbf{j} + a^3 \mathbf{k}) \cdot (b^1 \mathbf{i} + b^2 \mathbf{j} + b^3 \mathbf{k}) = a^1 b^1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a^2 b^2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + a^3 b^3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$$

Зауваження. Зверніть увагу, що одержана формула має місце **лише для ПДСК**. У загальній афінній системі координат ми мали б враховувати кути між базисними векторами.

Таким, чином у прямокутній декартовій системі координат справедлива наступна формула скалярного добутку двох векторів:

$$\boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3} \quad (1)$$

Формула (1) дає важливі наслідки, зокрема, довжина вектора визначається через його координати наступним чином:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \quad (2)$$

Для кута між двома векторами маємо формулу:

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} \sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2}} \quad (3)$$

Фізичний зміст скалярного добутку.

Якщо під впливом сили \mathbf{F} деяка матеріальна точка переміщається з положення O у положення M , то робота A цієї сили по переміщенню даної точки рівна скалярному добутку сили та вектора переміщення точки: $A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{OM}$.

2. Означення оберненої матриці.

1. Означення. Квадратна матриця $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,n}$ називається виродженою, якщо $|\mathbf{A}| = 0$ і невиродженою, якщо $|\mathbf{A}| \neq 0$.

2. Означення. Квадратна матриця, що позначатиметься A^{-1} , називається *правою оберненою* до невинродженої квадратної матриці A , якщо $A \cdot A^{-1} = E$ (1)

3. Зауваження. Права обернена матриця виникає із-за не комутативності множення матриць. Якщо позначити елементи правої оберненої матриці як $(\tilde{a}_{j\overline{i}}^i)_{i,j=1,n} = A^{-1}$, то рівність (1) можна записати у вигляді:

$$a_{j\overline{i}}^i \tilde{a}_{j\overline{i}}^j = \delta_{\overline{i}}^i, j = \overline{1,n}, \text{ де } \delta_{\overline{i}}^i = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases} \text{ — символ Кронекера.}$$

З означення 2. випливають наступні наслідки.

4. Наслідок. Якщо матриця A невинроджена, то і матриця A^{-1} невинроджена.

Дійсно, $|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$, тому з $|A| \neq 0$ випливає $|A^{-1}| \neq 0$.

5. Наслідок. Правою оберненою матрицею до A^{-1} є сама матриця A , тобто $(A^{-1})^{-1} = A$. Помножимо рівність $(A^{-1}) \cdot (A^{-1})^{-1} = E$ на A зліва: $A \cdot (A^{-1}) \cdot (A^{-1})^{-1} = A \cdot E$, або $E \cdot (A^{-1})^{-1} = A$, що й треба було показати.

5. Наслідок. Права обернена до A матриця є й лівою оберненою, тобто: $A^{-1} \cdot A = E$.

Дійсно, $(A^{-1}) \cdot A = (A^{-1}) \cdot (A^{-1})^{-1} = E$, або $\tilde{a}_{j\overline{i}}^i a_{j\overline{i}}^j = \delta_{\overline{i}}^i, j = \overline{1,n}$. Ця властивість дозволяє сформулювати наступне означення.

6. Означення. Квадратна матриця, A^{-1} , називається *оберненою* до невинродженої квадратної матриці A , якщо $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ (2)

7. Наслідок. Обернена матриця єдина. Від супротивного припустимо, що \tilde{A}^{-1} та $\tilde{\tilde{A}}^{-1}$ дві обернені матриці до матриці A . Тоді $\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1} \cdot E = \tilde{A}^{-1} \cdot (A \cdot \tilde{\tilde{A}}^{-1}) = (\tilde{A}^{-1} \cdot A) \cdot \tilde{\tilde{A}}^{-1} = E \cdot \tilde{\tilde{A}}^{-1} = \tilde{\tilde{A}}^{-1}$ **8. Наслідок.**

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ Зауважимо спочатку, що для невинродженості добутку матриць $A \cdot B$ необхідно, щоб були не винродженими множники, тому обернені матриці до матриць A та B існують. Розглянемо далі добуток матриць $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E$. Звідси випливає, що $B^{-1} \cdot A^{-1}$ є оберненою матрицею до $A \cdot B$.

9. Наслідок. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ Оскільки матриці A та A^T невинроджені одночасно, то обернена до A^T існує. Розглянемо $A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = E^T = E$, отже, $(A^{-1})^T$ є оберненою до A^T .

2. Обчислення оберненої матриці.

11. Правило знаходження оберненої матриці. Отже, щоб визначити елементи матриці, оберненої до деякої матриці A , необхідно, перш за все, обчислити визначник матриці A . Якщо $|A| \neq 0$, то обернена матриці існує. Елементи її j -го рядка дорівнюють алгебраїчним доповненням до елементів j -го стовпчика матриці A , що поділені на визначник матриці. + **МЕТОД ГАУСА**

1.Визначник (детермінант) матриці.

Означення визначника матриці.

Визначник або детермінант – це скаляр, який визначений лише для квадратної матриці $A = (a_{ij}^i)_{i,j=1,n}$, і позначається $|A| = \det A$. Дамо означення цього поняття.

Означення 11. Визначником матриці $A = (a_{ij}^i) \equiv (a)$ порядку 1 називається єдиний елемент цієї матриці $|A| = \det A = a$. Визначником матриці порядку $n > 1$ називається число, яке задається наступною формулою:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \cdot a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdot \dots \cdot a_n^{i_n} \quad (5)$$

При цьому порядок матриці називається порядком її визначника.

Зауваження. Зверніть увагу, права частина формули (5) є сумою елементів по всіх значеннях індексів i_1, i_2, \dots, i_n .

Приклад 7. Для матриці розмірності 2 формула (5) набуває вигляду:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = \varepsilon_{11} a_1^1 a_2^2 + \varepsilon_{12} a_1^2 a_2^1 + \varepsilon_{21} a_1^1 a_2^2 + \varepsilon_{22} a_1^2 a_2^1 = 0 \cdot a_1^1 a_2^1 + 1 \cdot a_1^1 a_2^2 + (-1) \cdot a_1^2 a_2^1 + 0 \cdot a_1^2 a_2^2 = a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1,$$

тобто виражає відоме раніше правило «хреста».

Приклад 8. Обчислимо визначник для матриці розмірності 3:

$$\begin{aligned} |A| = \det A = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} &= \varepsilon_{123} a_1^1 a_2^2 a_3^3 + \varepsilon_{312} a_1^3 a_2^1 a_3^2 + \varepsilon_{231} a_1^2 a_2^3 a_3^1 + \varepsilon_{213} a_1^2 a_2^1 a_3^3 + \varepsilon_{321} a_1^3 a_2^2 a_3^1 + \varepsilon_{132} a_1^1 a_2^3 a_3^2 + \dots = \\ &= a_1^1 a_2^2 a_3^3 + a_1^3 a_2^1 a_3^2 + a_1^2 a_2^3 a_3^1 - a_1^3 a_2^2 a_3^1 - a_1^1 a_2^3 a_3^2 - a_1^2 a_2^1 a_3^3. \end{aligned}$$

(Тут трьома крапками позначено 21 доданок, кожний з яких містить своїм множником символ Леві-Чевіта з рівними індексами, а отже, всі ці доданки рівні нулю)

Таким чином, одержана відома раніше формула, що виражає правило «зірочки».

Зауваження. Можливо, читачеві відома наступна формула визначення детермінанта матриці:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = \sum_{(i_1 i_2 \dots i_n)} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdot \dots \cdot a_n^{i_n} \cdot (-1)^t \quad (6)$$

Тут t – кількість інверсій в перестановці $(i_1 i_2 \dots i_n)$, тобто $(-1)^t$ визначає парність чи непарність цієї перестановки.

Зважаючи на терему 7, неважко зрозуміти, що формули (5) та (6) еквівалентні. Ми віддаватимемо перевагу першій з них з огляду на компактність запису. З іншого боку, формула (6) більш наочно відбиває вербальний зміст визначника матриці: *визначник квадратної матриці розмірності n – це алгебраїчна сума $n!$ доданків, утворених всіма можливими добутками n елементів матриці, взятих по одному з кожного стовпчика та рядка із знаками плюс або мінус в залежності від парності перестановки індексів вибраних рядків та стовпчиків.*

Властивості визначника матриці.

Нижче, якщо не буде вказано інше, розмірність всіх матриць вважатимемо рівною n , отже індекси елементів матриць змінюються від 1 до n .

Теорема 8. Визначник транспонованої матриці збігається з визначником самої матриці: $|A^T| = |A|$ (при запису в індексній формі ця властивість набуває вигляду $|a_{ij}^i| = |a_i^j|$).

Зауваження. З попереднього твердження стає зрозумілим, що всі твердження щодо визначника, пов'язані із стовпчиками матриці, виконуються і для рядків матриці.

Теорема 9. Визначник діагональної матриці D рівний добутку елементів головної діагоналі: $|D| = a_1^1 a_2^2 \dots a_n^n$. Звідси також випливає, що $|E| = 1$, $|0| = 0$.

Теорема 10. Якщо в матриці один із стовпчиків (рядків) є нульовим, то визначник такої матриці рівний нулю.

► Це випливає з того, що в кожному доданку формули (5) має міститись елемент з нульового рядка, тобто кожний доданок цієї суми, а отже і вона сама рівні нулю. ◀

Теорема 11. Визначник трикутної матриці (верхньої або нижньої) $|A| = |a_{ij}^i|$, де $a_{ij}^i = 0$ при $i > j$ або $i < j$ рівний добутку елементів головної діагоналі: $|A| = a_1^1 a_2^2 \dots a_n^n$.

Теорема 12. Якщо два стовпчики (рядки) матриці поміняти місцями, визначник матриці змінить знак на протилежний, тобто:

$$|A| = \begin{vmatrix} |A_1\rangle & \dots & |A_j\rangle & \dots & |A_k\rangle & \dots & |A_n\rangle \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} |A_1\rangle & \dots & |A_k\rangle & \dots & |A_j\rangle & \dots & |A_n\rangle \end{vmatrix}$$

Теорема 13. Якщо матриця містить два однакових стовпчики (рядки), то її визначник рівний нулю.

Теорема 14. Якщо один із стовпчиків (рядків) матриці помножити на деяке число, то визначник матриці помножиться на це число: $\begin{vmatrix} |A_1\rangle & \dots & |\lambda A_k\rangle & \dots & |A_n\rangle \end{vmatrix} = \lambda |A|$.

Наслідок. З попереднього твердження випливає, що $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.

Теорема 15. Якщо в матриці два стовпчики (рядки) пропорційні, то визначник матриці рівний нулю.

Теорема 16. Якщо кожний елемент одного із стовпчиків (рядків) матриці, наприклад, з індексом k , можна подати у вигляді суми двох елементів: $a_k^i = b^i + c^i$, $i = \overline{1, n}$, то визначник такої матриці є сумою визначників двох матриць, всі стовпчики яких за винятком k -го, збігаються із стовпчиками самої матриці, а k -ті стовпчики утворені відповідно елементами b^i та c^i .

Теорема 17. Якщо один із стовпчиків (рядків) матриці помножити на число λ та додати до іншого стовпчика (рядка), то визначник такої матриці не зміниться.

Наслідок. Визначник матриці не зміниться, якщо до деякого стовпчика (рядка) матриці додати деяку лінійну комбінацію інших стовпчиків (рядків).

Теорема 18. Якщо стовпчики (рядки) матриці лінійно залежні, то визначник такої матриці рівний нулю.

Теорема 19. (Теорема про визначник добутку матриць). Якщо A і B в квадратні матриці порядку n , то визначник добутку цих матриць рівний добутку їх визначників: $|A \cdot B| = |B \cdot A| = |A| \cdot |B|$

Обчислення визначника матриці.

Означення 12. Доповняльним мінором до елемента a_{ij}^i матриці A порядку n називається визначник порядку $(n-1)$, одержаний з матриці A викреслюванням i -го рядка та j -го стовпчика. Одержаний визначник позначається \overline{M}_i^j .

Теорема 20. (Правило Лапласа обчислення визначника). Для визначника будь-якої квадратної матриці A мають місце формули:

$$|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj}^k \overline{M}_k^j, \text{ де } k = \overline{1, n} \quad (7)$$

$$|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} a_{ki}^k \overline{M}_i^k, \text{ де } i = \overline{1, n} \quad (8)$$

Формула (7) називається розкладом визначника за елементами j -го стовпчика, а формула (8) – розкладом визначника за елементами i -го рядка. Ці співвідношення дають можливість обчислювати визначники порядку n через визначники порядку $n-1$, а ті, в свою чергу, через визначники ще нижчих порядків.

► В силу властивості визначників 8, досить довести дане твердження лише для стовпчиків матриці A . Розглянемо спочатку випадок, коли $j=1$:

$$|A| = \varepsilon_{i_2 \dots i_n} \cdot a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdot \dots \cdot a_n^{i_n} = \sum_{k=1}^n a_1^k \cdot \varepsilon_{k i_2 \dots i_n} \cdot a_2^{i_2} \cdot \dots \cdot a_n^{i_n}$$

Позначимо через $\varepsilon_{i_2 \dots i_n}^{(k)}$ символ Леві-Чивіта, у якого його $n-1$ індексів приймають $n-1$ значення від 1 до n за винятком значення k . Неважко переконатись, що $\varepsilon_{k i_2 \dots i_n} = (-1)^{k-1} \cdot \varepsilon_{i_2 \dots i_n}^{(k)} = (-1)^{k+1} \cdot \varepsilon_{i_2 \dots i_n}^{(k)}$, оскільки, вилучаючи індекс k із перестановки $(k i_2 \dots i_n)$, ми зменшуємо кількість інверсій, що утворює цей індекс з рештою індексів, рівно на $k-1$ (саме стільки є індексів, менших за k , серед індексів i_2, \dots, i_n). Крім того, врахуємо, що $\overline{M}_k^1 \equiv \varepsilon_{i_2 \dots i_n}^{(k)} \cdot a_2^{i_2} \cdot \dots \cdot a_n^{i_n}$. Тоді попередню рівність можна продовжити наступним чином:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^n a_1^k \cdot (-1)^{k+1} \cdot \varepsilon_{i_2 \dots i_n}^{(k)} \cdot a_2^{i_2} \cdot \dots \cdot a_n^{i_n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cdot a_1^k \cdot \overline{\mathbf{M}}_k^1$$

Нехай тепер j набуває довільного значення від 2 до n . Аналогічно з попереднім, запишемо:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_j \dots i_n} \cdot a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdot \dots \cdot a_j^{i_j} \cdot \dots \cdot a_n^{i_n} = \sum_{k=1}^n a_j^k \cdot \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_j=k \dots i_n} \cdot a_2^{i_2} \cdot \dots \cdot a_{j-1}^{i_{j-1}} \cdot a_{j+1}^{i_{j+1}} \cdot \dots \cdot a_n^{i_n} = \\ &= \sum_{k=1}^n a_j^k \cdot \varepsilon_{k i_2 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_n} \cdot (-1)^{j-1} \cdot a_2^{i_2} \cdot \dots \cdot a_{j-1}^{i_{j-1}} \cdot a_{j+1}^{i_{j+1}} \cdot \dots \cdot a_n^{i_n} = \sum_{k=1}^n a_j^k \cdot \varepsilon_{i_2 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_n}^{(k)} \cdot (-1)^{j-1} \cdot (-1)^{k-1} \cdot a_2^{i_2} \cdot \dots \cdot a_{j-1}^{i_{j-1}} \cdot a_{j+1}^{i_{j+1}} \cdot \dots \cdot a_n^{i_n} = \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} \cdot a_j^k \cdot \overline{\mathbf{M}}_k^j, \end{aligned}$$

оскільки $\overline{\mathbf{M}}_k^j \equiv \varepsilon_{i_2 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_n}^{(k)} \cdot a_2^{i_2} \cdot \dots \cdot a_{j-1}^{i_{j-1}} \cdot a_{j+1}^{i_{j+1}} \cdot \dots \cdot a_n^{i_n}$. ◀

Означення 13. Алгебраїчним доповненням до елемента a_j^i матриці \mathbf{A} порядку n називається число $\mathbf{A}_i^j = (-1)^{i+j} \overline{\mathbf{M}}_i^j$.

Зауваження. Наведене вище означення дозволяє дещо спростити формули (7) та (8):

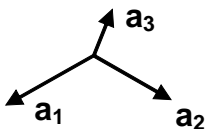
$$|\mathbf{A}| = a_j^k \mathbf{A}_k^j \quad (\text{без сумування по } j) \quad (7^*)$$

$$|\mathbf{A}| = a_k^i \mathbf{A}_i^k \quad (\text{без сумування по } i) \quad (8^*)$$

Зауваження. Правило Лапласа може бути узагальнене на довільну кількість стовпчиків або рядків.

2. Векторний добуток векторів.

Означення 5. Впорядкована трійка некомпланарних векторів $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^3$, приведених до спільного початку, називається **правою (лівою)**, якщо по цим векторам можна спрямувати відповідно великий, вказівний та середній пальці **правої (лівої) руки**. Або ж при повороті на найменший кут від вектору \mathbf{a}_1 до вектору \mathbf{a}_2 напрямком вектору \mathbf{a}_3 відповідатиме руху **правого (лівого)** гвинта. (див. мал. нижче). Зрозуміло, що при зміні напрямку одного з векторів, або при зміні порядку нумерації двох з векторів трійка міняє свою орієнтацію на протилежну. Завжди вважатимемо, що орти ПДСК мають **праву** орієнтацію.



Права трійка векторів



Ліва трійка

векторів

Означення 6. Векторним добутком двох векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ називається вектор \mathbf{c} , що визначається трьома умовами:

1. $|c| = |a| \cdot |b| \cdot \sin \varphi$ де φ – кут утворений векторами a та b ;
2. вектор ортогональний до обох векторів a та b ;
3. вектори a, b, c утворюють праву трійку.

Для векторного добутку використовуватимемо позначення $c = a \times b$.

Властивості векторного добутку векторів.

1. $a \times b = -b \times a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^3$ – антикомутативність векторного добутку є наслідком зміни орієнтації трійки векторів при зміні їх порядку;
2. $(\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ – скалярний множник можна виносити за знак векторного добутку (доведіть це самостійно);
3. $(a+b) \times c = a \times c + b \times c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}^3$ – дистрибутивність векторного добутку буде доведена дещо пізніше;
4. $|a \times b|$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах a і b ;
5. $a \times b = 0$ тоді і тільки тоді, коли вектори a і b колінеарні або принаймні один з них нульовий (доведіть це самостійно).

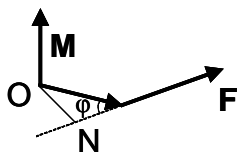
Знайдемо вираз векторного добутку через координати векторів-множників. Розглянемо вектори $a = \{a^1, a^2, a^3\}$ та $b = \{b^1, b^2, b^3\}$. Визначимо їх векторний добуток, скориставшись властивостями векторного добутку та врахувавши, що $i \times j = k, j \times k = i, k \times i = j$:

$$a \times b = (a^1 i + a^2 j + a^3 k) \times (b^1 i + b^2 j + b^3 k) = a^2 b^3 i - a^3 b^2 i - a^1 b^3 j + a^3 b^1 j + a^1 b^2 k - a^2 b^1 k \quad (5)$$

Якщо пригадати вигляд формули для обчислення визначника матриці розмірності 3, то можна записати:

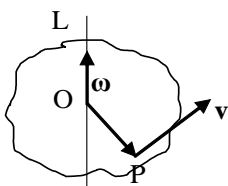
$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} \quad (6)$$

Фізичний зміст векторного добутку.



1. Одним з основних понять статички є момент сили F , прикладеної до деякої точки P відносно фіксованої точки O .

Моментом сили F , прикладеної до точки P відносно фіксованої точки O , називається вектор $M = r \times F$, де $r = OP$ – радіус-вектор точки P . За величиною момент сили рівний $|M| = |F| \cdot |OP| \cos \varphi = |F| \cdot |ON|$ – величина сили на плече.



2. Якщо тверде тіло обертається навколо нерухомої осі L зі сталою кутовою швидкістю ω , то швидкість v довільної точки P цього тіла визначається формулою Ейлера: $v = \omega \times r$, де $r = OP$ – радіус-вектор точки P відносно полюса O на осі обертання L .

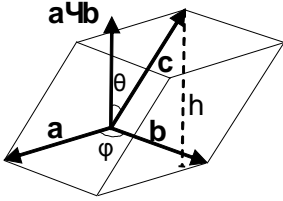
3. Мішаний добуток трьох векторів.

Означення 7. Мішаним добутком впорядкованої трійки векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ називається число, рівне $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

Якщо кут між векторами \mathbf{a} та \mathbf{b} позначити φ , а кут між векторним добутком $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ та вектором \mathbf{c} – θ , то значення мішаного добутку можна обрахувати наступним чином:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \sin \varphi \cos \theta \quad (7)$$

Властивості мішаного добутку векторів.



Мішаний добуток **правої трійки** векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. Це очевидно (див. мал.), оскільки площа основи такого паралелепіпеда рівна $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \varphi$, а висота h рівна $|\mathbf{c}| \cos \theta$. Отже,

$$V = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \sin \varphi \cos \theta = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Проте, у випадку лівої трійки векторів кут θ виявиться тупим і для визначення об'єму паралелепіпеда треба використовувати модуль мішаного добутку $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$. Крім того, очевидно, що знак мішаного добутку визначає орієнтацію трійки векторів: якщо $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} > 0$, то трійка векторів права, інакше трійка ліва. Якщо ж вектори компланарні, тобто паралельні одній площині, то висота такого «паралелепіпеда» рівна 0, отже нулю рівний і його об'єм.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \quad (8)$$

Дійсно, площу паралелограма можна визначити, взявши за основу іншу грань, наприклад, утворену векторами \mathbf{b} та \mathbf{c} . Тоді маємо $V = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$. Таким чином, бачимо, що у мішаному добутку векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ не має значення, до якої пари множників \mathbf{a} і \mathbf{b} чи \mathbf{b} і \mathbf{c} застосовувати векторне множення. Власне тому мішаний добуток просто позначають \mathbf{abc} , оскільки важливим виявляється лише порядок множників.

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{bac} \quad (9)$$

Дана властивість легко випливає із узагальнення властивості 2 та антикомутативності векторного добутку.

$\mathbf{abc} = 0$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ компланарні.

Достатність цього твердження була обґрунтована при доведенні першої властивості, тому доведемо тут необхідність. Отже, нехай $\mathbf{abc} = 0$. Якщо принаймні один з множників є нуль-вектором, то трійка напевне компланарна, тому далі вважатимемо, що всі вектори-множники ненульові. У такому випадку із формули (7) випливає, що кут $\theta = \frac{\pi}{2}$ – це означає

компланарність векторів, або ж кут $\varphi = 0$. В цьому разі вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} колінеарні, що також означає компланарність векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

$$(\lambda \mathbf{a})\mathbf{bc} = \mathbf{a}(\lambda \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ab}(\lambda \mathbf{c}) = \lambda \mathbf{abc} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Дана властивість є наслідком відповідних властивостей скалярного та векторного добутків.

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)\mathbf{bc} = \mathbf{a}_1\mathbf{bc} + \mathbf{a}_2\mathbf{bc} \quad \forall \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3 \quad \mathbf{a}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)\mathbf{c} = \mathbf{ab}_1\mathbf{c} + \mathbf{ab}_2\mathbf{c} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{ab}(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) = \mathbf{abc}_1 + \mathbf{abc}_2 \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \mathbb{R}^3 \quad \text{— дистрибутивність мішаного добутку.}$$

2. Теорема 20. (Правило Лапласа обчислення визначника). Для визначника будь-якої квадратної матриці \mathbf{A} мають місце формули:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{jk} \overline{\mathbf{M}}_k^j, \quad \text{де } k = \overline{1, n} \quad (7)$$

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} a_{ki} \overline{\mathbf{M}}_i^k, \quad \text{де } i = \overline{1, n} \quad (8)$$

Формула (7) називається розкладом визначника за елементами j -го стовпчика, а формула (8) – розкладом визначника за елементами i -го рядка. Ці співвідношення дають можливість

обчислювати визначники порядку n через визначники порядку $n-1$, а ті, в свою чергу, через визначники ще нижчих порядків.

► В силу властивості визначників **8**, досить довести дане твердження лише для стовпчиків матриці A . Розглянемо спочатку випадок, коли $j=1$: $|A| = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \cdot a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n} = \sum_{k=1}^n a_1^k \cdot \varepsilon_{k i_2 \dots i_n} \cdot a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n}$

Позначимо через $\varepsilon_{i_2 \dots i_n}^{(k)}$ символ Леві-Чивіта, у якого його $n-1$ індексів приймають $n-1$

значення від 1 до n за винятком значення k . Неважко переконатись, що

$\varepsilon_{k i_2 \dots i_n} = (-1)^{k-1} \cdot \varepsilon_{i_2 \dots i_n}^{(k)} = (-1)^{k+1} \cdot \varepsilon_{i_2 \dots i_n}^{(k)}$, оскільки, вилучаючи індекс k із перестановки $(k i_2 \dots i_n)$, ми

зменшуємо кількість інверсій, що утворює цей індекс з рештою індексів, рівно на $k-1$ (саме стільки є індексів, менших за k , серед індексів i_2, \dots, i_n). Крім того, врахуємо, що

$\overline{M}_k^1 \equiv \varepsilon_{i_2 \dots i_n}^{(k)} \cdot a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n}$. Тоді попередню рівність можна продовжити наступним чином:

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_1^k \cdot (-1)^{k+1} \cdot \varepsilon_{i_2 \dots i_n}^{(k)} \cdot a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cdot a_1^k \cdot \overline{M}_k^1$$

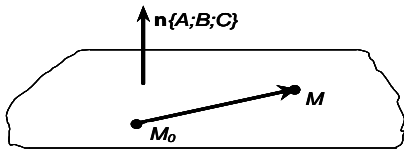
Нехай тепер j набуває довільного значення від 2 до n . Аналогічно з попереднім, запишемо:

$$\begin{aligned} |A| &= \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_j \dots i_n} \cdot a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_j^{i_j} \dots a_n^{i_n} = \sum_{k=1}^n a_j^k \cdot \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_j=k \dots i_n} \cdot a_2^{i_2} \dots a_{j-1}^{i_{j-1}} \cdot a_{j+1}^{i_{j+1}} \dots a_n^{i_n} = \\ &= \sum_{k=1}^n a_j^k \cdot \varepsilon_{k i_2 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_n} \cdot (-1)^{j-1} \cdot a_2^{i_2} \dots a_{j-1}^{i_{j-1}} \cdot a_{j+1}^{i_{j+1}} \dots a_n^{i_n} = \sum_{k=1}^n a_j^k \cdot \varepsilon_{i_2 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_n}^{(k)} \cdot (-1)^{j-1} \cdot (-1)^{k-1} \cdot a_2^{i_2} \dots a_{j-1}^{i_{j-1}} \cdot a_{j+1}^{i_{j+1}} \dots a_n^{i_n} = \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} \cdot a_j^k \cdot \overline{M}_k^j, \end{aligned}$$

оскільки $\overline{M}_k^j \equiv \varepsilon_{i_2 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_n}^{(k)} \cdot a_2^{i_2} \dots a_{j-1}^{i_{j-1}} \cdot a_{j+1}^{i_{j+1}} \dots a_n^{i_n}$. ◀

1. Площини у просторі

Поняття площини є одним із первісних геометричних понять. Вважатимемо, що у просторі обрана та зафіксована деяка ПДСК. Якщо визначити деякий напрямку з допомогою, наприклад, вектора $\mathbf{n} = \{A; B; C\}$, то тим самим визначена множина площин, перпендикулярних даному напрямку. Вектор \mathbf{n} зветься **нормаллю** цих площин. Щоб визначити серед цієї множини конкретну площину, досить вказати точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на ній (див рис. 1). Позначимо



$M(x, y, z)$ довільну точку цієї площини. Тоді вектори $\mathbf{r}_0\mathbf{M}$ та \mathbf{n} будуть ортогональними, а отже,

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1)$$

є векторним рівнянням площини. Тут \mathbf{r} та \mathbf{r}_0 – відповідно радіус-вектори точок M та M_0 . Записавши рівність (1) у координатній формі, матимемо **рівняння площини, заданої точкою та нормаллю**:

Рис. 1

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (2)$$

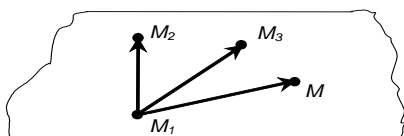
Рівняння (2), яке задає площину, є рівнянням першого порядку виду

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (3)$$

Покажемо, що й навпаки, будь-яке рівняння першого порядку (3) визначає деяку площину у просторі. З цією метою розглянемо точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка задовольняє рівняння (3). Для неї виконана рівність $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Віднявши її від рівняння (3), одержимо рівність (2), яка виражає умову ортогональності вектора $\mathbf{r}_0\mathbf{M}$, який належить розглядуваному геометричному об'єкту, та деякого фіксованого вектора $\mathbf{n} = \{A; B; C\}$. Отже, рівняння (3) задає деяку площину. Воно називається **загальним рівнянням площини**. Дослідимо частинні випадки цього рівняння, коли деякі коефіцієнти в ньому рівні нулеві.

1. Припустимо, що $A = 0$. Тоді вектор нормалі площини, очевидно, ортогональний до осі ОХ, а сама площина їй паралельна.
2. Припустимо, що $A = B = 0$. Тоді площина паралельна обом осям і ОХ, і ОУ, тобто паралельна координатній площині ХОУ і перпендикулярна осі ОZ.
3. Нехай $D = 0$. Дана площина проходить через початок координат – точку $O(0,0,0)$.
4. Припустимо, що $A = D = 0$ – площина паралельна осі ОХ та проходить через початок координат, отже, вісь ОХ належить площині.
5. Якщо $A = B = D = 0$, то маємо рівняння $z = 0$, яке задає координатну площину ХОУ.

Площина також може бути визначена трьома своїми точками. Нехай $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ та $M_3(x_3, y_3, z_3)$ – три точки відповідно з радіус-векторами \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 та \mathbf{r}_3 , які визначають деяку площину (див. рис. 2). Щоб записати її рівняння розглянемо довільну точку $M(x, y, z)$ цієї ж площини. Тоді вектори $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ та $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$ – компланарні,



отже, їх мішаний добуток нульовий, тобто

$$(r - r_1)(r_2 - r_1)(r_3 - r_1) = 0$$

(4)

є векторним **рівнянням площини, заданої трьома точками**. Відповідне рівняння у координатній формі має вигляд:

Рис. 2

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

2. Заміна координат

3. Нехай $A: L_n \rightarrow L_m$ – лінійне відображення, а $A = (a_{ij}^i)$, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ – матриця цього оператора в деяких базисах $\{f_1, \dots, f_n\}$ та $\{g_1, \dots, g_m\}$. Розглянемо деякий інший базис $\{f'_1, \dots, f'_n\}$ простору L_n з матрицею $T = (t_{ij}^i)$, $i, j = \overline{1, n}$ переходу до нього, а також базис $\{g'_1, \dots, g'_m\}$ простору L_m з матрицею переходу $S = (s_{ij}^i)$, $i, j = \overline{1, m}$. Знайдемо вираз для матриці $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}^k)$, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ лінійного оператора A в базисах $\{f'_1, \dots, f'_n\}$ та $\{g'_1, \dots, g'_m\}$.

Для цього розглянемо довільний вектор $x \in L_n$ з координатами $|x\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ та $|x'\rangle = \begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix}$

відповідно у базисах $\{f_1, \dots, f_n\}$ та $\{f'_1, \dots, f'_n\}$. Нехай його образом є вектор $y = Ax$ із

простору L_m з координатами $|y\rangle = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix}$ та $|y'\rangle = \begin{pmatrix} y'^1 \\ \vdots \\ y'^m \end{pmatrix}$ відповідно у базисах $\{g_1, \dots, g_m\}$ та

$\{g'_1, \dots, g'_m\}$. Зауважимо, що згідно формулі (7) зв'язок старих та нових координат векторів, що розглядаються, виражається наступним чином: $x = Tx'$, $y = Sy'$.

Підставивши ці вирази у формулу (7), одержимо: $Sy' = ATx'$, або $y' = S^{-1}ATx'$, оскільки

матриця переходу завжди має обернену. Але за означенням матриці \tilde{A} , маємо $y' = \tilde{A}x'$, тобто

$$\tilde{A} = S^{-1}AT, \quad (9)$$

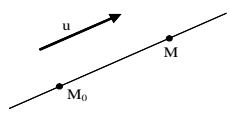
4. оскільки матриця лінійного відображення для будь-якої пари базисів визначається однозначно. Формула (9) як раз і виражає шуканий зв'язок між матрицями лінійних відображень в різних базисах просторів L_n та L_m .

5. Зауважимо, що якщо $A: L_n \rightarrow L_n$ – лінійний оператор, а $A = (a_{ij}^i)$, $i, j = \overline{1, n}$ – його матриця в базисі $\{f_1, \dots, f_n\}$, то при заміні базису на новий $\{f'_1, \dots, f'_n\}$ з матрицею переходу $T = (t_{ij}^i)$, $i, j = \overline{1, n}$ формула (9) набуває вигляду:

6. $\tilde{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T$. (10)

7. Таким чином, при переході до нового базису матриця лінійного оператора змінюється за формулою (10).

1. Прямі в просторі. Якщо зафіксувати деякий вектор $\mathbf{u} = \{l, m, n\}$, то він задає напрямку у просторі. Тим самим визначена множина прямих паралельних даному напрямку. Для визначення конкретної прямої L з цієї множини, досить вказати точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на ній (див мал. 1). Щоб визначити цю пряму аналітично, тобто вказати рівняння, яке пов'язує координати довільної точки прямої $M(x, y, z)$, скористаємось колінеарністю



векторів $\mathbf{M}_0\mathbf{M}$ та \mathbf{u} (він називається **напрямним вектором** прямої): $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \lambda \mathbf{u}$, де λ – довільне число. Таким чином одержане **векторне рівняння прямої** L .

Ця ж рівність для кожної координати вектора $\mathbf{M}_0\mathbf{M}$ дає **параметричні рівняння прямої** L :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l \\ y = y_0 + \lambda m \\ z = z_0 + \lambda n \end{cases} \quad (1)$$

(1)

Тут $\lambda \in \mathbb{R}$ є параметром – кожна точка прямої визначена деяким його значенням. Якщо з рівностей (1) виключити параметр λ , то одержимо **канонічні рівняння прямої**:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad (2)$$

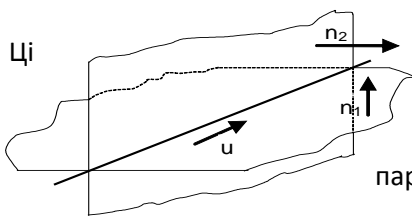
Розглянемо деякі частинні випадки. Припустимо, що одна з координат напрямного вектора прямої (2) рівна нулю, наприклад, $l = 0$. Тоді пряма, очевидно, перпендикулярна осі абсцис. Якщо ж $l = m = 0$, то пряма перпендикулярна до площини XOY , тобто паралельна осі аплікат.

Пряму також можна задати, вказавши дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$ на ній. Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка шуканої прямої. Тоді вектор $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ буде напрямним і можемо записати канонічні **рівняння прямої, заданої**

двома точками: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$

Пряма у просторі може також бути визначена як **лінія перетину двох непаралельних площин**:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$



Ці рівняння описують площини, проте дають мало уявлення про власне пряму. Щоб записати пряму, задану рівнянням (3), у канонічному вигляді, необхідно визначити напрямний вектор прямої та деяку точку на ній. Направний вектор, очевидно, має бути паралельним кожній з площин, а отже, перпендикулярним до нормалей \mathbf{n}_1 та \mathbf{n}_2 обох

площин, тому можна вважати, що $\mathbf{u} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$. Для того, щоб визначити точку на прямій

(3), покладемо одну із змінних, наприклад z , рівною z_0 і розв'яжемо систему $\begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1 - C_1z_0 \\ A_2x + B_2y = -D_2 - C_2z_0 \end{cases}$ відносно змінних x та y .

Зауваження. Очевидна неоднозначність канонічних рівнянь (2) – можна було використати іншу точку на прямій та використати будь-який колінеарний вектор за напрямний.

2. Підпростори векторних просторів.

17. Означення. Непорожня підмножина L' елементів векторного простору L називається його підпростором, якщо $\forall x, y \in L' \Rightarrow x + y \in L'; \lambda x \in L' \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

18. Наслідок. Будь-яка лінійна комбінація векторів підпростору належить цьому підпростору.

19. Наслідок. Будь-який підпростір векторного простору містить нульовий елемент.

► Нехай L' – деякий підпростір векторного простору L . Для довільного вектора $x \in L'$ розглянемо лінійну комбінацію $0 \cdot x = 0 \in L'$ ◀

20. Наслідок. Будь-який підпростір векторного простору разом з будь-яким вектором містить його протилежний вектор.

► Дійсно, нехай L' – деякий підпростір векторного простору L . Тоді $\forall x \in L' \Rightarrow (-1) \cdot x = -x \in L'$ ◀

21. Приклад. Для будь-якого векторного простору $L: \{0\}$ та L – його підпростори.

22. Приклад. Пряма та площина, що проходять через початок координат, є підпросторами простору геометричних векторів.

23. Теорема. Нехай L' – підпростір векторного простору L . Тоді $\dim L' \leq \dim L$, причому знак « $=$ » можливий тоді і лише тоді, коли $L' = L$.

► Випадок, коли $L' = \{0\}$ не розглядатимемо в силу тривіальності. Нехай $\dim L' = m \neq 0$. Розглянемо деякий базис $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ підпростору L' . Якщо $L' \neq L$, то знайдеться ненульовий вектор $f \in L, f \notin L'$. Якщо розглянути його разом з базисними векторами $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, одержимо знову систему лінійно незалежних векторів простору L . А це і означає, що $m \leq \dim L$. У випадку, коли $L' = L$, такого вектора $f \in L, f \notin L'$ не існує, а тому $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ є базисом всього простору. Отже, $\dim L' = \dim L$.

Якщо ж $\dim L' = \dim L$, то в цих підпросторах базиси складаються з рівної кількості векторів, а отже, будь-який вектор із L лінійно виражається через вектори базису підпростору L' і навпаки. Це і означає, що кожний вектор належить водночас і L , і L' , тобто $L' = L$. ◀

24. Наслідок. Нехай L' – підпростір векторного простору L , причому $\dim L' = m, \dim L = n, m < n$. Якщо $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ – базис підпростору L' , а $\{e_1, e_2, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ – базис всього простору L , то будь-який вектор $x \in L': x = \alpha^i e_i, i = \overline{1, n}$ і лише він має координати $\alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \dots = \alpha_n = 0$.

► Необхідність. Нехай $x \in L': x = \beta^i e_i, i = \overline{1, m}$. З іншого боку, як вектор простору L , він може бути розкладений по базису $\{e_1, e_2, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$: $x = \alpha^i e_i, i = \overline{1, n}$. З єдиності розкладу по базису випливає, що $\alpha^i = \beta^i, i = \overline{1, m}$, а $\alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \dots = \alpha_n = 0$.

Достатність. Нехай для деякого вектора $x \in L: x = \alpha^i e_i, i = \overline{1, m}$. Тоді цей вектор є лінійною комбінацією базисних векторів підпростору L' , а отже, є елементом цього підпростору. Нехай L' та L'' – підпростори векторного простору L .

25. Означення. Якщо будь-який вектор $x \in L$ може бути поданий у вигляді суми $x = x' + x''$, де $x' \in L', x'' \in L''$, причому таке представлення єдине, то простір L розкладається в пряму суму підпросторів L' та L'' . Цей факт позначається формулою: $L = L' \oplus L''$.

26. Теорема. Для того, щоб простір L був прямою сумою своїх підпросторів L' та L'' достатньо виконання наступних умов: 1) єдиним спільним елементом підпросторів L' та L'' є нульовий; 2) $\dim L' + \dim L'' = \dim L$.

27. Приклад. Розглянемо простір \mathbf{R}^3 геометричних векторів. Нехай π та l – відповідно деякі площина та пряма ($l \notin \pi$), що проходять через початок координат. Тоді π та l є підпросторами простору \mathbf{R}^3 , для яких виконані умови теореми: по-перше, єдиним спільним елементом для π та l є нульовий вектор; по-друге, $\dim l = 1, \dim \pi = 2$. Отже,

$\mathbf{R}^3 = \pi \oplus l$. **28. Означення.** Розглянемо підмножину векторів $M \subseteq L$. Якщо будь-який вектор $x \in M$ може бути поданий у вигляді суми $x = x' + x''$, де $x' \in L', x'' \in L''$, то M називається сумою підпросторів L' та L'' : $M = L' + L''$.

29. Означення. Розглянемо підмножину векторів $M \subseteq L$. Якщо для будь-якого вектору $x \in M$ виконується $x \in L', x \in L''$, то M називається перетином підпросторів L' та L'' : $M = L' \cap L''$. **30. Твердження.** Сума та перетин будь-яких лінійних підпросторів є лінійним підпростором того ж простору. Пропонуємо перекоонатись в цьому самостійно.

10

Уравнения прямой на плоскости

Способы задания прямой:

$$y=kx+b, \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \text{ или } x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0.$$

Общее уравнение прямой линии на плоскости в декартовых

$$Ax + By + C = 0,$$

где A, B и C — произвольные постоянные, причем постоянные A и B не равны нулю одновременно. При $C = 0$ прямая проходит через начало координат.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Прямая ось Oy в точке $(0, b)$ и образующая угол φ с направлением оси Ox :

$$y = kx + b, \quad k = \operatorname{tg} \varphi.$$

Коэффициент k называется угловым коэффициентом прямой. В этом виде прямую, параллельную оси Oy .

Уравнение прямой в отрезках. Прямая линия, пересекающая ось Ox в точке $(a, 0)$ и ось Oy в точке $(0, b)$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a \neq 0, b \neq 0).$$

В этом виде невозможно представить прямую, проходящую через начало координат.

Нормальное уравнение прямой:

$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$, где p — длина перпендикуляра, опущенного на прямую из начала координат, а θ — угол (измеренный в положительном направлении) между положительным направлением оси Ox и направлением этого перпендикуляра. Если $p = 0$, то прямая проходит через

начало координат, а угол $\theta = \varphi + \frac{\pi}{2}$ задаёт угол наклона прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные несовпадающие точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2)

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Параметрические уравнения прямой могут быть записаны в виде:

$$x = x_0 + a_x t, \quad y = y_0 + a_y t,$$

где t — производный параметр, при этом

Векторное параметрическое уравнение прямой в пространстве:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}, \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

где \vec{r}_0 — радиус-вектор некоторой фиксированной точки M_0 , лежащей на прямой, \vec{a} — ненулевой вектор, коллинеарный этой прямой, \vec{r} — радиус-вектор произвольной точки прямой.

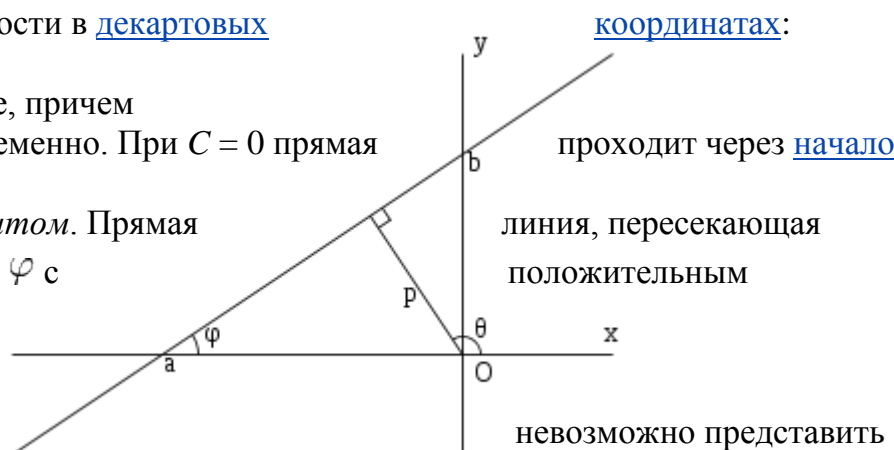
Параметрическое уравнение прямой в пространстве:

$$x = x_0 + t\alpha, \quad y = y_0 + t\beta, \quad z = z_0 + t\gamma, \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

где (x_0, y_0, z_0) — координаты некоторой фиксированной точки M_0 , лежащей на прямой; (α, β, γ) — координаты вектора, коллинеарного этой прямой.

Каноническое уравнение прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma},$$



2. Прямая сумма пространств

Нехай L' та L'' — підпростори векторного простору L .

Означення. Якщо будь-який вектор $x \in L$ може бути поданий у вигляді суми $x = x' + x''$, де $x' \in L', x'' \in L''$, причому таке представлення єдине, то простір L розкладається в пряму суму підпросторів L' та L'' . Цей факт позначається формулою: $L = L' \oplus L''$.

Т е о р е м а . Для того, щоб простір L був прямою сумою своїх підпросторів L' та L'' достатньо виконання наступних умов: 1) єдиним спільним елементом підпросторів L' та L'' є нульовий; 2) $\dim L' + \dim L'' = \dim L$.

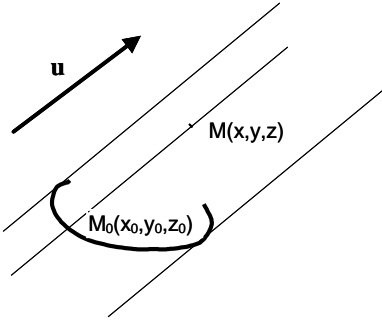
► Нехай виконані умови 1) та 2). Позначимо $\dim L' = k$, $\dim L'' = m$. Тоді $k + m = n$. Нехай $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ та $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ – відповідно базиси підпросторів L' та L'' . Розглянемо систему векторів $\{e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, f_2, \dots, f_m\}$. Складемо довільну нульову лінійну комбінацію векторів цієї системи: $\alpha^i e_i + \beta^j f_j = 0$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, m}$. Запишемо її у вигляді рівності $\alpha^i e_i = (-\beta^j) f_j$. Вектор у лівій частині належить підпростору L' , а вектор у правій – підпростору L'' . Згідно умові 1), такий вектор є нульовим: $\alpha^i e_i = 0$, $i = \overline{1, k}$, $\beta^j f_j = 0$, $j = \overline{1, m}$. Оскільки вектори $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ та $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ – лінійно незалежні, то $\alpha^i = 0$, $i = \overline{1, k}$, $\beta^j = 0$, $j = \overline{1, m}$, що означає що вектори $\{e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, f_2, \dots, f_m\}$ також лінійно незалежні, а отже, утворюють базис простору L . Далі, розглянемо довільний вектор $x \in L$: $x = \alpha^i e_i + \beta^j f_j$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, m}$. Його можна подати у вигляді $x = x' + x''$, де $x' = \alpha^i e_i \in L'$, а $x'' = \beta^j f_j \in L''$. Залишилось переконатись у єдиності такого подання. Від супротивного припустимо, що деякий вектор x має різні представлення: $x = x' + x''$ та $x = \tilde{x}' + \tilde{x}''$. Тоді матимемо: $\tilde{x}' + \tilde{x}'' = x' + x''$, або $\tilde{x}' - x' = x'' - \tilde{x}''$, де вектор у лівій частині цієї рівності належить L' , а у правій – L'' . Отже, $\tilde{x}' - x' = 0$, $x'' - \tilde{x}'' = 0$ тобто $\tilde{x}' = x'$, $x'' = \tilde{x}''$, що суперечить припущенню про різні представлення вектора x . Таким чином, простір L є прямою сумою підпросторів L' та L'' . ◀

П р и к л а д . Розглянемо простір \mathbf{R}^3 геометричних векторів. Нехай π та l – відповідно деякі площина та пряма ($l \not\subset \pi$), що проходять через початок координат. Тоді π та l є підпросторами простору \mathbf{R}^3 , для яких виконані умови теореми: по-перше, єдиним спільним елементом для π та l є нульовий вектор; по-друге, $\dim l = 1, \dim \pi = 2$. Отже, $\mathbf{R}^3 = \pi \oplus l$.

Поверхні обертання

Окремим класом поверхонь є так звані **конічні** та **циліндричні поверхні**. З точки зору загальної теорії поверхонь другого порядку, дані поверхні є виродженими (наприклад, у випадку кривих другого порядку гіпербола вироджується в пару прямих, що перетинаються, а парабола – в пару паралельних прямих). Дамо точні означення та одержимо рівняння цих поверхонь.

1 Означення. Циліндричною поверхнею (або просто циліндром) називається поверхня, утворена рухом прямої лінії, що зберігає деякий сталий напрямок (ця пряма називається **твірною** циліндра) і перетинає деяку криву другого порядку – **напряму** циліндра (див. рис. 6).



Будемо вважати, що твірна циліндра має напрямний вектор u з координатами (l, m, n) , а пряма задана як лінія перетину двох поверхонь:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

(Одна з цих поверхонь, як правило є площиною, а інша – одна з поверхонь, описаних вище).

Розглянемо довільну точку $M(x, y, z)$, що належить циліндру.

Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – та точка напрямної (1), яка належить тій

самій твірній, що і точка M . Тоді координати точок M і M_0 пов'язані наступним

співвідношенням $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} = \lambda$, звідки маємо:

$$\text{рис. 6} \quad x_0 = x - \lambda l, \quad y_0 = y - \lambda m, \quad z_0 = z - \lambda n \quad (11)$$

Далі підставимо вирази (11) в одне з рівнянь напрямної (10), адже точка M_0 має задовольняти рівняння напрямної. Виразимо звідси λ через x, y, z і знову підставимо знайдений вираз для λ у формули (11). Залишилось тепер знайдені координати точки M_0 підставити у друге з рівнянь напрямної (10). Таким чином одержимо рівняння циліндра. Реалізуємо цей алгоритм на прикладі.

3. Означення. Конічною поверхнею (або просто конусом) називається поверхня, утворена рухом прямої лінії, що проходить через деяку фіксовану точку – вершину конуса (ця пряма називається **твірною** конуса) і перетинає деяку криву другого порядку – **напряму** конуса (див. рис. 7).

Нехай вершиною конуса є точка $O'(a, b, c)$, а пряма як і у випадку з циліндром, задана як

$$\text{лінія перетину двох поверхонь:} \quad \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

(12)

(Одна з цих поверхонь, як правило є площиною, а інша – одна з поверхонь, описаних вище).

Розглянемо довільну точку $M(x, y, z)$, що належить циліндру. Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – та точка напрямної (3), яка належить тій самій твірній, що і точка M . Тоді координати точок M і M_0

пов'язані наступним співвідношенням $\frac{x-a}{x_0-a} = \frac{y-b}{y_0-b} = \frac{z-c}{z_0-c} = \lambda$, звідки маємо:

$$x_0 = \frac{x-a+a\lambda}{\lambda}, \quad y_0 = \frac{y-b+b\lambda}{\lambda}, \quad z_0 = \frac{z-c+c\lambda}{\lambda} \quad (13)$$

Підставимо вирази (13) в одне з рівнянь напрямної (12), оскільки точка M_0 має задовольняти рівняння напрямної. Виразимо звідси λ через x, y, z і знову підставимо знайдений вираз для λ у формули (13). Щоб одержати рівняння конуса, підставимо знайдені координати точки M_0 у друге з рівнянь напрямної (12).

Розглянемо приклад.

5. Зауваження. Циліндр, напрямні якого перпендикулярні площині твірної, називається **прямим циліндром**. В залежності від форми напрямної його називають круговим, еліптичним, гіперболічним або параболічним.

6. Зауваження. Конус, твірною якого є коло, а вершина конуса проектується в центр цього кола, називається **прямим круговим конусом**.

1. Спектр лінійного оператора.

Нехай L_n – лінійний простір, в якому діє лінійний оператор $A: L_n \rightarrow L_n$. Припустимо, що існує **одновимірний** підпростір $L \subseteq L_n$, інваріантний відносно оператора A . Тоді $\forall x \in L: Ax \in L$, а отже, знайдеться таке число λ , що $Ax = \lambda x$. Іншими словами, дія оператора A на будь-який вектор із підпростору L є дуже простою – вона зводиться до множення цього вектора на деяке число. Спробуємо дослідити подібні підпростори.

1. Означення. Ненульовий вектор $x \in L_n$ називається **власним вектором**, який відповідає (належить) власному числу (значенню) λ , лінійного оператора A , якщо

$$Ax = \lambda x \quad (1)$$

Повний набір власних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ лінійного оператора називається його **спектром**, а задача по відшукуванню власних чисел та власних векторів – **спектральною задачею** для лінійного оператора.

2. Характеристичне рівняння та його корені.

Наступне питання, яке нам належить вирішити, – як відшукати власні числа та вектори лінійного оператора. Рівняння (1) можна записати у вигляді: $Ax = \lambda Ex$, або $(A - \lambda E)x = 0$

$$(2)$$

Тобто множина власних векторів, що відповідають даному власному числу λ , є ядром оператора $A - \lambda E$. Рівняння (2) еквівалентне, як було показано (див. (7), (8)) матричному рівнянню $(A - \lambda E) \cdot |x\rangle = 0$,

$$(3)$$

де A – матриця лінійного оператора A в деякому базисі $\{f_1, \dots, f_n\}$. Остання рівність є однорідною системою n лінійних рівнянь з n невідомими координатами власного вектора $x \in L_n$, заданими в тому ж базисі:

$$\begin{cases} (a_1^1 - \lambda)x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n = 0 \\ a_1^2 x^1 + (a_2^2 - \lambda)x^2 + \dots + a_n^2 x^n = 0 \\ \vdots \\ a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \dots + (a_n^n - \lambda)x^n = 0 \end{cases} \quad (3')$$

Згідно з означенням 1, шуканий вектор x не рівний нулю. Такий вектор існує тоді і тільки тоді, коли визначник системи (3) рівний нулю:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - \lambda & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n = 0 \quad (4)$$

2. Означення. Рівняння (4) носить назву **характеристичного рівняння**, а його ліва частина називається **характеристичним поліномом** матриці A . Неважко визначити

коефіцієнти характеристичного полінома $P_n(\lambda)$, зокрема, $p_n = |A|$, $p_1 = (-1)^{n-1} \text{Sp } A$, де $\text{Sp } A = \sum_{i=1}^n a_i^i$.

1. Системи Крамерівського типу. Теорема Крамера.

1. Означення. Системою m лінійних рівнянь з n невідомими називається система рівнянь виду:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n = b^1 \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \dots + a_n^2 x^n = b^2 \\ \dots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \dots + a_n^m x^n = b^m \end{cases}, \text{ або } \{a_j^i x^j = b^i, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}\} \quad (1) : \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} = (a_j^i)_{i=\overline{1, m}; j=\overline{1, n}} - \text{матриця системи, } \Delta = |\mathbf{A}| -$$

визначник системи, $|\mathbf{b}\rangle^T = (b^1 \ b^2 \ \dots \ b^n)$ – стовпчик вільних членів. Елементи матриці a_j^i є коефіцієнтами системи. Якщо вектор-стовпчик невідомих позначити через $|\mathbf{x}\rangle^T = (x^1 \ x^2 \ \dots \ x^n)$, то у матричному вигляді запис системи буде таким: $\mathbf{A} \cdot |\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{b}\rangle$, або просто $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Позначимо також через $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ так звану розширену матрицю системи:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & b^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m & b^m \end{pmatrix}.$$

4. Теорема (формули Крамера). Якщо визначник матриці системи (1) $\Delta \neq 0$, то існує єдиний розв'язок $|\alpha\rangle$ цієї системи. Він визначений формулами Крамера:

$$\alpha^i = \frac{\Delta^i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

де Δ^i – це визначник, утворений із визначника Δ заміною i -го стовпчика на вектор стовпчик вільних членів $|\mathbf{b}\rangle$.

Для доведення виберемо довільний індекс $k \in \overline{1, n}$ і допишемо в розширену матрицю системи першим рядком її k -тий рядок. Тоді визначник одержаної квадратної матриці (позначимо його $\tilde{\Delta}$) буде рівним нулю (згадайте відповідну властивість визначника). З іншого боку, значення цього визначника можна обчислити, розкриваючи його по першому рядку згідно правила Лапласа:

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} a_1^k & a_2^k & \dots & a_n^k & b^k \\ a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & b^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n & b^n \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n (-1)^{1+i} \cdot a_i^k \cdot \mathbf{M}_1^i + (-1)^{1+(n+1)} \cdot b^k \cdot \Delta$$

Тут через $\mathbf{M}_1^i, i = \overline{1, n}$ позначений доповняльний мінор елемента a_i^k першого рядка цього визначника. Оскільки за

припущенням теореми $\Delta \neq 0$, то з рівності $\tilde{\Delta} = 0$ випливає, що $b^k = \frac{\sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \cdot a_i^k \cdot \mathbf{M}_1^i}{\Delta}$. Розглянемо уважніше значення мінору

$\mathbf{M}_1^i, i = \overline{1, n}$:

$$\mathbf{M}_1^i = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_{i-1}^1 & a_{i+1}^1 & \dots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & \dots & a_{i-1}^2 & a_{i+1}^2 & \dots & a_n^2 & b^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_{i-1}^n & a_{i+1}^n & \dots & a_n^n & b^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_{i-1}^1 & b^1 & a_{i+1}^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & \dots & a_{i-1}^2 & b^2 & a_{i+1}^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_{i-1}^n & b^n & a_{i+1}^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} \cdot (-1)^{n-i} \quad \text{Остання рівність є наслідком}$$

пересування стовпчика $|\mathbf{b}\rangle$ на місце між стовпчиками $|\mathbf{A}_{i-1}\rangle$ та $|\mathbf{A}_{i+1}\rangle$. На це потрібно було $n-i$ кроків. Отже,

$M_1^i = \Delta^i \cdot (-1)^{n-i}$. Підставимо одержане значення мінору у вираз для b^k : $b^k = \frac{\sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \cdot a_i^k \cdot \Delta^i \cdot (-1)^{n-i}}{\Delta} = \sum_{i=1}^n a_i^k \cdot \frac{\Delta^i}{\Delta}$, що й

означає, що вектор стовпчик $|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix}$, де $\alpha^i = \frac{\Delta^i}{\Delta}$, $i = \overline{1, n}$ є розв'язком системи (1).

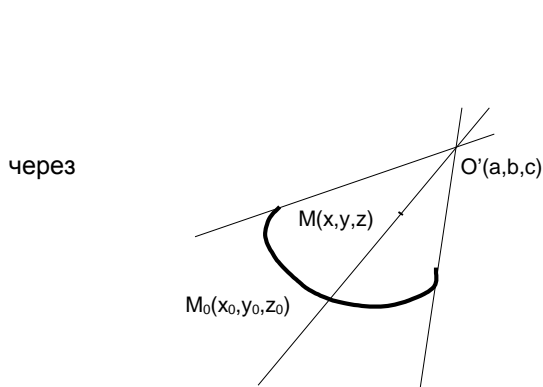
Покажемо, що даний розв'язок єдиний. Припустимо супротивне – нехай $|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix}$ та $|\beta\rangle = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^n \end{pmatrix}$ різні розв'язки системи

(1). Тоді із $\begin{cases} \alpha^1 \cdot |\mathbf{A}_1\rangle + \alpha^2 \cdot |\mathbf{A}_2\rangle + \dots + \alpha^n \cdot |\mathbf{A}_n\rangle \equiv |\mathbf{b}\rangle \\ \beta^1 \cdot |\mathbf{A}_1\rangle + \beta^2 \cdot |\mathbf{A}_2\rangle + \dots + \beta^n \cdot |\mathbf{A}_n\rangle \equiv |\mathbf{b}\rangle \end{cases}$ випливає, що $(\alpha^1 - \beta^1) \cdot |\mathbf{A}_1\rangle + (\alpha^2 - \beta^2) \cdot |\mathbf{A}_2\rangle + \dots + (\alpha^n - \beta^n) \cdot |\mathbf{A}_n\rangle = |\mathbf{0}\rangle$. Це

означає лінійну залежність вектор-стовпчиків матриці \mathbf{A} , що в свою чергу приводить до висновку (див. 47.), що $\Delta = 0$. Одержана суперечність з умовою теореми означає єдиність розв'язку (2).

6. Зауваження. Перестановка рядків та множення довільного рівняння системи (1) і додавання результату до іншого рівняння, очевидно не змінює розв'язку (2) системи. Виконання цих операцій з рівняннями системи еквівалентне діям з рядками розширеної матриці системи. Як відомо, ці операції не перетворюють визначник системи на нуль, отже, називатимемо їх допустимими перетвореннями системи (1).

2. Конус



крива $x^2 - y^2 - 2xz + 2yz + x + y - 2z = 0$.

3. Означення. Конічною поверхнею (або просто конусом) називається поверхня, утворена рухом прямої лінії, що проходить деяку фіксовану точку – вершину конуса (ця пряма називається **твірною** конуса) і перетинає деяку криву другого порядку – **напряму** конуса (див. рис. 2).

Нехай вершиною конуса є точка $O'(a, b, c)$, а напрямна як і у випадку з циліндром, задана як лінія перетину двох поверхонь:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (3) \text{ Рис. 2}$$

(Одна з цих поверхонь, як правило є площиною, а інша – одна з поверхонь, описаних вище). Розглянемо довільну точку $M(x, y, z)$, що належить циліндру. Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – та точка напрямної (3), яка належить тій самій твірній, що і точка M .

Тоді координати точок M і M_0 пов'язані наступним співвідношенням $\frac{x-a}{x_0-a} = \frac{y-b}{y_0-b} = \frac{z-c}{z_0-c} = \lambda$, звідки маємо:

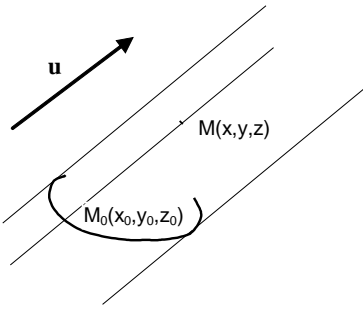
$$x_0 = \frac{x-a+a\lambda}{\lambda}, y_0 = \frac{y-b+b\lambda}{\lambda}, z_0 = \frac{z-c+c\lambda}{\lambda} \quad (4)$$

Підставимо вирази (4) в одне з рівнянь напрямної (3), оскільки точка M_0 має задовольняти рівняння напрямної. Виразимо звідси λ через x, y, z і знову підставимо знайдений вираз для λ у формули (4). Щоб одержати рівняння конуса, підставимо знайдені координати точки M_0 у друге з рівнянь напрямної (3).

Розглянемо приклад.

5. Зауваження. Циліндр, напрямні якого перпендикулярні площині твірної, називається **прямим циліндром**. В залежності від форми напрямної його називають круговим, еліптичним, гіперболічним або параболічним.

6. Зауваження. Конус, твірною якого є коло, а вершина конуса проектується в центр цього кола, називається **прямим круговим конусом**.



1 Означення. Циліндричною поверхнею (або просто циліндром) називається поверхня, утворена рухом прямої лінії, що зберігає деякий сталий напрямок (ця пряма називається **твірною** циліндра) і перетинає деяку криву другого порядку – **напряму** циліндра (див. рис.).

Будемо вважати, що твірна циліндра має напрямний вектор \mathbf{u} з координатами (l, m, n) , а напрямна задана як лінія перетину двох поверхонь:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

(Одна з цих поверхонь, як правило є площиною, а інша – одна з поверхонь, описаних вище).

Розглянемо довільну точку $M(x, y, z)$, що належить циліндру. Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – та точка напрямної (1), яка належить тій самій твірній, що і точка M . Тоді координати точок M і M_0 пов'язані наступним співвідношенням

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = \lambda, \text{ звідки маємо:}$$

$$x_0 = x - \lambda l, \quad y_0 = y - \lambda m, \quad z_0 = z - \lambda n \quad (2)$$

Далі підставимо вирази (2) в одне з рівнянь напрямної (1), адже точка M_0 має задовольняти рівняння напрямної. Виразимо звідси λ через x, y, z і знову підставимо знайдений вираз для λ у формули (2). Залишилось тепер знайдені координати точки M_0 підставити у друге з рівнянь напрямної (1). Таким чином одержимо рівняння циліндра.

2. Білінійна та квадратична форми. Зв'язок між ними.

Білінійна форма.

Розглянемо тепер відображення $b: L_n \times L_n \rightarrow \mathbf{R}$.

10. Означення. Відображення b називаються **білінійною функцією** (білінійною формою), якщо $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – лінійна функція по \mathbf{x} при фіксованому \mathbf{y} та навпаки, тобто

- $b(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = b(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + b(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \in L_n$;
- $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = b(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + b(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in L_n$
- $b(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L_n, \forall \lambda \in \mathbf{R}$.
- $b(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = \lambda b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L_n, \forall \lambda \in \mathbf{R}$.

11. Приклад. Очевидно, що білінійною формою є скалярний добуток $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \circ \mathbf{y}$ двох векторів довільного евклідового простору, в силу властивостей скалярного добутку.

Нехай $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n\}$ – довільний базис лінійного простору L_n . Знайдемо значення білінійної форми b для будь-яких векторів $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L_n$ заданих своїми координатними стовпчиками в цьому базисі – $|\mathbf{x}\rangle = (x^1 \ x^2 \ \dots \ x^n)^T$ та $|\mathbf{y}\rangle = (y^1 \ y^2 \ \dots \ y^n)^T$

відповідно: $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b\left(\sum_{i=1}^n x^i \mathbf{g}_i, \sum_{j=1}^n y^j \mathbf{g}_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^i y^j b(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j)$. Позначимо $b_{ij} = b(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j)$ – елементи **матриці В білінійної**

форми у базисі $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n\}$, тоді:

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^i y^j b_{ij} = |\mathbf{x}\rangle^T \cdot \mathbf{B} \cdot |\mathbf{y}\rangle, \quad (3)$$

З'ясуємо, як змінюється матриця \mathbf{B} білінійної форми при заміні базису. Нехай \mathbf{T} – матриця переходу від базису $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n\}$ до базису $\{\mathbf{g}'_1, \dots, \mathbf{g}'_n\}$: $\mathbf{g}'_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} \mathbf{g}_i, j = \overline{1, n}$. Тоді формула (3) для довільних векторів $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L_n$ набуває вигляду:

$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}\rangle^T \cdot \mathbf{B} \cdot |\mathbf{y}\rangle = |\mathbf{T} \cdot \mathbf{x}'\rangle^T \cdot \mathbf{B} \cdot |\mathbf{T} \cdot \mathbf{y}'\rangle = |\mathbf{x}'\rangle^T \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{T} \cdot |\mathbf{y}'\rangle$, де $|\mathbf{x}'\rangle$ та $|\mathbf{y}'\rangle$ – вектор-стовпчики координат відповідно векторів \mathbf{x} та \mathbf{y} в базисі $\{\mathbf{g}'_1, \dots, \mathbf{g}'_n\}$. З іншого боку, якщо $\tilde{\mathbf{B}}$ – матриця білінійної форми у цьому базисі, то $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}'\rangle^T \cdot \tilde{\mathbf{B}} \cdot |\mathbf{y}'\rangle$. Порівнюючи вирази білінійної форми у різних базисах та підставляючи у них $|\mathbf{x}'\rangle = |\mathbf{E}_i\rangle, |\mathbf{y}'\rangle = |\mathbf{E}_j\rangle \forall i, j = \overline{1, n}$, одержимо: $(\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{T})_{ij} = (\tilde{\mathbf{B}})_{ij} \forall i, j = \overline{1, n}$. Таким чином, маємо наступну формулу заміни

матриці білінійної форми при переході до нового базису:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}. \quad (4)$$

Або по елементах рівність:

$$\tilde{b}_{ij} = b(\mathbf{g}'_i, \mathbf{g}'_j) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{kl} t_{ki}^k t_{lj}^l \quad (4')$$

13. Зауваження. Формула (4') схожа на формулу заміни матриці лінійного оператора при заміні базису, проте там фігурує матриця \mathbf{T}^{-1} замість \mathbf{T}^T . Але (!) ці формули співпадають, коли матриця \mathbf{T} – ортогональна, тобто відбувається заміна одного ортонормованого базису на інший.

14. Означення. Білінійна форма $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ називається симетричною, якщо $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L_n$

15. Твердження. Білінійна форма $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ симетрична тоді і лише тоді, коли її матриця симетрична у деякому базисі.

► **Необхідність.** Нехай білінійна форма симетрична, тоді елементи її матриці в деякому базисі $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n\}$ мають властивість: $b_{ij} = b(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j) = b(\mathbf{g}_j, \mathbf{g}_i) = b_{ji} \forall i, j = \overline{1, n}$, тобто $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$.

Достатність. Нехай у деякому базисі $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n\}$ матриця \mathbf{B} білінійної форми $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ симетрична: $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$. Тоді, згідно з формулою (3), для довільних векторів $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L_n$ маємо:

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}\rangle^T \cdot \mathbf{B} \cdot |\mathbf{y}\rangle = \left(|\mathbf{x}\rangle^T \cdot \mathbf{B} \cdot |\mathbf{y}\rangle\right)^T = |\mathbf{y}\rangle^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot |\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{y}\rangle^T \cdot \mathbf{B} \cdot |\mathbf{x}\rangle = b(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - \text{білінійна форма симетрична.} \blacktriangleleft$$

Квадратична форма.

18. Означення. Квадратичною функцією (формою) називається відображення $k: L_n \rightarrow \mathbf{R}: k(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, де $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – симетрична білінійна форма.

19. Зауваження. Квадратична форма – не лінійна функція, адже $k(\lambda \mathbf{x}) = b(\lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x}) = \lambda^2 b(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda^2 k(\mathbf{x})$.

Розглянемо $k(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = b(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = b(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = b(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{y})$.

$$\text{Тоді} \quad b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} [k(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - k(\mathbf{x}) - k(\mathbf{y})], \quad (5)$$

тобто симетрична білінійна форма однозначно виражається через квадратичну форму.

20. Означення. Матрицею квадратичної форми називається матриця відповідної їй симетричної білінійної форми.

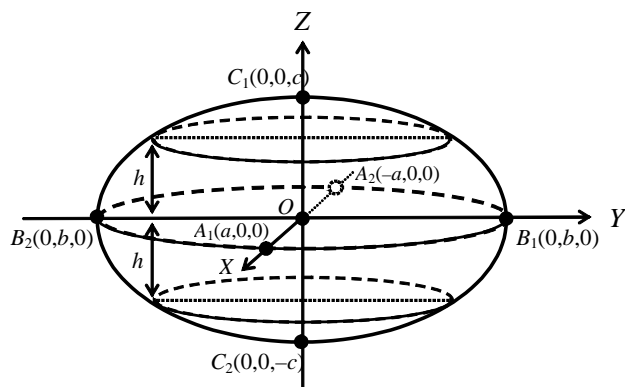
З означення 18 випливає, що для довільного вектора \mathbf{x} з координатами $|\mathbf{x}\rangle = (x^1 \ x^2 \ \dots \ x^n)^T$ в деякому базисі значення квадратичної форми визначається формулою:

$$k(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}\rangle^T \cdot \mathbf{B} \cdot |\mathbf{x}\rangle = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x^i x^j \quad (6)$$

Слід зазначити, що теорія квадратичних форм тісно пов'язана з аналітичною геометрією, а саме – з теорією кривих та поверхонь другого порядку. Нагадаємо, що при дослідженні загального рівняння кривої другого порядку $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ у випадку, коли дана крива – центральна, тобто еліпс або гіпербола, при перенесенні початку координат у центр кривої можна одержати рівняння виду $\tilde{a}_{11}x^2 + 2\tilde{a}_{12}xy + \tilde{a}_{22}y^2 + \tilde{a}_{33} = 0$, або $\tilde{a}_{11}x^2 + 2\tilde{a}_{12}xy + \tilde{a}_{22}y^2 = -\tilde{a}_{33}$. Ліва частина такого рівняння є квадратичною формою, і як відомо, завжди може бути зведена до вигляду $\tilde{\tilde{a}}_{11}x^2 + \tilde{\tilde{a}}_{22}y^2 = \tilde{\tilde{a}}_{33}$, тобто до суми квадратів. Спробуємо досягти такої ж мети і для квадратичної форми у лінійному просторі довільної розмірності. Короткий виклад подальших дій є таким: квадратична форма пов'язана із симетричною білінійною формою; її матриця симетрична – отже, в деякому базисі визначає самоспряжений оператор. Останній, як відомо, завжди дозволяє визначити базис із власних векторів, в якому його матриця має діагональний вид. Ця матриця у новому базисі відповідає квадратичній формі, що містить лише суми квадратів своїх доданків. Такий вигляд квадратичної форми називається *канонічним*.

1. Еліпсоїд.

Канонічним рівнянням еліпсоїду є рівняння виду:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0) \quad (2)$$

З рівняння (2) безпосередньо випливає, що по-перше, дана поверхня симетрична відносно всіх трьох координатних площин, і по-друге, $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $|z| \leq c$. Точки $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$ називаються вершинами еліпсоїда. Покажемо, що якщо існує переріз еліпсоїда поверхнею паралельною до однієї з координатних площин, то таким перерізом завжди є еліпс (власне, цій обставині він і завдячує своєю назвою). Дійсно, розглянемо переріз площиною $z = \pm h$, де $0 \leq h \leq c$. Маємо:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \\ z = \pm h \end{cases}$$

Ці рівняння визначають еліпс з півосями $a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ та $b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ (див. рис. 1). Максимальні півосі, рівні a і b , матиме еліпс, одержаний в перерізі координатною площиною XOY при $h=0$. При $h=c$ перерізи перетворюються на точку – вершини еліпсоїда. Аналогічні міркування справедливі і для перерізів еліпсоїда площинами $y = y_0$ та $z = z_0$.

2. Спряжений оператор

2. Оператор, спряжений даному.

3. Означення. Лінійний оператор $A^*: E_n \rightarrow E_n$ називається *спряженим* даному оператору A , якщо $\forall x, y \in E_n$:

$$Ax \cdot y = x \cdot A^*y \quad (1)$$

4. Теорема. Матриця спряженого оператора в будь-якому базисі подібна транспонованій матриці даного лінійного оператора з матрицею подібності G – матриця Грама даного базису.

► Нехай $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ – довільний базис евклідового простору, а G – його матриця Грама. Позначимо через A та A^* відповідно матриці операторів A та A^* у цьому базисі. Розглянемо довільні вектори $x, y \in E_n$ з координатними стовпчиками $|x\rangle$ та $|y\rangle$ у вибраному базисі $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$. Тоді, згідно формулі (4) з лекції 17, маємо:

$$Ax \cdot y = |Ax\rangle^T G |y\rangle = (A|x\rangle)^T G |y\rangle = |x\rangle^T A^T G |y\rangle \quad (2)$$

$$\text{З іншого боку, } Ax \cdot y = x \cdot A^*y = |x\rangle^T G |A^*y\rangle = |x\rangle^T G A^* |y\rangle \quad (3)$$

Порівнюючи формули (2) та (3), одержимо: $|x\rangle^T (A^T G - G A^*) |y\rangle = 0$. Оскільки дана рівність виконана для довільних $x, y \in E_n$, робимо висновок, що $A^T G - G A^* = 0$ (покласти $|x\rangle = |E_i\rangle$, а $|y\rangle = |E_j\rangle$ та пригадати приклад 22 з лекції 13 – одержимо по елементну рівність $(A^T G - G A^*)_{ij} = 0, i, j = \overline{1, n}$), тобто

$$A^* = G^{-1} A^T G \quad \blacktriangleleft \quad (4)$$

5. Наслідок. В ортонормованому базисі $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ формула (4) набуває вигляду $A^* = A^T$ (5)

6. Теорема. Кожний лінійний оператор в евклідовому просторі має спряжений, причому єдиний.

► Позначимо через A – матрицю довільного лінійного оператора A простору E_n в деякому ортонормованому базисі $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Розглянемо матрицю A^T . Їй відповідає деякий лінійний оператор \tilde{A} , що діє за правилом: $\tilde{A}x = A^T |x\rangle \quad \forall x \in E_n$. Нехай $x, y \in E_n$ – довільні вектори з координатами $|x\rangle$ та $|y\rangle$ в ортонормованому базисі $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Для них виконується рівність: $Ax \cdot y = |Ax\rangle^T |y\rangle = (A|x\rangle)^T |y\rangle = |x\rangle^T A^T |y\rangle = x \cdot \tilde{A}y$. Отже, $\tilde{A} = A^*$, тобто спряжений оператор визначений для довільного лінійного оператора. Покажемо, що спряжений оператор визначається однозначно. Від супротивного припустимо, що деякий лінійний оператор A має два різних спряжених оператора A_1^*, A_2^* . В деякому ортонормованому базисі їм відповідають дві різні матриці A_1^*, A_2^* . Проте, як відомо з наслідку 5 $A_1^* = A^T$ та $A_2^* = A^T$, тобто $A_1^* = A_2^*$. Одержана суперечність означає, що спряжений оператор – єдиний ◀

7. Наслідок. Оператором, спряженим до спряженого, є даний оператор: $(A^*)^* = A$ (6)

► Дана рівність випливає з того, що $(A^T)^T = A$. ◀

Завдання для самостійної роботи. Довести, що:

$$1. (A+B)^* = A^* + B^* \quad 2. (A \cdot B)^* = B^* \cdot A^* \quad 3. (\lambda A)^* = \lambda A^* \quad 4. E^* = E; \quad 0^* = 0$$

8. Теорема. Образ оператора A збігається з ортогональним доповненням ядра його спряженого оператора A^* , тобто $\text{Im } A = (\text{Ker } A^*)^\perp$.

► Нехай $y \in \text{Ker } A^*$ – довільний вектор. Покажемо, що y ортогональний до кожного вектора $z \in \text{Im } A$. Розглянемо такий вектор x , що $Ax = z$. Тоді $z \cdot y = Ax \cdot y = x \cdot A^*y = x \cdot 0 = 0$, тобто $\text{Im } A \subseteq (\text{Ker } A^*)^\perp$. Порівняння розмірностей (дійсно, покладемо $\dim \text{Im } A = \text{Rg } A = \text{Rg } A^T = \dim \text{Im } A^* = k$, тоді $\dim \text{Ker } A^* = n - k$, а $\dim (\text{Ker } A^*)^\perp = n - \dim \text{Ker } A^* = k$) показує, що підпростори співпадають. ◀

Білет 15

1. Гіперboloїд як поверхня

2. Однопорожнинний гіперboloїд задається канонічним рівнянням виду:

$$3. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

(3)

4. Очевидна симетрія точок поверхні відносно всіх трьох координатних площин. Дослідимо форму поверхні з допомогою перерізів площинами паралельними координатним. Розглянемо спочатку переріз поверхні площиною $z = \pm h$. Маємо:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z_0^2}{c^2} \\ z = \pm h \end{cases}$$

5. Ці рівняння при будь-якому значенні h

визначають еліпс з півосями $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ та $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$. Мінімальні

півосі, рівні a і b , матиме еліпс, одержаний в перерізі координатною площиною XOY при $h = 0$.

6. В перерізі однопорожнинного гіперboloїда будь-якою з Рис. 2 площин $x = \pm h$ матимемо гіперболу:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2} \\ x = \pm h \end{cases}$$

7. Її дійсною віссю при $0 < h < a$ буде $b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}$, а уявною – $c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}$. Якщо ж $h > a$, то дійсна вісь буде рівна

$c\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}$, а уявна – рівна $b\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}$. Зауважимо, що при $h = a$ перерізи являють собою дві прямі, що

перетинаються в точці $(\pm a, 0, 0)$. Аналогічно можна переконатись, що і в перерізі будь-якою з площин $y = \pm h$ також отримаємо гіперболу.

8. Рівняння (3) приховує одну дуже важливу особливість однопорожнинного гіперboloїда, а саме; пара зазначених вище прямих є лише однією парою з двох сімейств таких пар прямих, цілком розташованих на цій поверхні. Це так звані *прямолінійні твірні* однопорожнинного гіперboloїда. Визначимо їх. Рівняння (4) можна подати у вигляді:

$$9. \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}, \text{ або } \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad (4)$$

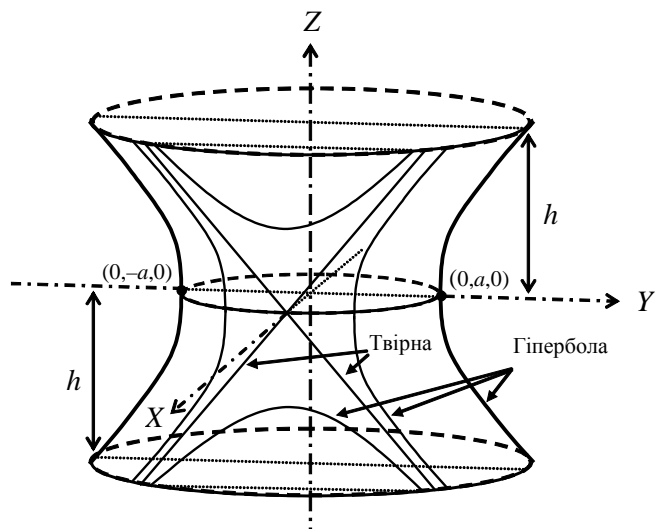
10. Розглянемо тепер пряму лінію, утворену перетином двох площин, визначених при деяких значеннях числових параметрів λ та μ :

$$11. \quad \begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases} \quad (5)$$

12. Координати кожної точки прямої (5), очевидно задовольняють рівняння (4), а отже, і рівняння (3). Тому всі точки прямих (5) лежать на гіперboloїді (3). Аналогічними міркуванням переконайтесь, що і сімейство прямих

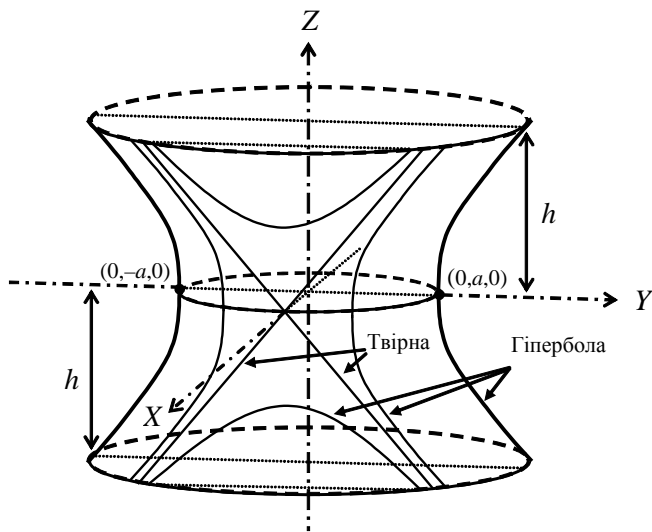
$$13. \quad \begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases} \quad (6)$$

14. також належить однопорожнинному гіперboloїду (3) при всіх значеннях параметрів α та β . Якщо розглянути довільну точку на гіперboloїді (3) і підставити її координати в одне з рівнянь сімейства (5) або



(6), то визначимо значення параметрів λ, μ та α, β , які відповідають парі прямих, що проходять саме через цю точку однопорожнинного гіперboloїда. Зрозуміло, що значення цих пар параметрів можуть бути визначені лише з точністю до спільного множника. Однопорожнинний гіперboloїд зображена на рис. 2.

Однопорожнинний гіперboloїд задається канонічним рівнянням виду:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0) \quad (3)$$

Очевидна симетрія точок поверхні відносно всіх трьох координатних площин. Дослідимо форму поверхні з допомогою перерізів площинами паралельними координатним. Розглянемо спочатку переріз поверхні площиною $z = \pm h$. Маємо:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z_0^2}{c^2} \\ z = \pm h \end{cases}$$

Ці рівняння при будь-якому значенні h визначають еліпс з півсями $a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$ та $b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$. Мінімальні півосі, рівні a і b ,

матиме еліпс, одержаний в перерізі координатною площиною XOY при $h = 0$.

В перерізі однопорожнинного гіперboloїда будь-якою з Рис. 2 площин $x = \pm h$ матимемо

$$\text{гіперболу: } \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2} \\ x = \pm h \end{cases}$$

Її дійсною віссю при $0 < h < a$ буде $b\sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}}$, а уявною $-c\sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}}$. Якщо ж $h > a$, то дійсна вісь буде рівна $c\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1}$,

а уявна $-$ рівна $b\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1}$. Зауважимо, що при $h = a$ перерізи являють собою дві прямі, що перетинаються в точці $(\pm a, 0, 0)$. Аналогічно можна переконатись, що і в перерізі будь-якою з площин $y = \pm h$ також отримаємо гіперболу.

Рівняння (3) приховує одну дуже важливу особливість однопорожнинного гіперboloїда, а саме; пара зазначених вище прямих є лише однією парою з двох сімейств таких пар прямих, цілком розташованих на цій поверхні. Це так звані *прямолінійні твірні* однопорожнинного гіперboloїда. Визначимо їх. Рівняння (4) можна подати у вигляді:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}, \text{ або } \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad (4)$$

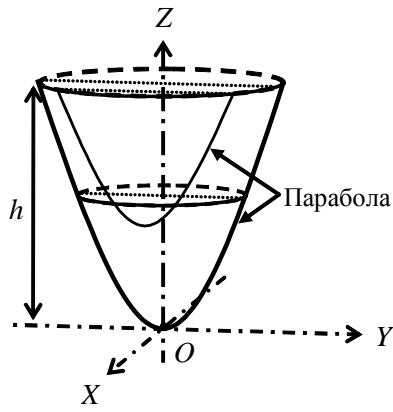
Розглянемо тепер пряму лінію, утворену перетином двох площин, визначених при деяких значеннях числових параметрів λ та μ :

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases} \quad (5) \text{ Координати кожної точки прямої (5), очевидно задовольняють рівняння (4), а отже, і рівняння (3).}$$

(3). Тому всі точки прямих (5) лежать на гіперboloїді (3). Аналогічними міркуванням переконайтесь, що і сімейство прямих $\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases} \quad (6)$ також належить однопорожнинному гіперboloїду (3) при всіх значеннях параметрів α та β . Якщо

розглянути довільну точку на гіперboloїді (3) і підставити її координати в одне з рівнянь сімейства (5) або (6), то визначимо значення параметрів λ, μ та α, β , які відповідають парі прямих, що проходять саме через цю точку однопорожнинного гіперboloїда. Зрозуміло, що значення цих пар параметрів можуть бути визначені лише з точністю до спільного множника. Однопорожнинний гіперboloїд зображена на рис. 2.

1.Параболоїди 1.4. Еліптичний параболоїд.



$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, q > 0) \quad (8)$$

Ця поверхня є симетричною відносно координатних площин XOZ та YOZ і розташована над площиною XOY . В перерізі площиною $z = h$ при $h \geq 0$ одержимо еліпс (при $h = 0$ перерізу належить лише вершина еліптичного параболоїда – точка

$$O(0,0,0): \begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h \\ z = h \end{cases}$$

Півосі цього еліпса рівні $\sqrt{2ph}$ та $\sqrt{2qh}$.

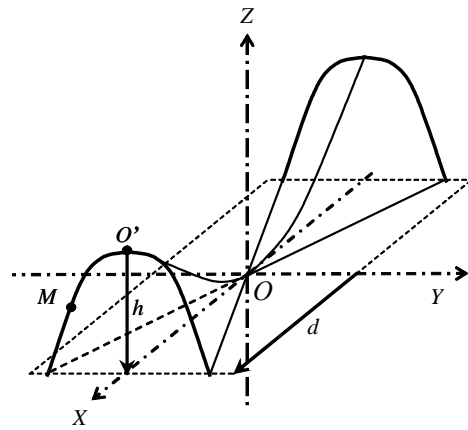
Якщо ж розглянути переріз еліптичного параболоїду наприклад площиною $x = \pm h$, то одержимо параболу:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{q} = 2z - \frac{h^2}{p} \\ x = \pm h \end{cases}, \text{ вершиною якої є точка з координатами } (\pm h, 0, \frac{h^2}{2p}), \text{ а вісь}$$

паралельна осі OZ . Так само і в перерізі площиною $y = \pm h$ для довільного значення параметра $h > 0$ матимемо параболу. Цей факт і пояснює назву цієї поверхні.

1.5. Гіперболічний параболоїд.

Гіперболічний параболоїд описується канонічним рівнянням: $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, q > 0) \quad (9)$



Теорема. Гіперболічний параболоїд (9) є поверхнею, утвореною рухом параболы $y^2 = -2qz$, $x = 0$, вершина якої ковзає вздовж нерухомої параболы $x^2 = 2pz$, $y = 0$ так, що площини обох парабол залишаються взаємно перпендикулярними, а осі – протилежно напрямленими (див. рис. 5).

Доведення. Розглянемо довільну точку $M(x, y, z)$, яка належить поверхні, одержаній вказаним рухом параболы. Нехай точка M належить рухомій параболі в той момент, коли її вершина знаходиться в точці O' з координатами $(d, 0, h)$, де d – відстань від площини рухомої параболы до координатної площини YOZ . Оскільки точка O' належить водночас і нерухомій параболі, то $d^2 = 2ph$, а координати точки M задовольняють

$$\begin{cases} y^2 = 2q(h - z) \\ x = d \end{cases} \quad \text{Оскільки } h = \frac{d^2}{2p}, \text{ а } d^2 = x^2, \text{ то}$$

одержуємо рівняння $y^2 = 2q\left(\frac{x^2}{2p} - z\right)$, звідки й випливає рівняння (9).

Зауваження. Якщо осі обох парабол, що рухаються описаним вище способом, напрямлені в один бік, то одержимо еліптичний параболоїд (8).

Дослідимо форму параболічного гіперболоїда (поки що законним в його назві здається лише слово параболічний) за допомогою перерізів.

Розглянемо спочатку переріз поверхні площиною, паралельною XOY :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h \\ z = h \end{cases}$$

Маємо в перерізі гіперболу (виняток складає випадок, коли $h = 0$, тоді переріз являє собою пару прямих в площині

XOY , що перетинаються в початку координат: $y = \pm \sqrt{\frac{q}{p}x}$). Дійсна вісь

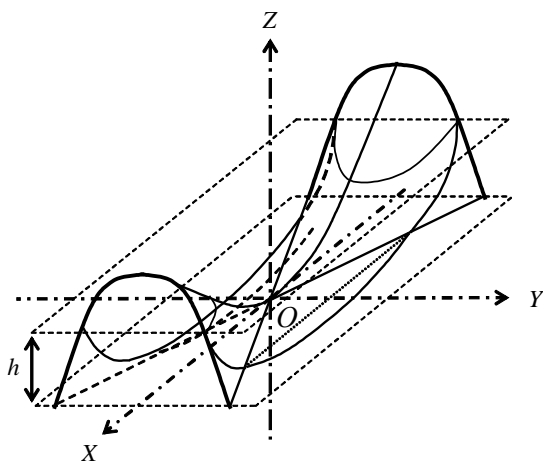
такої гіперболи при $h > 0$ паралельна осі OX , а уявна – осі OY . При $h < 0$ – навпаки, дійсна вісь паралельна осі OY , а уявна – осі OX .

В перерізі площиною $x = \pm h$ одержимо одне з положень рухомої параболы, яка утворила своїм рухом дану поверхню:

$$\begin{cases} y^2 = q\left(\frac{h^2}{p} - 2z\right) \\ x = \pm h \end{cases} \quad \text{В перерізі площиною } y = \pm h \text{ також}$$

утворюється параболу:

$$\begin{cases} x^2 = p\left(\frac{h^2}{q} + 2z\right) \\ y = \pm h \end{cases}$$



Вісь цієї параболі паралельна осі OZ та співнапрямлена з нею, а вершина знаходиться нижче координатної площини XOZ . Загальний вигляд гіперболічного параболоїда на рис. 5 нагадує «сідло».

Зауваження. Гіперболічний параболоїд так само, як і однопорожнинний гіперболоїд має два сімейства прямолінійних твірних. Пропонуємо самостійно переконатись в тому, що їх рівняннями є наступні:

$$\begin{cases} \lambda \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = \mu \\ \mu \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = 2\lambda z \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} \alpha \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = \beta \\ \beta \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = 2\alpha z \end{cases}$$

2. Ортонормований базис евклідового простору.

14. Означення. Система векторів $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m \in E_n$ називається *ортogonalною*, якщо $\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = 0$ при $i \neq j$, $j = \overline{1, m}$

та *ортонормованою*, якщо $\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ при $i, j = \overline{1, m}$.

15. Теорема. Ортогональна система векторів, серед яких немає нульового, – лінійно незалежна.

► Нехай $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\} \in E_n$ – ортогональна система векторів. Розглянемо довільну лінійну комбінацію цих векторів, яка

рівна нулю: $\alpha^1 \mathbf{f}_1 + \alpha^2 \mathbf{f}_2 + \dots + \alpha^m \mathbf{f}_m = \mathbf{0}$. Помножимо цю рівність скалярно на вектор \mathbf{f}_1 : $\alpha^1 \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 + \sum_{i=2}^m \alpha^i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_1 = \alpha^1 \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 = 0$.

Оскільки $\mathbf{f}_1 \neq \mathbf{0}$, то $\alpha^1 = 0$. Аналогічно переконаємось, що $\alpha^2 = \dots = \alpha^m = 0$, тобто довільна нульова лінійна комбінація цих векторів – тривіальна. ◀

16. Наслідок. Будь-яка ортонормована система векторів – лінійно незалежна.

17. Теорема. В евклідовому просторі E_n існує ортонормована система векторів $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \in E_n$, тобто існує ортонормований базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

► Для доведення цієї теореми розглянемо довільний базис $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\} \in E_n$ евклідового простору E_n та побудуємо шуканий ортонормований базис, скориставшись *процедурою ортогоналізації* Грама-Шмідта.

Покладемо $\mathbf{a}_1 = \mathbf{f}_1$, $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|}$. Таким чином, побудований перший вектор майбутнього ортонормованого базису.

Вектор \mathbf{a}_2 шукаємо у вигляді $\mathbf{a}_2 = \mathbf{f}_2 + \alpha^1 \mathbf{a}_1$, підбираючи значення параметру α^1 з умови ортогональності \mathbf{a}_1 та \mathbf{a}_2 , тобто:

$\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 = (\mathbf{f}_2 + \alpha^1 \mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{a}_1 + \alpha^1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = 0$. Отже, покладемо $\alpha^1 = -\frac{\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1}$. Далі визначимо $\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_2|}$. Зрозуміло, що

система векторів $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ – ортонормована.

Припустимо, що таким чином побудовано систему з k ($k < n$) попарно ортогональних векторів $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ і відповідно ортонормовану систему векторів $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k\}$. Побудуємо наступні вектори, а саме. Вектор \mathbf{a}_{k+1} шукатимемо у вигляді

лінійної комбінації $\mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{f}_{k+1} + \sum_{i=1}^k \alpha^i \mathbf{a}_i$, визначаючи параметри α^i таким чином, щоб вектор \mathbf{a}_{k+1} був ортогональним до

всіх векторів $\mathbf{a}_i, i = \overline{1, k}$:

$$\begin{cases} \left(\mathbf{f}_{k+1} + \sum_{i=1}^k \alpha^i \mathbf{a}_i \right) \cdot \mathbf{a}_1 = 0 \\ \left(\mathbf{f}_{k+1} + \sum_{i=1}^k \alpha^i \mathbf{a}_i \right) \cdot \mathbf{a}_2 = 0 \\ \dots \\ \left(\mathbf{f}_{k+1} + \sum_{i=1}^k \alpha^i \mathbf{a}_i \right) \cdot \mathbf{a}_k = 0 \end{cases}, \text{ звідки одержимо } \begin{cases} \mathbf{f}_{k+1} \cdot \mathbf{a}_1 + \alpha^1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = 0 \\ \mathbf{f}_{k+1} \cdot \mathbf{a}_2 + \alpha^2 \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 = 0 \\ \dots \\ \mathbf{f}_{k+1} \cdot \mathbf{a}_k + \alpha^k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_k = 0 \end{cases}, \text{ тобто } \alpha^i = -\frac{\mathbf{f}_{k+1} \cdot \mathbf{a}_i}{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i}, i = \overline{1, k}$$

Визначивши таким чином вектор \mathbf{a}_{k+1} , покладемо $\mathbf{e}_{k+1} = \frac{\mathbf{a}_{k+1}}{|\mathbf{a}_{k+1}|}$. Очевидно, що включення цього вектора в систему

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k\}$ залишає її ортонормованою.

Процедуру ортогоналізації продовжимо, поки не побудуємо n векторів $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$, що утворюють ортогональний базис евклідового простору E_n .

Доведення теореми можна вважати завершеним, якщо покажемо, що жоден з так побудованих векторів \mathbf{a}_k (а, отже, і \mathbf{e}_k)

не є нульовим. Дійсно, вектор $\mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{f}_{k+1} + \sum_{i=1}^k \alpha^i \mathbf{a}_i$ – є лінійною комбінацією векторів $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{k+1}$: $\mathbf{a}_{k+1} = \beta^i \mathbf{f}_i, i = \overline{1, k+1}$.

Якщо припустити, що $\mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{0}$, то маємо нульову лінійну комбінацію лінійно незалежних векторів $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{k+1}$. Тому всі

коефіцієнти $\beta^i = 0, i = \overline{1, k+1}$, що неможливо, оскільки принаймні $\beta^{k+1} = 1$. Дана суперечність доводить, що серед

одержаних векторів $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ немає нульового вектора. ◀

1. Векторний добуток векторів.

Якщо векторний добуток двох векторів $\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix}$ помножається векторно на третій вектор \bar{c} , то такий добуток називається **подвійним векторним добутком** і позначається так:

$$\left[\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix} \bar{c} \right] \quad (50).$$

Для подвійного векторного добутку порушується комутативний і асоціативний закони:

$$\left[\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix} \bar{c} \right] \neq \left[\bar{c} \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix} \right] \quad (51),$$

$$\left[\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix} \bar{c} \right] \neq \left[\bar{a} \begin{bmatrix} \bar{b} & \bar{c} \end{bmatrix} \right] \quad (52).$$

Вектор $\left[\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix} \bar{c} \right]$ компланарний векторам \bar{a} і \bar{b} ; тому має місце формула:

$$\left[\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix} \bar{c} \right] = \bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{a}(\bar{b}\bar{c}) \quad (53).$$

2. Критерій лінійної залежності та лінійної незалежності довільної системи векторів в евклідовому просторі.

Твердження. Критерії лінійної залежності та лінійної незалежності довільної системи векторів в евклідовому просторі. Нехай $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$ – довільна система векторів в E_n . Складемо матрицю Грама цієї системи:

$\mathbf{G} = (g_{ij})_{i,j=1,m}$, де $g_{ij} = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j$. Тоді

1) система векторів $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$ – лінійно незалежна, тоді і тільки тоді, коли $|\mathbf{G}| > 0$;

2) система векторів $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$ – лінійно залежна, тоді і тільки тоді, коли $|\mathbf{G}| = 0$.

► Доведемо необхідність першого твердження. Нехай система векторів $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$ – лінійно незалежна. Тоді вона утворює базис підпростору, натягнутого на ці вектори, і згідно з твердженням **2.3** має матрицю Грама з додатним визначником, тобто $|\mathbf{G}| > 0$.

Доведемо необхідність другого твердження. Припустимо, що система векторів $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$ – лінійно залежна. Тоді принаймні один з векторів системи (не втрачаючи загальності, можна вважати, що це \mathbf{f}_1) лінійно виражається через

решту: $\mathbf{f}_1 = \sum_{k=2}^m \lambda^k \mathbf{f}_k$. Звідси одержимо: $g_{1j} = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_j = \left(\sum_{k=2}^m \lambda^k \mathbf{f}_k \right) \cdot \mathbf{f}_j = \sum_{k=2}^m \lambda^k (\mathbf{f}_k \cdot \mathbf{f}_j) = \sum_{k=2}^m \lambda^k g_{kj}$, тобто перший рядок матриці

Грама системи $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$ лінійно виражається через решту рядків, отже, $|\mathbf{G}| = 0$.

Достатність першого твердження покажемо, припустивши супротивне – нехай $|\mathbf{G}| > 0$, але система векторів $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$ – лінійно залежна. Тоді з необхідності другого твердження дістанемо суперечність – $|\mathbf{G}| = 0$.

Аналогічно встановимо достатність другого твердження. Нехай $|\mathbf{G}| = 0$, але система векторів $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$ – лінійно незалежна. Тоді з необхідності другого твердження має виконуватись нерівність $|\mathbf{G}| > 0$. Тим самим критерій повністю доведений. ◀

2.6. Наслідок. Для будь-якої системи векторів евклідового простору її визначник Грама \mathbf{G} – невід'ємний, причому $|\mathbf{G}| = 0$ тоді і тільки тоді, коли система векторів лінійно залежна.

2.7. Зауваження. Для пари довільних векторів $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_n$ розглянемо $|\mathbf{G}| = \begin{vmatrix} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} & \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} & \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} \end{vmatrix} = |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \geq 0$, отже

наслідок **2.6** узагальнює нерівність Коші-Буняковського.

1. Відстань і відхилення точки від площини.

Розглянемо (рис. 3) орт $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ нормалі, проведеної із початку координат до площини. Якщо позначити через $|\mathbf{OP}| = p \geq 0$ відстань від початку координат до площини, то для довільної точки $M(x, y, z)$ площини маємо рівність $np_{\mathbf{n}}\mathbf{OM} = p$, або $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ (10)

Дане рівняння називається **нормальним рівнянням площини**, оскільки в ньому фігурує орт особливої нормалі площини – проведеної із початку координат. Щоб записати рівняння (3) у **нормальній формі**, необхідно помножити обидві частини рівняння на коефіцієнт $\mu = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, підібравши знак так, щоб виконувалось $D\mu \leq 0$.

Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – довільна точка простору, яка розташована з протилежного боку ніж початок координат відносно площини. Тоді для неї справджується очевидна рівність: $np_{\mathbf{n}}\mathbf{OM}_0 = |\mathbf{OP}| + |\mathbf{PM}| = p + |\mathbf{P}_0\mathbf{M}_0| = p + d$, де d – відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини. Отже, в цьому випадку маємо $d = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p$. Якщо точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ розташована по той самий бік від площини, що й початок координат, то аналогічними міркуваннями (зробіть малюнок самостійно) доходимо висновку, що $np_{\mathbf{n}}\mathbf{OM}_0 = p - d$, отже, $d = -(x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p)$. Введемо у розгляд величину $\delta = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p$. (11)

Вона зветься **відхиленням** точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ від площини і є результатом підстановки її координат у нормальне рівняння площини (10). Відхилення точки M_0 **додатне**, якщо точка та початок координат розташовані по різні боки від площини і **від'ємне**, якщо точка M_0 та початок координат розташовані по один бік площини. У будь-якому випадку, $d = |\delta|$.

2. Теорема про базисний міnor.

Означення. Міnor \mathbf{M} матриці \mathbf{A} порядку r називається **базисним**, якщо $\mathbf{M} \neq 0$, а всі міnори порядків $r+1$ рівні нулю, або $r = \min(m, n)$ (тобто міnорів порядку $r+1$ не існує). В довільній матриці кожний рядок (стовпчик) є лінійною комбінацією базисних рядків (стовпчиків).

досить доводити цю теорему лише для рядків довільної матриці. Припустимо, що ранг матриці $\mathbf{A} = (a_{ij})_{j=1, \overline{m}}^{i=1, \overline{r}}$ рівний r , та розглянемо довільний рядок матриці, наприклад, $\langle \mathbf{A}^i |$, де $i = \overline{1, m}$ – фіксований індекс. Щодо цього рядка можна зробити два припущення: 1. $\langle \mathbf{A}^i |$ входить в базисний міnor, тоді він є лінійною комбінацією базисних рядків, бо $\langle \mathbf{A}^i | = 1 \cdot \langle \mathbf{A}^i | + \sum_{k \neq i} 0 \cdot \langle \mathbf{A}^k |$.

2. $\langle \mathbf{A}^i |$ не входить в базисний міnor, при цьому зрозуміло, слід вважати, що $r < \min(m, n)$. Припустимо також, що базисний міnor \mathbf{M} є верхнім лівим блоком матриці (інакше допустимими перетвореннями переставимо стовпчики та рядки матриці так, щоб це припущення було виконаним), тобто

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_r^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^r & \dots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{рядок } \langle \mathbf{A}^i | \text{ та довільний стовпчик матриці з індексом } j:$$

$$\mathbf{M}_{r+1} = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_r^1 & a_j^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^r & \dots & a_r^r & a_j^r \end{vmatrix} = 0$$

3 іншого боку міnor \mathbf{M}_{r+1} може бути обчислений через міnor \mathbf{M} , якщо його розкласти по останньому стовпчику:

$$\mathbf{M}_{r+1} = \sum_{k=1}^r a_j^k \cdot \mathbf{A}_k^j(i) + a_j^i \cdot \mathbf{M} \quad (\text{тут } \mathbf{A}_k^j(i) \text{ – це алгебраїчне доповнення до елемента } a_j^k, \text{ яке містить частину } i\text{-го рядка}). \text{ Тоді з}$$

$$\text{рівності нулю мінору } \mathbf{M}_{r+1} \text{ випливає: } a_j^i = \sum_{k=1}^r a_j^k \cdot \left(-\frac{\mathbf{A}_k^j(i)}{\mathbf{M}} \right), \text{ або у векторній формі: } \langle \mathbf{A}^i | = \sum_{k=1}^r \langle \mathbf{A}^k | \cdot \alpha_k(i). \text{ Тут } \alpha_k(i) = -\frac{\mathbf{A}_k^j(i)}{\mathbf{M}}$$

насправді не залежить від індексу j , оскільки алгебраїчні доповнення до елементів стовпчика $|\mathbf{A}_j\rangle$ не включають елементів самого стовпчика.

Наслідок. Ранг матриці, визначений як порядок базисного мінору матриці, може бути еквівалентним чином визначений як максимальна кількість лінійно незалежних рядків (стовпчиків) матриці.

Наслідок (критерії виродженості квадратної матриці). Наступні твердження є еквівалентними:

1. Визначник матриці рівний нулю.
2. Ранг r квадратної матриці менший за її порядок n .
3. Рядки або стовпчика квадратної матриці лінійно залежні.

14. Наслідок (критерії невиродженості матриці). Наступні твердження є еквівалентними:

1. Визначник матриці не дорівнює нулю.
2. Ранг r квадратної матриці рівний за її порядку n .
3. Рядки та стовпчика квадратної матриці лінійно незалежні.

1. Пряма в просторі як лінія перетину двох площин. Пучок площин.

Пряма у просторі може також бути визначена як **лінія перетину двох непаралельних площин**:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Ці рівняння описують площини, проте дають мало уявлення про власне пряму. Щоб записати пряму, задану рівняннями (3), у канонічному вигляді, необхідно визначити напрямний вектор прямої та деяку точку на ній. Направний вектор, очевидно, має бути паралельним кожній з площин, а отже, перпендикулярним до нормалей \mathbf{n}_1 та \mathbf{n}_2 обох площин, тому

можна вважати, що $\mathbf{u} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$. Для того, щоб визначити точку на прямій (3), покладемо одну із змінних,

наприклад z , рівною z_0 і розв'яжемо систему $\begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1 - C_1z_0 \\ A_2x + B_2y = -D_2 - C_2z_0 \end{cases}$ відносно змінних x та y .

Означення 1. Пучком площин, що проходять через вісь L , називається вся сукупність площин, що проходять через пряму L . **Теорема.** Нехай вісь пучка L задана як лінія перетину двох непаралельних площин $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

та $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Тоді при довільних α та β , таких, що $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, пучок задається рівнянням:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (4)$$

Доведення. Покажемо, що по-перше, рівняння (4) – не тотожність. Дійсно, з припущення про те, що $\alpha A_1 + \beta A_2 \equiv \alpha B_1 + \beta B_2 \equiv \alpha C_1 + \beta C_2 \equiv \alpha D_1 + \beta D_2 \equiv 0$ випливає $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} = -\frac{\beta}{\alpha}$, тобто π_1 та π_2 збігаються. По-друге,

вісь L належить пучку. Це видно з того, що для кожної точки прямої $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$ виконуються рівності $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0$ та $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0$, а отже, виконано рівняння (4). По-третє, залишилось показати, що кожна площина π , що проходить через вісь L , описується рівнянням (4). Для цього розглянемо деяку точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$, яка не лежить на осі L . Тоді величини $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1$ та $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2$ не дорівнюють нулю водночас, а тому визначене відношення $\frac{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1}{A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2}$, або $\frac{A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2}{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1}$. Якщо існує перше, то

позначимо його через $-\frac{\beta}{\alpha}$, якщо існує друге, то через $-\frac{\alpha}{\beta}$. Таким чином, для довільної площини π пучка можна визначити коефіцієнти α та β , при яких площина описується рівнянням (4). **Зауваження.** Рівняння пучка у вигляді (4) описує і обидві площини π_1 та π_2 . Якщо ж покласти у рівнянні (4) $\beta = \lambda\alpha$, то одержимо рівняння, яке описує всі площини пучка за винятком площини π_2 .

2. Теорема Кронекера-Капеллі.

Система (1) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи рівний рангу матриці системи, тобто $\text{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \text{Rg } \mathbf{A}$. **Необхідність.** Нехай система (1) сумісна. Тоді існує принаймні один її розв'язок $|\alpha\rangle^T = (\alpha^1 \ \alpha^2 \ \dots \ \alpha^n)$:

$\mathbf{A} \cdot \alpha = \mathbf{b}$, або $\alpha^1 \cdot |\mathbf{A}_1\rangle + \alpha^2 \cdot |\mathbf{A}_2\rangle + \dots + \alpha^n \cdot |\mathbf{A}_n\rangle = |\mathbf{b}\rangle$. Остання рівність означає, що вектор-стовпчик $|\mathbf{b}\rangle$ є лінійною комбінацією стовпчиків матриці \mathbf{A} , тобто включення цього стовпчика в матрицю системи не змінює її ранг, що власне, і означає рівність $\text{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \text{Rg } \mathbf{A}$. **Достатність.** Нехай $\text{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \text{Rg } \mathbf{A}$. Тоді базисний мінор матриці $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ розташований в

стовпчиках матриці \mathbf{A} , отже, стовпчик $|\mathbf{b}\rangle$ є лінійною комбінацією з деякими коефіцієнтами $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ стовпчиків матриці \mathbf{A} : $\alpha^1 \cdot |\mathbf{A}_1\rangle + \alpha^2 \cdot |\mathbf{A}_2\rangle + \dots + \alpha^n \cdot |\mathbf{A}_n\rangle = |\mathbf{b}\rangle$. Дана рівність означає, що $|\alpha\rangle^T = (\alpha^1 \ \alpha^2 \ \dots \ \alpha^n)$ є розв'язком системи (1).

1. Кут між площинами.

Двогранний кут α між двома площинами, заданими рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, можна визначити як кут між їх нормальними $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ та $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$:

$$\cos \alpha = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (7)$$

Зауваження. Зрозуміло, що таким чином буде визначений лише один з двох двогранних кутів, інший рівний $\pi - \alpha$.

З формули (7) випливає **умова перпендикулярності двох площин**, а саме: дві площини перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

2. Лінійне відображення та його матриця.

Нехай L_n та L_m – два лінійних простори над полем дійсних (або комплексних) чисел.

1. Означення. Відображення $A: L_n \rightarrow L_m$, яке кожному вектору $\mathbf{x} \in L_n$ ставить у відповідність вектор $\mathbf{y} \in L_m$ за правилом $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, називається **лінійним відображенням** простору L_n в простір L_m , якщо

$$1. A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x} \in L_n, \forall \mathbf{y} \in L_n; \quad 2. A\lambda\mathbf{x} = \lambda A\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in L_n, \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

(2)

Якщо $L_m = L_n$, то відображення A називається **перетворенням** простору L_n або **лінійним оператором** в L_n .

6. Означення. Образом (множиною значень) лінійного відображення $A: L_n \rightarrow L_m$ називається множина $\text{Im } A = \{\mathbf{y} \in L_m : \exists \mathbf{x} \in L_n, A\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$.

7. Означення. Ядром лінійного відображення $A: L_n \rightarrow L_m$ називається множина $\text{Ker } A = \{\mathbf{x} \in L_n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$.

8. Теорема. Образ лінійного відображення $\text{Im } A$ є лінійним підпростором простору L_m .

► Покажемо, що множина $\text{Im } A$ замкнена відносно лінійних операцій над векторами простору L_m . Нехай довільні вектори $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \text{Im } A$. Тоді знайдуться такі вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in L_n$, що $\mathbf{y}_k = A\mathbf{x}_k$, $k = 1, 2$. Звідси випливає, що $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \in \text{Im } A$, оскільки $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in L_n$. Цілком аналогічно одержимо, що $\lambda\mathbf{y}_1 = \lambda A\mathbf{x}_1 = A(\lambda\mathbf{x}_1) \in \text{Im } A \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}$. Отже, $\text{Im } A$ – лінійний підпростір L_m . ◀

9. Теорема. Ядро лінійного відображення $\text{Ker } A$ є лінійним підпростором простору L_n .

► Нехай довільні вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \text{Ker } A$. Це означає, що $A\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$, $k = 1, 2$. В силу лінійності відображення A маємо: $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ і $A(\lambda\mathbf{x}_1) = \lambda A\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}$. Тобто множина $\text{Ker } A$ замкнена відносно лінійних операцій над векторами простору L_n . Отже, $\text{Ker } A$ – лінійний підпростір L_n . ◀

10. Теорема. Образом довільного підпростору простору L_n при лінійному відображенні $A: L_n \rightarrow L_m$ є деякий підпростір простору L_m .

► Нехай $L \subseteq L_n$ – довільний лінійний підпростір. Позначимо $M = \{\mathbf{y} \in L_m : \exists \mathbf{x} \in L, A\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$. Необхідно показати, що $M \subseteq L_m$ є лінійним підпростором. Розглянемо довільні вектори $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in M$, а також відповідні їм вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in L$, для яких $A\mathbf{x}_k = \mathbf{y}_k$, $k = 1, 2$. Тоді $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$, звідки випливає, що $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \in M$, оскільки $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in L$. Аналогічно, яким би не було число $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda\mathbf{y}_1 = \lambda A\mathbf{x}_1 = A(\lambda\mathbf{x}_1) \in M$, бо $\lambda\mathbf{x}_1 \in L$. Таким чином, M – лінійний підпростір L_m . ◀

11. Зауваження. Якщо так зване **звуження лінійного відображення**, тобто відображення, яке діє не в усьому просторі L_n , а лише на деякому його підпросторі L , позначити через $A|_L$, то доведена теорема означає, що $\text{Im}(A|_L)$ є підпростором L_m .

12. Означення. Нехай $A: L_n \rightarrow L_m$ деякий лінійний оператор. Підпростір $L \subseteq L_n$ називається **інваріантним** відносно оператора A , якщо $\text{Im}(A|_L) \subseteq L$.

17. Означення. Рангом лінійного відображення A називається розмірність його образу: $\text{Rg } A = \dim(\text{Im } A)$.

Означення. Розмірність ядра лінійного відображення A називається **дефектом** цього лінійного відображення.

19. Зауваження. Якщо підрахувати в останніх прикладах суму розмірностей підпросторів $\text{Im } A$ та $\text{Ker } A$, то вона вийде рівною розмірності простору, в якому діє лінійний оператор. Що цей факт не є випадковим, доводить наступна теорема.

20. Теорема. Нехай $A: L_n \rightarrow L_m$ – лінійне відображення. Тоді сума рангу відображення A та розмірності його ядра рівна розмірності простору, в якому діє відображення A .

► Позначимо $\dim(\text{Ker } A) = k \geq 0$ ($\text{Ker } A$ не порожня множина, оскільки їй належить принаймні вектор $\mathbf{0}$). Нехай $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$ – базис $\text{Ker } A$. Доповнимо його $n - k$ векторами $\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{f}_{k+2}, \dots, \mathbf{f}_n$ до повного базису простору L_n . Визначимо вектори $\mathbf{g}_i = A\mathbf{f}_i \in \text{Im } A$, $i = k + 1, \dots, n$. Розглянемо довільний вектор $\mathbf{y} \in \text{Im } A$, а також його прообраз: $\mathbf{x} \in L_n : A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Вектор \mathbf{x} може бути розкладений по базису $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$: $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x^i \mathbf{f}_i$. Тоді $\mathbf{y} = A\left(\sum_{i=1}^n x^i \mathbf{f}_i\right) = \sum_{i=1}^n x^i A\mathbf{f}_i = \sum_{i=k+1}^n x^i A\mathbf{f}_i = \sum_{i=k+1}^n x^i \mathbf{g}_i$. Це означає, що $\text{Im } A$ є

лінійною оболонкою векторів \mathbf{g}_i , $i = k + 1, \dots, n$, тобто: $\text{Im } A = \text{Len}(\mathbf{g}_{k+1}, \dots, \mathbf{g}_n)$. Покажемо, що вектори \mathbf{g}_i , $i = k + 1, \dots, n$ – лінійно незалежні, тобто насправді вони утворюють базис в $\text{Im } A$. Від супротивного припустимо, що існує нульова нетривіальна лінійна комбінація цих векторів: $\lambda^1 \mathbf{g}_{k+1} + \lambda^2 \mathbf{g}_{k+2} + \dots + \lambda^{n-k} \mathbf{g}_n = \mathbf{0}$

Розглянемо вектор $\mathbf{q} = \lambda^1 \mathbf{f}_{k+1} + \lambda^2 \mathbf{f}_{k+2} + \dots + \lambda^{n-k} \mathbf{f}_n$. Оскільки не всі числа λ^i , $i = k + 1, \dots, n$ рівні нулевим, а вектори $\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{f}_{k+2}, \dots, \mathbf{f}_n$ – лінійно незалежні як підсистема базису простору L_n , вектор $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$. Проте

$A\mathbf{q} = A\left(\sum_{i=k+1}^n \lambda^{i-k} \mathbf{f}_i\right) = \sum_{i=k+1}^n \lambda^{i-k} A\mathbf{f}_i = \sum_{i=k+1}^n \lambda^{i-k} \mathbf{g}_i = \mathbf{0}$ за припущенням про лінійну залежність векторів \mathbf{g}_i , $i = k+1, \dots, n$. Отже, $\mathbf{q} \in \text{Ker } A$

, а тому розкладається по базису цього підпростору: $\mathbf{q} = \sum_{i=1}^k \mu^i \mathbf{f}_i$. Таким чином, вектор $\mathbf{q} \in L_n$ має різні координати в базисі

$\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$: $\mathbf{q}^T = (\mu^1 \dots \mu^k 0 \dots 0)$ та $\mathbf{q}^T = (0 \dots 0 \lambda^1 \dots \lambda^{n-k})$. Це можливо лише за умови, коли $\mathbf{q} = \mathbf{0}$, тобто $\mu^i = 0$, $i = 1, \dots, k$ і $\lambda^i = 0$, $i = 1, \dots, n-k$, що однак суперечить припущенню про лінійну залежність векторів \mathbf{g}_i , $i = k+1, \dots, n$. Таким чином, ці вектори утворюють базис підпростору $\text{Im } A$, звідки випливає, що ранг відображення A рівний $n-k$, що й завершує доведення теореми. ◀

21. Зауваження. У формульному вигляді ця теорема виглядає таким чином: $\dim(\text{Im } A) + \dim(\text{Ker } A) = \dim(L_n) = n$

Матриця лінійного відображення.

Нехай, як і раніше, $A: L_n \rightarrow L_m$ – лінійне відображення.

Виберемо в лінійних просторах L_n і L_m відповідно базиси $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ та $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_m$. Вектори $A\mathbf{f}_k$, $k = 1, \dots, n$ можуть

$$\text{бути розкладені по базису простору } L_m: \begin{cases} A\mathbf{f}_1 = a_1^1 \mathbf{g}_1 + a_1^2 \mathbf{g}_2 + \dots + a_1^m \mathbf{g}_m \\ A\mathbf{f}_2 = a_2^1 \mathbf{g}_1 + a_2^2 \mathbf{g}_2 + \dots + a_2^m \mathbf{g}_m \\ \vdots \\ A\mathbf{f}_n = a_n^1 \mathbf{g}_1 + a_n^2 \mathbf{g}_2 + \dots + a_n^m \mathbf{g}_m \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{або} \quad A\mathbf{f}_i = \sum_{k=1}^m a_i^k \mathbf{g}_k, \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

З вектор-стовпчиків координат векторів $A\mathbf{f}_i$, $i = 1, \dots, n$ можна утворити матрицю розмірностей $m \times n$: $\mathbf{A} = (a_i^k)_{i=1, n}^{k=1, m}$. Вона називається матрицею лінійного відображення A в базисах $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$, $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}$. Таким чином, у вибраних базисах кожному лінійному відображенню відповідає певна матриця. Покажемо, що і навпаки: для будь-якої матриці розмірностей $m \times n$ існує лінійне відображення простору L_n в L_m , якому у фіксованих базисах цих просторів відповідає задана матриця.

Отже, нехай маємо матрицю $\mathbf{A} = (a_i^k)_{i=1, n}^{k=1, m}$ та базиси $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$ і $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}$ в просторах L_n та L_m відповідно.

Відображення A задамо на базисних векторах формулою (5). Тоді для довільного вектора $\mathbf{x} \in L_n$: $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x^i \mathbf{f}_i$ визначимо його образ наступним чином:

$$A\mathbf{x} = A\left(\sum_{i=1}^n x^i \mathbf{f}_i\right) = \sum_{i=1}^n x^i A\mathbf{f}_i \quad (6)$$

Покажемо, що відображення A , задане формулою (6), – лінійне. Дійсно, для довільних векторів $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x^i \mathbf{f}_i$ та $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n y^i \mathbf{f}_i$ із простору L_n матимемо:

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\left(\sum_{i=1}^n x^i \mathbf{f}_i + \sum_{i=1}^n y^i \mathbf{f}_i\right) = A\left(\sum_{i=1}^n (x^i + y^i) \mathbf{f}_i\right) = \sum_{i=1}^n (x^i + y^i) A\mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^n x^i A\mathbf{f}_i + \sum_{i=1}^n y^i A\mathbf{f}_i = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$$

І аналогічно, для довільного числа λ : $A(\lambda \mathbf{x}) = A\left(\sum_{i=1}^n \lambda x^i \mathbf{f}_i\right) = \sum_{i=1}^n (\lambda x^i) A\mathbf{f}_i = \lambda \sum_{i=1}^n x^i A\mathbf{f}_i = \lambda A\mathbf{x}$

Таким чином, існує взаємно-однозначна відповідність між множиною дійсних матриць розмірностей $m \times n$ та множиною лінійних відображень простору L_n в простір L_m .

22. Наслідок. Якщо $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, де $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x^i \mathbf{f}_i$, а $\mathbf{y} = \sum_{k=1}^m y^k \mathbf{g}_k$, то знаючи матрицю $\mathbf{A} = (a_i^k)_{i=1, n}^{k=1, m}$ лінійного відображення A в базисах $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$ і $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}$, можемо записати:

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x^i A\mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^n x^i \sum_{k=1}^m a_i^k \mathbf{g}_k = \sum_{k=1}^m a_i^k \sum_{i=1}^n x^i \mathbf{g}_k,$$

а враховуючи однозначність розкладу вектору \mathbf{y} по базису $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}$, одержимо $y^k = \sum_{i=1}^n a_i^k x^i$, $k = 1, \dots, m$, або: $|\mathbf{y}\rangle = \mathbf{A} \cdot |\mathbf{x}\rangle$,
(7)

тобто дія відображення A на довільний вектор \mathbf{x} зводиться до множення матриці \mathbf{A} лінійного відображення на координатний стовпчик цього вектора.

Теорема. Ранг відображення A рівний рангу його матриці \mathbf{A} в деякому базисі $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$, тобто $\text{Rg } A = \text{Rg } \mathbf{A}$

► Позначимо ранг матриці через r : $\text{Rg } \mathbf{A} = r$. Нехай i_1, i_2, \dots, i_r – індекси базисних стовпчиків матриці \mathbf{A} . Тоді згідно з формулою (5), $A(\mathbf{f}_{i_1}), A(\mathbf{f}_{i_2}), \dots, A(\mathbf{f}_{i_r})$ – лінійно незалежні вектори, а кожний вектор $A(\mathbf{f}_i)$, $i = 1, \dots, n \in$ їх лінійною комбінацією.

Це означає, що для довільного вектора $\mathbf{x} \in L_n$ його образ $A(\mathbf{x}) \in L_m$ є лінійною комбінацією саме векторів $A(\mathbf{f}_{i_1}), A(\mathbf{f}_{i_2}), \dots, A(\mathbf{f}_{i_r})$, причому коефіцієнти цієї лінійної комбінації визначені однозначно, тобто вони утворюють базис в підпросторі $\text{Im } A$. Таким чином, $\dim(\text{Im } A) = r = \text{Rg } \mathbf{A}$, що і треба було довести. ◀

26. Зауваження. Ця теорема показує, що матриці лінійного відображення в різних базисах мають один і той самий ранг.

1. Расстояние от точки до прямой

Теорема. Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то расстояние до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется как

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Доказательство. Пусть точка $M_1(x_1, y_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на заданную прямую. Тогда расстояние между точками M и M_1 :

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

Координаты x_1 и y_1 могут быть найдены как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A(y - y_0) - B(x - x_0) = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение системы – это уравнение прямой, проходящей через заданную точку M_0 перпендикулярно заданной прямой. Если преобразовать первое уравнение системы к виду: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + Ax_0 + By_0 + C = 0$, то, решая, получим:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -\frac{A}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C), & d &= \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ y - y_0 &= -\frac{B}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C) \end{aligned}$$

2. Загальний розв'язок системи рівнянь

3. Означення. Якщо в системі (1) вектор-стовпчик $\begin{bmatrix} \mathbf{b} \end{bmatrix}$ нульовий:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

то така система називається *однорідною*. Однорідна система (2), очевидно, завжди сумісна. Вона має принаймні один розв'язок $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, який називається *тривіальним*. Цікавість являють нетривіальні розв'язки цієї системи, якщо вони існують.

Наслідок з теореми Крамера. Однорідна система n лінійних рівнянь з n невідомими має єдиний (тривіальний) розв'язок, тоді і тільки тоді, коли $|\mathbf{A}| \neq 0$. Отже, для існування нетривіальних розв'язків необхідно і достатньо, щоб $|\mathbf{A}| = 0$, або

$\text{Rg } \mathbf{A} = r < n$. Позначимо через H множину всіх розв'язків однорідної системи (2) та дослідимо властивості цих розв'язків.

Якщо \mathbf{x}_1 та \mathbf{x}_2 – розв'язки системи (2), то і $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in H$ розв'язком, або $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in H \Rightarrow \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in H$. Дійсно, з дистрибутивності множення матриць випливає, що $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$.

7. Твердження. Якщо \mathbf{x}_1 – розв'язок системи (2), то і $\lambda \mathbf{x}_1 \in H$ розв'язком $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, або $\forall \lambda \in \mathbf{R} \forall \mathbf{x}_1 \in H \Rightarrow \lambda \mathbf{x}_1 \in H$.

Справді, $\mathbf{A} \cdot (\lambda \mathbf{x}) = \lambda \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

8. Наслідок. Оскільки $\mathbf{0} \in H$, то множина H розв'язків системи (2) – лінійний підпростір простору L_n .

З'ясуємо, яка розмірність цього підпростору. Позначимо ранг матриці \mathbf{A} через r : $\text{Rg } \mathbf{A} = r \leq \min(m, n)$. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що базисний мінор матриці \mathbf{A} розташований в перших r стовпчиках та r рядках (інакше переставимо відповідним чином рівняння та позначимо змінні в потрібному порядку).

Базисний мінор позначимо $\mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_r^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_r^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_1^r & a_2^r & \dots & a_r^r \end{bmatrix}$. Саму матрицю системи будемо розглядати як блочну: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^* & \mathbf{A}^{**} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{pmatrix}$,

де $|\mathbf{A}^*| = \mathbf{M}_r$, $\mathbf{A}^{**} = \begin{pmatrix} a_{r+1}^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r+1}^r & \dots & a_n^r \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_1^{r+1} & \dots & a_r^{r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_r^m \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{r+1}^{r+1} & \dots & a_n^{r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r+1}^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}$. Вектор-стовпчик невідомих теж складається

з блоків: $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{x}^{**} \end{pmatrix}$, де $\begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \end{pmatrix}$ – вектор-стовпчик базисних (залежних) змінних, а $\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{**} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ – вільних

(параметричних) змінних.

Таким чином, r базисних змінних лінійно виражаються через $n - r$ незалежних змінних, яким можна надавати довільних значень. Враховуючи, що $\mathbf{x}^{**} = \mathbf{E}_{n-r} \cdot \mathbf{x}^{**}$, можна записати вираз для розв'язку системи (2) через довільні значення незалежних змінних:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{x}^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\mathbf{A}^*)^{-1} \cdot \mathbf{A}^{**} \\ \mathbf{E}_{n-r} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}^{**}, \quad \text{або} \quad \mathbf{x} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}^{**}, \quad \text{де} \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} -(\mathbf{A}^*)^{-1} \cdot \mathbf{A}^{**} \\ \mathbf{E}_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^r & h_2^r & \dots & h_{n-r}^r \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Розглянемо уважніше матрицю \mathbf{H} . Кожен з її $n-r$ вектор-стовпчиків $|\mathbf{H}_1\rangle, |\mathbf{H}_2\rangle, \dots, |\mathbf{H}_{n-r}\rangle$ є розв'язком системи (2). Дійсно, поклавши вектор-стовпчики вільних змінних рівними стовпчикам матриці \mathbf{E}_{n-r} , одержимо, згідно з (4), значення базисних змінних, а згідно з (5) – розв'язок системи (2). Крім того, $\text{Rg } \mathbf{H} = n-r$, оскільки \mathbf{E}_{n-r} – базисний мінор матриці \mathbf{H} . Отже, матриця \mathbf{H} утворена $n-r$ лінійно незалежними розв'язками системи (2). Щоб стверджувати, що $\dim(H) = n-r$, залишився лише один крок – достатньо показати, що будь-який розв'язок системи (2), є лінійною комбінацією вектор-стовпчиків $|\mathbf{H}_1\rangle, |\mathbf{H}_2\rangle, \dots, |\mathbf{H}_{n-r}\rangle$, тобто вони утворюють базис простору H .

Нехай $|\alpha\rangle$ – довільний розв'язок системи (2). Тоді $|\alpha\rangle$ є розв'язком еквівалентної їй системи (3), а отже, виражається співвідношенням (5), тобто є лінійною комбінацією вектор-стовпчиків $|\mathbf{H}_1\rangle, |\mathbf{H}_2\rangle, \dots, |\mathbf{H}_{n-r}\rangle$ з деякими коефіцієнтами $|\mathbf{x}^{**}\rangle^T = ((x^{**})^1, \dots, (x^{**})^{n-r})$. Таким чином, доведено наступне твердження.

9. Твердження. Розмірність простору H розв'язків однорідної системи (2) рівна $n-r$, де n – кількість невідомих, r – ранг матриці системи.

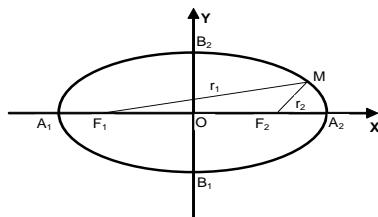
10. Означення. Довільний базис простору H розв'язків однорідної системи (2) називається *фундаментальною системою розв'язків*.

11. Означення. Фундаментальна система розв'язків однорідної системи (2), в якій вектор-стовпчики вільних змінних рівні стовпчикам одиничної матриці, називається *нормальною фундаментальною системою розв'язків*.

12. Наслідок. Загальний розв'язок однорідної системи (2) $|\mathbf{x}\rangle_{\text{заг.одн.}}$ є лінійною комбінацією векторів фундаментальної

системи розв'язків: $|\mathbf{x}\rangle_{\text{заг.одн.}} = \sum_{k=1}^{n-r} c^k \cdot |\mathbf{H}_k\rangle$.

1. Класифікація кривих другого порядку.



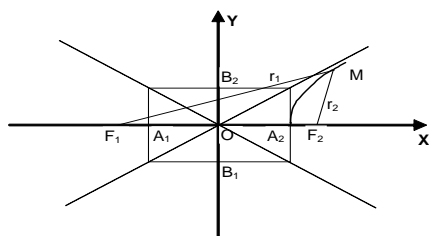
Еліпс означений своїм канонічним рівнянням: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Сума відстаней будь-якої точки від двох фіксованих точок, які називаються фокусами, є величиною сталою. Координати фокусів: $F_1(-c;0)$ та

$$F_2(c;0), \quad r_1 = |F_1M|, \quad r_2 = |F_2M| \quad r_1 + r_2 = 2a \quad \varepsilon = \frac{c}{a} \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad \varepsilon \in [0,1) \quad r_1 = a + x\varepsilon, \quad r_2 = a - x\varepsilon, \quad A_1A_2 = 2a \quad B_1B_2 = 2b$$

Рівняння еліпса часто розглядається в параметричній формі $x = a \cos t, y = a \sin t$, де $t \in [0, 2\pi]$.



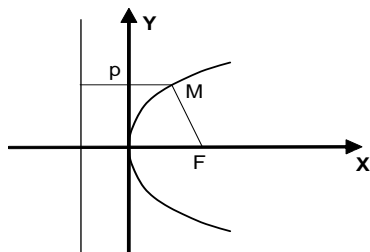
Канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Модуль різниці відстаней будь-якої точки гіперболи від двох фіксованих точок, що називаються фокусами, є сталою величиною: $|r_1 - r_2| = 2a$

$F_1(-c;0), F_2(c;0), r_1 = |F_1M|$ та $r_2 = |F_2M|$

$A_1A_2 = 2a$ – дійсна вісь, $B_1B_2 = 2b$ – уявна вісь, $y = \pm \frac{b}{a}x$ – **асимптоти**

гіперболи. $\varepsilon = \frac{c}{a} \quad \varepsilon \in (1, +\infty) \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \quad b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$. Для точок правої

гілки $r_1 = x\varepsilon + a; r_2 = x\varepsilon - a$, Для лівої: $r_1 = -x\varepsilon - a; r_2 = -x\varepsilon + a$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, має за дійсну вісь відрізок $2b$ на осі OY, а за уявну – відрізок $2a$ на осі OX.



3. Парабола $y^2 = 2px$

Відстань будь-якої точки до деякої прямої, що зветься **директрисою**, рівна відстані цієї точки до фокуса.

Відстань від директриси до фокуса позначимо $p (p > 0)$. $F(\frac{p}{2}; 0)$.

$$r = |FM|$$

$$\frac{p}{2} + x = r \quad \varepsilon = 1 \quad x = -\frac{p}{2}$$

2. Неоднорідна система лінійних рівнянь.

$$A \cdot x = b. (1)$$

14. Означення. Однорідна система $A \cdot x = 0$ з тою самою матрицею системи називається **зведеною** системою для системи (1).

Покажемо, що загальний розв'язок зведеної однорідної системи (2) істотно пов'язаний з розв'язками неоднорідної системи (1).

15. Твердження. Нехай $|a_1\rangle$ та $|a_2\rangle$ – розв'язки системи (1). Тоді вектор-стовпчики $|a_1\rangle - |a_2\rangle$ та $|a_2\rangle - |a_1\rangle$ будуть розв'язками зведеної системи (2).

Підставимо в ліву частину системи (1) наприклад, вектор-стовпчик $|a_1\rangle - |a_2\rangle$ та використаємо дистрибутивність множення матриць:

$$A \cdot (|a_1\rangle - |a_2\rangle) = A \cdot |a_1\rangle - A \cdot |a_2\rangle = |b\rangle - |b\rangle = 0, \text{ отже,}$$

$A \cdot (|a_1\rangle - |a_2\rangle) = 0$, що і треба було показати.

16. Твердження. Нехай $|a_1\rangle$ та $|a_2\rangle$ – розв'язки системи (1) з стовпчиками вільних членів, рівними відповідно $|b_1\rangle$ та $|b_2\rangle$. Тоді вектор-стовпчик $|a_1\rangle + |a_2\rangle$ буде розв'язком системи (1) з правою частиною $|b_1\rangle + |b_2\rangle$.

Доведення повністю аналогічне попередньому.

17. Твердження. Нехай $|a\rangle$ – деякий розв'язок системи (1). Тоді довільний вектор $|b\rangle$ буде розв'язком цієї ж системи тоді і тільки тоді, коли знайдеться такий розв'язок $|a_0\rangle$ зведеної системи (2), що $|b\rangle = |a\rangle + |a_0\rangle$.

Необхідність. Нехай $|b\rangle$ є розв'язком системи (1). Позначимо $|b\rangle - |a\rangle = |a_0\rangle$. Тоді з **X.15.** випливає, що $|a_0\rangle$ є розв'язком зведеної системи (2).

Достатність. Нехай $|a\rangle$ є розв'язком системи (1), $|a_0\rangle$ – розв'язок зведеної системи (2). Тоді з **X.16.** маємо, що вектор-стовпчик $|b\rangle = |a\rangle + |a_0\rangle$ також буде розв'язком системи (1) з тою самою правою частиною.

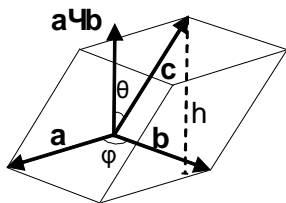
18. Наслідок. Нехай $|H_1\rangle, |H_2\rangle, \dots, |H_{n-r}\rangle$ – фундаментальна система розв'язків однорідної системи (2), а $|x\rangle_{\text{част. неодн.}}$ – деякий розв'язок системи (1) (його називають частинним розв'язком). Тоді загальний розв'язок неоднорідної системи (1) визначається наступною формулою:

$$|x\rangle_{\text{заг. неодн.}} = |x\rangle_{\text{част. неодн.}} + \sum_{k=1}^{n-r} c^k \cdot |H_k\rangle. \quad \text{Тут } c^k, k = \overline{1, n-r} \text{ – довільні сталі.}$$

1. Мішаний добуток трьох векторів.

Означення 7. Мішаним добутком впорядкованої трійки векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ називається число, рівне $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

Значення мішаного добутку можна обрахувати наступним чином:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \sin \varphi \cos \theta \quad (7)$$


Властивості мішаного добутку векторів.

1. Мішаний добуток **правої трійки** векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. Це очевидно (див. мал.), оскільки площа основи такого паралелепіпеда рівна $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \varphi$, а висота h рівна $|\mathbf{c}| \cos \theta$. Отже, $V = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \sin \varphi \cos \theta = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$. Проте, у випадку лівої

трійки векторів кут θ виявиться тупим і для визначення об'єму паралелепіпеда треба використовувати модуль мішаного добутку $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$. Крім того, очевидно, що знак мішаного добутку визначає орієнтацію трійки векторів: якщо $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} > 0$, то трійка векторів права, інакше трійка ліва.

$$2. (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \quad (8)$$

Дійсно, площу паралелограма можна визначити, взявши за основу іншу грань, наприклад, утворену векторами \mathbf{b} та \mathbf{c} . Тоді маємо $V = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

$$3. \mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{bac} \quad (9)$$

Дана властивість легко випливає із узагальнення властивості 2 та антикомутативності векторного добутку.

$$4. \mathbf{abc} = 0 \text{ тоді і тільки тоді, коли вектори } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ компланарні.}$$

Достатність цього твердження була обґрунтована при доведенні першої властивості, тому доведемо тут необхідність. Отже, нехай $\mathbf{abc} = 0$. Якщо принаймні один з множників є нуль-вектором, то трійка напевне компланарна, тому далі вважатимемо, що всі вектори-множники ненульові. У такому випадку із формули (7)

випливає, що кут $\theta = \frac{\pi}{2}$ – це означає компланарність векторів, або ж кут $\varphi = 0$. В цьому разі вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} колінеарні, що також означає компланарність векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

$$5. (\lambda \mathbf{a})\mathbf{bc} = \mathbf{a}(\lambda \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ab}(\lambda \mathbf{c}) = \lambda \mathbf{abc} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Дана властивість є наслідком відповідних властивостей скалярного та векторного добутків.

$$6. (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)\mathbf{bc} = \mathbf{a}_1\mathbf{bc} + \mathbf{a}_2\mathbf{bc} \quad \forall \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3 \quad \mathbf{a}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)\mathbf{c} = \mathbf{ab}_1\mathbf{c} + \mathbf{ab}_2\mathbf{c} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$$

$\mathbf{ab}(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) = \mathbf{abc}_1 + \mathbf{abc}_2 \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \mathbb{R}^3$ – дистрибутивність мішаного добутку. Очевидно, що доведення потребує дистрибутивності лише відносно одного з множників, на інші множники вона перенесеться автоматично завдяки властивості 3. Отже, розглянемо

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)\mathbf{bc} = ((\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Скористаємось доведеною дистрибутивністю скалярного добутку:

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{a}_2 \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a}_1\mathbf{bc} + \mathbf{a}_2\mathbf{bc}$$

Повернемося тепер до доведення дистрибутивності векторного добутку. Розглянемо вектор

$$\mathbf{d} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \{d^1, d^2, d^3\}. \text{ Його координати – це проекції цього вектора на відповідні орти ПДСК, тому}$$

$$d^1 = \mathbf{d} \cdot \mathbf{i} = ((\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{i} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{ci} = \mathbf{aci} + \mathbf{bci} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{i} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{i} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c})^1 + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})^1$$

Отже маємо рівність координат $d^1 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}^1 = (\mathbf{a} \times \mathbf{c})^1 + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})^1$. Аналогічно доводиться і рівність двох інших координат векторних добутків $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ та $\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Тим самим рівність $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ повністю доведено.

Знайдемо тепер вираз мішаного добутку через координати векторів-множників. Розглянемо вектори $\mathbf{a} = \{a^1, a^2, a^3\}$, $\mathbf{b} = \{b^1, b^2, b^3\}$ та $\mathbf{c} = \{c^1, c^2, c^3\}$. Визначимо їх мішаний добуток.

Оскільки $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = \{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^1, (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2, (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^3\}$, а $\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^1 c^1 + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 c^2 + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^3 c^3$, то

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} c^1 & c^2 & c^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = \mathbf{cab} = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}. \text{ Остаточню одержуємо формулу } \mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

(10)

2. Лінійні операції з матрицями. Транспонована матриця, її властивості.

Додавання матриць та множення на скаляр.

Нехай \mathbf{A} і \mathbf{B} – матриці рівних розмірностей $m \times n$ з елементами a_j^i та b_j^i відповідно, де $\forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

4. Означення. Сумою матриць \mathbf{A} і \mathbf{B} називається матриця \mathbf{C} розмірностей $m \times n$ з елементами $c_j^i = a_j^i + b_j^i$, $\forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

5. Означення. Добутком матриці \mathbf{A} на число λ називається матриця \mathbf{C} з елементами $c_j^i = \lambda a_j^i \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Матрицею, *протилежною* до матриці \mathbf{A} , називатимемо матрицю $(-1)\mathbf{A}$ і позначатимемо її через $-\mathbf{A}$. Таким чином, $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ для будь-якої матриці \mathbf{A} . *Різницею* матриць \mathbf{A} і \mathbf{B} називатимемо матрицю $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$.

6. Теорема. Для довільних матриць \mathbf{A} , \mathbf{B} та \mathbf{C} рівних розмірностей та довільних чисел λ, μ справедливі наступні рівності:

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$; (комутативність)
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$; (асоціативність)
3. $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$; (дистрибутивність відносно додавання матриць)
4. $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$; (дистрибутивність відносно додавання скаляра)
5. $\lambda(\mu\mathbf{A}) = (\lambda\mu)\mathbf{A}$; (асоціативність множення на скаляр)
6. $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$; (існування нуля)
7. $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$

Транспонована матриця та її властивості.

Нехай \mathbf{A} – деяка матриці розмірностей $m \times n$ з елементами a_j^i , де $\forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

8. Означення. Матрицею *транспонованою* до матриці \mathbf{A} називається матриця \mathbf{A}^T розмірностей $n \times m$: $\mathbf{A}^T = (a_i^j)_{i=\overline{1, n}, j=\overline{1, m}}$.

Очевидні властивості транспонованих матриць зібрані в наступні твердження.

10. Твердження. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

11. Твердження. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

12. Означення. Квадратна матриця $\mathbf{A} = (a_{ij}^i)_{i,j=\overline{1,n}}$ називається *симетричною*, якщо $a_{ij}^i = a_{ji}^j \forall i, j = \overline{1,n}$, тобто $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

13. Означення. Квадратна матриця $\mathbf{A} = (a_{ij}^i)_{i,j=\overline{1,n}}$ називається *кососиметричною*, якщо $a_{ij}^i = -a_{ji}^j \forall i, j = \overline{1,n}$, тобто $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$.

12. Означення. Квадратна матриця $\mathbf{A} = (a_{ij}^i)_{i,j=\overline{1,n}}$ називається *симетричною*, якщо $a_{ij}^i = a_{ji}^j \forall i, j = \overline{1,n}$, тобто $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

13. Означення. Квадратна матриця $\mathbf{A} = (a_{ij}^i)_{i,j=\overline{1,n}}$ називається *кососиметричною*, якщо $a_{ij}^i = -a_{ji}^j \forall i, j = \overline{1,n}$, тобто $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$.

15. Теорема. Будь-яка квадратна матриця може бути подана у вигляді суми симетричної та кососиметричної матриць.

Очевидною є наступна рівність: $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\overline{\mathbf{A}}} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$, де матриця $\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$ є симетричною, а матриця $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$ є кососиметричною. Отже, рівність $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\overline{\mathbf{A}}}$ є розкладом, про який йдеться в теоремі.

Добуток матриць.

Розглянемо дві матриці $\mathbf{A} = (a_{ij}^i)_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}}$ та $\mathbf{B} = (b_{jk}^j)_{k=\overline{1,p}}^{j=\overline{1,n}}$.

17. Означення. Добутком матриць \mathbf{A} і \mathbf{B} називається матриця

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (c_{jk}^j)_{k=\overline{1,p}}^{j=\overline{1,m}}, \text{ де } c_{jk}^j = \sum_{i=\overline{1,n}} a_{ij}^i b_{jk}^j. \quad (1)$$

18. Зауваження. Формулу (1), враховуючи угоду Ейнштейна про сумування по індексу, який в виразі зустрічається вгорі і внизу, можна записати також у вигляді: $c_{jk}^j = a_k^i b_j^k$, $k = \overline{1,n}$. Надалі здебільшого будемо використовувати саме такі позначення.

Таким чином, добутком двох матриць є матриця, кількість рядків якої рівна кількості рядків першої матриці, а кількість стовпчиків – кількості стовпчиків другої. Елементами матриці-добутку є суми, складені з добутків відповідних елементів рядків першого множника та стовпчиків другого. Саме тому добуток двох матриць визначений лише тоді, коли «довжини» рядків першої матриці та стовпчиків другої матриці збігаються.

20. Зауваження. Цей приклад підкреслює той факт, що множення матриць не є комутативною операцією, тобто $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Властивості добутку матриць описані наступною теоремою.

23. Теорема. Для довільних матриць \mathbf{A} , \mathbf{B} та \mathbf{C} , розмірності яких допускають їх множення, справедливі рівності:

$$1. (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \quad (\text{дистрибутивність})$$

$$2. \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (\text{дистрибутивність})$$

$$3. (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (\text{асоціативність}) 4. (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

Доведемо першу властивість. Отже, нехай $\mathbf{A} = (a_{ij}^i)_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}}$, $\mathbf{B} = (b_{jk}^j)_{k=\overline{1,p}}^{j=\overline{1,n}}$, $\mathbf{C} = (c_{jk}^j)_{k=\overline{1,p}}^{j=\overline{1,n}}$. Тоді, згідно з означенням 17, елемент матриці-добутку $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ з індексами i та j є наступним:

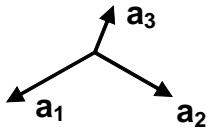
$$[(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}]_{jk}^j = (a_{jk}^i + b_{jk}^i) c_{jk}^k = a_{jk}^i c_{jk}^k + b_{jk}^i c_{jk}^k = [\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}]_{jk}^j + [\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}]_{jk}^j$$

Друге та третє твердження доводяться цілком аналогічно, тому розглянемо відразу четверту властивість. Нехай тут $\mathbf{A} = (a_{ij}^i)_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}}$ та $\mathbf{B} = (b_{jk}^j)_{k=\overline{1,p}}^{j=\overline{1,n}}$. Тоді $\forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$:

$$[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T]_{jk}^j = [\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}]_{ji}^i = a_k^j b_i^k = [\mathbf{A}^T]_{ji}^k [\mathbf{B}^T]_{jk}^i = [\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T]_{jk}^j, \text{ таким чином четверте твердження доведене.}$$

1. Векторний добуток векторів.

Означення 5. Впорядкована трійка некомпланарних векторів $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^3$, приведених до спільного початку, називається **правою (лівою)**, якщо по цим векторам можна спрямувати відповідно великий, вказівний та середній пальці **правої (лівої) руки**. Або ж при повороті на найменший кут від вектору \mathbf{a}_1 до вектору \mathbf{a}_2 напрямком вектору \mathbf{a}_3 відповідатиме руху **правого (лівого)** гвинта. (див. мал. нижче). Зрозуміло, що при зміні напрямку одного з векторів, або при зміні порядку нумерації двох з векторів трійка міняє свою орієнтацію на протилежну. Завжди вважатимемо, що орти ПДСК мають **праву** орієнтацію.



Права трійка векторів



Ліва трійка векторів

Означення 6. Векторним добутком двох векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ називається вектор \mathbf{c} , що визначається трьома умовами:

4. $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi$ де φ – кут утворений векторами \mathbf{a} та \mathbf{b} ;
5. вектор ортогональний до обох векторів \mathbf{a} та \mathbf{b} ;
6. вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ утворюють праву трійку.

Для векторного добутку використовуватимемо позначення $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Властивості векторного добутку векторів.

6. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ – антикомутативність векторного добутку є наслідком зміни орієнтації трійки векторів при зміні їх порядку;
7. $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ – скалярний множник можна виносити за знак векторного добутку (доведіть це самостійно);
8. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ – дистрибутивність векторного добутку буде доведена дещо пізніше;
9. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах \mathbf{a} і \mathbf{b} ;
10. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ тоді і тільки тоді, коли вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} колінеарні або принаймні один з них нульовий (доведіть це самостійно).

Знайдемо вираз векторного добутку через координати векторів-множників. Розглянемо вектори $\mathbf{a} = \{a^1, a^2, a^3\}$ та $\mathbf{b} = \{b^1, b^2, b^3\}$. Визначимо їх векторний добуток, скориставшись властивостями векторного добутку та врахувавши, що $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a^1 \mathbf{i} + a^2 \mathbf{j} + a^3 \mathbf{k}) \times (b^1 \mathbf{i} + b^2 \mathbf{j} + b^3 \mathbf{k}) = a^2 b^3 \mathbf{i} - a^3 b^2 \mathbf{i} - a^1 b^3 \mathbf{j} + a^3 b^1 \mathbf{j} + a^1 b^2 \mathbf{k} - a^2 b^1 \mathbf{k} \quad (5)$$

Якщо пригадати вигляд формули для обчислення визначника матриці розмірності 3, то можна записати:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}$$

(6)

2. Ортогональне доповнення евклідового простору.

Розглянемо E_k — k -вимірний підпростір евклідового простору E_n .

31. Означення. Ортогональним доповненням підпростору E_k називається множина E_k^\perp всіх векторів, ортогональних до кожного з векторів E_k :

$$E_k^\perp = \{\mathbf{x} \in E_n : \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in E_k\}.$$

Вивчимо властивості ортогонального доповнення.

32. Твердження. Ортогональне доповнення E_k^\perp є лінійним підпростором простору E_n .

► Для доведення розглянемо довільні вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E_k^\perp$ та довільне число $\lambda \in \mathbb{R}$. Візьмемо будь-який вектор $\mathbf{y} \in E_k$ та обчислимо скалярні добутки: $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{y} = 0$; $(\lambda \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}) = \lambda \cdot 0 = 0$. Таким чином, вектори $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ та $\lambda \mathbf{x}_1$ (при довільному значенні λ) належать E_k^\perp разом з $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$. Отже, E_k^\perp — підпростір простору E_n . ◀

33. Твердження. Розмірність підпростору E_k^\perp рівна $n - k$: $\dim E_k^\perp = n - k$.

► Нехай $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k\}$ — деякий базис підпростору E_k . Якщо \mathbf{x} — довільний вектор з ортогонального доповнення E_k^\perp , то очевидно,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{f}_i = 0 \quad \forall i = \overline{1, k}. \quad (7)$$

Припустимо, що нам відомі координати всіх вказаних векторів в деякому орнормованому базисі простору E_n : $\mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} f_i^1 & f_i^2 & \dots & f_i^n \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x^1 & x^2 & \dots & x^n \end{bmatrix}^T$. Тоді рівності (7) визначають систему k рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} f_1^1 x^1 + f_1^2 x^2 + \dots + f_1^n x^n = 0 \\ f_2^1 x^1 + f_2^2 x^2 + \dots + f_2^n x^n = 0 \\ \vdots \\ f_k^1 x^1 + f_k^2 x^2 + \dots + f_k^n x^n = 0 \end{cases}$$

Ранг матриці цієї системи рівний k , оскільки вектори $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k\}$ — лінійно незалежні. Тому розмірність простору розв'язків, який, очевидно збігається з E_k^\perp , рівна $n - k$. ◀

34. Твердження. Перетином підпросторів E_k та E_k^\perp є лише нуль-вектор:

$$E_k \cap E_k^\perp = \{\mathbf{0}\}.$$

► Дійсно, припустимо, що існує вектор $\mathbf{x} \in E_n$, такий що $\mathbf{x} \in E_k, \mathbf{x} \in E_k^\perp$. Тоді маємо: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$, отже, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. ◀

35. Твердження. Ортогональним доповненням до ортогонального доповнення E_k^\perp є підпростір E_k : $(E_k^\perp)^\perp = E_k$.

► З означення ортогонального доповнення випливає, що $E_k \subseteq (E_k^\perp)^\perp$. Але оскільки $\dim(E_k^\perp)^\perp = n - \dim E_k^\perp = k$, то з теореми про розмірність підпростору векторного простору випливає, що $E_k = (E_k^\perp)^\perp$. ◀

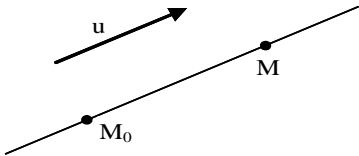
36. Наслідок. Із тверджень 33 та 34 випливає, що виконані достатні умови теореми про пряму суму підпросторів, отже $E_k \oplus E_k^\perp = E_n$, тобто будь-який вектор $\mathbf{x} \in E_n$ єдиним чином представляється у вигляді $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}''$, де $\mathbf{x}' \in E_k$, а $\mathbf{x}'' \in E_k^\perp$. Вектор \mathbf{x}' називається ортогональною проекцією вектора \mathbf{x} на підпростір E_k . З твердження 35 випливає, що вектор \mathbf{x}'' є ортогональною проекцією вектора \mathbf{x} на підпростір E_k^\perp .

37. Твердження. Якщо деякий вектор $\mathbf{x} \in E_n$ розкладений у суму проекцій: $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}''$, де $\mathbf{x}' \in E_k$, а $\mathbf{x}'' \in E_k^\perp$, то для будь-якого вектора $\mathbf{y} \in E_k, \mathbf{y} \neq \mathbf{x}'$ виконується нерівність $|\mathbf{x}''| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| < |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

► Позначимо $\mathbf{z} = \mathbf{x}' - \mathbf{y}$. Тоді $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}' + \mathbf{x}'' - \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{z} + \mathbf{x}''|^2 = (\mathbf{z} + \mathbf{x}'') \cdot (\mathbf{z} + \mathbf{x}'') = |\mathbf{z}|^2 + |\mathbf{x}''|^2 + 2\mathbf{x}'' \cdot \mathbf{z} = |\mathbf{z}|^2 + |\mathbf{x}''|^2 > |\mathbf{x}''|^2$, отже, $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| > |\mathbf{x}''|$. ◀

1. Види прямих у просторі

Якщо зафіксувати деякий вектор $\mathbf{u} = \{l, m, n\}$, то він задає напрямок у просторі. Тим самим визначена множина прямих паралельних даному напрямку. Для визначення конкретної прямої L з цієї множини, досить вказати точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на ній (див мал. 1).



Щоб визначити цю пряму аналітично, тобто вказати рівняння, яке пов'язує координати довільної точки прямої $M(x, y, z)$, скористаємось колінеарністю векторів $\overrightarrow{M_0M}$ та \mathbf{u} (він називається **напрямним вектором** прямої): $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \lambda \mathbf{u}$, де λ – довільне число. Таким чином одержане **векторне рівняння прямої** L .

Ця ж рівність для кожної координати вектора $\overrightarrow{M_0M}$ дає **параметричні рівняння** прямої L :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l \\ y = y_0 + \lambda m \\ z = z_0 + \lambda n \end{cases} \quad (1)$$

Тут $\lambda \in \mathbb{R}$ є параметром – кожна точка прямої визначена деяким його значенням. Якщо з рівностей (1) виключити параметр λ , то одержимо **канонічні рівняння прямої**:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad (2)$$

Рис. 1 **канонічні**

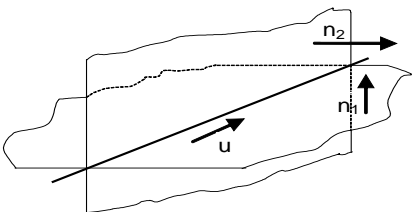
Розглянемо деякі частинні випадки. Припустимо, що одна з координат напрямного вектора прямої (2) рівна нулю, наприклад, $l = 0$. Тоді пряма, очевидно, перпендикулярна осі абсцис. Якщо ж $l = m = 0$, то пряма перпендикулярна до площини xy , тобто паралельна осі аплікат.

Пряму також можна задати, вказавши дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$ на ній. Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка шуканої прямої. Тоді вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ буде напрямним і можемо записати канонічні **рівняння прямої, заданої двома точками**:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Пряма у просторі може також бути визначена як **лінія перетину двох непаралельних площин**:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$



Ці рівняння описують площини, проте дають мало уявлення про власне пряму. Щоб записати пряму, задану рівнянням (3), у канонічному вигляді, необхідно визначити

напрямний вектор прямої та деяку точку на ній. Напрямний вектор, очевидно, має бути паралельним кожній з площин, а отже, перпендикулярним до нормалей n_1 та n_2

обох площин, тому можна вважати, що $u = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$. Для того, щоб визначити

точку на Рис. 2 прямій (3), покладемо одну із змінних, наприклад z , рівною z_0 і розв'яжемо систему $\begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1 - C_1z_0 \\ A_2x + B_2y = -D_2 - C_2z_0 \end{cases}$ відносно змінних x та y .

2. Відображення суми і добутку

Сума та добуток лінійних відображень.

33. Означення. Сумою лінійних відображень $A, B: L_n \rightarrow L_m$ називається відображення $C = A + B: L_n \rightarrow L_m$, визначене за правилом: $C(x) = A(x) + B(x)$.

Легко бачити, що C – лінійне відображення. Нехай $A = (a_i^k), B = (b_i^k)$, де $k = 1, m; i = 1, n$ – матриці відображень A і B в довільних базисах $\{f_1, \dots, f_n\}$ і $\{g_1, \dots, g_m\}$. Знайдемо матрицю відображення C в тих самих базисах A і B : $C(f_i) = A(f_i) + B(f_i) = \sum_{k=1}^m (a_i^k + b_i^k) g_k = \sum_{k=1}^m c_i^k g_k$, де c_i^k – елементи матриці C , яка, очевидно, є матрицею відображення C . Отже, $C = A + B$, тобто сума відображень має матрицю, яка в будь-якому базисі є сумою матриць цих відображень.

34. Означення. Добутком лінійного відображення $A: L_n \rightarrow L_m$ на довільне число λ називається відображення $(\lambda A): L_n \rightarrow L_m$, визначене за правилом: $(\lambda A)(x) = \lambda \cdot A(x)$.

Легко встановити лінійність цього відображення, також визначити, що його матрицею в деякому базисі буде матриця λA , де A – матриця відображення A в цьому базисі.

35. Означення. Добутком лінійних відображень $B: L_n \rightarrow L_m$ і $A: L_m \rightarrow L_p$ називається відображення $C = A \cdot B: L_n \rightarrow L_p$, визначене за правилом: $C(x) = A(B(x))$.

Неважко переконатись у лінійності відображення $A \cdot B$. Покажемо також, що матрицею $C = (c_i^j)_{i=1, p; j=1, n}$ цього відображення є добуток матриць A і B у деяких базисах $\{g_1, \dots, g_m\}$ і $\{f_1, \dots, f_n\}$ просторів L_m та L_n . Отже, розглянемо для деякого базису $\{q_1, \dots, q_p\}$ простору L_p образи базисних векторів $\{f_1, \dots, f_n\}$ при

відображенні C : $C(f_i) = \sum_{j=1}^p c_i^j q_j$. З іншого боку – маємо:

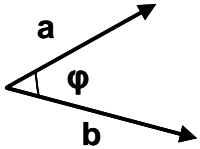
$$C(f_i) = A \cdot B(f_i) = A(B(f_i)) = A\left(\sum_{k=1}^m b_i^k g_k\right) = \sum_{k=1}^m b_i^k A(g_k) = \sum_{k=1}^m b_i^k \sum_{j=1}^p a_k^j q_j = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^m a_k^j b_i^k q_j, \text{ звідки випливає, що}$$

$$c_i^j = \sum_{k=1}^m a_k^j b_i^k, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, p, \text{ ТОБТО } C = A \cdot B.$$

26

1. Скалярний добуток векторів.

Означення 1. Скалярним добутком двох векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ називається число $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, рівне: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi$, де φ – кут утворений векторами \mathbf{a} та \mathbf{b} , а через $|\mathbf{a}|$ позначено довжину вектора \mathbf{a} .



Неважко зрозуміти, що скалярний добуток двох ненульових векторів рівний 0 тоді і тільки тоді, коли *вектори ортогональні*:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pi/2$$

Означення 2. Ортом вектора $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ називається вектор \mathbf{e}_a

одиничної довжини співнаправлений з вектором \mathbf{a} . Тобто $\mathbf{e}_a = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}$.

Означення 3. Проекцією вектора $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ на напрямок вектора $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ називається число $np_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b = |\mathbf{a}| \cdot \cos \varphi$. Звідси легко одержати, що $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = np_{\mathbf{b}} \mathbf{a} \cdot |\mathbf{b}| = np_{\mathbf{a}} \mathbf{b} \cdot |\mathbf{a}|$

Зауваження. З означення випливає, що проекція додатна, якщо кут між векторами \mathbf{a} та \mathbf{b} гострий та від'ємна, у разі, коли кут тупий.

Властивості скалярного добутку векторів.

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ – комутативність скалярного добутку очевидно випливає з його означення;

$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ – скалярний множник можна виносити за знак скалярного добутку (доведіть це самостійно);

$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ – дистрибутивність скалярного добутку випливає із властивостей проекцій, які вивчались у курсі шкільної програми:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = np_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot |\mathbf{c}| = (np_{\mathbf{c}} \mathbf{a} + np_{\mathbf{c}} \mathbf{b}) \cdot |\mathbf{c}| = np_{\mathbf{c}} \mathbf{a} \cdot |\mathbf{c}| + np_{\mathbf{c}} \mathbf{b} \cdot |\mathbf{c}| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ – скалярний добуток визначає квадрат довжини вектора.

Нехай у просторі геометричних векторів вибрана деяка ПДСК. Як визначити скалярний добуток векторів \mathbf{a} та \mathbf{b} , якщо відомі їх координати? Отже, нехай маємо вектори $\mathbf{a} = \{a^1, a^2, a^3\}$ та $\mathbf{b} = \{b^1, b^2, b^3\}$. Визначимо скалярний добуток цих векторів, скориставшись властивостями скалярного добутку:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a^1 \mathbf{i} + a^2 \mathbf{j} + a^3 \mathbf{k}) \cdot (b^1 \mathbf{i} + b^2 \mathbf{j} + b^3 \mathbf{k}) = a^1 b^1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a^2 b^2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + a^3 b^3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$$

Зауваження. Зверніть увагу, що одержана формула має місце *лише для ПДСК*. У загальній афінній системі координат ми мали б враховувати кути між базисними векторами.

Таким, чином у прямокутній декартовій системі координат справедлива наступна формула скалярного добутку двох векторів:

$$\boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3} \quad (1)$$

Формула (1) дає важливі наслідки, зокрема, довжина вектора визначається через його координати наступним чином:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$$

(2)

Для кута між двома векторами маємо формулу:

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} \sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2}} \quad (3)$$

Означення 4. Напрямними косинусами вектора $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ називаються косинуси кутів, утворених вектором \mathbf{a} з ортами ПДСК. Ці кути позначаються відповідно α , β та γ ,

отже з формули (3) випливає: $\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a^1}{|\mathbf{a}|}$, аналогічно $\cos \beta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a^2}{|\mathbf{a}|}$, $\cos \gamma = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a^3}{|\mathbf{a}|}$.

Звідси маємо основну властивість напрямних косинусів:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (4)$$

Таким чином, якщо $|\mathbf{a}| = 1$, то $\cos \alpha = a^1, \cos \beta = a^2, \cos \gamma = a^3$ – напрямними косинусами орта є його координати.

2. Самоспряжений оператор (рос. – симметрический).

9. Означення. Лінійний оператор $A: E_n \rightarrow E_n$ називається *самоспряженим*, якщо

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_n:$$

$$A\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} \quad (7)$$

Із формули (5) безпосередньо випливає, що оператор A є самоспряженим тоді і тільки тоді, коли його матриця A в будь-якому ортонормованому базисі є симетричною: $A = A^T$.

10. Зауваження. Операція переходу до спряженого оператора до певної міри подібна переходу до спряженого числа в комплексному просторі (більш наочно ця аналогія проявиться в унітарному просторі), а серед комплексних чисел виділяються дійсні числа – їх аналогом в множині лінійних операторів є самоспряжені оператори.

11. Теорема. Всі власні значення самоспряженого оператора – дійсні.

► Припустимо супротивне. Нехай деяке власне число λ_0 самоспряженого оператора – комплексне. Тоді існує власний вектор \mathbf{x}_0 , що належить цьому числу, тобто існує нетривіальний розв'язок однорідної системи $(A - \lambda_0 E)|\mathbf{x}_0\rangle = \mathbf{0}$, тобто \mathbf{x}_0 – взагалі кажучи, вектор з комплексними координатами. Помножимо рівність $A|\mathbf{x}_0\rangle = \lambda_0 |\mathbf{x}_0\rangle$ зліва на

комплексно спряжений вектор $\overline{|\mathbf{x}_0\rangle}^T$: $\overline{|\mathbf{x}_0\rangle}^T A|\mathbf{x}_0\rangle = \lambda_0 \overline{|\mathbf{x}_0\rangle}^T |\mathbf{x}_0\rangle = \lambda_0 \sum_{i=1}^n |\overline{x_0^i}|^2$ Права частина цього

виразу – комплексне число, а отже, $\omega = \overline{|\mathbf{x}_0\rangle}^T A|\mathbf{x}_0\rangle$ – теж комплексне число. Виходячи з очевидної рівності $\omega = \overline{\omega}$, маємо:

$$\omega = \left(\overline{|\mathbf{x}_0\rangle}^T A|\mathbf{x}_0\rangle \right)^T = |\mathbf{x}_0\rangle^T A^T \overline{|\mathbf{x}_0\rangle} = |\mathbf{x}_0\rangle^T A \overline{|\mathbf{x}_0\rangle}$$

Ця рівність означає, що $\omega = \overline{\omega}$, тобто ω – дійсне число, що неможливо. ◀

12. Теорема. Власні вектори самоспряженого оператора, які належать попарно різним власним числам, – ортогональні.

► Нехай власні вектори самоспряженого оператора A \mathbf{x}_1 та \mathbf{x}_2 належать відповідно власним числам $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Розглянемо скалярний добуток $A\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2$. З іншого боку,

$$A\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 \cdot A\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2. \text{ Тобто } (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0, \text{ отже, вектори } \mathbf{x}_1 \text{ та } \mathbf{x}_2 \text{ – ортогональні. } \blacktriangleleft$$

13. Теорема (про існування ортонормованого базису евклідового простору з власних векторів самоспряженого оператора).

В евклідовому просторі завжди існує ортонормований базис із власних векторів будь-якого самоспряженого оператора.

► 14. Лема. Нехай підпростір $E \subseteq E_n$ – інваріантний відносно самоспряженого оператора $A: E_n \rightarrow E_n$. Тоді підпростір E^\perp також інваріантний відносно оператора A .

► Розглянемо довільний вектор $\mathbf{x} \in E$, тоді образ $A\mathbf{x} \in E$. Нехай тепер \mathbf{y} – довільний вектор із E^\perp . Отже, $0 = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{y}$, тобто $A\mathbf{y} \in E^\perp$. ◀

Для доведення теореми використаємо індукцію по n – розмірність E_n .

Нехай $A: E_1 \rightarrow E_1$ – самоспряжений оператор. Згідно теоремі 11, власне число цього оператора – дійсне, а отже, існує власний вектор, який йому належить. Із-за розмірності простора E_1 кожний ненульовий вектор буде власним. Виберемо за базисний одиничний вектор.

Припустимо, що в просторі E_n , де $n = k > 1$ існує вказаний ортонормований базис. Покажемо, що такий базис існує і в E_n , де $n = k + 1$. Дійсно, характеристичне рівняння оператора A має принаймні 1 дійсний корінь (можливо, кратний), отже, існує принаймні одновимірний підпростір E_n інваріантний відносно оператора A . Позначимо цей підпростір E_1 . Нехай 1 – орт в E_1 . Позначимо через \tilde{E} ортогональне доповнення E_1^\perp . Цей підпростір інваріантний відносно оператора A згідно лемі 1.4, причому $\dim(\tilde{E}) = k$. Розглянемо звуження \tilde{A} (див. зауваження 1.1 в темі 18) оператора A на підпростір \tilde{E} : $\tilde{A} = A|_{\tilde{E}}$, тобто $\tilde{A}x = Ax$, якщо $x \in \tilde{E}$. Очевидно, що оператор \tilde{A} – самоспряжений оператор на \tilde{E} . Крім того, якщо власний вектор оператора A належить підпростору \tilde{E} , то він же є власним вектором оператора \tilde{A} , що належить тому самому ж власному числу. Згідно припущенню індукції, в підпросторі \tilde{E} існує ортонормований базис $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ з власних векторів оператора \tilde{A} , а отже і A . Тоді $\{e_1, e_2, \dots, e_k, 1\}$ – шуканий ортонормований базис в просторі E_n . ◀

15. Теорема (про зведення симетричної матриці до діагонального вигляду). Симетрична матриця завжди подібна деякій діагональній матриці з ортогональною матрицею подібності.

► Нехай A – симетрична матриця. Тоді в деякому ортонормованому базисі простору вона задає самоспряжений оператор A . Згідно з теоремою 1.3, у нього існує n взаємно ортогональних власних векторів $f_1, f_2, \dots, f_n \in E_n$. В базисі з цих власних векторів матриця A набуває діагонального вигляду: $D = Q^T A Q$ (діагональними елементами матриці D є власні числа матриці A). Причому матриця Q – ортогональна як матриця переходу між двома ортонормованими базисами. ◀

Поверхні 2 порядку

Загальне рівняння другого порядку, що описує деяку поверхню в тривимірному просторі, залежить від трьох змінних і має вид:

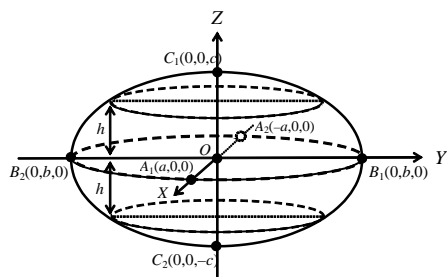
$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (1)$$

Перетвореннями системи координат можна звести це рівняння до одного з канонічних рівнянь поверхонь другого порядку.

1.1. Еліпсоїд.

Канонічним рівнянням еліпсоїду є рівняння виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0) \quad (2)$$

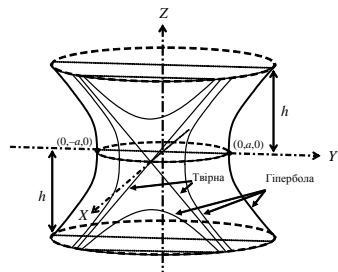


З рівняння (2) безпосередньо випливає, що по-перше, дана поверхня симетрична відносно всіх трьох координатних площин, і по-друге, $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $|z| \leq c$. Точки $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$ називаються вершинами еліпсоїда.

1.2. Однопорожнинний гіперболоїд.

Однопорожнинний гіперболоїд задається канонічним рівнянням виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0) \quad (3)$$



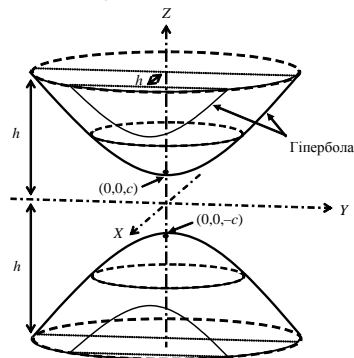
Очевидна симетрія точок поверхні відносно всіх трьох координатних площин.

Двопорожнинний гіперболоїд.

Двопорожнинний гіперболоїд задається канонічним рівнянням виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0) \quad (7)$$

Ця поверхня, очевидно, також симетрична відносно всіх трьох координатних площин. Форму поверхні знову встановимо з допомогою перерізів. Розглянемо спочатку



переріз площиною $z = \pm h$. Маємо:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1 \\ z = \pm h \end{cases}$$

Бачимо, що при $h > c$ дані рівняння визначають еліпс з півосями

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1} \text{ та } b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}.$$

Еліптичний параболоїд.

Канонічним рівнянням еліптичного параболоїду є наступне:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, q > 0) \quad (8)$$

Ця поверхня є симетричною відносно координатних площин xOz та yOz і розташована над площиною xOy . В перерізі площиною $z = h$ при $h \geq 0$ одержимо еліпс (при $h = 0$ перерізу належить лише вершина еліптичного параболоїда – точка $O(0,0,0)$):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h \\ z = h \end{cases}$$

Півосі цього еліпса рівні $\sqrt{2ph}$ та $\sqrt{2qh}$.

Якщо ж розглянути переріз еліптичного параболоїду наприклад площиною $x = \pm h$, то одержимо параболу:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{q} = 2z - \frac{h^2}{p} \\ x = \pm h \end{cases}, \text{ вершиною якої є точка з координатами } (\pm h, 0, \frac{h^2}{2p}), \text{ а вісь}$$

Рис. 4 паралельна осі Oz .

Гіперболічний параболоїд.

Гіперболічний параболоїд описується канонічним рівнянням:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, q > 0) \quad (9)$$

Теорема. Гіперболічний параболоїд (9) є поверхнею, утвореною рухом парабол $y^2 = -2qz$, $x = 0$, вершина якої ковзає вздовж нерухомої парабол $x^2 = 2pz$, $y = 0$ так, що площини обох парабол залишаються взаємно перпендикулярними, а осі – протилежно напрямленими

2. Матр. Лін. Оператори та перетвор.

1. Основні означення та теореми.

Нехай L_n та L_m – два лінійних простори над полем дійсних (або комплексних) чисел.

1. Означення. Відображення $A: L_n \rightarrow L_m$, яке кожному вектору $x \in L_n$ ставить у відповідність вектор $y \in L_m$ за правилом $y = Ax$, називається *лінійним відображенням* простору L_n в простір L_m , якщо

$$1. A(x+y) = Ax + Ay \quad \forall x \in L_n, \forall y \in L_n; \quad (1)$$

$$2. A\lambda x = \lambda Ax \quad \forall x \in L_n, \forall \lambda \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

Якщо $L_m = L_n$, то відображення A називається *перетворенням* простору L_n або *лінійним оператором* в L_n .

Розглянемо деякі приклади.

. **Теорема.** Образом довільного підпростору простору L_n при лінійному відображенні $A: L_n \rightarrow L_m$ є деякий підпростір простору L_m .

► Нехай $L \subseteq L_n$ – довільний лінійний підпростір. Позначимо $M = \{y \in L_m : \exists x \in L, Ax = y\}$.

Необхідно показати, що $M \subseteq L_m$ є лінійним підпростором. Розглянемо довільні вектори

$y_1, y_2 \in M$, а також відповідні їм вектори $x_1, x_2 \in L$, для яких $Ax_k = y_k$, $k = 1, 2$. Тоді

$y_1 + y_2 = Ax_1 + Ax_2 = A(x_1 + x_2)$, звідки випливає, що $y_1 + y_2 \in M$, оскільки $x_1 + x_2 \in L$. Аналогічно,

яким би не було число $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda y_1 = \lambda Ax_1 = A(\lambda x_1) \in M$, бо $\lambda x_1 \in L$. Таким чином, M – лінійний

підпростір L_m . ◀

11. Зауваження. Якщо так зване *звуження лінійного відображення*, тобто відображення, яке діє не в усьому просторі L_n , а лише на деякому його підпросторі L , позначити через $A|_L$, то доведена теорема означає, що $\text{Im}(A|_L)$ є підпростором L_m .

12. Означення. Нехай $A: L_n \rightarrow L_m$ деякий лінійний оператор. Підпростір $L \subseteq L_n$ називається *інваріантним* відносно оператора A , якщо $\text{Im}(A|_L) \subseteq L$.

1. Кут між прямою та площиною. Взаємне розташування прямої і площини в просторі.

1. Точка перетину прямої $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ з площиною $Ax + By + Cz + D = 0$.

Використаємо рівняння прямої у параметричній формі (1) та підставимо їх у рівняння площини. Таким чином з'ясуємо, при якому значенні параметру λ має місце перетин прямої з площиною. Визначивши таким чином коефіцієнт λ , знайдемо координати точки перетину прямої та площини.

2. Кут φ між прямою $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ та площиною $Ax + By + Cz + D = 0$.

Неважко зрозуміти, що $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ або $\varphi = \frac{\pi}{2} + \alpha$, де α – це кут між нормаллю площини та напрямним

вектором прямої. Тому $\sin \varphi = \cos \alpha = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{u}|} = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$. Пряма та площина паралельні, коли

$Al + Bm + Cn = 0$, а перпендикулярні – при $\mathbf{n} \parallel \mathbf{u}$, тобто $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$

3. умова належності прямої $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$.

Для того, щоб пряма лежала у площині необхідно і достатньо виконання двох умов: пряма паралельна площині і одна точка прямої належить площині. Запишемо ці умови аналітично:
$$\begin{cases} Al + Bm + Cn = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$$

4. умова перетину двох непаралельних прямих $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ та $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$.

умова перетину двох непаралельних прямих еквівалентна умові компланарності векторів $\mathbf{u}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$, $\mathbf{u}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$ та $\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$, де $\mathbf{M}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ та $\mathbf{M}_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

2. Ранг матриці. Обчислення рангу матриці.

Розглянемо матрицю $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m}^{j=1, \dots, n}$ розмірностей $m \times n$.

1. **Означення.** Мінор M матриці A порядку r називається *базисним*, якщо $M \neq 0$, а всі мінори порядків $r+1$ рівні нулю, або $r = \min(m, n)$ (тобто мінорів порядку $r+1$ не існує).

2. **Наслідок.** З теореми Лапласа випливає, що якщо порядок базисного мінору рівний r , то всі мінори порядків вищих за $r+1$ теж рівні нулю.

3. **Наслідок.** Базисний мінор, очевидно, визначений неоднозначно.

4. **Наслідок.** Будь-яка матриця, крім нуль-матриці, має базисний мінор.

5. **Означення.** Стовпчики і рядки матриці A , які містять базисний мінор, називаються *базисними*.

6. **Означення.** Рангом матриці A (позначається $\text{Rank } A$ або $\text{Rg } A$) називається порядок її базисного мінору.

2. Обчислення рангу матриці.

Наступна теорема не тільки описує вплив перетворень матриці на її ранг, але й дає спосіб визначення базисного мінору.

7. **Теорема.** Ранг матриці не змінюється при виконанні наступних елементарних перетворень рядків або стовпчиків матриці (будемо називати ці перетворення допустимими):

- множення рядка (стовпчика) на число не рівне нулю;
- додавання до рядка (стовпчика) іншого рядка (стовпчика);
- перестановка двох довільних рядків (стовпчиків).

Нехай ранг матриці A рівний r . Покажемо, що при жодному елементарному перетворенні r не зміниться. Зауважимо, що досить довести твердження теореми лише для рядків матриці, оскільки транспонування матриці не змінює значень її мінорів, а отже, не змінить рангу матриці. Розглянемо по черзі кожне з перетворень.

1. Нехай довільний рядок матриці помножили на деяке число $\lambda \neq 0$. Якщо базисний мінор містив даний рядок, то значення базисного мінору помножилось на λ , якщо ж ні – то значення базисного мінору не змінилось. Жоден мінор матриці, який був рівним нулю, не стане відмінним від нуля, а жоден відмінний від нуля не став нульовим.

2. Нехай в матриці до i -го рядка додали j -ий рядок. Покажемо, що ранг матриці при цьому не міг збільшитись. Розглянемо довільний мінор $M = 0$ порядку $r+1$ (якщо він існує). Якщо мінор M не містив рядків з індексами i та j , то цей мінор не змінить свого значення. Якщо обидва рядки, що додаються, входили в M , то згідно з властивістю визначників, нове значення мінору M буде рівним сумі вихідного значення мінору M та визначника з двома однаковими рядками, а отже дорівнюватиме нулю. Якщо ж i -тий рядок входив в M , а j -ий – ні, то нове значення M

дорівнюватиме сумі мінору порядку $r+1$ вихідної матриці, який рівний нулю (власне, початкового значення \mathbf{M}), та деякого мінору порядку $r+1$, який містить j -ий рядок на місці i -го. Оскільки це мінор порядку $r+1$ вихідної матриці, то він рівний нулю.

Таким чином, ранг матриці при даному перетворенні не збільшився, бо всі мінори порядку $r+1$, як були, так і лишилися нульовими.

Припущення про те, що ранг міг зменшитись є також хибним, оскільки тоді при виконанні зворотних перетворень (відніманні рядків) він мав би збільшуватись, що, як було показано, неможливо.

3. Можна показати, що перестановка двох рядків зводиться до послідовності перетворень двох уже розглянутих типів, а отже, теж не змінює ранг. Дійсно:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \langle \mathbf{A}^i | \\ \vdots \\ \langle \mathbf{A}^j | \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ \langle \mathbf{A}^i | + \langle \mathbf{A}^j | \\ \vdots \\ \langle \mathbf{A}^j | \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ -\langle \mathbf{A}^i | - \langle \mathbf{A}^j | \\ \vdots \\ \langle \mathbf{A}^j | \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ -\langle \mathbf{A}^i | - \langle \mathbf{A}^j | \\ \vdots \\ -\langle \mathbf{A}^i | \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ -\langle \mathbf{A}^i | - \langle \mathbf{A}^j | \\ \vdots \\ \langle \mathbf{A}^i | \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ -\langle \mathbf{A}^j | \\ \vdots \\ \langle \mathbf{A}^i | \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ \langle \mathbf{A}^j | \\ \vdots \\ \langle \mathbf{A}^i | \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Дана теорема дає метод обчислення рангу довільної матриці – треба виконувати допустимі елементарні перетворення над рядками або стовпчиками матриці, намагаючись звести її до якомога простішого вигляду, коли матриця містить достатню кількість нулів. Проілюструємо цей метод на прикладах, а потім сформулюємо остаточний висновок.

1. Полярне рівняння кривих другого порядку.

Зазначимо, що всі три криві будуть описуватись одним і тим самим полярним рівнянням, що ще раз підкреслить їх спорідненість.

Фрагменти всіх кривих матимуть вигляд, наведений на **рис. 5**:

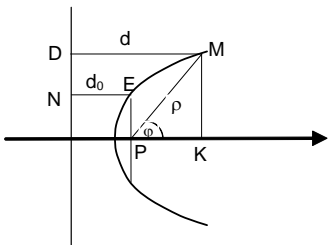


рис. 5.

Тут P – полюс кривої, точка M – довільна точка однієї з названих кривих. Позначимо довжину її полярного радіуса ρ , а полярний кут – φ . Вертикальна пряма на малюнку – це директриса кривої (найближча до даного фокусу). Відрізок хорди кривої, що проходить через полюс перпендикулярно до полярної осі вважатимемо параметром полярного рівняння і позначимо через $2p$. Скористаємось основною фокальною властивістю кривих другого порядку для точок E та M , позначивши їх відстані до директриси відповідно d_0 та d : $\frac{p}{d_0} = \varepsilon$, $\frac{p}{d} = \varepsilon$. Оскільки

$$d = d_0 + |PK| = d_0 + \rho \cos \varphi = \frac{p}{\varepsilon} + \rho \cos \varphi, \text{ одержимо } \frac{p}{\varepsilon} = \frac{p}{\varepsilon} + \rho \cos \varphi, \text{ або } \rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

Це і є полярне рівняння кривої другого порядку, у випадку коли полюс обраний саме так, як зазначено вище. Якої саме кривої з трьох можливих – визначає величина ексцентриситету ε .

Повернемось до розгляду рівняння (12), а саме: з'ясуємо зв'язок його параметрів p та ε з параметрами канонічних рівнянь кривих. Найпростіша ситуація у випадку гіперболи. З її означення безпосередньо випливає, що при $\varepsilon = 1$, p – це параметр канонічного рівняння параболи. Якщо ж в рівнянні (21) $\varepsilon > 1$, то маємо гіперболу. Тоді декартові координати

точки $E(c; p)$. Підставимо їх в рівняння (14): $\frac{c^2}{a^2} - \frac{p^2}{b^2} = 1$, звідки $p = \frac{b}{a} \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{b^2}{a}$. Аналогічно при $\varepsilon < 1$ рівняння (12)

описує еліпс. Підставимо точку $E(-c; p)$ в канонічне рівняння (1): $\frac{c^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1$. Легко одержати, що і в цьому випадку

$$p = \frac{b^2}{a}. \quad \mathbf{2. \text{Множення матриць та їх властивості.}}$$

Розглянемо дві матриці $\mathbf{A} = (a_{ij}^i)_{j=1, n}^{i=1, m}$ та $\mathbf{B} = (b_{ij}^i)_{j=1, p}^{i=1, n}$. **17. Означення.** Добутком матриць \mathbf{A} і \mathbf{B} називається

матриця $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (c_{ij}^i)_{j=1, p}^{i=1, m}$, де $c_j^i = \sum_{k=1}^n a_k^i b_j^k$. (1) Таким чином, добуток двох матриць є матриця, кількість

рядків якої рівна кількості рядків першої матриці, а кількість стовпчиків – кількості стовпчиків другої. Елементами матриці-добутку є суми, складені з добутків відповідних елементів рядків першого множника та стовпчиків другого. Саме тому добуток двох матриць визначений лише тоді, коли «довжини» рядків першої матриці та стовпчиків другої матриці збігаються.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Властивості добутку матриць описані наступною теоремою.

23. Теорема. Для довільних матриць \mathbf{A} , \mathbf{B} та \mathbf{C} , розмірності яких допускають їх множення, справедливі рівності:

1. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ (дистрибутивність)
2. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ (дистрибутивність)
3. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ (асоціативність)

4. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$ Доведемо першу властивість. Отже, нехай $\mathbf{A} = (a_{ij}^i)_{j=1, n}^{i=1, m}$, $\mathbf{B} = (b_{ij}^i)_{j=1, p}^{i=1, n}$, $\mathbf{C} = (c_{ij}^i)_{j=1, p}^{i=1, n}$. Тоді,

згідно з означенням **17**, елемент матриці-добутку $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ з індексами i та j є наступним:

$$[(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}]_{ij}^i = (a_k^i + b_k^i) c_j^k = a_k^i c_j^k + b_k^i c_j^k = [\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}]_{ij}^i + [\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}]_{ij}^i$$

Друге та третє твердження доводяться цілком аналогічно, тому розглянемо відразу четверту властивість. Нехай

тут $\mathbf{A} = (a_{ij}^i)_{j=1, n}^{i=1, m}$ та $\mathbf{B} = (b_{ij}^i)_{j=1, p}^{i=1, n}$. Тоді $\forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$:

$$[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T]_{ij}^i = [\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}]_{ji}^i = a_k^j b_i^k = [\mathbf{A}^T]_{jk}^i \cdot [\mathbf{B}^T]_{ki}^j = [\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T]_{ij}^i, \text{ таким чином четверте твердження доведене.}$$

Означення. Перехід від будь-якої квадратної матриці \mathbf{A} до матриці $\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$ називається операцією симетризації матриці \mathbf{A} , а до матриці $\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$ – операцією косиметризації.

Матриця вигляду $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \dots & \mathbf{B} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C} & \dots & \mathbf{D} \end{pmatrix}$, елементами якої є матриці, називається **блочною**.

30

1. Фокальні властивості кривих другого порядку.

Спорідненість всіх трьох кривих проявляється і в спільних так званих **фокальних** властивостях. Введемо спершу поняття директриси для еліпса та гіперболи.

Директрисами еліпса або гіперболи називаються прямі, перпендикулярні фокальній осі еліпса або гіперболи, симетрично розташовані на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від центру кривої (випадок кола, коли $\varepsilon = 0$, тут не розглядається).

Таким чином і еліпс, і гіпербола мають по дві директриси (як і по два фокуси), які задаються рівняннями $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$. Поняття директриси параболі і її рівняння були означені вище. Неважко помітити, що директриси всіх трьох кривих не перетинають самих кривих. Дійсно, для еліпса $\varepsilon < 1$, отже, $\frac{a}{\varepsilon} > a$, тобто директриси еліпса розташовані зовні його (див.

рис. 4).

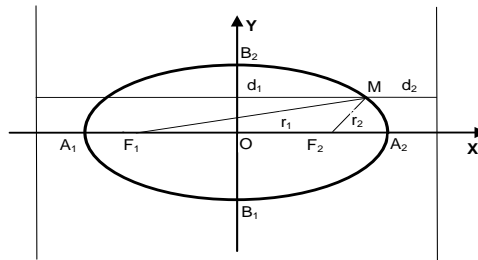


Рис. 4.

Для гіперболи ж $\varepsilon > 1$, отже, $\frac{a}{\varepsilon} < a$, тобто директриси розміщені між гілками гіперболи. Для точок параболі $x \geq 0$, директриса знаходиться в півплощині $x \leq 0$, а ексцентриситет параболі вважають рівним 1: $\varepsilon = 1$.

Основна фокальна властивість кривих другого порядку визначена наступною теоремою.

Теорема Відношення довжини фокального радіуса кожної точки довільної кривої другого порядку до відстані цієї точки до односторонньої з фокусом директриси є величиною сталою, рівною ексцентриситету кривої тобто

$$\frac{r}{d} = \varepsilon \quad (11)$$

Доведення Позначимо, як і раніше, фокальні радіуси довільної точки еліпса або гіперболи r_1 та r_2 , а відстані цієї точки до відповідних директрис – d_1 та d_2 . Отже, для лівого фокуса і лівої директриси еліпса маємо:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a + x\varepsilon}{\frac{a}{\varepsilon} + x} = \varepsilon.$$

Цілком аналогічно для правого фокуса та правої директриси еліпса :

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{a - x\varepsilon}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon.$$

Для гіперболи необхідно окремо розглянути точки лівої та правої гілок. Отже, для точок лівої гілки маємо:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{-x\varepsilon - a}{|x| - \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{-x\varepsilon - a}{-x - \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon; \quad \frac{r_2}{d_2} = \frac{-x\varepsilon + a}{|x| + \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{-x\varepsilon + a}{-x + \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Аналогічно, для точок правої гілки маємо:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{x\varepsilon + a}{x + \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon; \quad \frac{r_2}{d_2} = \frac{x\varepsilon - a}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon. \text{ Для параболі безпосередньо з рівняння (10) випливає } \frac{r}{d} = 1 = \varepsilon, \text{ що цілком}$$

виправдовує визначення ексцентриситету параболі.

215. Теорема (про зведення симетричної матриці до діагонального вигляду).

Симетрична матриця завжди подібна деякій діагональній матриці з ортогональною матрицею подібності.

► Нехай \mathbf{A} – симетрична матриця. Тоді в деякому ортонормованому базисі простору вона задає самоспряжений оператор \mathbf{A} . Згідно з теоремою 13, у нього існує n взаємно ортогональних власних векторів $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n \in E_n$. В базисі з

цих власних векторів матриця \mathbf{A} набуває діагонального вигляду: $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}$ (діагональними елементами матриці \mathbf{D} є власні числа матриці \mathbf{A}). Причому матриця \mathbf{Q} – ортогональна як матриця переходу між двома ортонормованими базисами. ◀

НЕ СПИСУЙ!!!! СПИСУВАТИ аморально!!!! R

Білет 1

- 1.Геометричний вектор. Властивості.
- 2.Білінійні Форма.

Білет 2

- 1.Еліпс та його властивості.
2. Векторний простір. Наслідки з означення. Приклади векторного простору.

Білет 3

- 1.Гіпербола як крива II порядку, її властивості.
- 2.Властивості лінійно залежних та лінійно незалежних систем векторів.

Білет 4

- 1.Парабола як крива II роду.
2. Базис та розмірність векторного простору. Координати вектора.

Білет 5

- 1.Скалярний добуток векторів.
2. Означення оберненої матриці.

Білет 6

- 1.Визначник (детермінант) матриці.
2. Векторний добуток векторів.

Білет 7

1. Мішаний добуток трьох векторів.
2. Правило Лапласа обчислення визначника.

Білет 8

8. Площини у просторі
9. Заміна координат

Білет 9

1. Прямі в просторі.
2. Підпростори векторних просторів.

Білет 10

1. Рівняння прямої на площин
2. Пряма сума простору

Білет 11

1. Поверхні обертання
2. Власні числа та вектори, їх властивості

Білет 12

1. Системи Крамерівського типу. Теорема Крамера.
2. Конус

Білет 13

- 1.Циліндри
- 2.Білінійна та квадратична форми. Зв'язок між ними.

Білет 14

- 1.Еліпсоїд.
- 2.Спряжений оператор

Білет 16

- 1.Параболоїди
2. Ортонормований базис евклідового простору.

Білет 17

1. Векторний добуток векторів.
2. Крит лін залежності та лін незал довільної системи вект в евклю просторі.

Варіант 18

- 1.Відстань і відхилення точки від площини.
- 2.Теорема про базисний мінор.

Варіант 19

- 1.Пряма в просторі як лінія перетину двох площин. Пучок площин.
- 2.Теорема Кронекера-Капеллі.

Варіант 20

- 1.Кут між площинами.
- 2.Лінійне відображення та його матриця

Варіант 21

- 1.Відстань від точки до прямої
- 2.Загальний розв'язок системи рівнянь

Варіант 22

- 1.Класифікація кривих другого порядку.
- 2.Неоднорідна система лінійних рівнянь.

Варіант 23

1. Мішаний добуток трьох векторів.
2. Лінійні операції з матрицями. Транспонована матриця, її властивості. Додавання матриць та множення на скаляр.

Варіант 24

1. Векторний добуток векторів.
2. Ортогональне доповнення евклідового простору.

Варіант 26

1. Скалярний добуток векторів.
2. Самоспряжений оператор (рос. – симметрический).

Білет 27

- 1.Поверхні 2-го роду
- 2.Матриця лінійного оператора та перетворення.

Білет 28

- 1.Кут між прямою та площиною. Взаємне розташування прямої і площини в просторі.
- 2.Ранг матриці. Обчислення рангу матриці.

Білет 29

1. Полярне рівняння кривих другого порядку.
- 2.Множення матриць та їх властивості.

Білет 30

1. Фокальні властивості кривих другого порядку.

		2. Площина в просторі
--	--	-----------------------