

Один моль ідеального газу з показником адіабати γ виконує процес, під час якого його тиск p є пропорційним T^α . Знайти молярну теплоємність C для цього процесу. При якому значенні α теплоємність $C < 0$?

За означенням молярна теплоємність дорівнює

$$C = \frac{dQ}{dT}.$$

Молярна теплоємність входить до рівняння політропи (політропний процес – процес із сталою теплоємністю)

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}.$$

Оскільки у нас задіяні параметри стану газу p і T , скористаємось рівнянням політропи у вигляді

$$\frac{p^{\frac{n-1}{n}}}{T} = \text{const}.$$

Це означає, що $p \sim T^{\frac{n}{n-1}}$, а за умовою задачі $p \sim T^\alpha$. Тоді

$$\alpha = \frac{n}{n-1}; \quad n = \frac{\alpha}{\alpha-1} = \frac{C - C_p}{C - C_V},$$

звідки

$$C = C_V + R(1 - \alpha).$$

Задіємо показник адіабати γ . З рівняння Роберта Майєра (робили таку процедуру на лекції)

$$C_p = C_V + R; \quad \frac{C_p}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V}; \quad \gamma = 1 + \frac{R}{C_V}; \quad C_V = \frac{R}{\gamma - 1}.$$

Підставимо у вираз для теплоємності

$$C = \frac{R}{\gamma - 1} + R(1 - \alpha) = \frac{R}{\gamma - 1} [\gamma(1 - \alpha) + \alpha],$$

остаточно

$$\boxed{C = \frac{R}{\gamma - 1} [\gamma(1 - \alpha) + \alpha]}.$$

Теплоємність від'ємна $C < 0$, якщо $\gamma(1 - \alpha) + \alpha < 0$, отже

$$C < 0 \text{ при } \boxed{\alpha > \frac{\gamma}{\gamma - 1}}.$$

Для деякого процесу в ідеальному газі теплоємність $C = aT^3$. Знайти рівняння цього процесу.

Зручніше шукати рівняння процесу у координатах V (входить диференціалом у вираз для роботи) і T (задано за умовою задачі). Скористаємось першим началом термодинаміки

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

За означенням теплоємності

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = aT^3; \quad \delta Q = CdT = aT^3 dT.$$

Зміна внутрішньої енергії

$$dU = C_v dT.$$

Робота

$$\delta A = pdV = \frac{RT}{V} dV.$$

Підставимо ці вирази у перше начало термодинаміки

$$aT^3 dT = C_v dT + \frac{RT}{V} dV,$$

розділимо змінні наступним чином

$$\frac{aT^2 dT}{R} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V}; \quad \frac{aT^3}{3R} = \frac{1}{\gamma - 1} \ln T + \ln V + \text{const};$$
$$\frac{aT^3(\gamma - 1)}{3R} = \ln T + (\gamma - 1) \ln V + \text{const}; \quad \exp\left\{\frac{aT^3(\gamma - 1)}{3R}\right\} = TV^{\gamma - 1} + \text{const}.$$

Остаточно маємо

$$TV^{\gamma - 1} \exp\left\{-\frac{aT^3(\gamma - 1)}{3R}\right\} = \text{const}.$$

При яких значеннях показника політропи n ідеальний газ при стисканні нагрівається, а при яких – охолоджується? Знайти молярну теплоємність для процесу $pV^2 = \text{const}$.

Оскільки в умові задачі фігурують об'єм (газ стискається) і температура (нагрівається чи охолоджується), запишемо рівняння політропи у координатах (T, V)

$$TV^{n-1} = \text{const}.$$

Якщо $n > 1$, при стисканні газ нагрівається.

Якщо $n < 1$, при стисканні газ охолоджується.

Якщо $n = 1$, тоді $T = \text{const}$.

Молярну теплоємність знайдемо з рівняння політропи

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_v} = 2; \quad 2C - 2C_v = C - C_p;$$

$$C = 2C_v - C_p = C_v - R = \frac{R}{\gamma - 1} - R = \frac{2 - \gamma}{\gamma - 1} R.$$

Остаточно маємо

$$C = \frac{2 - \gamma}{\gamma - 1} R.$$

У довгій, вертикально розташованій трубці, яка заповнена ідеальним газом і закрита знизу, без тертя ходять поршень з масою M . Відстань від дна до поршня L_0 , площа поршня S , зовнішній тиск p_0 , показник адіабати газу γ . Знайти період адіабатичних коливань поршня. Масою газу під поршнем можна знехтувати у порівнянні з M .

Із рівняння політропи

$$pV^\gamma = \text{const}$$

маємо диференціальне рівняння

$$dp = -\gamma p \frac{dV}{V}.$$

Тиск, що діє на газ під поршнем, складається із зовнішнього тиску та тиску ваги поршня і становить

$$p = p_0 + \frac{Mg}{S}.$$

При коливаннях поршня змінюється об'єм газу під поршнем

$$V = L_0 S; \quad dV = S dx; \quad \frac{dV}{V} = \frac{dx}{L_0}.$$

Тоді рівняння зміни тиску

$$dp = -\gamma \left(p_0 + \frac{Mg}{S} \right) \frac{dx}{L_0}.$$

Сила, що діє на поршень з боку газу,

$$dF = S dp = -\gamma \left(p_0 + \frac{Mg}{S} \right) \frac{S}{L_0} dx.$$

Запишемо силу за другим законом Ньютона

$$dF = M \frac{d^2}{dt^2}(dx).$$

Тоді рівняння набуває вигляду

$$M \frac{d^2}{dt^2}(dx) + \gamma \left(p_0 + \frac{Mg}{S} \right) \frac{S}{L_0} dx = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2}(dx) + \gamma \left(p_0 + \frac{Mg}{S} \right) \frac{S}{L_0 M} dx = 0$$

і це є не що інше як рфінання коливань вигляду

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0,$$

отже

$$\omega^2 = \gamma \left(p_0 + \frac{Mg}{S} \right) \frac{S}{L_0 M}; \quad \omega = \sqrt{\gamma \left(p_0 M + \frac{g}{S} \right) \frac{S}{L_0}}.$$

Остаточню

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ML_0}{\gamma(p_0 S + Mg)}}.$$

Один моль ідеального газу виконує процес, в якому $p = aT^5$, де $a = \text{const}$. Внаслідок цього процесу внутрішня енергія газу змінюється на ΔU . Вважаючи, що теплоємність газу C_v не залежить від температури, знайти для цього процесу молярну теплоємність, роботу і необхідну кількість тепла.

Молярну теплоємність можна знайти з показника політропи. Для цього перепишемо рівняння політропи у вигляді

$$\frac{p^{\frac{n-1}{n}}}{T} = \text{const}$$

і порівняємо його із рівнянням процесу з умови задачі

$$\frac{p^{1/5}}{T} = \text{const}.$$

Звідси

$$\frac{n-1}{n} = \frac{1}{5}; \quad n = \frac{5}{4}; \quad n = \frac{C - C_p}{C - C_v} = \frac{5}{4}; \quad \boxed{C = C_v - 4R}.$$

Кількість теплоти пов'язана із молярною теплоємністю як

$$Q = C\Delta T = C \frac{\Delta U}{C_v} = \frac{(C_v - 4R)}{C_v} \Delta U,$$

де скористались співвідношенням

$$\Delta U = C_v \Delta T.$$

Отже, необхідна кількість теплоти для такого процесу

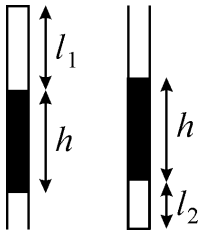
$$Q = \left(1 - \frac{4R}{C_v}\right) \Delta U; \quad Q = [1 - 4(\gamma - 1)] \Delta U = (5 - 4\gamma) \Delta U; \quad \boxed{Q = (5 - 4\gamma) \Delta U}.$$

Роботу визначимо за першим началом термодинаміки

$$A = Q - \Delta U; \quad A = -\frac{4R}{C_v} \Delta U; \quad \boxed{A = -4(\gamma - 1) \Delta U}.$$

145. Гурский

У тонкій трубці, запаяній з одного кінця, стовпчик повітря замкнений стовпчиком ртуті, який має довжину $h = 19$ см. якщо трубка розташована відкритим кінцем до низу, довжина стовпчика повітря $l_1 = 10$ см, а якщо перевернути трубку відкритим кінцем вгору, довжина стовпчика повітря становитиме $l_2 = 6$ см. Знайти атмосферний тиск p .



У першому випадку тиск повітря всередині трубки (в мм рт.ст.)

$$p_1 = p - h.$$

Відповідно, у другому випадку

$$p_2 = p + h.$$

Процес у нас ізотермічний, отже за законом Бойля-Маріотта

$$p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

Оскільки переріз трубки є сталим, можна переписати закон у вигляді

$$p_1 l_1 = p_2 l_2.$$

Підставимо вирази для тисків

$$(p - h)l_1 = (p + h)l_2,$$

звідси

$$p = h \frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2}.$$

Числове значення

$$p = 190(\text{мм}) \frac{10 + 6}{10 - 6} = 190 \cdot \frac{16}{4} = 760 \text{ мм рт.ст.}$$

147. Гурский

Водолазний дзвін висотою $h = 3 \text{ м}$ із сталим поперечним перерізом спускається в море на глибину $H = 80 \text{ м}$. До якої висоти h_0 підніметься вода у дзвоні, коли він досягне глибини H , якщо температура води у поверхні $t_1 = 20^\circ \text{ С}$, а на глибині H температура $t_2 = 7^\circ \text{ С}$? До якого тиску p_0 треба довести повітря, яке подається у дзвін, щоб повністю видалити з нього воду? Густина морської води $\rho = 1,03 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Оскільки маса повітря при зануренні дзвону у воду не змінюється, то для цього процесу можна застосувати узагальнене рівняння стану

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

Переріз дзвону є сталим по висоті, отже можна перейти до висоти повітряного стовпа

$$\frac{p_1 h_1}{T_1} = \frac{p_2 h_2}{T_2}, \quad h_1 = h, \quad h_2 = h - h_0,$$

отже

$$\frac{p_1 h}{T_1} = \frac{p_2 (h - h_0)}{T_2}.$$

Визначимо тиск.

$$p_1 = p - \text{атмосферний тиск на поверхні моря}; \quad p_2 = p + \rho g H,$$

тому

$$\frac{p h}{T_1} = \frac{(p + \rho g H)(h - h_0)}{T_2}.$$

Звідси

$$h_0 = h \left[1 - \frac{p T_2}{(p + \rho g H) T_1} \right] \approx 2,68 \text{ м}.$$

Тиск повітря для повного видалення води можна знайти за законом Бойля-Маріотта, вважаючи, що температура повітря у дзвоні під час видалення води не змінюється

$$p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

Тоді

$$(p + \rho g H)(h - h_0) = p_0 h,$$

звідки

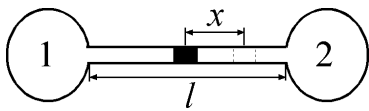
$$p_0 = \frac{(p + \rho g H)(h - h_0)}{h}.$$

Покладаючи $h_0 = 0$, маємо

$$p_0 = p + \rho g H = 9,1 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

148. Гурский

Два сферичні балони з повітрям, які мають об'єм $V_0 = 1\text{ л}$ кожний, з'єднані трубкою діаметром $d = 6\text{ мм}$ і довжиною $l = 1\text{ м}$. В трубці знаходиться крапелька ртуті, яка при 0°С розташована посередині трубки. На яку відстань пересунеться крапелька ртуті, якщо перший балон нагрівається на 2°С , а другий балон охолоджується на 1°С ? Розширенням стінок знехтувати.



Крапелька ртуті буде рухатись при зміні температури повітря в балонах так, щоб тиск по обидва боки від неї вирівнявся ($p_1 = p_2$). Оскільки маси газів по обидва боки від крапельки залишаються незмінними, можна застосувати рівняння стану

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \nu R; \quad \frac{p_2 V_2}{T_2} = \nu R; \quad \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}, \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2},$$

де ν – кількість молів повітря, однакова з кожного боку.

Далі задачу можна розв'язувати різними способами.

Перший спосіб. Розв'яжемо задачу “в лоб”. Після зсуву крапельки запишемо вираз для кожного об'єму

$$V_1 = V_0 + \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{l}{2} + \frac{\pi d^2}{4} \cdot x; \quad V_2 = V_0 + \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{l}{2} - \frac{\pi d^2}{4} \cdot x.$$

Підставивши їх у рівняння стану, отримаємо

$$\frac{V_0 + \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{l}{2} + \frac{\pi d^2}{4} \cdot x}{T_1} = \frac{V_0 + \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{l}{2} - \frac{\pi d^2}{4} \cdot x}{T_2},$$

звідки

$$x = \frac{V_0 + \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{l}{2}}{\frac{\pi d^2}{4}} \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}.$$

Другий спосіб. Запишемо систему рівнянь, скориставшись виразом для повного об'єму системи

$$\begin{cases} \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \\ V_1 + V_2 = 2V_0 + \frac{\pi d^2}{4} l \end{cases}.$$

З неї знайдемо

$$V_1 = \frac{2V_0 + \frac{\pi d^2}{4} l}{T_1 + T_2} T_1 \quad \text{і} \quad V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} = \frac{2V_0 + \frac{\pi d^2}{4} l}{T_1 + T_2} T_2,$$

а також величину

$$V_1 - V_2 = 2\Delta V = \frac{2V_0 + \frac{\pi d^2}{4}l}{T_1 + T_2}(T_1 - T_2),$$

звідки

$$\Delta V = \frac{1}{2} \cdot \frac{2V_0 + \frac{\pi d^2}{4}l}{T_1 + T_2}(T_1 - T_2).$$

З іншого боку,

$$\Delta V = \frac{\pi d^2}{4}x,$$

отже

$$\frac{\pi d^2}{4}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2V_0 + \frac{\pi d^2}{4}l}{T_1 + T_2}(T_1 - T_2); \quad x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2V_0 + \frac{\pi d^2}{4}l}{\frac{\pi d^2}{4}} \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2};$$

остаточно

$$x = \frac{V_0 + \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}}{\frac{\pi d^2}{4}}.$$

Числове значення : $x = 21 \text{ см}$. На цю відстань крапелька зсунеться у напрямку охолодженого балона.

Відомо, що через три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину. Площина в кристалі, у якій знаходяться, принаймні, три його атоми, називається атомною площиною кристалу. Множина паралельних рівновіддалених атомних площин називається сімейством атомних площин. Міжплощинна відстань d – це відстань від початку координат до найближчої із атомних площин сімейства (і, відповідно, між рештою сусідніх площин сімейства).

Розглянемо визначення площин на прикладі кубічного кристалу, оскільки зручніше працювати з декартовою системою координат. Осі координат направимо уздовж ребер куба. Позначимо відстань між найближчими атомами на осі x через a . Оскільки кристал має вісь симетрії третього порядку, то такі ж відстані між найближчими атомами і на осях y і z . Прийmemo a за одиницю виміру.

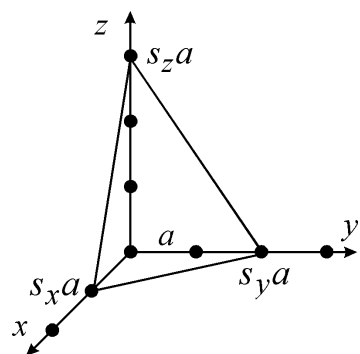


Рис.9.?

Нехай якась площина проходить через три атоми на осях координат і відтинає на них три відрізки $s_x a$, $s_y a$ і $s_z a$. Величини s_x , s_y і s_z – цілі числа, причому можуть бути як додатніми, так і від'ємними.

Рівняння площини, яка не паралельна жодній з координатних осей, має вигляд

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Вона відтинає на осях відрізки

$$s_x a = -\frac{D}{A}, \quad s_y a = -\frac{D}{B}, \quad s_z a = -\frac{D}{C}, \quad \text{де } A, B, C \neq 0.$$

Тоді рівняння площини можна записати у вигляді

$$\frac{x}{s_x a} + \frac{y}{s_y a} + \frac{z}{s_z a} = 1.$$

Це канонічне рівняння площини.

Складемо відношення обернених величин відтятих відрізків

$$\frac{1}{s_x a} : \frac{1}{s_y a} : \frac{1}{s_z a} = \frac{1}{s_x} : \frac{1}{s_y} : \frac{1}{s_z}$$

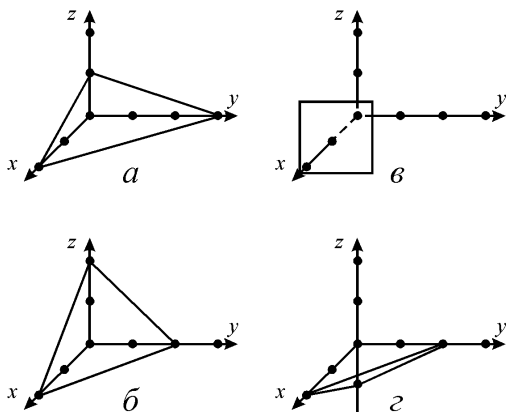
і виразимо його через відношення таких трьох найменших цілих чисел h , k і l , що

$$\frac{1}{s_x} : \frac{1}{s_y} : \frac{1}{s_z} = h : k : l. \quad (9.3)$$

Числа h , k і l називають індексами Міллера, або кристалографічними індексами. Прийнято записувати їх у круглих дужках ($h k l$).

Очевидно, що одна трійка індексів Міллера визначає не одну атомну площину, а ціле сімейство паралельних атомних площин $nh : nk : nl$.

Симетрія може привести до існування декількох сімейств площин, фізичні властивості яких однакові. Наприклад, у кубічному кристалі за наявності осей симетрії 3 порядку у площин (100) , (010) , (001) , $(\bar{1}00)$, $(0\bar{1}0)$ і $(00\bar{1})$ ($\bar{1}$ означає мінус одиницю) фізичні властивості однакові. Сукупність усіх цих фізично еквівалентних площин позначають у фігурних дужках $\{100\}$. У загальному випадку фізично еквівалентні сімейства площин позначають як $\{hkl\}$.



9.2 Знайти індекси Міллера площин, наведених на рисунках.

а. Нехай площина відтинає на осях відрізки $s_x = 2$, $s_y = 3$ і $s_z = 1$, як це показано на рисунку. Тоді, згідно із співвідношенням (9.3),

$$\frac{1}{s_x} : \frac{1}{s_y} : \frac{1}{s_z} = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{1} = 3 : 2 : 6$$
, тобто індекси Міллера площини (326).

б. У цьому випадку площина відтинає на осях відрізки $s_x = 2$, $s_y = 2$ і $s_z = 2$, звідки

$$\frac{1}{s_x} : \frac{1}{s_y} : \frac{1}{s_z} = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1 : 1 : 1$$
. Отже, ця площина має індекси Міллера (111).

в. Тепер визначимо індекси Міллера для площини, яка перетинає вісь x , відсікаючи відрізок $s_x = 1$, і паралельна осям y та z . Паралельність площини і осей еквівалентна тому, що вони перетинаються на нескінченності, отже співвідношення (9.3) набуває вигляду $\frac{1}{s_x} : \frac{1}{s_y} : \frac{1}{s_z} = \frac{1}{1} : \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} = 1 : 0 : 0$. Індекси Міллера такої площини (100).

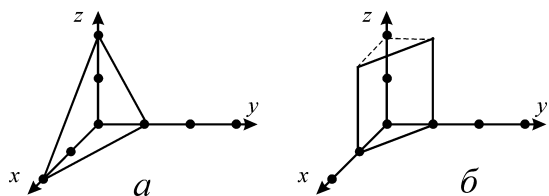
г. На цьому рисунку площина перетинає вісь z у від'ємній частині і відтинає відрізки відтинає на осях відрізки $s_x = 2$, $s_y = 2$ і $s_z = -1$. Співвідношення (9.3) справедливе і у цьому випадку $\frac{1}{2} : \frac{1}{2} : \frac{1}{(-1)} = 1 : 1 : (-2)$. Індекси Міллера такої площини мають вигляд $(11\bar{2})$, де $\bar{2}$ означає мінус два і відповідає перетину площиною осі z на її від'ємній частині.

9.3 За відомими індексами Міллера а) (121); б) (110), побудувати відповідні атомні площини.

Для того щоб за індексами Міллера (hkl) побудувати обумовлену ними площину, скористаємось співвідношенням, зворотнім до (9.3), тобто

$$\frac{1}{h} : \frac{1}{k} : \frac{1}{l} = s_x : s_y : s_z.$$

Це означає, що практично треба визначити співвідношення $\frac{1}{h} : \frac{1}{k} : \frac{1}{l}$, звести його до найменших



цілих чисел, які і визначають відрізки s_x, s_y, s_z , які відтинає площина на координатних осях, а потім через їхні кінці провести шукану площину.

а) Нехай індекси Міллера атомної площини (121). Записуємо співвідношення $\frac{1}{1} : \frac{1}{2} : \frac{1}{1} = 2 : 1 : 2$ і будуємо на осях x та z довжиною 2 міжатомні відстані, а на осі y – одиничний відрізок, і проводимо шукану площину (рис.а).

б) У другому випадку індекси Міллера (110). Співвідношення між ними набуває вигляду $\frac{1}{1} : \frac{1}{1} : \frac{1}{0} = 1:1:\infty$. Отримана площина паралельна осі z і відтинає одиничні відрізки на осях x та y (рис.б).

9.4 Знайти зв'язок міжплощинної відстані d із індексами Міллера (hkl) , що визначають задане сімейство атомних площин.

Розглянемо атомну площину, що є найближчою до початку координат і належить до сімейства з індексами Міллера (hkl) . Проведемо з початку координат нормаль до площини. Відстань від початку координат до площини є за означенням міжплощинною відстанню d . Нормаль утворює із координатними осями x, y, z відповідно кути $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$. Косинуси цих кутів мають назву напрямляючі косинуси нормалі.

Напрямляючі косинуси визначаються через міжплощинну відстань та відрізки, що відтинає площина на відповідних координатних осях, як

$$\cos \varphi_x = d : \left(\frac{a}{h} \right) = \frac{dh}{a}; \quad \cos \varphi_y = \frac{dk}{b}; \quad \cos \varphi_z = \frac{dl}{c},$$

де a, b, c – найменші відстані між атомами у напрямках осей x, y, z . Напрямляючі косинуси пропорційні кристалографічним індексам. Для кристалографічних сингоній із прямокутними координатними осями має місце співвідношення

$$\cos^2 \varphi_x + \cos^2 \varphi_y + \cos^2 \varphi_z = 1.$$

Підставивши у нього значення напрямляючих косинусів, отримаємо

$$d = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{h}{a}\right)^2 + \left(\frac{k}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{c}\right)^2}}.$$

Для кубічної сингонії $a = b = c$, отже

$$d = \sqrt{\frac{a}{h^2 + k^2 + l^2}}.$$

Для тетрагональної сингонії $a = b \neq c$, тому

$$d = \sqrt{\frac{1}{\frac{h^2 + k^2}{a^2} + \frac{l^2}{c^2}}}.$$

Знаючи міжплощинну відстань, можна легко визначити значення напрямляючих косинусів для кубічного кристалу

$$\cos \varphi_x = \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}; \quad \cos \varphi_y = \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}; \quad \cos \varphi_z = \frac{l}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}.$$

Таким чином, напрямляючі косинуси нормалі до кристалографічної площини у кубічному визначаються лише кристалографічними індексами.

Циліндр висоти H , який має поперечний переріз S , з'єднаний із атмосферою через кран. До верхньої основи циліндру причеплений на пружині поршень, який ковзає без тертя і при відкритому крані знаходиться на висоті h_1 від дна циліндра. Кран закривається при температурі t_1 і тискові повітря p_1 . Потім повітря в нижній частині циліндру нагрівається до температури t_2 . При цьому поршень встановлюється на висоті h_2 від нижньої основи циліндру. Знайти пружність пружини k , вважаючи, що деформація пружини пропорційна діючій силі. Поршень вважати невагомим і теплоізованим.

Для повітря у нижній частині циліндру

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2},$$

або, врахувавши однаковість перерізу

$$\frac{p_1 h_1}{T_1} = \frac{p_2 h_2}{T_2}.$$

Для повітря у верхній частині циліндру маємо ізотермічний процес

$$p_1(H - h_1) = p'_2(H - h_2),$$

де p'_2 – тиск повітря у верхній частині.

Поршень перебуває у спокої, тому запишемо рівність тисків

$$p_2 = p'_2 + \frac{F}{S},$$

де $F = k(h_2 - h_1)$ – сила, з якою пружина діє на поршень. Визначивши з цього рівняння тиск у верхній частині після нагріву нижньої частини, маємо

$$p_1(H - h_1) = \left[p_2 - \frac{k}{S}(h_2 - h_1) \right] (H - h_2),$$

звідки можемо визначити тиск у нижній частині

$$p_2 = p_1 \frac{H - h_1}{H - h_2} + \frac{k}{S}(h_2 - h_1).$$

З іншого боку, вираз для тиску внизу можна знайти з найпершого рівняння

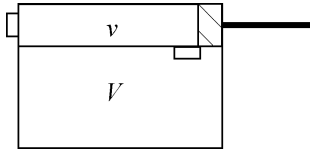
$$p_2 = p_1 \frac{h_1 T_2}{h_2 T_1}.$$

Прирівнявши ці вирази

$$p_1 \frac{h_1 T_2}{h_2 T_1} - p_1 \frac{H - h_1}{H - h_2} = \frac{k}{S}(h_2 - h_1),$$

знаходимо пружність пружини

$$k = \frac{p_1 S}{h_2 - h_1} \left(\frac{h_1 T_2}{h_2 T_1} - \frac{H - h_1}{H - h_2} \right).$$



Скільки циклів відкачки n треба зробити, щоб за допомогою поршневого насоса, який захоплює при кожному циклі об'єм v повітря, відкачати повітря із балону об'ємом V до тиску p_n , якщо початковий тиск у балоні p_0 дорівнював атмосферному.

Процес відбувається при сталій температурі, отже підпорядкований закону Бойля-Маріотта, і після першого циклу (він займав об'єм V , а коли поршень пішов ліворуч – $(V + v)$)

$$p_0 V = p_1 (V + v), \quad \text{або} \quad p_1 = p_0 \frac{V}{V + v}.$$

Після другого циклу

$$p_1 V = p_2 (V + v), \quad \text{або} \quad p_2 = p_1 \frac{V}{V + v} = p_0 \left(\frac{V}{V + v} \right)^2.$$

Після n циклів

$$p_n = p_{n-1} \frac{V}{V + v} = p_0 \left(\frac{V}{V + v} \right)^n,$$

звідки

$$n = \frac{\ln \frac{p_n}{p_0}}{\ln \frac{V}{V + v}} = \frac{\lg \frac{p_n}{p_0}}{\lg \frac{V}{V + v}}.$$

Потенціальна енергія молекули в деякому потенціальному полі центральних сил залежить від r як $U(r) = ar^2$; $a > 0$. Температура газу T , концентрація в центрі поля n_0 . Знайти : а) кількість молекул в інтервалі $r \div (r + dr)$; б) найбільш імовірну відстань молекул від центра поля; в) відносну кількість молекул в шарі $r \div (r + dr)$; г) у скільки разів зміниться n_0 при зменшенні температури в η разів; д) кількість молекул з потенціальною енергією від U до $U + dU$; е) найбільш імовірне значення потенціальної енергії.

$$\text{а) } dN(r) = n dV = n_0 \cdot e^{-\frac{U(r)}{kT}} 4\pi r^2 dr = n_0 \cdot 4\pi r^2 e^{-\frac{ar^2}{kT}} dr.$$

$$\text{б) } \frac{dN(r)}{dr} = \frac{d}{dr} \left(r^2 e^{-\frac{ar^2}{kT}} \right) = \left(2r - 2 \frac{ar^3}{kT} \right) e^{-\frac{ar^2}{kT}} = 0; \quad r_{\text{ім}} = \sqrt{\frac{kT}{a}}.$$

в) Загальна кількість молекул дорівнює

$$N = \int_0^\infty dN(r) = 4\pi n_0 \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{ar^2}{kT}} dr = 4\pi n_0 \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{kT}{a} \right)^{3/2}, \quad \text{звідси } n_0 = \left(\frac{\pi kT}{a} \right)^{3/2} N;$$

$$\frac{dN}{N} = \left(\frac{\pi kT}{a} \right)^{-3/2} 4\pi r^2 e^{-\frac{ar^2}{kT}} dr = \left(\frac{a}{\pi kT} \right)^{3/2} \cdot 4\pi r^2 e^{-\frac{ar^2}{kT}} dr.$$

г) Оскільки $n_0 = \left(\frac{a}{\pi kT} \right)^{3/2} N$, то n_0 збільшується в $\eta^{3/2}$ разів.

д) Враховуючи, що $U = ar^2$, та $dr = \frac{dU}{2ar} = \frac{dU}{2\sqrt{Ua}}$, маємо

$$dN = n_0 \cdot 4\pi r^2 e^{-\frac{ar^2}{kT}} dr = n_0 \cdot 4\pi \frac{U}{a} \cdot e^{-\frac{U}{kT}} \cdot \frac{dU}{2\sqrt{Ua}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} N \frac{1}{(kT)^{3/2}} \sqrt{U} e^{-\frac{U}{kT}} dU.$$

е) Як функція від U : $\frac{dN}{dU} = \text{const} \cdot f(U)$, $f(U) = \sqrt{U} e^{-\frac{U}{kT}}$. Максимум $f(U)$, таким

чином, визначається із

$$\frac{df}{dU} = \left(\frac{1}{2\sqrt{U}} - \frac{\sqrt{U}}{kT} \right) e^{-\frac{U}{kT}} = 0, \quad \text{і } U_{\text{ім}} = \frac{kT}{2}.$$

Знайти зміну ентропії моля ідеального газу, який спочатку збільшив об'єм по політропі так, що його тиск упав в m разів, а потім був ізохорно нагрітий до початкового тиску. Показники політропи n та адіабати γ відомі.

Це процес не круговий ! Інакше б зміна ентропії дорівнювала б нулю, оскільки вона є функцією стану. Процес 1-2 політропний, процес 2-3 ізохорне нагрівання.
 $p_1 = p_3$.

За означенням ентропії

$$\Delta S = \int_1^3 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^3 C_p \frac{dT}{T} = C_p \ln \frac{T_3}{T_1}.$$

З умови задачі

$$\frac{p_1}{p_2} = m.$$

Для ізохорного процесу 2-3

$$\frac{p_3}{T_3} = \frac{p_1}{T_3} = \frac{p_2}{T_2}, \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{p_1}{p_2} = m.$$

З рівняння політропи 1-2

$$\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Тоді можна знайти

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} = m \cdot m^{-\frac{n-1}{n}}$$

і підставити у зміну ентропії

$$\Delta S = C_p \ln m^{\frac{1}{n}} = \frac{C_p}{n} \ln m.$$

Позбавившись теплоємності через рівняння Майєра, маємо

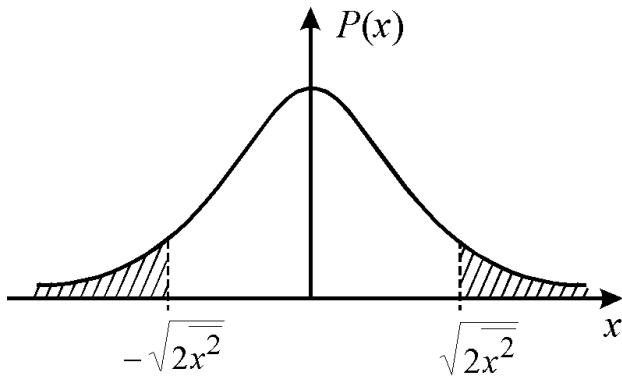
$$\boxed{\Delta S = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1)n} \ln m}.$$

Знайти імовірність того, що квадрат флуктуації буде більше подвоєного середнього квадрату.

Скористаємось розподілом Гауса, вираженим через дисперсію

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{(\Delta n)^2}} e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2(\Delta n)^2}}$$

Позначимо величину флуктуації $n - \bar{n} = x$. Тоді середній квадрат флуктуації $\overline{x^2}$. В таких позначеннях розподіл Гауса набуває вигляду



$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\overline{x^2}}\right).$$

Знаходження імовірності того, що квадрат флуктуації буде більший подвоєного середнього квадрату $x^2 > 2\overline{x^2}$, означає знаходження імовірності того, що модуль флуктуації буде більший за квадратний корінь із подвоєного середнього квадрату $|x| > \sqrt{2\overline{x^2}}$, тобто лежати у межах

$x < -\sqrt{2\overline{x^2}}$ та $x > \sqrt{2\overline{x^2}}$ (дивись рисунок). Імовірність буде визначатись як

$$W(x^2 > 2\overline{x^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2\overline{x^2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\overline{x^2}}\right) dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}} \int_{\sqrt{2\overline{x^2}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\overline{x^2}}\right) dx.$$

Внаслідок симетричності розподілу $P(x)$ можна записати

$$W(x^2 > 2\overline{x^2}) = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}} \int_{\sqrt{2\overline{x^2}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\overline{x^2}}\right) dx.$$

Перетворимо інтеграл наступним чином

$$W(x^2 > 2\overline{x^2}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}} \left[\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\overline{x^2}}\right) dx - \int_0^{\sqrt{2\overline{x^2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\overline{x^2}}\right) dx \right].$$

Перший з інтегралів є інтегралом Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

У другому інтегралі зробимо заміну

$$y^2 = \frac{x^2}{2\overline{x^2}}; \quad x = y\sqrt{2\overline{x^2}}; \quad dx = dy\sqrt{2\overline{x^2}}.$$

Межі інтегрування при цьому зміняться

$$x = 0 \rightarrow y = 0; \quad x = \sqrt{2x^2} \rightarrow y = 1.$$

Тоді вираз для імовірності набуває вигляду

$$W\left(x^2 > \overline{2x^2}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2x^2} - \sqrt{2x^2} \int_0^1 e^{-y^2} dy \right] = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-y^2} dy.$$

Остаточно

$$\boxed{W\left(x^2 > \overline{2x^2}\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-y^2} dy.}$$

Знайти імовірність того, що флуктуація не перевищує потрійного значення середньої квадратичної флуктуації.

Скористаємось розподілом Гауса, вираженим через дисперсію

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\Delta n)^2}} e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2(\Delta n)^2}}$$

Позначимо величину флуктуації $n - \bar{n} = x$. Тоді середній квадрат флуктуації $\overline{x^2}$. В таких позначеннях розподіл Гаусса набуває вигляду

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\overline{x^2}}\right).$$

Знаходження імовірності того, що величина флуктуації не буде перевищувати потроєного середньої квадратичної флуктуації $x < 3\sqrt{\overline{x^2}}$, означає знаходження імовірності того, що модуль флуктуації буде більший за квадратний корінь із подвоєного середнього квадрату $|x| < \sqrt{3\overline{x^2}}$, тобто лежати у межах $-\sqrt{3\overline{x^2}} < x < \sqrt{3\overline{x^2}}$. Імовірність буде визначатись як

$$W\left(x < 3\sqrt{\overline{x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}} \int_{-3\sqrt{\overline{x^2}}}^{3\sqrt{\overline{x^2}}} e^{-\frac{x^2}{2\overline{x^2}}} dx = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}} \int_0^{3\sqrt{\overline{x^2}}} e^{-\frac{x^2}{2\overline{x^2}}} dx.$$

Заміна $y^2 = \frac{x^2}{2\overline{x^2}}$ змінить межі інтегрування

$$x = 0 \rightarrow y = 0; \quad x = 3\sqrt{2\overline{x^2}} \rightarrow y = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Тоді

$$W\left(x < 3\sqrt{\overline{x^2}}\right) = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{x^2}}} \sqrt{2\overline{x^2}} \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy.$$

У колбі знаходиться суміш двох газів А і Б. У стінці колби є малий отвір, який з'єднує колбу і вакуум. За 1с через отвір вилітає у середньому 5 частинок газу А і 6 частинок газу Б. Яка імовірність того, що за 1 с через отвір вилетить 3 частинки газу А і 5 частинок газу Б?

Для малої кількості частинок використовуємо розподіл Пуассона

$$P(n) = \frac{(\bar{n})^n}{n!} \cdot e^{-\bar{n}}.$$

Імовірність вилітання частинок кожного газу незалежна.

$$P(n_1) = \frac{(\bar{n}_1)^{n_1}}{n_1!} \cdot e^{-\bar{n}_1}; \quad P(n_2) = \frac{(\bar{n}_2)^{n_2}}{n_2!} \cdot e^{-\bar{n}_2},$$

тому імовірність вильоту за секунду певної кількості частинок А і частинок Б є імовірністю складної події і визначається

$$P(n_1, n_2) = P(n_1) \cdot P(n_2) = \frac{\bar{n}_1^{n_1} \bar{n}_2^{n_2}}{n_1! n_2!} e^{-\bar{n}_1 - \bar{n}_2} = \frac{5^3 \cdot 6^5}{3! 5!} e^{-11} = \frac{125 \cdot 7776}{6 \cdot 120} \cdot 1,67 \cdot 10^{-5};$$

$$P(n_1, n_2) = 0,0225.$$

Знайти дисперсію і відносну флуктуацію для функції $f(E) = E^2 + \alpha E$, яка залежить від кінетичної енергії E молекул ідеального газу, що знаходиться при температурі T .

За означенням дисперсії

$$\langle \Delta f^2 \rangle = \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2.$$

Знайдемо окремо доданки.

$$\langle f \rangle = \langle E^2 \rangle + \alpha \langle E \rangle.$$

Середнє значення енергії знайдемо за допомогою розподілу Максвелла за енергіями

$$F(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}}.$$

Тоді

$$\langle E^2 \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty E^2 \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} dE; \quad \langle E \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty E \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} dE.$$

Зробимо заміну змінної $E = x^2$; $dE = 2x dx$, тоді

$$\langle E^2 \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty x^6 e^{-\frac{x^2}{kT}} dx = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \cdot \frac{15}{16} \sqrt{\pi} (kT)^{7/2} = 4(kT)^2;$$

$$\langle E \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty x^4 e^{-\frac{x^2}{kT}} dx = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \cdot \frac{3}{8} \sqrt{\pi} (kT)^{5/2} = \frac{3}{2} kT.$$

Отже

$$\langle f \rangle = 4(kT)^2 + \alpha \frac{3}{2} kT; \quad \langle f \rangle^2 = 16(kT)^4 + 12\alpha(kT)^3 + \alpha^2 \frac{9}{4} (kT)^2.$$

Другий доданок

$$f^2 = E^4 + 2\alpha E^3 + \alpha^2 E^2; \quad \langle f^2 \rangle = \langle E^4 \rangle + 2\alpha \langle E^3 \rangle + \alpha^2 \langle E^2 \rangle.$$

$$\langle E^4 \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty E^4 \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} dE; \quad \langle E^3 \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty E^3 \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} dE.$$

Знову зробимо заміну змінної $E = x^2$; $dE = 2x dx$, тоді

$$\langle E^4 \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty x^{10} e^{-\frac{x^2}{kT}} dx = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \cdot \frac{945}{64} \sqrt{\pi} (kT)^{11/2} = \frac{945}{16} (kT)^4;$$

$$\langle E^3 \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty x^8 e^{-\frac{x^2}{kT}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \cdot \frac{105}{32} \sqrt{\pi} (kT)^{9/2} = \frac{105}{16} (kT)^3.$$

Тоді

$$\langle f^2 \rangle = \frac{945}{16}(kT)^4 + 2\alpha \frac{105}{16}(kT)^3 + \alpha^2 4(kT)^2,$$

а дисперсія

$$\langle \Delta f^2 \rangle = \frac{945}{16}(kT)^4 + 2\alpha \frac{105}{16}(kT)^3 + \alpha^2 4(kT)^2 - 16(kT)^4 - 12\alpha(kT)^3 - \alpha^2 \frac{9}{4}(kT)^2;$$

$$\boxed{\langle \Delta f^2 \rangle = \frac{689}{16}(kT)^4 + \alpha \frac{9}{8}(kT)^3 + \alpha^2 \frac{7}{4}(kT)^2};$$

і відносна флуктуація

$$\boxed{\delta = \frac{\sqrt{\langle \Delta f^2 \rangle}}{\langle f \rangle} = \frac{\frac{689}{16}(kT)^4 + \alpha \frac{9}{8}(kT)^3 + \alpha^2 \frac{7}{4}(kT)^2}{4(kT)^2 + \alpha \frac{3}{2}kT}}.$$

Знайти середню довжину вільного пробігу молекул кисню за нормальних умов (температура 273 К, тиск 760 мм рт.ст.), кількість зіткнень, що дістає молекула за 1 с, ефективний переріз зіткнень і діаметр молекули, якщо коефіцієнт дифузії кисню за цих умов $D = 0,19 \text{ см}^2/\text{с}$.

Додаткові дані для розрахунків :

маса протона $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$,

стала Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/м} \cdot \text{К}$,

число Лошмідта $N_L = 2,7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$.

Коефіцієнт дифузії визначається як

$$D = \frac{\lambda \langle v \rangle}{3};$$

звідки

$$\lambda = \frac{3D}{\langle v \rangle} = \frac{3 \cdot 0,19}{\sqrt{\frac{8 \cdot 1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 273}{\pi \cdot 32 \cdot 1,67 \cdot 10^{-24}}}} = \frac{0,57}{4,237 \cdot 10^4} = 1,35 \cdot 10^{-5} \text{ см}.$$

Кількість зіткнень за одиницю часу

$$z = \frac{\langle v \rangle}{\lambda} = \frac{4,237 \cdot 10^4}{1,35 \cdot 10^{-5}} = 3,15 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

Довжина вільного пробігу пов'язана із перерізом зіткнень як

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma};$$

отже

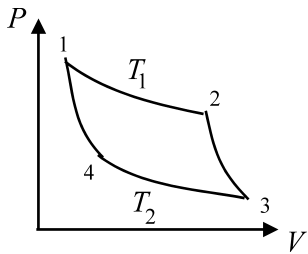
$$\sigma = \frac{1}{\lambda n} = \frac{1}{1,35 \cdot 10^{-5} \cdot 2,7 \cdot 10^{19}} = 2,74 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2;$$

В свою чергу, переріз зіткнень пов'язаний із розміром молекул

$$\sigma = \sqrt{2}\pi d^2; \quad d = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2,74 \cdot 10^{-15}}{\pi\sqrt{2}}} = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ см}.$$

Додому : розв'язати аналогічну задачу для кисню.

В'язкість азоту за нормальних умов дорівнює 16,7 мкПа·с. Знайти довжину вільного пробігу, кількість співударів в кубічному сантиметрі за секунду, ефективний переріз співударів і діаметр молекули азоту.



Один моль ідеального газу виконує оборотний цикл Карно, який складається із двох ізоTERM 1-2 і 3-4, з температурами T_1 і T_2 ($T_1 > T_2$) та двох політроп 2-3 і 4-1 з теплоємністю C_0 . Знайти к.к.д. циклу, якщо на ізоTERMAХ об'єм змінюється в n разів.

Внутрішню енергію можемо не враховувати, оскільки цикл замкнутий, а внутрішня енергія є функцією стану. Вона повернеться до вихідного значення, і в сумі отримаємо нуль.

Кількість теплоти, яка виділяється на кожній ізоТЕРМічній ділянці,

$$\delta Q = p dV = RT \frac{dV}{V}; \quad Q = RT \int \frac{dV}{V},$$

отже

$$Q_{12} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} > 0 \text{ (бере від нагрівача); } Q_{34} = RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} < 0 \text{ (віддає холодильнику).}$$

Кількість теплоти на політропах знайдемо з означення теплоємності

$$C = \frac{\delta Q}{dT}; \quad Q = C \Delta T,$$

отже

$$Q_{23} = C_0(T_2 - T_1) < 0; \quad Q_{41} = C_0(T_1 - T_2) > 0; \quad Q_{23} = -Q_{41}.$$

За означенням к.к.д.

$$\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1},$$

де від нагрівача взята кількість теплоти $Q_1 = Q_{12} + Q_{41}$, а холодильнику передана кількість теплоти $Q_2 = Q_{34} + Q_{23}$.

$$\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = \frac{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + C_0(T_1 - T_2) - RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} + C_0(T_2 - T_1)}{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + C_0(T_1 - T_2)} = \frac{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + C_0(T_1 - T_2)}.$$

За умовою задачі $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} = n$. Отже

$$\eta = \frac{R(T_1 - T_2) \ln n}{RT_1 \ln n + C_0(T_1 - T_2)};$$

$$\boxed{\eta = \frac{R(T_1 - T_2) \ln n}{RT_1 \ln n + C_0(T_1 - T_2)}}.$$

Моль ідеального газу виконує процес, в якому ентропія змінюється за законом $S = aT + C_v \ln T$. Знайти як залежить від температури об'єм газу, якщо відомо, що при T_0 об'єм газу V_0 .

З першого начала термодинаміки

$$\delta Q = C_v dT + p dV.$$

Продиференціюємо вираз для ентропії, даний за умовою задачі,

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = a dT + C_v \frac{dT}{T}$$

і виразимо кількість теплоти

$$dQ = aT dT + C_v dT.$$

Прирівняємо теплоти

$$\delta Q = C_v dT + p dV = aT dT + C_v dT,$$

звідки

$$p dV = aT dT.$$

Скористаємось рівнянням Клапейрона

$$pV = RT; \quad RT \frac{dV}{V} = aT dT; \quad R \frac{dV}{V} = a dT.$$

Проінтегруємо рівняння

$$\frac{R}{a} \ln V = T + C; \quad \ln V = \frac{a}{R} T + C_1,$$

а константу знайдемо з умови : при $T = T_0$ об'єм газу $V = V_0$, отже

$$C_1 = \ln V_0 - \frac{a}{R} T_0.$$

Підставимо у рівняння

$$\ln \frac{V}{V_0} = \frac{a}{R} (T - T_0),$$

звідки

$$\boxed{V = V_0 e^{\frac{a}{R} (T - T_0)}}$$

або

$$\boxed{T = T_0 + \frac{R}{a} \ln \frac{V}{V_0}}.$$

Вважаючи, що довжина вільного пробігу не залежить від температури, знайти стаціонарний розподіл температури у газі між двома коаксіальними циліндрами із радіусами R_1 і R_2 ($R_1 < R_2$) з температурами T_1 і T_2 ($T_1 > T_2$).

За основним рівнянням явища переносу у випадку теплопровідності

$$dQ = -\chi \frac{dT}{dx} dS.$$

Якщо розподіл температури стаціонарний, то кількість теплоти, яка протікає через площадку S , є сталою

$$Q = \text{const}.$$

Коефіцієнт теплопровідності

$$\chi = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \lambda c_V.$$

Оскільки $\lambda \neq f(T)$ за умовою задачі, а $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$, то $\chi = a\sqrt{T}$, де a – величина, незалежна від температури.

У випадку циліндру, площа, через яку протікає тепло, залежить від відстані до внутрішнього циліндру (l – довжина циліндру)

$$S = 2\pi r \cdot l.$$

Умову сталості кількості тепла можна записати у вигляді диференціального рівняння

$$b' \frac{dr}{r} = \sqrt{T} dT; \quad b' \ln r = \frac{2}{3} T^{3/2} + C'; \quad b \ln r = T^{3/2} + C.$$

Сталі b і C інтегрування знайдемо з граничних умов.

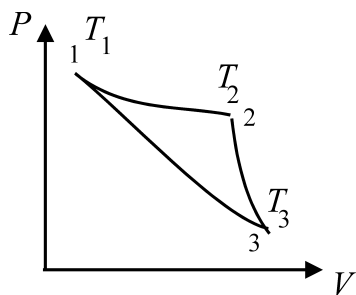
При $r = R_1$; $T = T_1$;

$$b \ln R_1 = T_1^{3/2} + C; \quad \text{звідси } C = -T_1^{3/2} + b \ln R_1; \quad T^{3/2} = T_1^{3/2} - b \ln R_1 + b \ln r.$$

При $r = R_2$; $T = T_2$; $b = \frac{T_1^{3/2} - T_2^{3/2}}{\ln R_2 / R_1}.$

Остаточно

$$T^{3/2} = T_1^{3/2} - \frac{T_1^{3/2} - T_2^{3/2}}{\ln R_2 / R_1} \ln \frac{r}{R_1}.$$



Цикл, що здійснюється над довільною речовиною, складається із ізобари 12, ізохори 23 і адіабати 31. Вважаючи всі процеси оборотними і користуючись нерівністю Клаузіуса довести, що для будь-якої речовини, у якої $C_p = \text{const}$ і $C_v = \text{const}$, температури точок 1,2 і 3

пов'язані співвідношенням $\frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^\gamma$.

Нерівність Клаузіуса $\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$ для оборотного процесу віроджується у рівність

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Запишемо зведену кількість теплоти для кожного процесу.

Ізобарний : $\int_{T_1}^{T_2} C_p \frac{dT}{T} = C_p \ln \frac{T_2}{T_1}$ (вважаємо теплоємність сталою);

Ізохорний $\int_{T_2}^{T_3} C_v \frac{dT}{T} = C_v \ln \frac{T_3}{T_2}$;

Для адіабатного процесу зведена теплота дорівнює нулю. Тоді (не)рівність Клаузіуса набуває вигляду

$$C_p \ln \frac{T_2}{T_1} + C_v \ln \frac{T_3}{T_2} = 0;$$

звідки

$$\ln \left[\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{C_p} \left(\frac{T_3}{T_2} \right)^{C_v} \right] = 0; \quad \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^\gamma \frac{T_3}{T_2} = 1.$$

Остаточно маємо

$$\boxed{\frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^\gamma},$$

що й треба було довести.

Вважаючи, що довжина вільного пробігу не залежить від температури, знайти розподіл температури у газі між двома концентричними сферами із радіусами R_1 і R_2 ($R_1 < R_2$) з температурами T_1 і T_2 ($T_1 > T_2$).

За основним рівнянням явища переносу у випадку теплопровідності

$$dQ = -\chi \frac{dT}{dx} dS.$$

Якщо розподіл температури стаціонарний, то кількість теплоти, яка протікає через площадку S , є сталою

$$Q = \text{const}.$$

Коефіцієнт теплопровідності

$$\chi = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \lambda c_V.$$

Оскільки $\lambda \neq f(T)$ за умовою задачі, а $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$, то $\chi = a\sqrt{T}$, де a – величина, незалежна від температури.

У випадку сфери, площа, через яку протікає тепло, залежить від відстані до внутрішньої сфери

$$S = 4\pi r^2.$$

Умову сталості кількості тепла можна записати у вигляді диференціального рівняння

$$b' \frac{dr}{r^2} = \sqrt{T} dT; \quad -\frac{b'}{r} = \frac{2}{3} T^{3/2} + C'; \quad T^{3/2} + C = -\frac{b}{r}.$$

Сталі b і C інтегрування знайдемо з граничних умов. При $r = R_1$; $T = T_1$;

$$T_1^{3/2} + C = -\frac{b}{R_1}; \quad C = -T_1^{3/2} - \frac{b}{R_1}; \quad T^{3/2} = T_1^{3/2} + b \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right).$$

При $r = R_2$; $T = T_2$; $T_2^{3/2} = T_1^{3/2} + b \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$; $b = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \left(T_1^{3/2} - T_2^{3/2} \right).$

Остаточно

$$T^{3/2} = T_1^{3/2} - \frac{\left(T_1^{3/2} - T_2^{3/2} \right)}{R_2 - R_1} R_1 R_2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right).$$

В'язкість азоту за нормальних умов дорівнює 16,7 мкПа·с. Знайти довжину вільного пробігу, кількість співударів в кубічному сантиметрі за секунду і діаметр молекули азоту.

Додаткові дані для розрахунків :

маса протона $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг,

стала Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/м·К,

число Лошмідта $N_L = 2,7 \cdot 10^{19}$ см⁻³.

Коефіцієнт в'язкості визначається як

$$\eta = \frac{1}{3} mn \langle v \rangle \lambda;$$

середня теплова швидкість молекул азоту

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,314 \cdot 273}{\pi \cdot 28 \cdot 10^{-3}}} = 454 \text{ м/с} = 4,54 \cdot 10^4 \text{ см/с}.$$

Можна знайти довжину вільного пробігу

$$\lambda = \frac{3\eta}{mn \langle v \rangle} = \frac{3 \cdot 1,67 \cdot 10^{-4}}{28 \cdot 1,67 \cdot 10^{-24} \cdot 2,7 \cdot 10^{19} \cdot 4,54 \cdot 10^4} = 8,7 \cdot 10^{-6} \text{ см}.$$

Якщо кількість зіткнень за одиницю часу позначимо $Z_1 = \frac{\langle v \rangle}{\lambda}$, то кількість зіткнень за одиницю часу в одиниці об'єму становить (2 – щоб позбутись подвійного врахування зіткнення кожної пари)

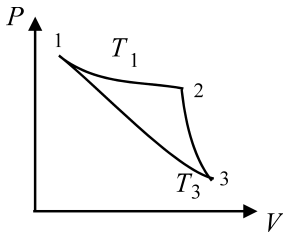
$$Z = \frac{Z_1 n}{2} = \frac{\langle v \rangle n}{2\lambda} = \frac{4,54 \cdot 10^4 \cdot 2,7 \cdot 10^{19}}{2 \cdot 8,7 \cdot 10^{-6}} = 7 \cdot 10^{28} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}.$$

Ефективний газокінетичний переріз

$$\sigma = \frac{1}{\lambda n} = \frac{1}{8,7 \cdot 10^{-6} \cdot 2,7 \cdot 10^{19}} = 4,26 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2.$$

Розмір молекул азоту

$$d = \sqrt{\frac{\sigma}{\sqrt{2}\pi}} = 3,1 \cdot 10^{-8} \text{ см}.$$



Користуючись нерівністю Клаузіуса, знайти к.к.д. оборотного циклу, який складається із ізотерми 1-2 з температурою T_1 , політропи 2-3 з теплоємністю C і температурою T_3 в точці 3 і адіабати 3-1.

Нерівність Клаузіуса

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

у випадку оборотного циклу вироджується у рівність

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Запишемо контурний інтеграл по всіх ділянках (на адіабаті кількість теплоти рівна нулю)

$$\frac{\delta Q_1}{T_1} + C \frac{dT}{T} = 0; \quad \frac{Q_1}{T_1} + C \ln \frac{T_3}{T_1} = 0.$$

Знаходимо кількості теплоти на ізотермі і політропі

$$Q_1 = CT_1 \ln \frac{T_1}{T_3} > 0; \quad Q_2 = C(T_3 - T_1) < 0.$$

Тоді к.к.д.

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{C(T_1 - T_3)}{CT_1 \ln \frac{T_1}{T_3}}.$$

Остаточно

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_1 - T_3}{T_1 \ln \frac{T_1}{T_3}}}.$$

Городецкий (контрольные)

Знайти $\langle f(v) \rangle$ – середнє значення функції $f(v)$, що залежить від абсолютної величини швидкості молекул ідеального газу, який має масу молекул m і температуру T .

$$f(v) = av^6 + bv^5 + cv^2 + dv + e.$$

$$\langle f(v) \rangle = a \langle v^6 \rangle + b \langle v^5 \rangle + c \langle v^2 \rangle + d \langle v \rangle + e;$$

$$\langle v^6 \rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^6 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \frac{105}{32} \sqrt{\pi} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{9/2} 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2};$$

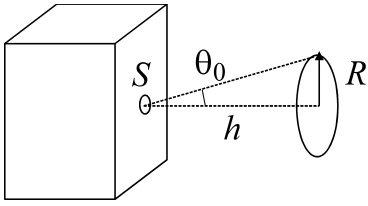
$$\langle v^5 \rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^5 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} 3 \left(\frac{2kT}{m} \right)^4;$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m};$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{m}};$$

$$\langle f \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{5/2} \left(a \frac{105}{32} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{2kT}{m}} + 3b \right) + c \frac{3kT}{m} + d \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} + e.$$

В посудині з газом з концентрацією n ($n = \text{const}$) та температурою T зроблено малий отвір із площею S . На відстані h від отвору розміщено диск площею πR^2 (радіус диску R), площини диску і отвору паралельні, центр диску лежить на нормалі до площини отвору. R і h набагато більші за поперечний розмір отвору. Знайти потік молекул на диск, тобто кількість молекул, що падає на диск за 1 с.



Кількість молекул в одиниці об'єму, які мають швидкість у інтервалі $v \div (v + dv)$ і летять у тілесний кут у межах азимутального кута $\varphi \div (\varphi + d\varphi)$ і полярного кута $\theta \div (\theta + d\theta)$:

$$dN_{v,\theta,\varphi} = \frac{dn_v}{4\pi} \cdot d\Omega = \frac{dn_v}{4\pi} \sin \theta d\theta d\varphi, \text{ де } dn_v = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv.$$

На отвір скінченного розміру S впаде кількість молекул

$$dN_{v,\theta,\varphi} = nS \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi dv.$$

Із отвору вилетять молекули із усіма швидкостями v та в межах усіх азимутальних кутів φ , отже проінтегруємо по них

$$dN_{v\theta} = \frac{n \langle v \rangle}{2} \sin \theta \cos \theta d\theta \cdot S.$$

Із цих молекул нас цікавлять тільки ті, які зачеплять диск. Вони повинні летіти у межах тілесного кута з граничним полярним кутом θ_0 , отже

$$N = \int_0^{\theta_0} dN_{v\theta} = \frac{n \langle v \rangle}{2} S \frac{\sin^2 \theta_0}{2}.$$

Граничний кут знайдемо із геометрії задачі $\sin \theta_0 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}}$, отже

$$N = \frac{n \langle v \rangle}{4} S \frac{R^2}{R^2 + h^2}.$$

Скориставшись виразом для середньої швидкості $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$, остаточно запишемо

$$N = n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} S \frac{R^2}{R^2 + h^2}.$$

Знайти середнє значення квадрата швидкості молекул газу у потоці і порівняти із середнім значенням квадрата швидкості молекул газу у об'ємі.

Скористаємось означенням середнього значення. Запишемо кількість зіткнень зі стінкою на одиницю площі за одиницю часу (потік)

$$dv_{v,\theta,\varphi} = \frac{v dn_v}{4\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{v}{4\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \cdot n f(v) dv.$$

Підставимо функцію розподілу за швидкостями Максвелла

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

Зайдемо середній квадрат швидкості

$$\langle v_{\Pi}^2 \rangle = \int v^2 \frac{dv_{v,\theta,\varphi}}{n \langle v \rangle},$$

де ділимо на середню кількість зіткнень із стінкою, тобто на середню кількість молекул у потоці. Підставляємо все і інтегруємо

$$\langle v_{\Pi}^2 \rangle = \frac{1}{n \langle v \rangle} 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{v^2 \cdot v \cdot v^2}{4\pi} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi dv;$$

$$\langle v_{\Pi}^2 \rangle = \frac{1}{n \langle v \rangle} 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} n \frac{2\pi \sin^2 \theta}{4\pi} \Big|_0^{\pi/2} \underbrace{\int_0^{\infty} v^5 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv}_{\propto^{-3}} = \frac{4\pi}{\langle v \rangle} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{-3} = \frac{4}{\langle v \rangle \sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Остаточно

$$\boxed{\langle v_{\Pi}^2 \rangle = \frac{4kT}{m}}$$

Порівняємо із середнім значенням квадрата швидкості молекул газу у об'ємі

$$\boxed{\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m}}.$$

Знайти середнє значення швидкості молекул у потоці, що виходить із судини з температурою T через малий отвір ($n = \text{const}$). Маса молекул m .

$dv_{v,\vartheta,\varphi}$ – кількість молекул у потоці, яка з виділеного тілесного кута падають на стінку із швидкостями $v \div (v + dv)$;

$v dv_{v,\vartheta,\varphi}$ – сума швидкостей молекул у виділеному тілесному куті;

$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi v dv_{v,\vartheta,\varphi}$ – сума всіх швидкостей молекул, які падають на стінку.

Тоді середнє значення

$$\langle v_{\Pi} \rangle = \frac{1}{\frac{n\langle v \rangle}{4}} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi v dv_{v,\vartheta,\varphi},$$

де $\frac{n\langle v \rangle}{4}$ – середня кількість зіткнень молекул із одиничною поверхнею за одиницю часу. Оскільки

$$dv_{v,\vartheta,\varphi} = \frac{v dn_v}{4\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{v}{4\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \cdot n f(v) dv.$$

Підставимо функцію розподілу за швидкостями Максвелла

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

Тоді

$$\langle v_{\Pi} \rangle = \frac{4\pi n}{4\pi n \langle v \rangle} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi dv = \frac{4}{\langle v \rangle} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} 2\pi \frac{1}{2} \int_0^\infty v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv;$$

$$= \frac{3}{8} \sqrt{\pi} \alpha^{-\frac{5}{2}}$$

$$\langle v_{\Pi} \rangle = \frac{4}{\langle v \rangle \pi \sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \pi \frac{3}{8} \sqrt{\pi} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{2\langle v \rangle} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{-1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2kT}{m} \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}} = \frac{3\pi}{8} \cdot \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

Середня швидкість молекул у потоці становить

$$\boxed{\langle v_{\Pi} \rangle = \frac{3\pi}{8} \cdot \langle v \rangle}.$$

Знайти найбільш імовірне значення швидкості та кінетичної енергії молекул газу у пучку, що виходить із посудини через малий отвір.

Кількість молекул, що впаде на малий отвір із середини посудини, маючи швидкість у межах $v \div v + dv$ і напрямом руху у межах кутів азимутального $\varphi \div \varphi + d\varphi$ і полярного $\theta \div \theta + d\theta$, становить

$$d n_{v,\theta,\varphi} = \frac{v d n_v}{4\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{v}{4\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \cdot n f(v) dv.$$

Молекули вилітають із отвору під різними кутами, отже проінтегруємо вираз

$$d n_v = \frac{v n f(v) dv}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{v n f(v) dv}{4\pi} 2\pi \frac{1}{2} = \frac{n}{4} v f(v) dv.$$

Використавши розподіл молекул за швидкостями у просторі, запишемо кількість молекул, що вилітають із отвору зі швидкостями у межах $v \div v + dv$ у всіх напрямках, у вигляді

$$d n_v = A n v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv.$$

По аналогії з розподілом за швидкостями у об'ємі $d n_v = n f(v) dv$ введемо розподіл молекул за швидкостями у пучку

$$f(v)_{\Pi} = A v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

Найімовірнішу швидкість знайдемо з умови $\frac{df(v)_{\Pi}}{dv} = 0$; $3v^2 - \frac{mv^2}{kT} = 0$; $v_i = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$

Перейдемо до розподілу молекул у пучку за кінетичною енергією. Кількість молекул, енергія яких лежить у інтервалі енергій $(E, E + dE)$, становить $d n_E = n f(E) dE$.

Кінетична енергія пов'язана із швидкістю $E = \frac{mv^2}{2}$, тоді

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}, \quad dv = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{1}{2\sqrt{E}} dE = \frac{dE}{\sqrt{2mE}}.$$

Підставимо у функцію розподілу за швидкостями $f(E)_{\Pi} dE = B E e^{-\frac{E}{kT}} dE$.

Найімовірнішу енергію знайдемо з умови

$$\frac{df(E)_{\Pi}}{dE} = 0; \quad e^{-\frac{E}{kT}} - \frac{E}{kT} e^{-\frac{E}{kT}} = 0; \quad E_i = kT.$$

Знайти середнє значення кінетичної енергії молекул газу у пучку, що виходить із посудини через малий отвір.

Енергія молекул, які впадуть на малий отвір із середини посудини, маючи швидкість у межах $v \div v + dv$ і напрямок руху у межах кутів азимутального $\varphi \div \varphi + d\varphi$ і полярного $\theta \div \theta + d\theta$, становить

$$dE_v = \frac{mv^2}{2} dv_{v_x v_y v_z},$$

або в сферичних координатах

$$dE_v = \frac{mv^3}{2} dn_v \frac{\sin \theta \cos \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi}{4\pi}.$$

Знайдемо повну енергію всіх молекул, які падають на отвір

$$E = \int dE_v = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{mv^3}{8\pi} dn_v \sin \theta \cos \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \frac{m}{8\pi} 2\pi \frac{1}{2} \int_0^\infty v^3 dn_v = \frac{m}{8} \int_0^\infty v^3 dn_v.$$

Оскільки

$$dn_v = n f(v dv); \quad f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}},$$

то

$$E = \int dE_v = \frac{mn}{8} \int_0^\infty v^3 dn_v = \frac{mn}{8} 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^5 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv.$$

Скористаємось інтегралом Пуассона $\int_0^\infty x^5 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{\alpha^3}$, тоді

$$E = \frac{mn}{2} \pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^3 = \frac{mn}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2} = \frac{nkT}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} = \frac{nkT}{2} \cdot \left(\frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2} = \frac{n\langle v \rangle}{4} 2kT$$

Середня енергія молекул у пучку, що вилітає із отвору, визначається як повна енергія, на потік молекул, отже

$$\boxed{\langle E \rangle = \frac{E}{\frac{n\langle v \rangle}{4}} = 2kT}.$$

У вертикально розташованій посудині висотою H знаходиться газ із температурою T . Площа основи посудини S , маса молекули газу m , загальна кількість молекул в посудині N . Знайти концентрацію газу на висоті $h < H$.

Задача зводиться до знаходження закону $n(h)$. У загальному випадку він має вигляд

$$n(h) = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}.$$

Для знаходження початкової концентрації n_0 скористаємось умовою повної кількості молекул

$$N = \int_0^H n(h) dV = \int_0^H n(h) S dh = \int_0^H n_0 S e^{-\frac{mgh}{kT}} dh = n_0 S \frac{kT}{mg} \left(1 - e^{-\frac{mgH}{kT}} \right),$$

звідси

$$n_0 = \frac{N}{S} \frac{mg}{kT} \frac{1}{1 - e^{-\frac{mgH}{kT}}}.$$

Остаточно маємо розподіл

$$n(h) = \frac{N}{S} \frac{mg}{kT} \frac{e^{-\frac{mgh}{kT}}}{1 - e^{-\frac{mgH}{kT}}}.$$

Для визначення відносної молекулярної ваги μ колоїдних частинок (підбирається розчин, в якому частинки практично не тонуть), які мають густину ρ , використовують центрифугу із швидкістю обертання ω . Частинки змулюють у рідині із густиною ρ_0 . Знайти масу моля μ , якщо відношення концентрацій на відстанях r_1 і r_2 від осі обертання $\frac{n_1}{n_2} = \alpha$, $\mu = mN_A$.

На частинки у центрифугі діє відцентрова сила $F = m\omega^2 r$, а сила тяжіння практично скомпенсована рідиною (колоїдний розчин). Потенціальна енергія відцентрової сили (за абсолютною величиною)

$$U = \int_0^r m\omega^2 r dr = \frac{m\omega^2 r^2}{2}.$$

Крім того, на частинку діє рівнодіюча сили тяжіння і архімедової сили

$$mg - m_0g = (\rho - \rho_0)gV = m^*g,$$

де m, m_0 – маси частинки і витісненої рідини; V – об'єм частинки, m^* – деяка ефективна маса, яка є результатом взаємодії сил тяжіння і архімедової, звідки

$$m^* = m - m_0 = m\left(1 - \frac{m_0}{m}\right) = m\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right).$$

У загальному вигляді розподіл Больцмана для цієї задачі має вигляд

$$n = n_0 \exp\left(\frac{m(\rho - \rho_0)\omega^2 r^2}{2\rho kT}\right),$$

отже

$$n_1 = n_0 \exp\left(\frac{m(\rho - \rho_0)\omega^2 r_1^2}{2\rho kT}\right); \quad n_2 = n_0 \exp\left(\frac{m(\rho - \rho_0)\omega^2 r_2^2}{2\rho kT}\right),$$

а їх відношення

$$\frac{n_1}{n_2} = \alpha = \exp\left[\frac{m\omega^2}{2\rho kT}(\rho - \rho_0)(r_1^2 - r_2^2)\right],$$

звідки

$$m = \frac{2\rho kT}{\omega^2} \cdot \frac{\ln \alpha}{(\rho - \rho_0)(r_1^2 - r_2^2)};$$

$$\boxed{\mu = mN_A \frac{2\rho RT}{\omega^2} \cdot \frac{\ln \alpha}{(\rho - \rho_0)(r_1^2 - r_2^2)}}.$$

Знайти (у розрахунку на один моль) приріст ентропії вуглекислого газу при збільшенні його термодинамічної температури в $n = 2,0$ рази, якщо процес нагрівання : а) ізохорний; б) ізобарний. Газ вважати ідеальним.

За означенням ентропії

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T}.$$

Із означення теплоємності

$$C = \frac{\delta Q}{dT}.$$

а) Для ізохорного процесу $\delta Q = C_V dT$, отже ентропія

$$\Delta S = \int_T^{nT} \frac{\delta Q}{T} = C_V \int_T^{nT} \frac{dT}{T} = C_V \ln \frac{nT}{T};$$

$$\boxed{\Delta S = \frac{R}{\gamma - 1} \ln n}.$$

а) Для ізобарного процесу $\delta Q = C_p dT$, отже ентропія

$$\Delta S = \int_T^{nT} \frac{\delta Q}{T} = C_p \int_T^{nT} \frac{dT}{T} = C_p \ln \frac{nT}{T};$$

$$\boxed{\Delta S = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \ln n}.$$

Два моля ідеального газу спочатку ізохорно охолодили, а потім ізобарно розширили так, що температура газу стала рівною початковій. Знайти приріст ентропії газу, якщо його тиск в даному процесі змінився в $n = 3,3$ рази.

Процес не циклічний, отже ентропія зміниться. Температура повернулась до початкового значення, отже внутрішня енергія не змінилась, її не враховуємо.

Для ізохорного процесу $V = \text{const}$, отже ентропія

$$\Delta S_1 = \nu \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q_1}{T} = \nu C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \nu C_V \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{\nu R}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1};$$

Для ізобарного процесу $p = \text{const}$, отже ентропія

$$\Delta S_2 = \nu \int_{T_2}^{T_1} \frac{\delta Q_2}{T} = \nu C_p \int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T} = \nu C_p \ln \frac{T_1}{T_2} = \frac{\nu R \gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_1}{T_2};$$

Зміну температури знайдемо з рівняння ізохорного процесу

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}; \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} = n,$$

отже повна зміна ентропії

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{\nu R}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{\nu R \gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_1}{T_2} = \frac{\nu R}{\gamma - 1} \left(\ln \frac{1}{n} + \gamma \ln n \right) = \frac{\nu R}{\gamma - 1} (\ln 1 - \ln n + \gamma \ln n);$$

$$\boxed{\Delta S = \nu R \ln n}.$$

Знайти приріст ентропії двох молів ідеального газу з показником адіабати $\gamma = 1,3$, якщо в результаті деякого процесу об'єм газу збільшився у $\alpha = 2,0$ рази, а тиск зменшився у $\beta = 3,0$.

За означенням ентропії $\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T}$. Підставимо перше начало термодинаміки і рівняння Клапейрона

$$\delta Q = dU + \delta A = C_V dT + p dV = C_V dT + RT \frac{dV}{V}$$

у рівняння ентропії

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V}.$$

Проінтегруємо зміну ентропії для $\nu = 2$ молів

$$\Delta S = \nu C_V \int_T^{T'} \frac{dT}{T} + \nu R \int_V^{\alpha V} \frac{dV}{V} = \nu C_V \ln \frac{T'}{T} + \nu R \ln \frac{\alpha V}{V}.$$

Невідомою є величина T' . Знайдемо її із узагальненого газового закону

$$\frac{pV}{T} = \frac{p\alpha V}{\beta T'}; \quad T' = \frac{\alpha}{\beta} T.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \Delta S &= \nu C_V \ln \frac{T'}{T} + \nu R \ln \frac{\alpha V}{V} = \nu C_V \ln \frac{\alpha T}{\beta T} + \nu R \ln \frac{\alpha V}{V} = \nu C_V \ln \frac{\alpha}{\beta} + \nu R \ln \alpha = \\ &= \nu (C_V \ln \alpha + R \ln \alpha - C_V \ln \beta) = \frac{\nu R}{\gamma - 1} (\ln \alpha + (\gamma - 1) \ln \alpha - \ln \beta) = \frac{\nu R}{\gamma - 1} (\gamma \ln \alpha - \ln \beta) \end{aligned}$$

Остаточно

$$\boxed{\Delta S = \frac{\nu R}{\gamma - 1} (\gamma \ln \alpha - \ln \beta)}.$$

В посудинах 1 і 2 знаходиться по $\nu = 1,2$ моля газоподібного гелію. Відношення об'ємів посудин $V_2/V_1 = \alpha = 2,0$, а відношення абсолютних температур гелія у них $T_1/T_2 = \beta = 1,5$. Вважаючи газ ідеальним, знайти різницю ентропій гелія у цих посудинах ($S_2 - S_1$).

Оскільки газ у посудині один і той же, можна вважати, він із стану, який має місце у посудині 1, перейшов у стан, який має місце у посудині 2. Тоді зміна ентропії

$$S_2 - S_1 = \nu C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \nu R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \frac{V_2}{V_1};$$

$$\boxed{S_2 - S_1 = \nu R \left(\ln \alpha - \frac{\ln \beta}{\gamma - 1} \right)}.$$

Процес розширення двох молей аргону відбувається так, що тиск газу збільшується прямо пропорційно його об'єму. Знайти приріст ентропії газу при збільшенні його об'єму в $\alpha = 2,0$ рази.

Нехай тиск змінюється з об'ємом як $p = kV$. З першого начала термодинаміки

$$CdT = C_V dT + pdV.$$

Продиференціюємо рівняння Клапейрона

$$pdV + Vdp = RdT.$$

Знайдемо доданки ліворуч

$$pdV = kVdV$$

$$dp = k dV; \quad Vdp = V k dV$$

і підставимо у рівняння

$$pdV + Vdp = 2kVdV = RdT;$$

звідки

$$dT = \frac{2kVdV}{R}.$$

Підставляємо все в перше начало

$$CdT = C_V dT + pdV = C_V \frac{2kVdV}{R} + pdV = \frac{1}{\gamma - 1} 2kVdV + kVdV = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} kVdV.$$

Тоді зміна ентропії

$$\Delta S = \int \frac{CdT}{T} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} k \int_V^{\alpha V} \frac{VdV}{T} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} kR \int_V^{\alpha V} \frac{VdV}{pV} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} kR \int_V^{\alpha V} \frac{dV}{kV} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} R \int_V^{\alpha V} \frac{dV}{V}.$$

Остаточно

$$\boxed{\Delta S = \nu \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} R \ln \alpha}.$$

Ідеальний газ з показником адіабати γ виконує процес по закону $p = p_0 - \alpha V$, де p_0, α – додатні сталі. При якому значенні об'єму ентропія газу виявиться максимальною ?

За означенням ентропії $\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T}$. Підставимо перше начало термодинаміки

$$\delta Q = dU + \delta A = C_V dT + p dV$$

у рівняння ентропії

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = C_V \frac{dT}{T} + \frac{p dV}{T} = C_V \frac{(p dV + V dp)}{RT} + \frac{p dV}{T} = \frac{C_p p dV + C_V V dp}{RT}.$$

Винесемо C_V і скористаємось рівнянням Майєра

$$dS = C_V \frac{\gamma p dV + V dp}{RT} = \frac{\gamma p dV + V dp}{T} \cdot \frac{1}{\gamma - 1} \cdot \frac{R}{R} = \frac{R}{\gamma - 1} \cdot \left(\frac{\gamma dV}{V} + \frac{dp}{p} \right).$$

Продиференціюємо залежність тиску від об'єму

$$dp = -\alpha dV,$$

і підставимо все, що стосується тиску до рівняння ентропії

$$dS = \frac{R}{\gamma - 1} \cdot \left(\frac{\gamma dV}{V} - \frac{\alpha dV}{p_0 - \alpha V} \right) = \frac{R}{\gamma - 1} \cdot \left(\frac{\gamma}{V} - \frac{\alpha}{p_0 - \alpha V} \right) dV.$$

У точці найбільшої ентропії похідна по ентропії перетвориться на нуль $dS = 0$

$$\frac{\gamma}{V} - \frac{\alpha}{p_0 - \alpha V} = 0;$$

звідки

$$\boxed{V_{\max} = \frac{p_0}{\alpha(\gamma + 1)}}.$$

В деякому процесі температура речовини залежить від його ентропії за законом $T \sim S^n$, де n – стала. Знайти відповідну теплоємність речовини C як функцію S .

За означенням ентропії

$$dS = \frac{\delta Q}{T}; \quad \delta Q = TdS.$$

З означення теплоємності

$$C = \frac{\delta Q}{dT}; \quad \delta Q = CdT.$$

Отже

$$CdT = TdS.$$

Оскільки $T \sim S^n$, покладемо $T = kS^n$. Звідси

$$dT = nkS^{n-1}dS; \quad CdT = CnkS^{n-1}dS.$$

Підставимо все в рівняння рівності теплот

$$CnkS^{n-1}dS = kS^n dS,$$

звідки

$$\boxed{C = \frac{S}{n}}.$$

Один моль ідеального газу з відомим значенням теплоємності C_V виконує процес при якому його ентропія S залежить від температури T як $S = \alpha/T$, де α – стала. Температура газу змінилась від T_1 до T_2 . Знайти :

- а) молярну теплоємність газу як функцію T ;
- б) кількість теплоти, надану газу;
- в) роботу, яку виконав газ.

За означенням ентропії

$$dS = \frac{\delta Q}{T}; \quad \delta Q = TdS.$$

З означення теплоємності

$$C = \frac{\delta Q}{dT}; \quad \delta Q = CdT.$$

Отже

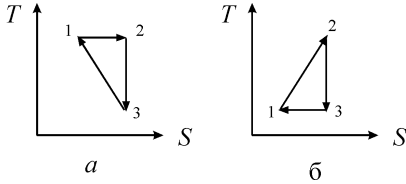
$$CdT = TdS; \quad C = T \frac{dS}{dT}; \quad \boxed{C = -\frac{\alpha}{T}}.$$

Кількість теплоти

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} CdT = -\alpha \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \alpha \ln \frac{T_1}{T_2}; \quad \boxed{Q = \alpha \ln \frac{T_1}{T_2}}.$$

З першого начала термодинаміки

$$\boxed{A = Q - U = \alpha \ln \frac{T_1}{T_2} - C_V(T_2 - T_1)}.$$



Робочий газ виконує цикл, в межах якого абсолютна температура змінюється у n разів, а сам цикл має вигляд, наведений на рисунках а і б.

а) Кількість теплоти на всіх ділянках

$$Q_{12} = T_1(S_2 - S_1) > 0; \quad Q_{23} = 0 \text{ (адіабата).}$$

На ділянці 3-1 температура лінійно спадає з ентропією за законом $T = a - bS$, отже

$$dQ_{31} = (a - bS)dS; \quad Q_{31} = \int_{S_2}^{S_1} (a - bS)dS = a(S_1 - S_2) - b \frac{S_1^2 - S_2^2}{2}.$$

Параметри прямої знайдемо з умов

$$S = S_1 \Rightarrow T = T_1; \quad S = S_3 \Rightarrow T = T_3.$$

Звідси

$$b = \frac{T_1 - T_3}{S_3 - S_1}; \quad a = \frac{T_1 S_3 - T_3 S_1}{S_3 - S_1}.$$

Остаточно вираз для кількості теплоти на ділянці 3-1

$$\begin{aligned} Q_{31} &= \frac{T_1 S_3 - T_3 S_1}{S_3 - S_1} (S_1 - S_2) - \frac{T_1 - T_3}{S_3 - S_1} \cdot \frac{S_1^2 - S_2^2}{2} = T_1 S_3 - T_3 S_1 - \frac{T_1 - T_3}{2} (S_3 + S_1) = \\ &= T_1 S_3 - T_3 S_1 - \frac{T_1 S_3}{2} + \frac{T_3 S_3}{2} - \frac{T_1 S_1}{2} + \frac{T_3 S_1}{2} = \frac{T_1 S_3}{2} - \frac{T_3 S_1}{2} + \frac{T_3 S_3}{2} - \frac{T_1 S_1}{2} \end{aligned}$$

отже

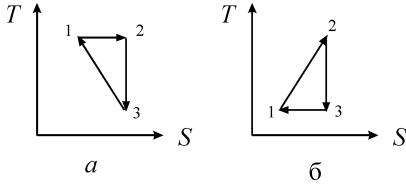
$$Q_{31} = -\frac{(T_3 + T_1)(S_3 - S_1)}{2} < 0.$$

Тоді к.к.д.

$$\eta = 1 - \frac{(T_3 + T_1)(S_3 - S_1)}{2T_1(S_2 - S_1)} = 1 - \frac{(T_3 + T_1)}{2T_1}.$$

Оскільки $T_1 = T_2 = nT_3$,

$$\boxed{\eta = \frac{n-1}{2n}}.$$



Робочий газ виконує цикл, в межах якого абсолютна температура змінюється у n разів, а сам цикл має вигляд, наведений на рисунках а і б.

б) Кількість теплоти на всіх ділянках

$$Q_{31} = T_1(S_1 - S_3) < 0; \quad Q_{23} = 0 \text{ (адіабата)}.$$

На ділянці 3-1 температура лінійно спадає з ентропією за законом $T = a - bS$, отже

$$dQ_{12} = (a + bS)dS; \quad Q_{12} = \int_{S_1}^{S_2} (a + bS)dS = a(S_2 - S_1) + b \frac{S_2^2 - S_1^2}{2}.$$

Параметри прямої знайдемо з умов

$$S = S_1 \Rightarrow T = T_1; \quad S = S_2 \Rightarrow T = T_2.$$

Звідси

$$b = \frac{T_2 - T_1}{S_2 - S_1}; \quad a = \frac{T_1 S_2 - T_2 S_1}{S_2 - S_1}.$$

Остаточно вираз для кількості теплоти на ділянці 3-1

$$\begin{aligned} Q_{12} &= \frac{T_1 S_2 - T_2 S_1}{S_2 - S_1} (S_1 - S_2) - \frac{T_2 - T_1}{S_2 - S_1} \cdot \frac{S_1^2 - S_2^2}{2} = T_1 S_2 - T_2 S_1 + \frac{T_2 - T_1}{2} (S_2 + S_1) = \\ &= \frac{(T_2 + T_1)(S_2 - S_1)}{2} \end{aligned};$$

отже

$$Q_{12} = \frac{(T_2 + T_1)(S_2 - S_1)}{2} > 0.$$

Тоді к.к.д.

$$\eta = 1 - \frac{2T_1(S_2 - S_1)}{(T_2 + T_1)(S_2 - S_1)} = 1 - \frac{2T_1}{(T_2 + T_1)}.$$

Оскільки $nT_1 = T_2 = nT_3$,

$$\boxed{\eta = \frac{n-1}{n+1}}.$$

Шматок міді масою $m_1 = 300\text{ г}$ при температурі $t_1 = 97^\circ\text{С}$ помістили у калориметр, де вода масою $m_2 = 100\text{ г}$ знаходиться при температурі $t_2 = 7^\circ\text{С}$. Знайти приріст ентропії системи на момент вирівнювання температур. Теплоємністю калориметра знехтувати.

Тепло, що виділяє мідь ΔQ_1 , піде на нагрівання води ΔQ_2 , і $\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = 0$. В системі встановиться деяка температура T . Її можна знайти з рівняння теплового балансу

$$c_1 m_1 (T - T_1) + c_2 m_2 (T - T_2) = 0,$$

звідки

$$T = \frac{c_1 m_1 T_1 + c_2 m_2 T_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2}.$$

Робота в системі не виконується, оскільки немає зміни об'єму, все тепло йде на зміну внутрішньої енергії, тому

$$\Delta S = \int_{T_1}^T \frac{\delta Q_1}{T} + \int_{T_2}^T \frac{\delta Q_2}{T} = c_1 m_1 \int_{T_1}^T \frac{dT_1}{T} + c_2 m_2 \int_{T_2}^T \frac{dT}{T} = c_1 m_1 \ln \frac{T}{T_1} + c_2 m_2 \ln \frac{T}{T_2};$$

$$\boxed{\Delta S = c_1 m_1 \ln \frac{T}{T_1} + c_2 m_2 \ln \frac{T}{T_2}}.$$

Один моль азоту знаходиться у об'ємі $V = 1$ л. Знайти :

а) температуру азоту, при якій похибка у тискові, який визначається із рівняння стану ідеального газу, становить $\eta = 10\%$ (у порівнянні із тиском ван-дер-ваальсівського газу);

б) тиск газу при цій температурі.

а) Запишемо рівняння стану Ван-дер-Ваальса у вигляді

$$p_{real} = \frac{RT}{(V-b)} - \frac{a}{V^2}.$$

Для ідеального газу

$$p_{id} = \frac{RT}{V}.$$

За умовою задачі

$$p_{id} = (1-\eta)p_{real}; \quad \frac{RT}{V} = (1-\eta)\frac{RT}{V-b} - (1-\eta)\frac{a}{V^2}; \quad \left(\frac{1}{V} - (1-\eta)\frac{1}{V-b}\right)RT = -(1-\eta)\frac{a}{V^2};$$

$$\frac{\eta V - b}{V(V-b)}RT = -(1-\eta)\frac{a}{V^2}; \quad \boxed{T = (\eta-1)\frac{a}{RV} \cdot \frac{V-b}{\eta V - b}}.$$

б) Відповідний тиск

$$p = \frac{R}{V-b}T - \frac{a}{V^2} = \frac{R}{V-b}(\eta-1)\frac{a}{RV} \cdot \frac{V-b}{\eta V - b} - \frac{a}{V^2};$$

$$\boxed{p = \frac{(\eta-1)}{\eta V - b} \cdot \frac{a}{V} - \frac{a}{V^2}}.$$

Один моль деякого газу знаходиться у посудині об'ємом $V = 0,25 \text{ л}$. При температурі $T_1 = 300 \text{ К}$ тиск газу $p_1 = 90 \text{ атм}$, а при $T_2 = 350 \text{ К}$ тиск $p_2 = 110 \text{ атм}$. Знайти сталі ван-дер-Ваальса для цього газу.

Для одного моля газу рівняння стану Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT.$$

Для кожної з температур

$$\left(p_1 + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT_1; \quad \left(p_2 + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT_2.$$

Розв'язуємо систему рівнянь. Розділимо одне на друге

$$\frac{\left(p_1 + \frac{a}{V^2}\right)}{\left(p_2 + \frac{a}{V^2}\right)} = \frac{T_1}{T_2}; \quad \left(p_1 + \frac{a}{V^2}\right) = \frac{T_1}{T_2} \left(p_2 + \frac{a}{V^2}\right); \quad p_1 - \frac{T_1}{T_2} p_2 = \left(\frac{T_1}{T_2} \frac{1}{V^2} - \frac{1}{V^2}\right) a;$$

$$a = \frac{T_2 p_1 - T_1 p_2}{T_1 - T_2} V^2.$$

Перепишемо рівняння Ван-дер-Ваальса у вигляді

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) = \frac{RT}{(V - b)};$$

і віднімемо їх

$$p_1 - p_2 = \frac{R}{(V - b)}(T_1 - T_2); \quad V - b = \frac{R}{(p_1 - p_2)}(T_1 - T_2);$$

$$b = V - R \frac{(T_1 - T_2)}{(p_1 - p_2)}.$$

Иродов 2.57

Знайти роботу, яку виконує один моль газу Ван-дер-Ваальса при його ізотермічному розширенні від об'єму V_1 до V_2 при температурі T .

Для газу Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT; \quad p = \frac{RT}{(V - b)} - \frac{a}{V^2}.$$

Робота

$$\delta A = p dV = \frac{RT dV}{(V - b)} - \frac{a dV}{V^2}.$$

Повна робота

$$A = RT \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} + a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right).$$

2.1 Иродов

У посудині об'ємом $V = 30\text{ л}$ міститься ідеальний газ при температурі 0°С . Після того як частину газу випустили назовні, тиск у посудині зменшився на $\Delta p = 0,78\text{ атм}$ (без зміни температури). Знайти масу випущеного газу. Густина даного газу за нормальних умов $\rho = 1,3\text{ г/л}$.

За нормальних умов $p_0 = 1\text{ атм}$, $T = 273\text{ К}$, і рівняння стану ідеального газу

$$p_0 V = \frac{m_0}{\mu} RT.$$

Коли частину газу випустити, рівняння набуває вигляду

$$(p_0 - \Delta p)V = \frac{(m_0 - \Delta m)}{\mu} RT.$$

Розділимо рівняння одне на друге

$$\frac{p_0 - \Delta p}{p_0} = \frac{m_0 - \Delta m}{m_0}.$$

Скористаємось тим, що за нормальних умов $m_0 = \rho V$,

Тоді

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{\Delta m}{\rho V},$$

звідки

$$\boxed{\Delta m = \frac{\Delta p}{p_0} \rho V}.$$

Чисельне значення :

$$\Delta m = \frac{0,78}{1} 1,3 \cdot 30 = 30,42\text{ г}.$$

2.10 Иродов

Камеру об'ємом $V_0 = 87$ л відкачують насосом, швидкість відкачки якого $C = 10$ л/с. Через який час тиск у камері зменчиться у $\eta = 1000$ разів.

За нескінченно малий час dt насос виносить з камери масу газу

$$dm = \frac{\mu}{RT} p dV = \frac{\mu}{RT} p \frac{dV}{dt} dt = \frac{\mu}{RT} p C dt.$$

Зменшення маси газу приведе до зменшення його тиску на величину

$$dp = -\frac{dm}{\mu} \cdot \frac{RT}{V_0}.$$

Підставивши вираз для dm , маємо диференціальне рівняння

$$dp = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{RT}{V_0} \cdot \frac{\mu}{RT} p C dt = -p \frac{C}{V_0} dt; \quad \frac{dp}{p} = -\frac{C}{V_0} dt.$$

Інтегруємо із визначеними межами

$$\int_{p_0}^{p_0/\eta} \frac{dp}{p} = -\frac{C}{V_0} \int_0^{\tau} dt; \quad \ln \frac{1}{\eta} = -\frac{C}{V_0} \tau,$$

звідки

$$\boxed{\tau = \frac{V_0}{C} \ln \eta}.$$

Знайти середню проекцію швидкості $\langle v_x \rangle$ і $\langle |v_x| \rangle$, якщо маса кожної молекули m і температура газу T .

Середнє значення проекції швидкості визначаються як

$$\langle v_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x \frac{dn_{v_x}}{n} = \int_{-\infty}^{\infty} v_x f(v_x) dv_x,$$

отже

$$\begin{aligned} \langle v_x \rangle &= \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} d(v_x^2) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \frac{2kT}{m} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0. \end{aligned}$$

Середнє значення модуля проекції швидкості буде відрізнятись межами інтегрування, але щоб врахувати всі молекули, треба помножити на 2 (дві молекули із такою проекцією швидкості – плюс і мінус)

$$\begin{aligned} \langle |v_x| \rangle &= 2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} d(v_x^2) = \\ &= - \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \frac{2kT}{m} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} \Big|_0^{\infty} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \frac{2kT}{m} = \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}. \end{aligned}$$

Знайти середнє значення квадрата проекції v_x швидкості молекул газу при температурі T . Маса кожної молекули дорівнює m .

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x) dv_x = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x.$$

Скористаємось інтегралом Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = 2 \cdot \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \alpha^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Остаточно

$$\langle v_x^2 \rangle = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2kT}{m} = \frac{kT}{m};$$

$$\boxed{\langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m}}.$$

Визначити за допомогою функції розподілу за швидкостями Максвелла кількість ν молекул газу, що падають за одиницю часу на одиничну площадку, якщо концентрація молекул n , температура газу T , а маса кожної молекули m .

За одиницю часу на одиничну площадку молекули, які мають швидкість у межах $v_x \div (v_x + dv_x)$, впадуть на стінку з об'єму

$$d\omega = v_x dt dS = v_x \cdot 1 \cdot 1 = v_x.$$

Концентрація цих молекул

$$dn(v_x) = n f(v_x) dv_x; \quad f(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}},$$

а їх кількість у цьому об'ємі (це і є кількість зіткнень ν_{v_x} молекул із швидкостями $v_x \div (v_x + dv_x)$ зі стінкою) становить

$$\nu_{v_x} = dn(v_x) d\omega = n v_x f(v_x) dv_x.$$

Повна кількість зіткнень всіх молекул із усіма швидкостями

$$\nu = \int \nu_{v_x} = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_0^\infty v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x.$$

Межі інтегрування саме такі, оскільки нас цікавлять тільки ті молекули, які летять у напрямку стінки, а не від неї.

Скористаємось інтегралом Пуассона

$$\int_0^\infty x e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha}.$$

Тоді

$$\nu = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \frac{1}{2} \frac{2kT}{m} = \frac{n}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} = \frac{n}{4} \left(\frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2}.$$

Скориставшись тим, що

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},$$

маємо

$$\boxed{\nu = \frac{n \langle v \rangle}{4}}.$$

Визначити за допомогою функції розподілу за швидкостями Максвелла тиск газу на стінку, якщо температура газу T , а маса кожної молекули m .

Мікроскопічний тиск газу на стінку посудини з точки зору кінетичної теорії є сумарний імпульс, що передається одиничній площі поверхні стінки за одиницю часу внаслідок пружних зіткнень молекул із стінкою.

Нехай проекція швидкості молекули на нормаль до стінки знаходиться у межах $v_x \div (v_x + dv_x)$. Співудар є пружним, отже зміна імпульсу (кількості руху) становить

$$mv_x - (-mv_x) = 2mv_x.$$

Ця зміна імпульсу визначає імпульс сили, що діє на стінку з боку молекули. Тоді сумарна сила, що діє на одиницю площі поверхні стінки на протязі одиниці часу, (тобто тиск), з боку всіх молекул, які мають складову швидкості у межах $v_x \div (v_x + dv_x)$,

$$p_x = 2mv_x \cdot v_x dn(v_x),$$

ще одне v_x виникло, оскільки $dn(v_x)$ – це кількість молекул у одиниці об'єму, що впадуть на стінку, а $v_x dt dS dn(v_x)$ – кількість молекул у циліндрі з основою dS і твірною $v_x dt$. Оскільки беремо за одиницю часу і на одиницю площі, то її покладемо рівними одиниці.

Проінтегрувавши по всіх швидкостях, отримаємо повний тиск

$$p = 2m \int_0^{\infty} v_x^2 dn(v_x).$$

Межі інтегрування саме такі, оскільки нас цікавлять тільки ті молекули, які летять у напрямку стінки, а не від неї.

Оскільки

$$dn(v_x) = n f(v_x) dv_x; \quad f(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}},$$

маємо

$$p = 2mn \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} v_x^2 e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x.$$

Використаємо інтеграл Пуассона $\int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \alpha^{-\frac{3}{2}}$. Маємо дещо знайоме

$$p = 2mn \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{-\frac{3}{2}} = 2mn \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{-\frac{3}{2}} = 2mn \frac{1}{4} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{-1};$$

$$\boxed{p = nkT}.$$

Знайти $\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle$ - середнє значення оберненої швидкості молекул ідеального газу при температурі T , якщо маса кожної молекули дорівнює m . Порівняти отриману величину з оберненою величиною середньої швидкості $\frac{1}{\langle v \rangle}$.

Функція розподілу Максвелла для розподілу за абсолютними значеннями швидкості

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

Тоді середні значення

$$\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \int_0^\infty \frac{1}{v} f(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{1}{v} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv.$$

Використаємо інтеграл Пуассона

$$\int_0^\infty x e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha}.$$

$$\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{1}{2} \cdot \frac{2kT}{m} = \frac{2\pi}{\pi\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{m}{2kT}} = \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}}.$$

Середня швидкість

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}};$$

її обернене значення

$$\frac{1}{\langle v \rangle} = \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}}.$$

Отже

$$\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle : \frac{1}{\langle v \rangle} = \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}} : \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}} = \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}} \cdot \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \frac{4}{\pi},$$

або

$$\boxed{\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \frac{4}{\pi} \langle v \rangle}.$$

Газ складається із молекул масою m і знаходиться при температурі T . Знайти за допомогою функції $f(v)$:

а) функцію розподілу молекул за кінетичними енергіями $f(E)$; зобразити приблизний графік $f(E)$;

б) найбільш імовірне значення кінетичної енергії E_i ; чи відповідає E_i найбільш імовірній швидкості?

Функція розподілу Максвелла для розподілу за абсолютними значеннями швидкості

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

а) Кількість молекул, швидкість яких лежить у інтервалі швидкостей $(v, v + dv)$,

$$dn_v = n f(v) dv.$$

За аналогією, кількість молекул, енергія яких лежить у інтервалі енергій $(E, E + dE)$,

$$dn_E = n f(E) dE.$$

Кінетична енергія пов'язана із швидкістю

$$E = \frac{mv^2}{2},$$

тоді

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}, \quad dv = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{1}{2\sqrt{E}} dE = \frac{dE}{\sqrt{2mE}}.$$

Підставимо у функцію розподілу

$$f(E) dE = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{2E}{m} e^{-\frac{E}{kT}} \frac{dE}{\sqrt{2mE}} = 2\pi \left(\frac{1}{\pi kT} \right)^{3/2} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} dE.$$

б) Найімовірніше значення енергії знаходимо з умови $\frac{df(E)}{dE} = 0$.

$$\sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} = \frac{1}{2\sqrt{E}} e^{-\frac{E}{kT}} - \sqrt{E} \frac{1}{kT} e^{-\frac{E}{kT}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{E}} - \sqrt{E} \frac{1}{kT} \right) e^{-\frac{E}{kT}} = 0,$$

звідки

$$E_i = \frac{kT}{2}.$$

Найімовірніша швидкість $v_i = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$, отже $\frac{mv_i^2}{2} = kT = 2E_i$.

Можна зробити висновок, що

$$E_i \neq E_i(v_i).$$

2.106 Иродов

Яка частина одноатомних молекул газу, який знаходиться у стані теплової рівноваги, має кінетичну енергію, яка відрізняється від її середнього значення не більше, ніж на $\delta\eta = 1\%$.

Знайдемо середнє значення енергії. Скористуємось розв'язком задачі 2.105 для розподілу молекул за енергіями

$$f(E) = 2\pi \left(\frac{1}{\pi kT} \right)^{3/2} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}}.$$

$$\langle E \rangle = \int_0^{\infty} E f(E) dE = 2\pi \left(\frac{1}{\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} E \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} dE.$$

Візьмемо інтеграл частинами

$$u = E^{3/2} \quad dv = e^{-\frac{E}{kT}} dE$$

$$du = \frac{3}{2} \sqrt{E} dE \quad v = -kT e^{-\frac{E}{kT}}$$

$$\langle E \rangle = \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}} \left(-kT E^{3/2} e^{-\frac{E}{kT}} \right)_0^{\infty} + \frac{3\pi}{(\pi kT)^{3/2}} kT \int_0^{\infty} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} dE.$$

Скористаємось табличним інтегралом

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Тоді

$$\langle E \rangle = \underbrace{\frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}} \left(-kT E^{3/2} e^{-\frac{E}{kT}} \right)_0^{\infty}}_{=0} + \frac{3\pi}{(\pi kT)^{3/2}} (kT)^{5/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3}{2} kT.$$

Кількість молекул, що потрапляє у виділений інтервал енергій,

$$\frac{dn_E}{dE} = f(E) dE = 2\pi \left(\frac{1}{\pi kT} \right)^{3/2} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} dE,$$

проміжок енергій становить

$$dE = 2\delta\eta \cdot \langle E \rangle.$$

Оскільки $dE \ll \langle E \rangle$, остаточно маємо

$$\frac{dn_E}{dE} = 2\pi \left(\frac{1}{\pi kT} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{3kT}{2}} e^{-\frac{3}{2}} 2\delta\eta \cdot \frac{3kT}{2} = 3\sqrt{\frac{6}{\pi}} \cdot e^{-\frac{3}{2}} \delta\eta = 0,9 \%.$$

Ідеальний газ, що складається із молекул масою m з концентрацією n , має температуру T . Знайти за допомогою розподілу Максвелла кількість молекул, які падають за одиницю часу на одиницю поверхні стінки під кутами $\theta \div \theta + d\theta$ до нормалі.

Кількість молекул, що впаде за одиницю часу на одиницю поверхні стінки посудини, маючи швидкість у межах $v \div v + dv$ і напрямок руху у межах кутів азимутального $\varphi \div \varphi + d\varphi$ і полярного $\theta \div \theta + d\theta$, становить

$$d\nu_{v,\theta,\varphi} = v dS dt \cos\theta dn_v d\omega = \frac{v dn_v}{4\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{v}{4\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi \cdot n f(v) dv,$$

де $v dS dt \cos\theta$ – об'єм косокутного циліндру, з якого на стінку летять молекули із швидкостями і кутами у заданому інтервалі. Скористаємось розподілом Максвелла

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}},$$

тоді

$$\begin{aligned} d\nu_\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty d\nu_{v,\theta,\varphi} = \frac{n}{4\pi} 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \int_0^{2\pi} d\varphi; \\ d\nu_\theta &= 2\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = 2\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta \frac{1}{2 \left(\frac{m}{2kT} \right)^2}; \\ &= \frac{1}{2\alpha^2} \\ d\nu_\theta &= \frac{\pi n}{\pi \sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta \left(\frac{2kT}{m} \right)^2 = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \cos\theta \sin\theta d\theta \sqrt{\frac{2kT}{m}}; \end{aligned}$$

остаточно

$$d\nu_\theta = n \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} \cos\theta \sin\theta d\theta.$$

Виходячи із умови задачі 2.108, знайти за допомогою розподілу Максвелла кількість молекул, які падають за одиницю часу на одиницю поверхні стінки із швидкостями в інтервалі $v \div v + dv$.

Кількість молекул, що впаде за одиницю часу на одиницю поверхні стінки посудини, маючи швидкість у межах $v \div v + dv$ і напрямок руху у межах кутів азимутального $\varphi \div \varphi + d\varphi$ і полярного $\theta \div \theta + d\theta$, становить

$$d\nu_{v,\theta,\varphi} = v dS dt \cos\theta dn_v d\omega = \frac{v dn_v}{4\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{v}{4\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi \cdot n f(v) dv,$$

де $v dS dt \cos\theta$ – об'єм косокутного циліндру, з якого на стінку летять молекули із швидкостями і кутами у заданому інтервалі. Скористаємось розподілом Максвелла

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}},$$

тоді

$$d\nu_v = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\nu_{v,\theta,\varphi} = \frac{n}{4\pi} 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi;$$

$$d\nu_v = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \cdot 2\pi \frac{1}{2} = \pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv;$$

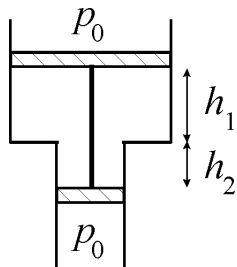
оскільки

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}},$$

остаточно

$$d\nu_v = \pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \frac{n}{4} v f(v) dv.$$

2.11 Иродов



У гладкій, відкритій з обох боків вертикальній трубі, що має два різних перерізи, знаходяться два поршні, з'єднаних нерозтяжною ниткою, а між поршнями – один моль ідеального газу. Площа перерізу верхнього поршня на $\Delta S = 10 \text{ см}^2$ більша, ніж нижнього. Загальна маса поршнів $m = 5 \text{ кг}$. Тиск зовнішнього повітря $p_0 = 1 \text{ атм}$. На скільки кельвін треба нагріти газ між поршнями, щоб вони змістились на $l = 5 \text{ см}$.

Поршень знаходиться у рівновазі, отже умовою рівноваги є рівність нулю всіх сил, що діють на нього.

$$mg + p_0(S + \Delta S) + pS - p(S + \Delta S) - p_0S = 0,$$

де S – площа нижнього поршня (меншого), знак “плюс” у сил, які діють донизу, а знак “мінус” – у сил, що діють вгору.

Зробимо перетворення, розкривши дужки,

$$mg + p_0S + p_0\Delta S + pS - pS - p\Delta S - p_0S = mg + p_0\Delta S - p\Delta S = 0.$$

Це рівняння працює у загальному випадку. Скористаємось тим, що газ ідеальний

$$pV = RT,$$

звідки

$$p = \frac{RT}{V}.$$

Для початкового стану

$$mg + p_0\Delta S - \frac{RT_1}{V_1}\Delta S = 0,$$

для кінцевого стану

$$mg + p_0\Delta S - \frac{RT_2}{V_2}\Delta S = 0.$$

При нагріванні зміниться об'єм.

$$V_1 = (S + \Delta S)h_1 + Sh_2,$$

де $h_{1,2}$ – висоти труб кожного перерізу.

$$V_2 = (S + \Delta S)(h_1 + l) + S(h_2 - l),$$

система поршнів поїде вгору. Перетворимо вираз

$$V_2 = (S + \Delta S)h_1 + Sh_2 + \Delta Sl = V_1 + \Delta Sl.$$

Температура зміниться $T_2 = T_1 + \Delta T$. Рівняння початкового і кінцевого стану мають вигляд

$$mg + p_0\Delta S - \frac{RT_1}{V_1}\Delta S = 0; \quad mg + p_0\Delta S - \frac{R(T_1 + \Delta T)}{V_1 + \Delta Sl}\Delta S = 0.$$

З першого рівняння знайдемо

$$T_1 = \frac{(mg + p_0\Delta S)V_1}{R\Delta S},$$

і підставимо у друге рівняння

$$mg + p_0 \Delta S - \frac{R \left(\frac{(mg + p_0 \Delta S) V_1}{R \Delta S} + \Delta T \right)}{V_1 + \Delta S l} \Delta S = 0.$$

З нього шукаємо зміну температури

$$\frac{(mg + p_0 \Delta S)(V_1 + \Delta S l)}{R \Delta S} - \left(\frac{(mg + p_0 \Delta S) V_1}{R \Delta S} + \Delta T \right) = 0;$$

$$\Delta T = \frac{(mg + p_0 \Delta S)(V_1 + \Delta S l)}{R \Delta S} - \frac{(mg + p_0 \Delta S) V_1}{R \Delta S}.$$

Розкриємо тільки другу дужку у першому доданку

$$\Delta T = \frac{(mg + p_0 \Delta S) V_1}{R \Delta S} + \frac{(mg + p_0 \Delta S) \Delta S l}{R \Delta S} - \frac{(mg + p_0 \Delta S) V_1}{R \Delta S} = \frac{(mg + p_0 \Delta S) \Delta S l}{R \Delta S}.$$

Остаточно маємо

$$\boxed{\Delta T = \frac{(mg + p_0 \Delta S)}{R} l}.$$

Знайти силу, яка діє на частинку з боку однорідного поля, якщо концентрації цих частинок на двох рівнях, які відстоять на $\Delta h = 3$ см вздовж поля, відрізняються у $\eta = 2$ рази. Температура системи $T = 280$ К.

Концентрація частинок на кожному з рівнів визначається їх потенціальною енергією (не визначена сила, тому не конкретизуємо)

$$n_1 = n_0 e^{-\frac{U_1}{kT}}; \quad n_2 = n_0 e^{-\frac{U_2}{kT}}.$$

Їх відношення

$$\frac{n_1}{n_2} = \eta = e^{-\frac{U_1 - U_2}{kT}} = e^{-\frac{\Delta U}{kT}}.$$

Звідси

$$\Delta U = -kT \ln \eta.$$

За означенням

$$\Delta U = -F_h \Delta h,$$

отже

$$F_h = -\frac{\Delta U}{\Delta h} = \frac{kT}{\Delta h} \ln \eta.$$

При спостереженні у мікроскоп частинок гумігуту встановлено, що середня їх кількість у шарах, відстань між якими $h = 40 \text{ мкм}$, відрізняється одна від одної в $\eta = 2$ разів. Температура середовища $T = 290 \text{ К}$. Діаметр частинок $d = 0,4 \text{ мкм}$, а їх густина на $\Delta\rho = 0,2 \text{ г/см}^3$ більша за густину оточуючої рідини. Знайти за цими даними сталу Авогадро.

Енергія броунівських частинок у такій рідині трохи зменшиться за рахунок сили Архімеда :

$$E_{II} = mgz - Mgz ,$$

де M – маса витісненої рідини. Тоді формула Больцмана набуває вигляду

$$n = n_0 e^{-\frac{(m-M)gz}{kT}} .$$

Вимірявши кількість частинок n_1 і n_2 на двох висотах z_1 і z_2 , маємо

$$n_1 = n_0 e^{-\frac{(m-M)gz_1}{kT}} ; \quad n_2 = n_0 e^{-\frac{(m-M)gz_2}{kT}} .$$

Розділивши одне рівняння на друге, а потім прологарифмувавши, отримаємо

$$\ln \frac{n_1}{n_2} = \frac{(m-M)(z_2 - z_1)g}{kT} ,$$

звідки стала Больцмана

$$k = \frac{(m-M)(z_2 - z_1)g}{T \ln \eta} .$$

Оскільки $m = \rho_1 V$, $M = \rho_2 V$, то $m - M = \Delta\rho V = \Delta\rho \frac{4}{3} \pi \frac{d^3}{8} = \pi \Delta\rho \frac{d^3}{6}$, тоді

$$k = \frac{\pi \Delta\rho \frac{d^3}{6} (z_2 - z_1)g}{T \ln \eta} ,$$

а стала Авогадро

$$N_A = \frac{R}{k} = \frac{\pi \Delta\rho \frac{d^3}{6} (z_2 - z_1)g}{T \ln \eta} \frac{6T \ln \eta}{\pi \Delta\rho d^3 (z_2 - z_1)g} .$$

У довгій вертикальній посудині знаходиться газ, який складається із двох сортів молекул з масами m_1 і m_2 , причому $m_2 > m_1$. Концентрація цих молекул біля дна посудини становлять n_1 і n_2 , причому $n_2 > n_1$. Вважаючи, що по всій висоті підтримується одна й та ж температура T і прискорення вільного падіння дорівнює g , знайти висоту h , на якій концентрації обох сортів молекул будуть однаковими.

Гази ідеальні, молекули між собою не взаємодіють, отже можна вважати, що розподіл кожного газу встановлюється незалежно.

$$n_1(h) = n_1 e^{-\frac{m_1 g h}{kT}}; \quad n_2(h) = n_2 e^{-\frac{m_2 g h}{kT}}.$$

Висоту знаходимо з умови

$$n_1(h) = n_2(h),$$

отже

$$n_1 e^{-\frac{m_1 g h}{kT}} = n_2 e^{-\frac{m_2 g h}{kT}}; \quad \ln \frac{n_1}{n_2} = \frac{(m_1 - m_2) g h}{kT}.$$

остаточно

$$h = \frac{kT \ln \frac{n_1}{n_2}}{(m_1 - m_2)g}.$$

Азот знаходиться в дуже високій посудині в однорідному полі тяжіння при температурі T . Температуру збільшили в η разів. На якій висоті h концентрація молекул не змінилась.

Розподіл молекул газу із зміною температури зміниться.

$$n_1(h) = n_1 e^{-\frac{mgh}{kT}}; \quad n_2(h) = n_2 e^{-\frac{mgh}{k\eta T}}.$$

Із зміною температури зміниться концентрація, але не повинен змінитися тиск

$$p_0 = n_1 kT; \quad p_0 = n_2 k\eta T,$$

отже

$$n_1(h) = \frac{p_0}{kT} e^{-\frac{mgh}{kT}}; \quad n_2(h) = \frac{p_0}{k\eta T} e^{-\frac{mgh}{k\eta T}}.$$

Висоту знаходимо з умови

$$n_1(T) = n_2(\eta T),$$

отже

$$\frac{p_0}{kT} e^{-\frac{mgh}{kT}} = \frac{p_0}{k\eta T} e^{-\frac{mgh}{k\eta T}};$$

остаточно

$$h = \frac{kT}{mg} \cdot \frac{\eta \ln \eta}{\eta - 1} = \frac{RT}{\mu g} \cdot \frac{\eta \ln \eta}{\eta - 1}.$$

Газ знаходиться в дуже високій циліндричній посудині при температурі T . Вважаючи поле тяжіння однорідним, знайти середнє значення потенціальної енергії молекул газу. Як залежить ця величина від того, чи складається газ із одного сорту молекул, чи з кількох ?

По аналогії із знаходженням середнього за статистикою Максвелла, за розподілом Больцмана запишемо

$$dN(U) = N f_B(U) dU,$$

де $f_B(U)$ – функція розподілу Больцмана, визначена із точністю до деякої сталої

$$f_B(U) = B e^{-\frac{U}{kT}}.$$

Сталу шукаємо із умови нормування

$$\int_0^{\infty} f_B(U) dU = B \int_0^{\infty} e^{-\frac{U}{kT}} dU = 1,$$

звідки $B = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{U}{kT}} dU}.$

Середнє значення енергії визначаємо як

$$\langle U \rangle = \frac{\int_0^{\infty} U e^{-\frac{U}{kT}} dU}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{U}{kT}} dU}.$$

Інтеграл у знаменнику легко береться

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{U}{kT}} dU = -kT \int_0^{\infty} e^{-\frac{U}{kT}} d\left(-\frac{U}{kT}\right) = kT.$$

Інтеграл у чисельнику візьмемо частинами

$$\int_0^{\infty} U e^{-\frac{U}{kT}} dU = \left| \begin{array}{ll} u = U & du = dU \\ dv = e^{-\frac{U}{kT}} & v = -kT e^{-\frac{U}{kT}} \end{array} \right| = -kT U e^{-\frac{U}{kT}} \Big|_0^{\infty} + kT \int_0^{\infty} e^{-\frac{U}{kT}} du = (kT)^2.$$

Тоді

$$\boxed{\langle U \rangle = \frac{(kT)^2}{kT} = kT.}$$

Середня енергія залежить лише від температури газу або суміші.

Замкнуту з обох торців горизонтальну трубу довжини $l=100\text{ см}$ рухають з постійним прискоренням a , направленим вздовж її осі. Всередині трубки знаходиться аргон при температурі $T=330\text{ К}$. При якому значенні a концентрації аргону поблизу торців трубки будуть відрізнятися одна від одної на $\eta=1\%$.

Сила, яка діє на кожну молекулу аргону, $F=-ma$, робота, яка виконується при зміщенні молекули на відстань x , становить $A=-ma \cdot x$, тоді зміна енергії $U=ma \cdot x$.

Розподіл молекул у полі сили визначається законом

$$n = n_0 e^{-\frac{ma \cdot x}{kT}}.$$

Якщо трубка рухається у напрямку x , то при $x=0$ концентрація $n=n_0$, а при $x=l$

концентрація $n = n_0 e^{-\frac{ma \cdot l}{kT}}$. Природньо припустити, що концентрація молекул збільшиться біля дальнього торця ($x=l$), тому при $x=0$ за умовою задачі концентрація становить $n_0 - \eta n_0$, отже

$$n_0 - \eta n_0 = n_0 e^{-\frac{ma \cdot l}{kT}}; \quad 1 - \eta = e^{-\frac{ma \cdot l}{kT}};$$

звідки шукане прискорення

$$a = -\frac{kT \ln(1 - \eta)}{ml} = -\frac{RT \ln(1 - \eta)}{\mu l} \approx 70g.$$

Для аргону $\mu = 35\text{ г/моль}$; $R = 8,314\text{ Дж/К}\cdot\text{моль}$; $k = 1,38 \cdot 10^{-23}\text{ Дж/К}$.

Горизонтально розташовану трубку із закритими торцями обертають із постійною кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі, яка проходить через один із її торців. В трубці знаходиться вуглекислий газ при температурі $T = 300\text{ К}$. Довжина трубки $l = 100\text{ см}$. Знайти значення ω , при якому відношення концентрацій молекул біля протилежних кінців трубки $\eta = 2$.

На молекули буде діяти відцентрова сила

$$F = m\omega^2 r,$$

тоді потенціальна енергія

$$U(r) = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}.$$

За розподілом Больцмана зміна концентрації у полі відцентрової сили

$$n(r) = n_0 e^{-\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}},$$

тоді біля осі обертання ($r = 0$)

$$n(0) = n_0,$$

а біля дальнього кінця ($r = l$)

$$n(l) = n_0 e^{-\frac{m\omega^2 l^2}{2kT}}.$$

За умовою задачі

$$\frac{n(l)}{n(0)} = \eta = e^{-\frac{m\omega^2 l^2}{2kT}},$$

звідки

$$\omega = \sqrt{\frac{2kT \ln \eta}{ml^2}} = \sqrt{\frac{2RT \ln \eta}{\mu l^2}}.$$

Потенціальна енергія молекули в деякому потенціальному полі центральних сил залежить від r як $U(r) = ar^2$; $a > 0$ – додатня стала. Температура газу T , концентрація в центрі поля n_0 . Знайти : а) кількість молекул в інтервалі $r \div (r + dr)$; б) найбільш імовірну відстань молекул від центра поля; в) відносну кількість молекул в шарі $r \div (r + dr)$; г) у скільки разів зміниться n_0 при зменшенні температури в η разів; д) кількість молекул з потенціальною енергією від U до $U + dU$; е) найбільш імовірне значення потенціальної енергії.

$$\text{а) } dN(r) = n dV = n_0 \cdot e^{-\frac{U(r)}{kT}} 4\pi r^2 dr = n_0 \cdot 4\pi r^2 e^{-\frac{ar^2}{kT}} dr.$$

$$\text{б) } \frac{dN(r)}{dr} = \frac{d}{dr} \left(r^2 e^{-\frac{ar^2}{kT}} \right) = \left(2r - 2 \frac{ar^3}{kT} \right) e^{-\frac{ar^2}{kT}} = 0; \quad r_{\text{ім}} = \sqrt{\frac{kT}{a}}.$$

в) Загальна кількість молекул дорівнює

$$N = \int_0^\infty dN(r) = 4\pi n_0 \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{ar^2}{kT}} dr = 4\pi n_0 \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{kT}{a} \right)^{3/2}, \quad \text{звідси } n_0 = \left(\frac{\pi kT}{a} \right)^{3/2} N;$$

$$\frac{dN}{N} = \left(\frac{\pi kT}{a} \right)^{-3/2} 4\pi r^2 e^{-\frac{ar^2}{kT}} dr = \left(\frac{a}{\pi kT} \right)^{3/2} \cdot 4\pi r^2 e^{-\frac{ar^2}{kT}} dr.$$

г) Оскільки $n_0 = \left(\frac{a}{\pi kT} \right)^{3/2} N$, то n_0 збільшується в $\eta^{3/2}$ разів.

Виходячи з умови задачі 2.120, знайти :

а) кількість молекул з потенціальною енергією від U до $U + dU$;

б) найбільш імовірне значення потенціальної енергії.

а) Враховуючи, що $U = ar^2$, та $dr = \frac{dU}{2ar} = \frac{dU}{2\sqrt{U}a}$, маємо

$$dN = n_0 \cdot 4\pi r^2 e^{-\frac{ar^2}{kT}} dr = n_0 \cdot 4\pi \frac{U}{a} \cdot e^{-\frac{U}{kT}} \cdot \frac{dU}{2\sqrt{U}a} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} N \frac{1}{(kT)^{3/2}} \sqrt{U} e^{-\frac{U}{kT}} dU.$$

б) Як функція від U : $\frac{dN}{dU} = \text{const} \cdot f(U)$, $f(U) = \sqrt{U} e^{-\frac{U}{kT}}$. Максимум $f(U)$, таким

чином, визначається із

$$\frac{df}{dU} = \left(\frac{1}{2\sqrt{U}} - \frac{\sqrt{U}}{kT} \right) e^{-\frac{U}{kT}} = 0, \quad \text{і} \quad U_{\text{ім}} = \frac{kT}{2}.$$

У теплової машини, яка працює за циклом Карно, температура нагрівача в $n = 1,60$ разів більша за температуру холодильника. За один цикл машина виконує роботу $A = 12,0$ кДж. Яка робота витрачається на ізотермічне стискання робочої речовини ?

Цикл Карно являє собою дві ізотерми і дві адіабати. К.к.д. теплової машини Карно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{n-1}{n}; \quad T_1 = nT_2 \text{ (за умовою задачі).}$$

Ізотермічне стискання – це ділянка другої ізотерми ($T_2 = \text{const}$). Внутрішня енергія ідеального газу залежить лише від температури і на цій ділянці не змінюється ($\Delta U = 0$), тому робота буде дорівнювати кількості теплоти, яку газ передає холодильнику Q_2 .

Тоді

$$A_{34} = Q_2 = Q_1 - A.$$

Кількість теплоти, яку взяли від нагрівача, знайдемо з першого рівняння

$$Q_1 = \frac{An}{n-1},$$

отже

$$A_{34} = \frac{An}{n-1} - A = \frac{A}{n-1};$$

$$\boxed{A_{34} = \frac{A}{n-1}}.$$

В якому випадку к.к.д. цикла Карно підвищиться більше : при збільшенні температури нагрівача на ΔT , чи при зменшенні температури холодильника на таку ж величину ?

Запишемо к.к.д. при зміні температур нагрівача і холодильника

$$\eta' = \frac{(T_1 + \Delta T) - T_2}{T_1 + \Delta T}; \quad \eta'' = \frac{T_1 - (T_2 - \Delta T)}{T_1}.$$

Перетворимо другий вираз

$$\eta'' = \frac{T_1 - (T_2 - \Delta T)}{T_1} = \frac{(T_1 + \Delta T) - T_2}{T_1},$$

отже к.к.д. відрізняються в обох випадках лише знаменниками, і к.к.д. буде більшим у випадку зменшення температури холодильника.

Водень виконує цикл Карно. Знайти к.к.д. циклу, якщо при адіабатному розширенні :

а) об'єм газу збільшується у $n = 2$ рази;

б) тиск зменшується у $n = 2$ рази.

К.к.д. можна записати як $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$. В обох випадках задача зводиться до знаходження відношення температур.

а) Скористаємося загальним рівнянням $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$, а також рівнянням адіабати

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma;$$

тоді

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{-\gamma} \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\gamma} = n^{1-\gamma},$$

звідси

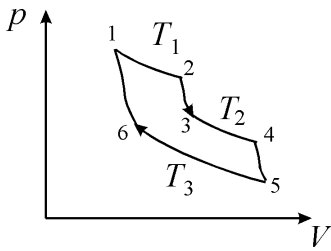
$$\boxed{\eta = 1 - n^{1-\gamma}}.$$

б) У цьому випадку

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = n^{\frac{1}{\gamma}-1},$$

звідки

$$\boxed{\eta = 1 - n^{\frac{1}{\gamma}-1}}.$$



Ідеальний газ виконує цикл (на рисунку), який складається з ізоterm і адіабат, які чергуються. Температури, при яких відбуваються ізоtermічні процеси, дорівнюють T_1 , T_2 і T_3 . Знайти к.к.д. такого циклу, якщо при кожному ізоtermічному розширенні об'єм газу збільшується в одну й ту ж кількість разів.

На адіабатах тепло не виділяється. Кількість теплоти на кожній ізоtermічній ділянці

$$Q_{12} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} > 0; \quad Q_{34} = RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} > 0; \quad Q_{56} = RT_3 \ln \frac{V_6}{V_5} < 0.$$

К.к.д. такого циклу буде визначатись як $\eta = \frac{Q_{12} + Q_{34} - |Q_{56}|}{Q_{12} + Q_{34}}$. За умовою задачі

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_4}{V_3} = n, \text{ тоді } \frac{V_5}{V_6} = n^2,$$

Це не очевидно. Запишемо рівняння для всіх ізоterm та адіабат

$$\begin{aligned} p_1 V_1 &= p_2 V_2; & p_2 V_2^2 &= p_3 V_3^2; & p_1 &= p_2 \frac{V_2}{V_1} = p_2 n; & p_3 &= p_2 \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^\gamma \\ p_3 V_3 &= p_4 V_4; & p_4 V_4^2 &= p_5 V_5^2; & p_3 &= p_4 \frac{V_4}{V_3} = p_4 n; & p_5 &= p_4 \left(\frac{V_4}{V_5} \right)^\gamma \\ p_5 V_5 &= p_6 V_6; & p_1 V_1^2 &= p_6 V_6^2; & p_5 &= p_6 \frac{V_6}{V_5}; & p_1 &= p_6 \left(\frac{V_6}{V_1} \right)^\gamma \end{aligned}$$

Перемножимо між собою тиски у двох останніх стовпчиках

$$p_1 p_3 p_5 = p_2 p_4 p_6 \left(\frac{V_6}{V_5} n^2 \right); \quad p_1 p_3 p_5 = p_2 p_4 p_6 \left(\frac{V_6}{V_5} n^2 \right)^\gamma,$$

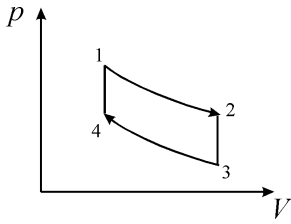
$$\text{і розділимо одне рівняння на друге } \left(\frac{V_6}{V_5} n^2 \right)^{\gamma-1} = 1.$$

Ця рівність може виконуватись, коли показник степені дорівнює нулю, або коли основа степені дорівнює одиниці. Оскільки $\gamma = 1 + \frac{R}{C_V} \neq 1$, то $\frac{V_6}{V_5} n^2 = 1 \Rightarrow \frac{V_5}{V_6} = n^2$.

$$\text{Отже } \eta = \frac{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} - RT_3 \ln \frac{V_5}{V_6}}{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}} = \frac{T_1 \ln n + T_2 \ln n - 2T_3 \ln n}{T_1 \ln n + T_2 \ln n} = \frac{T_1 + T_2 - 2T_3}{T_1 + T_2}.$$

Остаточнo маємо

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{2T_3}{T_1 + T_2}}.$$



Знайти к.к.д. циклу, який складається з двох ізохор і двох адіабат, якщо в межах циклу об'єм ідеального газу змінюється в $n = 100$ разів. Робочою речовиною є азот.

Система обмінюється теплом з оточуючим середовищем лише на ділянках 41 і 23, оскільки інші ділянки – адіабати.

Кількість теплоти на ізохорах знайдемо із означення ізохорної теплоємності

$$Q_{23} = C_V(T_3 - T_2) < 0; \quad Q_{41} = C_V(T_1 - T_4) > 0.$$

Тоді к.к.д. циклу

$$\eta = \frac{Q_{41} - |Q_{23}|}{Q_{41}} = 1 - \frac{|Q_{23}|}{Q_{41}}.$$

Скористаємось рівнянням адіабати

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1},$$

звідки

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = T_1 \left(\frac{1}{n} \right)^{\gamma-1},$$

оскільки за умовою задачі $\frac{V_2}{V_1} = n$.

Аналогічно позбавимось температури T_3

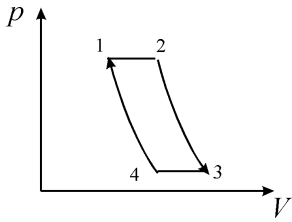
$$T_3 = T_4 \left(\frac{1}{n} \right)^{\gamma-1}.$$

Підставимо все у вираз для к.к.д.

$$\eta = 1 - \frac{C_V \left| T_4 \left(\frac{1}{n} \right)^{\gamma-1} - T_1 \left(\frac{1}{n} \right)^{\gamma-1} \right|}{C_V (T_1 - T_4)} = 1 - \frac{|T_4 - T_1| \left(\frac{1}{n} \right)^{\gamma-1}}{(T_1 - T_4)}.$$

Остаточню

$$\boxed{\eta = 1 - \left(\frac{1}{n} \right)^{\gamma-1}}.$$



Знайти к.к.д. циклу, який складається з двох ізобар і двох адіабат, якщо в межах циклу тиск змінюється в n разів. Робочою речовиною є ідеальний газ з показником адіабати γ .

Система обмінюється теплом з оточуючим середовищем лише на ділянках 12 і 34, оскільки інші ділянки – адіабати.

Кількість теплоти на ізобарах знайдемо із означення ізобарної теплоємності

$$Q_{12} = C_p(T_2 - T_1) > 0; \quad Q_{34} = C_p(T_4 - T_3) < 0.$$

Тоді к.к.д. циклу

$$\eta = \frac{Q_{12} - |Q_{34}|}{Q_{12}} = 1 - \frac{|Q_{34}|}{Q_{12}}.$$

Скористаємось рівнянням адіабати у вигляді

$$T_2 p_1^{\frac{1}{\gamma}-1} = T_3 p_2^{\frac{1}{\gamma}-1},$$

звідки

$$T_3 = T_2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1} = T_2 n^{\frac{1}{\gamma}-1},$$

оскільки за умовою задачі $\frac{p_1}{p_2} = n$.

Аналогічно позбавимось температури T_4

$$T_4 = T_1 n^{\frac{1}{\gamma}-1}.$$

Підставимо все у вираз для к.к.д.

$$\eta = 1 - \frac{C_p \left| T_1 n^{\frac{1}{\gamma}-1} - T_2 n^{\frac{1}{\gamma}-1} \right|}{C_p (T_2 - T_1)} = 1 - \frac{|T_1 - T_2|}{(T_2 - T_1)} n^{\frac{1}{\gamma}-1}.$$

Остаточно

$$\boxed{\eta = 1 - n^{\frac{1}{\gamma}-1}}.$$

1.3 (решебник), 2.12а (Иродов)

Газ здійснює процес $p = p_0 - \alpha V^2$, де p_0 і α – додатні сталі. Знайти максимально можливу температуру одного моля ідеального газу в даному процесі.

Скориставшись рівнянням стану для одного моля

$$pV = RT,$$

можна записати даний в умові задачі процес у вигляді

$$p_0 V - \alpha V^3 = RT.$$

T_{\max} знайдемо з умови

$$\frac{dT}{dV} = 0.$$

Для цього спочатку слід визначити залежність $T(V)$

$$T = \frac{p_0}{R} V - \frac{\alpha}{R} V^3.$$

Далі продиференціювавши його по V отримаємо:

$$\frac{dT}{dV} = \frac{p_0}{R} - \frac{3\alpha}{R} V^2 = 0.$$

Звідси

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{p_0}{3\alpha}},$$

а отже, підставивши у вираз для T , маємо

$$T_{\max} = \frac{2p_0}{3R} \sqrt{\frac{p_0}{3\alpha}}.$$

2.126 (Иродов)

Газ здійснює процес $p = p_0 e^{-\beta V}$, де p_0 і β – додатні сталі. Знайти максимально можливу температуру одного моля ідеального газу в даному процесі.

Скориставшись рівнянням стану для одного моля

$$pV = RT,$$

можна записати даний в умові задачі процес у вигляді

$$p_0 V e^{-\beta V} = RT.$$

T_{\max} знайдемо з умови

$$\frac{dT}{dV} = 0.$$

Для цього спочатку слід визначити залежність $T(V)$

$$T = \frac{p_0}{R} V e^{-\beta V}.$$

Далі продиференціювавши його по V отримаємо:

$$\frac{dT}{dV} = \frac{p_0}{R} e^{-\beta V} - \frac{p_0 \beta}{R} V e^{-\beta V} = 0.$$

Звідси

$$V_{\max} = \frac{1}{\beta},$$

а отже, підставивши у вираз для T , маємо

$$T_{\max} = \frac{p_0}{\beta e R}.$$

2.13 (Иродов)

Визначити найменший можливий тиск ідеального газу в процесі, що відбувається за законом $T = T_0 + \alpha V^2$, де T_0 і α – додатні сталі, V – об'єм одного моля ідеального газу. Зобразити приблизний графік цього процесу в координатах (p, V) .

Скориставшись рівнянням стану для одного моля

$$pV = RT,$$

можна записати даний в умові задачі процес у вигляді

$$pV = RT_0 + R\alpha V^2.$$

V_{\min} знайдемо з умови

$$\frac{dp}{dV} = 0.$$

Для цього спочатку слід визначити залежність $p(V)$

$$p = \frac{RT_0}{V} + \alpha R V.$$

Далі продиференціювавши його по V отримаємо:

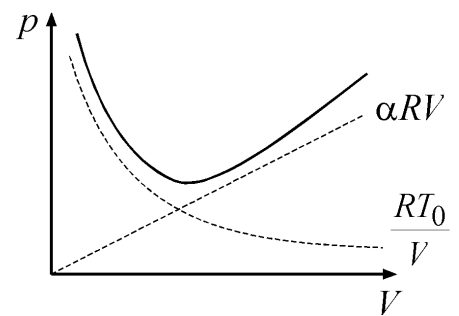
$$\frac{dp}{dV} = -\frac{RT_0}{V^2} + \alpha R = 0.$$

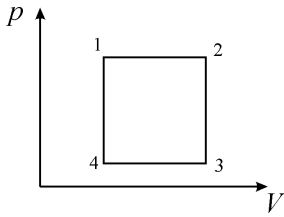
Звідси

$$V_{\min} = \sqrt{\frac{T_0}{\alpha}},$$

а отже, підставивши у вираз для p , маємо

$$\boxed{p_{\min} = 2R\sqrt{\alpha T_0}}.$$





Ідеальний газ з показником адіабати γ виконує цикл, який складається з двох ізохор і двох ізобар. Знайти к.к.д. такого циклу, якщо температура T газу збільшується у n разів як при ізохорному нагріванні, так і при ізобаричному розширенні.

Система обмінюється теплом з оточуючим середовищем на всіх ділянках. За умовою задачі

$$\frac{T_2}{T_1} = n; \quad \frac{T_3}{T_4} = n; \quad \frac{T_1}{T_4} = n; \quad \frac{T_2}{T_3} = n.$$

І ще одне дещо несподіване співвідношення $\frac{T_3}{T_1} = 1$.

Кількість теплоти на ділянках знайдемо із означень відповідних теплоємностей

$$Q_{12} = C_p(T_2 - T_1) > 0;$$

$$Q_{23} = C_V(T_3 - T_2) < 0;$$

$$Q_{34} = C_p(T_4 - T_3) < 0.$$

$$Q_{41} = C_V(T_1 - T_4) > 0.$$

Тоді к.к.д. циклу

$$\eta = \frac{Q_{12} + Q_{41} - |Q_{23} + Q_{34}|}{Q_{12} + Q_{41}} = 1 - \frac{|Q_{23} + Q_{34}|}{Q_{12} + Q_{41}}.$$

Підставимо все у вираз для к.к.д.

$$\eta = 1 - \frac{|C_V(T_3 - T_2) + C_p(T_4 - T_3)|}{C_p(T_2 - T_1) + C_V(T_1 - T_4)} = 1 - \frac{|(T_3 - T_2) + \gamma(T_4 - T_3)|}{\gamma(T_2 - T_1) + (T_1 - T_4)}.$$

Тоді

$$\eta = 1 - \frac{T_3 \left| \left(1 - \frac{T_2}{T_3} \right) + \gamma \left(\frac{T_4}{T_3} - 1 \right) \right|}{T_1 \left[\gamma \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) + \left(1 - \frac{T_4}{T_1} \right) \right]} = 1 - \frac{T_3 \left| (1 - n) + \gamma \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \right|}{T_1 \left[\gamma(n - 1) + \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right]} = 1 - \frac{T_3 \left| (1 - n) + \gamma \left(\frac{1 - n}{n} \right) \right|}{T_1 \left[\gamma(n - 1) + \left(\frac{n - 1}{n} \right) \right]}.$$

Отже, остаточно

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{n + \gamma}{1 + n\gamma}}.$$

Ідеальний газ виконує цикл, який складається із:

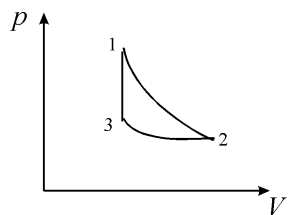
а) ізохори, адіабати і ізотерми;

б) ізобари, адіабати і ізотерми,

причому ізотермічний процес відбувається при *мінімальній* температурі циклу. Знайти к.к.д. кожного циклу, якщо температура T газу в його межах змінюється у n разів.

а) За умовою задачі $T_2 = T_3 = \frac{T_1}{n}$. Система обмінюється теплом з оточуючим середовищем лише на ділянках 23 і 31.

Кількість теплоти на цих ділянках



$$Q_{23} = RT_3 \ln \frac{V_3}{V_2} < 0; \quad Q_{31} = C_V(T_1 - T_3) > 0.$$

Тоді к.к.д. циклу

$$\eta = \frac{Q_{31} - |Q_{23}|}{Q_{31}} = 1 - \frac{|Q_{23}|}{Q_{31}}.$$

Підставимо все у вираз для к.к.д.

$$\eta = 1 - \frac{\left| RT_3 \ln \frac{V_3}{V_2} \right|}{C_V(T_1 - T_3)} = 1 - \frac{\left| R \ln \frac{V_3}{V_2} \right|}{C_V \left(\frac{T_1}{T_3} - 1 \right)}.$$

З рівняння адіабати

$$T_1 V_3^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}; \quad \frac{V_3}{V_2} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Тоді

$$\eta = 1 - \frac{\left| R \ln \frac{V_3}{V_2} \right|}{C_V \left(\frac{T_1}{T_3} - 1 \right)} = 1 - \frac{\left| R \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \right|}{C_V(n-1)} = 1 - \frac{\left| R \ln \left(\frac{1}{n} \right) \right|}{C_V(n-1)} \cdot \frac{1}{\gamma-1}.$$

Оскільки $C_p = C_V + R$; $\frac{R}{C_V} = \gamma - 1$, отже, остаточно

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{\ln n}{n-1}}.$$

Ідеальний газ виконує цикл, який складається із:

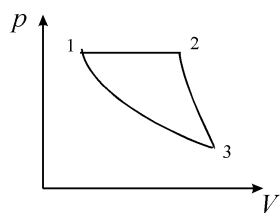
а) ізохори, адіабати і ізотерми;

б) ізобари, адіабати і ізотерми,

причому ізотермічний процес відбувається при *мінімальній* температурі циклу. Знайти к.к.д. кожного циклу, якщо температура T газу в його межах змінюється у n разів.

б) За умовою задачі $T_1 = T_3 = \frac{T_2}{n}$. Система обмінюється теплом з оточуючим середовищем лише на ділянках 12 і 31.

Кількість теплоти на цих ділянках



$$Q_{12} = C_p(T_2 - T_1) > 0;$$

$$Q_{31} = RT_3 \ln \frac{V_1}{V_3} < 0$$

Тоді к.к.д. циклу

$$\eta = \frac{Q_{12} - |Q_{31}|}{Q_{12}} = 1 - \frac{|Q_{31}|}{Q_{12}}.$$

Підставимо все у вираз для к.к.д.

$$\eta = 1 - \frac{\left| RT_3 \ln \frac{V_1}{V_3} \right|}{C_p(T_2 - T_1)} = 1 - \frac{\left| R \ln \frac{V_1}{V_3} \right|}{C_p \left(\frac{T_2}{T_3} - 1 \right)}.$$

З рівняння ізотерми

$$p_1 V_1 = p_3 V_3;$$

$$\frac{V_1}{V_3} = \frac{p_3}{p_1} = \frac{p_3}{p_2}.$$

З рівняння адіабати

$$T_2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} p_2 = T_3^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} p_3;$$

$$\frac{V_1}{V_3} = \frac{p_3}{p_2} = \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}.$$

Тоді оскільки $C_p = C_V + R = \frac{R}{\gamma - 1} + R = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$,

$$\eta = 1 - \frac{\left| R \ln \frac{V_1}{V_3} \right|}{C_p \left(\frac{T_2}{T_3} - 1 \right)} = 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma R} \frac{\left| R \ln n^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \right|}{(n - 1)} = 1 - \frac{\ln n}{(n - 1)}.$$

отже, остаточно

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{\ln n}{n - 1}}.$$

Ідеальний газ виконує цикл, який складається із:

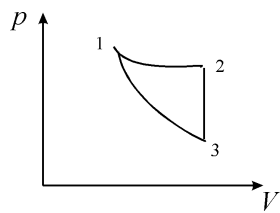
а) ізохори, адіабати і ізотерми;

б) ізобари, адіабати і ізотерми,

причому ізотермічний процес відбувається при *максимальній* температурі циклу. Знайти к.к.д. кожного циклу, якщо температура T газу в його межах змінюється у n разів.

а) За умовою задачі $T_1 = T_2 = T_3 n$. Система обмінюється теплом з оточуючим середовищем лише на ділянках 12 і 23.

Кількість теплоти на цих ділянках



$$Q_{12} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} > 0; \quad Q_{23} = C_V (T_3 - T_1) < 0.$$

Тоді к.к.д. циклу

$$\eta = \frac{Q_{12} - |Q_{23}|}{Q_{12}} = 1 - \frac{|Q_{23}|}{Q_{12}}.$$

Підставимо все у вираз для к.к.д.

$$\eta = 1 - \frac{|C_V (T_3 - T_1)|}{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{\left| C_V \left(\frac{T_3}{T_1} - 1 \right) \right|}{R \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

З рівняння адіабати

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_2^{\gamma-1}; \quad \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_3} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = n^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Тоді оскільки $C_p = C_V + R$; $\frac{R}{C_V} = \gamma - 1$,

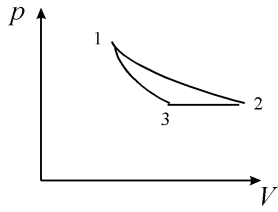
$$\eta = 1 - \frac{|C_V (T_3 - T_1)|}{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{\left| \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \right|}{(\gamma - 1) \ln n^{\frac{1}{\gamma-1}}} = 1 - \frac{n-1}{n \ln n}.$$

отже, остаточно

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{n-1}{n \ln n}}.$$

б) За умовою задачі $T_1 = T_2 = T_3 n$. Система обмінюється теплом з оточуючим середовищем лише на ділянках 12 і 23.

Кількість теплоти на цих ділянках



$$Q_{12} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} > 0; \quad Q_{23} = C_p(T_3 - T_1) < 0.$$

Тоді к.к.д. циклу

$$\eta = \frac{Q_{12} - |Q_{23}|}{Q_{12}} = 1 - \frac{|Q_{23}|}{Q_{12}}.$$

Підставимо все у вираз для к.к.д.

$$\eta = 1 - \frac{|C_p(T_3 - T_1)|}{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{\left| C_p \left(\frac{T_3}{T_1} - 1 \right) \right|}{R \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

З рівняння ізоТЕРМИ $p_1 V_1 = p_2 V_2;$ $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}.$

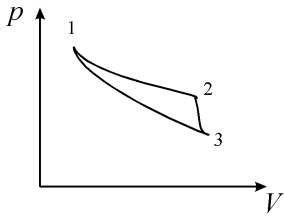
З рівняння адіабати $T_1^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} p_1 = T_3^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} p_2;$ $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}.$

Тоді оскільки $C_p = C_V + R = \frac{R}{\gamma - 1} + R = \frac{\gamma R}{\gamma - 1},$

$$\eta = 1 - \frac{\left| C_p \left(\frac{T_3}{T_1} - 1 \right) \right|}{R \ln \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{\left| \gamma R \left(\frac{T_3}{T_1} - 1 \right) \right|}{(\gamma - 1) R \ln \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}} = 1 - \frac{\left| \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \right|}{\ln \left(\frac{1}{n} \right)} = 1 - \frac{-(n-1)}{-n \ln n}.$$

Отже, остаточно

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{n-1}{n \ln n}}.$$



Ідеальний газ виконує цикл, який складається із ізотерми, політропи і адіабати, причому ізотермічний процес відбувається при *максимальній* температурі циклу. Знайти к.к.д. такого циклу, якщо температура в його межах змінюється у n разів.

Розташування кривих

$$12 - pV = \text{const}; \quad 23 - pV^n = \text{const}; \quad 31 - pV^\gamma = \text{const}.$$

Спробувати довести, що $n > \gamma$:

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V} = \frac{C - \gamma C_V}{C - C_V} = \frac{\gamma C - \gamma C_V}{C - C_V} + \frac{C - \gamma C}{C - C_V} = \gamma + \frac{C(1 - \gamma)}{C - C_V} = \gamma + \frac{(1 - \gamma)}{1 - \frac{C_V}{C}} \quad (\text{а далі ?}).$$

Як виявляється, немає значення, де політропа, а де – адіабата. Розв'язок той же самий, оскільки величина $C\Delta T$ для політропи однакова і за ділянці 31, і на ділянці 32 (T_3 – найменша температура, а 12 – ізотерма).

Система обмінюється теплом з оточуючим середовищем на ділянках 12 і 23. За умовою задачі

$$T_1 = T_2 = nT_3.$$

Кількість теплоти на ділянках знайдемо із означень відповідних теплоємностей

$$Q_{12} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} > 0; \quad Q_{41} = C(T_3 - T_1) < 0.$$

Тоді к.к.д. циклу

$$\eta = \frac{Q_{12} - |Q_{23}|}{Q_{12}} = 1 - \frac{|Q_{23}|}{Q_{12}}.$$

Підставимо все у вираз для к.к.д.

$$\eta = 1 - \frac{|C(T_3 - T_1)|}{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{\left| C \left(\frac{T_3}{T_1} - 1 \right) \right|}{R \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

З рівняння ізотерми $p_1 V_1 = p_2 V_2;$ $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}.$

З рівняння адіабати $p_1 T_1^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = p_3 T_3^{\frac{\gamma}{1-\gamma}};$

З рівняння політропи $p_2 T_1^{\frac{n}{1-n}} = p_3 T_3^{\frac{n}{1-n}}.$

Розділимо адіабату на політропу

$$\frac{p_1}{p_2} T_1^{\frac{\gamma}{1-\gamma} - \frac{n}{1-n}} = T_3^{\frac{\gamma}{1-\gamma} - \frac{n}{1-n}}; \quad \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma} - \frac{n}{1-n}} = \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma} - \frac{n}{1-n}}$$

Знайдемо молярну теплоємність для політропного процесу (аналогічні задачі розв'язували на минулому занятті)

$$\delta Q = dU + pdV; \quad CdT = C_V dT + pdV.$$

З рівняння політропи $pV^n = \text{const}$; $V^n dp + npV^{n-1} dV = 0$; $Vdp = -npdV$.

З рівняння Клапейрона $pdV + Vdp = RdT$; $Vdp = RdT - pdV$.

Підставимо отриманий раніше вираз для Vdp :

$$-npdV = RdT - pdV; \quad pdV = \frac{RdT}{1-n}.$$

Тоді теплоємність

$$CdT = C_V dT + \frac{RdT}{1-n}; \quad C = C_V + \frac{R}{1-n} = \frac{R}{\gamma-1} + \frac{R}{1-n} = R \frac{n-\gamma}{(\gamma-1)(n-1)}.$$

Підставляємо все у вираз для к.к.д.

$$\eta = 1 - \frac{\left| R \frac{n-\gamma}{(\gamma-1)(n-1)} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \right|}{R \ln \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma} - \frac{n}{1-n}}} = 1 - \frac{\left| \frac{n-\gamma}{(\gamma-1)(n-1)} \left(\frac{1-n}{n} \right) \right|}{-\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} - \frac{n}{1-n} \right) \ln n} = 1 - \frac{n-1}{n \ln n}.$$

Отже, остаточно

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{n-1}{n \ln n}}.$$

Один моль ван-дер-ваальсівського газу розширили ізотермічно при температурі T від об'єму V_1 до об'єму V_2 . Знайти приріст вільної енергії газу.

Вільна енергія $F = U - TS$. Її приріст $\Delta F = \Delta U - T\Delta S$.

Внутрішня енергія ван-дер-ваальсівського газу визначається як

$$U = C_V T - \frac{a}{V} + \text{const}.$$

У початковому стані і у кінцевому стані

$$U_1 = C_V T - \frac{a}{V_1} + \text{const}, \quad U_2 = C_V T - \frac{a}{V_2} + \text{const}.$$

Тоді приріст внутрішньої енергії

$$\Delta U = U_2 - U_1 = a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

Ентропія за означенням

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = C_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV.$$

Для газу Ван-дер-Ваальса

$$p = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2},$$

отже

$$dS = C_V \frac{dT}{T} + \left(\frac{R}{V - b} - \frac{a}{TV^2} \right) dV = C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V - b} - a \frac{dV}{TV^2}.$$

Інтегруючи, отримаємо

$$S = C_V \ln T + R \ln(V - b) + \frac{a}{VT} + \text{const}.$$

Приріст ентропії

$$\Delta S = R \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} + \frac{a}{T} \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right).$$

Тоді приріст вільної енергії

$$\Delta F = \Delta U - T\Delta S = a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) - RT \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} - a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right);$$

$$\boxed{\Delta F = -RT \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} - 2a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right)}.$$

На дні пруду виділилась бульбашка газу діаметром $d = 4$ мкм. При спливанні його діаметр збільшився у $n = 1,1$ разів. Знайти глибину пруду у цьому місці. Атмосферний тиск нормальний, розширення газу вважати ізотермічним.

У початковому стані на дні пруду

$$p_1 - \frac{4\sigma}{d} = p_0 + \rho gh,$$

на поверхні

$$p_2 - \frac{4\sigma}{nd} = p_0.$$

З умови ізотермічності процесу $pV = \text{const}$, отже

$$\frac{p_1}{p_2} = n^3,$$

звідки

$$p_1 = n^3 \cdot \left(p_0 + \frac{4\sigma}{nd} \right).$$

Підставимо це у найперше рівняння

$$n^3 \cdot \left(p_0 + \frac{4\sigma}{nd} \right) - \frac{4\sigma}{d} - p_0 = \rho gh,$$

звідки

$$h = \frac{1}{\rho g} \left[n^3 \cdot \left(p_0 + \frac{4\sigma}{nd} \right) - \frac{4\sigma}{d} - p_0 \right].$$

Знайти різницю рівнів ртуті у двох з'єднаних вертикальних капілярах, діаметри яких $d_1 = 0,50$ мм і $d_2 = 1,00$ мм, якщо крайовий кут $\theta = 138^\circ$.

Умова рівноваги ртуті

$$\rho g h_1 + \Delta p_1 = \rho g h_2 + \Delta p_2.$$

Δp додається, оскільки крайовий кут $\theta > \pi/2$, отже рідина не змочує капіляр.

Розпишемо додатковий тиск над викривленою поверхнею через крайовий кут

$$\rho g h_1 + \frac{4\sigma}{d_1} |\cos \theta| = \rho g h_2 + \frac{4\sigma}{d_2} |\cos \theta|,$$

звідки

$$\boxed{\Delta h = \frac{4\sigma}{\rho g} |\cos \theta| \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right)}.$$

Скляний капіляр довжини $l = 110$ мм діаметром внутрішнього каналу $d = 20$ мкм опустили у вертикальному положенні у воду. Верхній кінець капіляра запаяний. Зовнішній тиск повітря нормальний. Яка довжина x капіляру повинна бути занурена у воду, щоб рівень води у капілярі співпадав з рівнем поверхні води поза ним ?

Якщо рівні співпадають, мається на увазі, що відбувається повне змочування, отже крайовий кут дорівнює нулю. Тоді

$$p_0 = p_1 - \frac{4\sigma}{d},$$

де p_0 – зовнішній атмосферний тиск, p_1 – тиск у замкнутій частині капіляру.

До занурення капіляру тиск у ньому p_0 , а об'єм Sl . При зануренні повітря стиснулось. Можна вважати, що ізотермічно. Тоді за законом Бойля-Маріотта

$$p_0Sl = p_1S(l - x).$$

Підставимо p_1 із першого рівняння

$$p_0Sl = \left(p_0 + \frac{4\sigma}{d}\right)S(l - x); \quad p_0l = \left(p_0 + \frac{4\sigma}{d}\right)(l - x).$$

Звідси

$$x = l - \frac{p_0l}{p_0 + \frac{4\sigma}{d}} = \frac{p_0l + \frac{4\sigma}{d}l - p_0l}{p_0 + \frac{4\sigma}{d}} = \frac{\frac{4\sigma}{d}l}{p_0 + \frac{4\sigma}{d}},$$

остаточно

$$\boxed{x = \frac{l}{1 + \frac{p_0d}{4\sigma}}}.$$

Крапля води рівномірно падає у повітрі. Знайти різницю між радіусом кривизни поверхні краплі в її верхній точці і радіусом кривизни у нижній точці, відстань між якими $h = 2,3$ мм.

Нехай верхній радіус кривизни R_1 , а нижній – R_2 . Умова рівноваги краплі

$$\frac{2\sigma}{R_1} = \frac{2\sigma}{R_2} + \rho gh,$$

звідки

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} = \frac{\rho gh}{2\sigma}.$$

Будемо вважати, що радіуси відрізняються не дуже сильно $R_1 \approx R_2 \approx \frac{h}{2}$, тоді

$$R_2 - R_1 \approx R_1 R_2 \frac{\rho gh}{2\sigma},$$

остаточно

$$\boxed{R_2 - R_1 \approx \frac{\rho gh^3}{8\sigma}}.$$

Знайти час зникнення мильної бульбашки радіусом R , з'єднаної з атмосферою через капіляр довжиною l і радіусом каналу r . Поверхневий натяг α , в'язкість газу η .

При ізотермічному стаціонарному русі газу через капіляр витрата маси газу Q_m в момент часу t визначається формулою Пуазейля

$$Q_m(t) = \frac{M}{RT} \frac{(\pi r^2)^2}{16\pi\eta} \cdot \frac{p^2(t) - p_{атм}^2}{l},$$

де $p(t)$ – тиск всередині бульбашки радіуса $R(t)$, $p = p_{атм} + \frac{4\alpha}{R(t)}$.

$$\text{При } p_{атм} \gg \frac{4\alpha}{R(t)} \quad Q_m = \frac{M}{RT} \cdot \frac{\pi r^4 \alpha p_{атм}}{2\eta l} \cdot \frac{1}{R(t)}. \quad (1)$$

Одночасно $Q_m = \frac{dm}{dt}$, де m – маса газу в момент t , тобто

$$Q_m = \frac{M}{RT} \cdot \frac{d}{dt}(pV) = \frac{M}{RT} p_{атм} \cdot 4\pi R^2 \frac{dR}{dt}. \quad (2)$$

Співставлення (1) та (2) дає рівняння для визначення $R(t)$:

$$R^3 dR = \frac{r^4 \alpha}{8\eta l} dt, \quad \text{звідки} \quad R_0^4 - R(t)^4 = \frac{r^4 \alpha}{2\eta l} t.$$

Час зникнення бульбашки t_0 визначається з умови $R(t) = 0$: $t_0 = \frac{2\eta l R_0^4}{r^4 \alpha}$.

$$\boxed{t_0 = \frac{2\eta l R_0^4}{r^4 \alpha}}.$$

Нехай $r = 1 \text{ мм}$, $l = 10 \text{ см}$, $R_0 = 10 \text{ см}$, $\alpha = 50 \frac{\text{дин}}{\text{см}}$, $\eta = 1,8 \cdot 10^{-4} \frac{\text{дин} \cdot \text{с}}{\text{см}^2}$, тоді

$$t = \frac{2 \cdot 1,8 \cdot 10^{-4} \cdot 10 \cdot 10^4}{50 \cdot 10^{-4}} = 7,2 \cdot 10^3 \text{ с} = 2 \text{ год}.$$

2.2 Иродов

Два однакових балони з'єднані трубкою із клапаном, який пропускає газ із одного балона в другий при різниці тисків $\Delta p \geq 1,1 \text{ атм}$. Спочатку в одному балоні був вакуум, а в другому – ідеальний газ при температурі $t_1 = 27^\circ\text{C}$ і тискові $p_1 = 1 \text{ атм}$. Потім обидва балони нагріли до температури $t_2 = 107^\circ\text{C}$. Знайти тиск газу в балоні, де був вакуум.

У початковому стані у балоні з газом

$$p_1 V = \nu R T_1,$$

а у балоні з вакуумом $p = 0$.

У кінцевому стані

$$p_I V = \nu_1 R T_2,$$

а у балоні, де раніше був вакуум

$$p_{II} V = \nu_2 R T_2,$$

причому $\nu_1 + \nu_2 = \nu$.

Газ буде переходити із одного балону до другого, поки не виконається умова

$$p_I - p_{II} = \Delta p.$$

Додамо рівняння кінцевого стану

$$(p_I + p_{II})V = (\nu_1 + \nu_2)RT_2 = \nu RT_2.$$

Отже, можемо записати систему рівнянь

$$\begin{cases} p_I + p_{II} = \frac{\nu R T_2}{V} \\ p_I - p_{II} = \Delta p \end{cases}.$$

З неї знаходимо

$$2p_{II} = \frac{\nu R T_2}{V} - \Delta p.$$

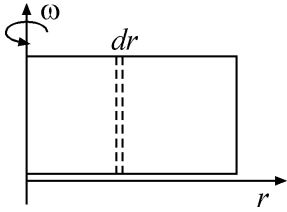
Позбавимось кількості молей, використавши рівняння початкового стану

$$\nu = \frac{p_1 V}{R T_1},$$

тоді

$$p_{II} = \frac{p_1 \frac{T_2}{T_1} - \Delta p}{2}.$$

2.21 Иродов



Горизонтальний циліндр, закритий з одного кінця, обертають із постійною кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі, яка проходить через відкритий кінець циліндру. Тиск повітря зовні p_0 , температура T , молярна маса повітря μ . Знайти тиск повітря як функцію відстані r від осі обертання. Молярну масу вважати такою, що не залежить від r .

Коли циліндр розкрутиться, система буде знаходитися у рівновазі. Виділимо на відстані r від осі шар товщиною dr . Тоді рівність тисків на межі $r + dr$

$$p(r) + \frac{dF}{S} = p(r + dr),$$

де $\frac{dF}{S}$ – тиск з боку виділеного шару повітря. Розпишемо формулу

$$p(r) + \frac{dF}{S} = p(r) + \frac{dp}{dr} dr; \quad \frac{dF}{S} = \frac{dp}{dr} dr; \quad dp = \frac{dF}{S}.$$

Вираз для сили можна записати через прискорення для обертального руху

$$dF = dm \cdot a = dm \cdot \omega^2 r.$$

Вважаючи, що виділеному шарі повітря температура стала, скористаємось рівнянням Клапейрона-Менделєєва

$$pdV = \frac{dm}{\mu} RT; \quad dm = \frac{\mu p dV}{RT}.$$

Запишемо

$$dp = \frac{dF}{S} = \frac{\mu p \omega^2 r}{RT} \cdot \frac{dV}{S} = \frac{\mu p \omega^2 r}{RT} \cdot \frac{S dr}{S} = \frac{\mu p \omega^2}{RT} r dr.$$

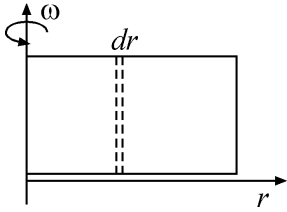
Залежність $p(r)$ шукаємо з розв'язку диференційного рівняння методом розділення змінних

$$\int \frac{dp}{p} = \frac{\mu \omega^2}{RT} \int r dr; \quad \ln p = \frac{\mu \omega^2}{2RT} r^2 + C.$$

Сталу інтегрування знайдемо з умови, що $p = p_0$ – атмосферний тиск при $r = 0$. Отже, $C = \ln p_0$, і

$$p = p_0 \exp\left(\frac{\mu \omega^2 r^2}{2RT}\right).$$

2.21 Иродов



Горизонтальний циліндр, закритий з одного кінця, обертають із постійною кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі, яка проходить через відкритий кінець циліндру. Тиск повітря зовні p_0 , температура T , молярна маса повітря μ . Знайти тиск повітря як функцію відстані r від осі обертання. Молярну масу вважати такою, що не залежить від r .

Коли циліндр розкрутиться, система буде знаходитися у рівновазі. Виділимо на відстані r від осі шар товщиною dr . Тоді рівність тисків на межі $r + dr$

$$p(r) + \frac{dF}{S} = p(r + dr),$$

де $\frac{dF}{S}$ – тиск з боку виділеного шару повітря. Розпишемо формулу

$$p(r) + \frac{dF}{S} = p(r) + \frac{dp}{dr} dr; \quad \frac{dF}{S} = \frac{dp}{dr} dr; \quad dp = \frac{dF}{S}.$$

Вираз для сили можна записати через прискорення для обертального руху

$$dF = dm \cdot a = dm \cdot \omega^2 r.$$

Вважаючи, що виділеному шарі повітря температура стала, скористаємось рівнянням Клапейрона-Менделєєва

$$pdV = \frac{dm}{\mu} RT; \quad dm = \frac{\mu p dV}{RT}.$$

Запишемо

$$dp = \frac{dF}{S} = \frac{\mu p \omega^2 r}{RT} \cdot \frac{dV}{S} = \frac{\mu p \omega^2 r}{RT} \cdot \frac{S dr}{S} = \frac{\mu p \omega^2}{RT} r dr.$$

Залежність $p(r)$ шукаємо з розв'язку диференційного рівняння методом розділення змінних

$$\int \frac{dp}{p} = \frac{\mu \omega^2}{RT} \int r dr; \quad \ln p = \frac{\mu \omega^2}{2RT} r^2 + C.$$

Сталу інтегрування знайдемо з умови, що $p = p_0$ – атмосферний тиск при $r = 0$. Отже, $C = \ln p_0$, і

$$p = p_0 \exp\left(\frac{\mu \omega^2 r^2}{2RT}\right).$$

До якого тиску треба стиснути вуглекислий газ при температурі $T = 300 \text{ К}$, щоб його густина виявилась рівною $\rho = 500 \text{ г/л}$? Розрахунок провести як для ідеального газу, так і для ван-дер-ваальсівського.

Для довільної кількості речовини рівняння стану ідеального газу

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

а газу Ван-дер-Ваальса

$$\left[p + \left(\frac{m}{\mu} \right)^2 \frac{a}{V^2} \right] \left(V - \frac{m}{\mu} b \right) = \frac{m}{\mu} RT.$$

Скористаємось тим, що $m = \rho V$, і підставимо у рівняння

$$pV = \frac{\rho V}{\mu} RT; \quad \left[p + \left(\frac{\rho V}{\mu} \right)^2 \frac{a}{V^2} \right] \left(V - \frac{\rho V}{\mu} b \right) = \frac{\rho V}{\mu} RT.$$

Тоді

$$p = \frac{\rho}{\mu} RT; \quad \left[p + \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^2 a \right] \left(1 - \frac{\rho}{\mu} b \right) = \frac{\rho}{\mu} RT.$$

Звідси шукані тиски

$$p = \frac{\rho}{\mu} RT;$$

$$p = \frac{\rho RT}{\mu - \rho b} - \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^2 a.$$

Для вуглекислого газу

$$a = 0,367 \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^6}{\text{моль}^2}; \quad b = 43 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}; \quad \mu = 44 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}.$$

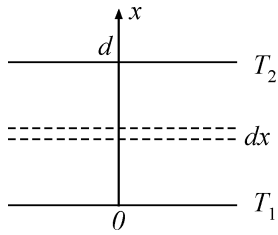
Дано $\rho = 500 \frac{\text{г}}{\text{л}} = 500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Тоді

$$p_{id} = \frac{500}{44 \cdot 10^{-3}} 8,314 \cdot 300 = 2,83 \cdot 10^7 \text{ Па} = 281 \text{ атм};$$

$$p_{real} = \frac{500 \cdot 8,314 \cdot 300}{44 \cdot 10^{-3} - 500 \cdot 43 \cdot 10^{-6}} - \left(\frac{500}{44 \cdot 10^{-3}} \right)^2 0,367 = \frac{1247100}{(44 - 21,5) \cdot 10^{-3}} - 129 \cdot 10^6 \cdot 0,367;$$

$$p_{real} = \frac{1247,1 \cdot 10^6}{22,5} - 47,3 \cdot 10^6 = 7,88 \cdot 10^6 \text{ Па} = 78 \text{ атм}.$$

2.3 Иродов



Газ із молярною масою μ знаходиться під тиском p між двома однаковими горизонтальними пластинами. Температура газу зростає лінійно від T_1 біля нижньої пластини до T_2 біля верхньої. Об'єм газу між пластинами становить V . Знайти його масу m .

Запишемо рівняння градієнту температури між пластинами. Залежність лінійна, отже

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{d}x + T_1.$$

Перевірити : $x = 0$; $T(x) = T_1$. $x = d$; $T(x) = T_2$.

Виділимо шар між пластинами товщиною dx . Якщо площа пластини S , то об'єм виділеного шару $dV = Sdx$. У межах шару температуру можна вважати сталою, тому можна використати рівняння стану

$$pdV = pSdx = \frac{dm}{\mu}RT(x),$$

звідси маса газу у шарі

$$dm = \frac{\mu p S}{R} \cdot \frac{dx}{T(x)} = \frac{\mu p S}{R} \cdot \frac{dx}{\frac{T_2 - T_1}{d}x + T_1} = \frac{\mu p S d}{R(T_2 - T_1)} \cdot \frac{d\left(x + \frac{T_1 d}{T_2 - T_1}\right)}{x + \frac{T_1 d}{T_2 - T_1}}.$$

Повну масу газу шукаємо інтегруванням

$$\begin{aligned} m &= \frac{\mu p S d}{R(T_2 - T_1)} \int_0^d \frac{d\left(x + \frac{T_1 d}{T_2 - T_1}\right)}{x + \frac{T_1 d}{T_2 - T_1}} = \frac{\mu p S d}{R(T_2 - T_1)} \ln\left(x + \frac{T_1 d}{T_2 - T_1}\right) \Big|_0^d = \\ &= \frac{\mu p S d}{R(T_2 - T_1)} \left[\ln\left(d + \frac{T_1 d}{T_2 - T_1}\right) - \ln\left(\frac{T_1 d}{T_2 - T_1}\right) \right] = \frac{\mu p S d}{R(T_2 - T_1)} \left[\ln\left(\frac{T_2 d}{T_2 - T_1}\right) - \ln\left(\frac{T_1 d}{T_2 - T_1}\right) \right] \end{aligned}$$

Остаточно маємо

$$\boxed{m = \frac{\mu p V}{R(T_2 - T_1)} \ln \frac{T_2}{T_1}}.$$

Два моля ідеального газу при температурі $T_0 = 300 \text{ К}$ охолодили ізохорно, внаслідок чого його тиск зменшився у $n = 2$ рази. Потім газ розширили так, що у кінцевому стані його температура стала дорівнювати початковій. Знайти кількість теплоти, що поглинув газ у даному процесі.

Задачу можна розв'язати двома способами.

I спосіб. Це розв'язок “в лоб”. У вихідному стані параметри стану газу (p_1, V_1, T_0) . Використаємо перше начало термодинаміки $Q = \Delta U + A$.

Для ізохорного ($V = \text{const}$) охолодження робота $A = p\Delta V = 0$, отже кількість теплоти при цьому процесі визначається лише зміною внутрішньої енергії

$$Q_1 = U_2 - U_1.$$

Тиск газу при цьому зміниться до p_2 . Оскільки процес ізохорний,

$$\frac{p_1}{T_0} = \frac{p_2}{T_1}; \quad T_1 = T_0 \frac{p_2}{p_1} = T_0 n.$$

При ізобарному розширенні газу температура повертається до початкової, отже внутрішня енергія, яка є функцією лише температури для ідеального газу, теж повертається у вихідний стан, отже $\Delta U = U_1 - U_2$, а робота становить

$$A = p_2(V_2 - V_1) = np_1V_1\left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right) = nRT_0\left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right).$$

Оскільки процес ізобарний,

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_0}; \quad V_2 = V_1 \frac{T_0}{T_1} = V_1 \frac{1}{n}; \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{n}.$$

Отже, кількість теплоти у ізобарному процесі

$$Q_2 = U_1 - U_2 + n\nu RT_0\left(\frac{1}{n} - 1\right).$$

Повна кількість теплоти, витрачена у процесі

$$Q = Q_1 + Q_2 = n\nu RT_0\left(\frac{1}{n} - 1\right); \quad \boxed{Q = \nu RT_0 \frac{n-1}{n}}.$$

II спосіб. Значно спрощує розв'язок задачі використання теплоємностей. У першому і другому процесах відповідно кількість теплоти

$$Q_1 = \nu C_V (T_1 - T_0); \quad Q_2 = \nu C_p (T_0 - T_1).$$

З ізохорного процесу $\frac{p_1}{T_0} = \frac{p_2}{T_1}; \quad T_1 = T_0 \frac{p_2}{p_1} = T_0 n.$

Повна кількість теплоти, витрачена у процесі

$$Q = Q_1 + Q_2 = \nu C_p (T_0 - T_1) + \nu C_V (T_1 - T_0) = \nu (C_p - C_V) (T_0 - T_1) = \nu RT_0 \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

$$\boxed{Q = \nu RT_0 \frac{n-1}{n}}.$$

Всередині закритого з обох боків горизонтального циліндру знаходиться легкорухомий поршень. Спочатку поршень ділить циліндр на дві рівні частини, кожна об'ємом V_0 , в яких знаходиться ідеальний газ однакової температури і під одним і тим же тиском p_0 . Яку роботу необхідно виконати, щоб, повільно рухаючи поршень, ізотермічно збільшити об'єм однієї частини газу в η разів, порівняно із об'ємом другої частини.

Робота, яку виконує при розширенні чи стисканні газ визначається як

$$\delta A = p dV = \frac{RT}{V} dV.$$

Повна робота при розширенні газу у першій частині

$$A_1 = RT \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = RT \ln \frac{V_1}{V_0}.$$

Повна робота при стисканні газу у другій частині

$$A_2 = RT \int_{V_0}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT \ln \frac{V_2}{V_0}.$$

Робота зовнішніх сил над газом

$$A = -(A_1 + A_2) = RT \ln \frac{V_0^2}{V_1 V_2}.$$

Об'єми V_1, V_2 можна знайти із системи рівнянь

$$\begin{cases} V_1 + V_2 = 2V_0 \\ \frac{V_1}{V_2} = \eta \end{cases},$$

звідки

$$V_2 = \frac{2V_0}{\eta + 1}; \quad V_1 = \frac{2V_0\eta}{\eta + 1}.$$

Підставимо об'єми у вираз для роботи і позбавимось від температури

$$A = p_0 V_0 \ln \frac{V_0^2 (\eta + 1)^2}{4V_0^2 \eta}.$$

$$\boxed{A = p_0 V_0 \ln \frac{(\eta + 1)^2}{4\eta}}.$$

Ідеальний газ, показник адіабати якого γ , розширюють так, щоб тепло, яке надається газу, дорівнювало зменшенню його внутрішньої енергії. Знайти : а) молярну теплоємність газу в цьому процесі; б) рівняння процесу в параметрах (T, V) .

а) За умовою задачі

$$\delta Q = -dU.$$

Оскільки за означенням

$$dU = C_V dT = \frac{R}{\gamma - 1} dT,$$

теплоємність

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = -\frac{R}{\gamma - 1}.$$

б) Закон збереження енергії

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Підставимо у нього інгредієнти

$$-\frac{R}{\gamma - 1} dT = \frac{R}{\gamma - 1} dT + p dV; \quad -\frac{2R}{\gamma - 1} dT = \frac{RT}{V} dV; \quad -\frac{2}{\gamma - 1} \cdot \frac{dT}{T} = \frac{dV}{V}.$$

Прологарифмуємо останній вираз

$$-\frac{2}{\gamma - 1} \cdot \int \frac{dT}{T} = \int \frac{dV}{V}; \quad -\frac{2}{\gamma - 1} \cdot \ln T = \ln V + \text{const}.$$

Остаточно

$$\frac{\gamma - 1}{VT^2} + \text{const}.$$

2.5 Иродов

У посудині знаходиться суміш $m_1 = 7$ г азоту і $m_2 = 11$ г вуглекислого газу CO_2 при температурі $T = 290$ К і тискові $p = 1$ атм. Знайти густину цієї суміші, вважаючи гази ідеальними.

Густина суміші газів

$$\rho = \sum_i \rho_i.$$

Тиск суміші газів

$$p = \sum_i p_i.$$

Для нашого випадку

$$p = p_1 + p_2.$$

Для кожної компоненти суміші

$$\begin{aligned} p_1 V &= \frac{m_1}{\mu_1} RT; & p_1 &= \frac{\rho_1}{\mu_1} RT; \\ p_2 V &= \frac{m_2}{\mu_2} RT; & p_2 &= \frac{\rho_2}{\mu_2} RT. \end{aligned}$$

Тоді повна густина суміші

$$\rho = \frac{1}{RT} (\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2).$$

Треба позбутися невідомих значень парціальних тисків.

$$\frac{p}{p_1} = 1 + \frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{m_2 \mu_1}{m_1 \mu_2}; \quad p_1 = \frac{p}{1 + \frac{m_2 \mu_1}{m_1 \mu_2}}.$$

Аналогічно

$$p_2 = \frac{p}{1 + \frac{m_1 \mu_2}{m_2 \mu_1}}.$$

Підставляємо у вираз для густини

$$\rho = \frac{p}{RT} \left(\frac{\mu_1}{1 + \frac{m_2 \mu_1}{m_1 \mu_2}} + \frac{\mu_2}{1 + \frac{m_1 \mu_2}{m_2 \mu_1}} \right),$$

остаточно

$$\boxed{\rho = \frac{p}{RT} \left(\frac{m_1 + m_2}{\frac{m_2}{\mu_2} + \frac{m_1}{\mu_1}} \right)}.$$

Один моль ідеального газу з відомим значенням C_V знаходиться у лівій половині циліндру. Праворуч від поршня вакуум. За відсутності газу поршень знаходиться впритул до лівого торця циліндру, і пружина у такому положенні не деформована. Бічні стінки циліндру і поршень – адіабатні. Тертя немає. Знайти теплоємність газу за таких умов.

Перед розв'язком цієї задачі ознайомтеся із задачею 4.3 решебника.

Умовою рівноваги поршня є рівність сили тиску газу і сили пружності пружини

$$pS = kx,$$

де x – зміщення пружини, воно дорівнює половині довжини циліндру. Об'єм половини циліндру $V = Sx$, тоді

$$p = k \frac{x}{S} = k \frac{V}{S^2}.$$

Перше начало термодинаміки

$$\delta Q = \Delta U + \delta A$$

перепишемо у вигляді

$$CdT = C_V dT + pdV.$$

З рівняння стану Клапейрона $pV = RT$ запишемо

$$pdV + Vdp = RdT.$$

З рівняння для тиску

$$dp = \frac{k}{S^2} dV; \quad Vdp = V \frac{k}{S^2} dV = pdV.$$

Тоді з рівняння стану

$$pdV + Vdp = 2pdV = RdT; \quad pdV = \frac{R}{2} dT.$$

Підставимо всі отримані співвідношення у перше начало. Всі диференціали перетворили на диференціал температури

$$CdT = C_V dT + \frac{R}{2} dT,$$

звідки теплоємність газу

$$\boxed{C = C_V + \frac{R}{2}}.$$

Маємо ідеальний газ, молярна теплоємність C_V якого відома. Знайти молярну теплоємність цього газу як функцію його об'єму V , якщо газ виконує процес за законом : а) $T = T_0 e^{\alpha V}$; б) $p = p_0 e^{\alpha V}$, де T_0, p_0, α – сталі.

а) З умови задачі

$$T = T_0 e^{\alpha V}; \quad dT = \alpha T_0 e^{\alpha V} dV = \alpha T dV; \quad dV = \frac{dT}{\alpha T}.$$

З рівняння Клапейрона

$$pV = RT; \quad pdV + Vdp = RdT; \\ Vdp = RdT - pdV = RdT - \frac{RT}{V} dV = RdT - \frac{RT}{V} \frac{dT}{\alpha T} = RdT - \frac{R}{\alpha V} dT.$$

Знайдемо роботу

$$\delta A = pdV = RdT - Vdp = RdT - RdT + \frac{R}{\alpha V} dT = \frac{R}{\alpha V} dT.$$

Підставивши все у перше начало термодинаміки, маємо

$$CdT = C_V dT + pdV = C_V dT + \frac{R}{\alpha V} dT,$$

звідки

$$C = C_V + \frac{R}{\alpha V}.$$

б) З умови задачі

$$p = p_0 e^{\alpha V}; \quad dp = \alpha p_0 e^{\alpha V} dV = \alpha p dV; \quad dV = \frac{dp}{\alpha p}.$$

З рівняння Клапейрона

$$Vdp = V\alpha p dV; \quad pdV + Vdp = pdV + V\alpha p dV = (1 + V\alpha)pdV = RdT.$$

Знайдемо роботу

$$\delta A = pdV = \frac{RdT}{(1 + V\alpha)}.$$

Підставивши все у перше начало термодинаміки, маємо

$$CdT = C_V dT + pdV = C_V dT + \frac{R}{(1 + V\alpha)} dT,$$

звідки

$$C = C_V + \frac{R}{(1 + \alpha V)}.$$

Один моль ідеального газу, теплоємність якого за сталого тиску C_p , виконує процес за законом $p = p_0 + \frac{\alpha}{V}$, де p_0, α – сталі. Знайти : а) теплоємність газу як функцію його об'єму; б) кількість теплоти, яку отримав газ, при його розширенні від V_1 до V_2 .

а) З умови задачі

$$p = p_0 + \frac{\alpha}{V}; \quad dp = -\frac{\alpha}{V^2} dV, \quad Vdp = -\frac{\alpha}{V} dV.$$

З рівняння Клапейрона

$$pV = RT; \quad p_0V + \alpha = RT; \quad p_0dV = RdT; \quad dV = \frac{R}{p_0} dT.$$

З іншого боку,

$$pdV + Vdp = RdT; \\ RdT = pdV + Vdp = pdV - \frac{\alpha}{V} dV; \quad pdV = RdT + \frac{\alpha}{V} dV.$$

Знайдемо роботу

$$\delta A = pdV = RdT + \frac{\alpha}{V} \frac{R}{p_0} dT.$$

Підставивши все у перше начало термодинаміки, маємо

$$CdT = C_V dT + pdV = C_V dT + RdT + \frac{\alpha}{V} \frac{R}{p_0} dT = (C_V + R)dT + \frac{\alpha R}{p_0 V} dT,$$

звідки

$$C = C_p + \frac{\alpha R}{p_0 V}.$$

б) Кількість теплоти знайдемо через теплоємність

$$dQ = CdT; \quad dT = \frac{p_0}{R} dV.$$

Підставимо всі значення у враз для теплоємності

$$dQ = \left(C_p + \frac{\alpha R}{p_0 V} \right) \frac{p_0}{R} dV = C_p \frac{p_0}{R} dV + \frac{\alpha}{V} dV$$

і проінтегруємо

$$Q = C_p \frac{p_0}{R} \int_{V_1}^{V_2} dV + \alpha \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = C_p \frac{p_0}{R} (V_2 - V_1) + \alpha \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Один моль ідеального газу, теплоємність якого за сталого тиску C_p , виконує процес за законом $T = T_0 + \alpha V$, де T_0, α – сталі. Знайти : а) теплоємність газу як функцію його об'єму; б) кількість теплоти, яку отримав газ, при його розширенні від V_1 до V_2 .

а) З умови задачі

$$T = T_0 + \alpha V; \quad dT = \alpha dV; \quad dV = \frac{dT}{\alpha}.$$

З рівняння Клапейрона

$$pV = RT; \quad pV = RT_0 + \alpha R V; \quad p = \frac{RT_0}{V} + \alpha R; \quad (p - \alpha R)V = RT_0.$$

Продиференціюємо останній вираз

$$(p - \alpha R)dV + Vdp = 0; \quad Vdp = (\alpha R - p)dV.$$

Знайдемо роботу

$$\delta A = pdV = RdT - Vdp = RdT - (\alpha R - p)dT = RdT - RdT + p dT = p \frac{dT}{\alpha}.$$

Підставивши все у перше начало термодинаміки, маємо

$$CdT = C_V dT + pdV = C_V dT + p \frac{dT}{\alpha} = C_V dT + \left(\frac{RT_0}{V} + \alpha R \right) \frac{dT}{\alpha} = (C_V + R)dT + \frac{RT_0}{\alpha V} dT,$$

звідки

$$C = C_p + \frac{RT_0}{\alpha V}.$$

б) Кількість теплоти знайдемо через теплоємність

$$dQ = CdT; \quad dT = \alpha dV.$$

Підставимо всі значення у вміст для теплоємності

$$dQ = \left(C_p + \frac{RT_0}{\alpha V} \right) \alpha dV = C_p \alpha dV + \frac{RT_0}{V} dV$$

і проінтегруємо

$$Q = C_p \alpha \int_{V_1}^{V_2} dV + RT_0 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = C_p \alpha (V_2 - V_1) + RT_0 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Знайти рівняння процесу (у змінних T, V) при якому молярна теплоємність ідеального газу змінюється за законом : а) $C = C_V + \alpha T$; б) $C = C_V + \beta V$, в) $C = C_V + ap$, де α, β, a – сталі.

а) В перше начало термодинаміки $\delta Q = \Delta U + \delta A$ підставимо вираз для теплоємності

$$CdT = C_V dT + pdV; \quad (C_V + \alpha T)dT = C_V dT + pdV,$$

звідки

$$C_V dT + \alpha T dT = C_V dT + pdV; \quad \alpha T dT = pdV.$$

Скористаємось рівнянням Клапейрона

$$pV = RT; \quad \alpha T dT = \frac{RT}{V} dV; \quad \alpha dT = \frac{R}{V} dV.$$

Проінтегрувавши останнє рівняння, маємо

$$\int dT = \frac{R}{\alpha} \int \frac{dV}{V}; \quad T = \frac{R}{\alpha} \ln V + \text{const}.$$

$$\boxed{\frac{\alpha T}{V R} = \text{const}}.$$

б) В перше начало термодинаміки $\delta Q = \Delta U + \delta A$ підставимо вираз для теплоємності

$$CdT = C_V dT + pdV; \quad (C_V + \beta V)dT = C_V dT + pdV,$$

звідки

$$C_V dT + \beta V dT = C_V dT + pdV; \quad \beta V dT = pdV.$$

Скористаємось рівнянням Клапейрона

$$pV = RT; \quad \beta V dT = \frac{RT}{V} dV; \quad \beta \frac{dT}{T} = \frac{R}{V^2} dV.$$

Проінтегрувавши останнє рівняння, маємо

$$\int \frac{dT}{T} = \frac{R}{\beta} \int \frac{dV}{V^2}; \quad \ln T = -\frac{R}{\beta} \frac{1}{V} + \text{const}.$$

$$\boxed{\frac{R}{T e^{\beta V}} = \text{const}}.$$

в) В перше начало термодинаміки $\delta Q = \Delta U + \delta A$ підставимо вираз для теплоємності

$$CdT = C_V dT + pdV; \quad (C_V + ap)dT = C_V dT + pdV,$$

звідки

$$C_V dT + apdT = C_V dT + pdV; \quad apdT = pdV; \quad adT = dV.$$

Проінтегрувавши останнє рівняння, маємо

$$a \int dT = \int dV; \quad aT = V + \text{const}.$$

$$\boxed{aT - V = \text{const}}.$$

Є ідеальний газ з показником діабати γ . Його молярна теплоємність при якомусь процесі змінюється за законом $C = \frac{\alpha}{T}$, де α – стала. Знайти : а) роботу, яку виконує один моль газу при його нагріванні від T_0 до температури у η разів більшої; б) рівняння процесу у параметрах (p, V) .

а) В перше начало термодинаміки $\delta Q = \Delta U + \delta A$ підставимо вираз для теплоємності

$$\frac{\alpha}{T} dT = C_V dT + p dV;$$

і виділимо із нього роботу $\left(\frac{\alpha}{T} - C_V\right) dT = p dV = \delta A,$

Тоді повна робота є інтегралом

$$A = \int_0^A \delta A = \int_{T_0}^{\eta T_0} \left(\frac{\alpha}{T} - C_V\right) dT = \alpha \ln \eta - C_V T_0 (\eta - 1).$$

Перейдемо від теплоємності C_V до сталої адіабати через рівняння Майєра $C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$.

Остаточно робота

$$A = \alpha \ln \eta - \frac{RT_0}{\gamma - 1} (\eta - 1).$$

б) Отримаємо спочатку рівняння у більш зручних координатах (T, V) , а потім перейдемо до координат (p, V) . Рівняння

$$\left(\frac{\alpha}{T} - C_V\right) dT = p dV; \quad \left(\frac{\alpha}{T} - \frac{R}{\gamma - 1}\right) dT = p dV$$

зведемо до координат (T, V)

$$\left(\frac{\alpha}{T} - \frac{RT}{\gamma - 1}\right) dT = \frac{RT}{V} dV; \quad \left(\frac{\alpha}{RT^2} - \frac{1}{\gamma - 1} \cdot \frac{1}{T}\right) dT = \frac{dV}{V}$$

і проінтегруємо

$$-\frac{\alpha}{RT} - \frac{1}{\gamma - 1} \ln T = \ln V + \text{const}; \quad \ln e^{-\frac{\alpha}{RT}} - \frac{1}{\gamma - 1} \ln T = \ln V + \text{const}; \quad \frac{T^{-\frac{1}{\gamma - 1}}}{V} e^{-\frac{\alpha}{RT}} = \text{const}.$$

Тепер позбавимось температури

$$V \left(\frac{pV}{R}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} e^{\frac{\alpha}{pV}} = \text{const}; \quad V \left(\frac{pV}{R}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} e^{\frac{\alpha}{pV}} = \text{const}; \quad V^{\gamma - 1} p V e^{\frac{\alpha(\gamma - 1)}{pV}} = \text{const};$$

$$p V^{\gamma} e^{\frac{\alpha(\gamma - 1)}{pV}} = \text{const}.$$

Один моль кисню розширили від тиску $V_1 = 1$ л до $V_2 = 5$ л за сталої температури $T = 280$ К. Визначити кількість тепла, яку поглинув газ. Газ вважати ван-дер-ваальсівським.

Для газу Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT; \quad p = \frac{RT}{(V - b)} - \frac{a}{V^2}.$$

Внутрішня енергія ван-дер-ваальсівського газу визначається як

$$U = C_V T - \frac{a}{V} + \text{const}.$$

У початковому стані і у кінцевому стані

$$U_1 = C_V T - \frac{a}{V_1} + \text{const}, \quad U_2 = C_V T - \frac{a}{V_2} + \text{const}.$$

Тоді приріст внутрішньої енергії

$$\Delta U = U_2 - U_1 = a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

Робота

$$\delta A = p dV = \frac{RT dV}{(V - b)} - \frac{a dV}{V^2}.$$

Повна робота

$$A = RT \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} + a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right).$$

Витрачена кількість теплоти

$$Q = \Delta U + A = a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) + RT \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} + a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right);$$

$$\boxed{Q = RT \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b}}.$$

Иродов 2.59

Знайти для моля ван-дер-ваальсівського газу рівняння адіабати у змінних T, V , якщо його теплоємність за сталого об'єму дорівнює C_V .

Перше начало термодинаміки

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Для адіабатного процесу $\delta Q = 0$, тому

$$dU = -\delta A.$$

Для газу Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT; \quad p = \frac{RT}{(V - b)} - \frac{a}{V^2}.$$

Внутрішня енергія ван-дер-ваальсівського газу визначається як

$$dU = C_V dT + \frac{adV}{V^2}.$$

Робота

$$\delta A = pdV = \frac{RTdV}{(V - b)} - \frac{adV}{V^2}.$$

Підставимо у перше начало

$$C_V dT + \frac{adV}{V^2} = -\frac{RTdV}{(V - b)} + \frac{adV}{V^2}; \quad C_V dT = -\frac{RTdV}{(V - b)}; \quad \ln T = -\frac{R}{C_V} \ln(V - b) + \text{const}.$$

Остаточно

$$\boxed{T(V - b)^{R/C_V} = \text{const}}.$$

2.6 Иродов

В балоні об'ємом $V = 7,5$ л при температурі $T = 300$ К знаходиться суміш ідеальних газів : $\nu_1 = 0,1$ моля кисню, $\nu_2 = 0,2$ моля азоту, $\nu_3 = 0,3$ моля вуглекислого газу.

Вважаючи гази ідеальними, знайти :

а) тиск суміші;

б) середню молярну масу μ даної суміші, яка входить у рівняння її стану

$$pV = \frac{m}{\mu}RT, \text{ де } m - \text{маса суміші.}$$

а) Тиск суміші дорівнює сумі парціальних тисків кожної компоненти

$$p = p_1 + p_2 + p_3 = (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) \frac{RT}{V}.$$

б) Перепишемо рівняння стану

$$p = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT}{V},$$

маса суміші дорівнює сумі мас компонент $m = m_1 + m_2 + m_3$. Кількість молів у суміші

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\mu} = \frac{\mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2 + \mu_3 \nu_3}{\mu},$$

звідки

$$\mu = \frac{\mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2 + \mu_3 \nu_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}.$$

Визначити для ван-дер-ваальсівського газу різницю молярних теплоємностей $C_p - C_V$.

Перше начало термодинаміки $\delta Q = dU + \delta A$.

За означенням теплоємності $C = \frac{\delta Q}{dT}$; $\delta Q = CdT$.

Для газу Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT; \quad p = \frac{RT}{(V - b)} - \frac{a}{V^2}.$$

Внутрішня енергія газу Ван-дер-Ваальса

$$dU = C_V dT + \frac{a}{V^2} dV.$$

Тоді теплоємність

$$CdT = C_V dT + \frac{a}{V^2} dV + \left(\frac{RT}{(V - b)} - \frac{a}{V^2}\right) dV = C_V dT + \frac{RT}{(V - b)} dV.$$

Зафіксуємо тиск ($p = \text{const}$) і знайдемо диференціал об'єму з рівняння Ван-дер-Ваальса

$$0 = dp = \frac{RdT}{(V - b)} - \frac{RT}{(V - b)^2} dV + \frac{2a}{V^3} dV; \quad dV = \frac{\frac{RdT}{(V - b)}}{\frac{RT}{(V - b)^2} - \frac{2a}{V^3}} = \frac{(V - b)dT}{T - \frac{2a(V - b)^2}{RV^3}}.$$

$$C_p dT = C_V dT + \frac{RT}{(V - b)} \cdot \frac{(V - b)dT}{T - \frac{2a(V - b)^2}{RV^3}},$$

Остаточно

$$C_p - C_V = \frac{R}{1 - \frac{2a(V - b)^2}{RTV^3}}.$$

Два теплоізольованих балони з'єднані між собою трубками з краном. В одному балоні об'ємом $V_1 = 10\text{л}$ знаходиться $\nu = 2,5$ моля ідеального газу. Другий балон об'ємом $V_2 = 100\text{л}$ відкачаний до високого вакууму. Кран відкрили, і газ розширився. Вважати газ ван-дер-ваальсівським, знайти приріст його температури.

Рівняння Ван-дер-Ваальса для кількох молів

$$\left[p + \nu^2 \frac{a}{V^2} \right] \left(\frac{V}{\nu} - b \right) = RT.$$

У початковому стані

$$T_1 = \frac{1}{R} \left[p_1 + \nu^2 \frac{a}{V_1^2} \right] \left(\frac{V_1}{\nu} - b \right),$$

у кінцевому стані

$$T_2 = \frac{1}{R} \left[p_2 + \nu^2 \frac{a}{(V_1 + V_2)^2} \right] \left(\frac{V_1 + V_2}{\nu} - b \right).$$

Тоді приріст температури

Проходження газу через порувату перегородку теплоізолюваній трубі супроводжується розширенням і зміною температури газу (ефект Джоуля-Томсона). Якщо до розширення вважати газ ван-дер-ваальсівським, а після – ідеальним, то відповідний приріст температури газу

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{C_p} \left(\frac{RT_1 b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} \right).$$

Отримати цю формулу, застосувавши перше начало термодинаміки до молю газу, що проходить через перегородку. Процес вважати адіабатним.

Ефект Джоуля-Томсона йде без зміни ентальпії ($I = \text{const}$). Кількісно ефект Джоуля-Томсона характеризує величина

$$\begin{array}{c} U \\ I \begin{array}{|c|c|} \hline T & p \\ \hline V & S \\ \hline \end{array} F \\ G \end{array}$$

$$\mu_I = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_I.$$

Запишемо диференціал ентальпії $dI = \left(\frac{\partial I}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial I}{\partial p} \right)_T dp$.

Оскільки за означенням ентальпії $I = U + pV$, то $dI = \underbrace{dU + pdV}_{\delta Q = TdS} + Vdp = TdS + Vdp$.

Звідси $\left(\frac{\partial I}{\partial p} \right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T + V$.

Застосовуючи мнемонічний квадрат, запишемо одне з рівнянь Максвелла

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p; \quad \text{тоді} \quad \left(\frac{\partial I}{\partial p} \right)_T = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p + V.$$

При ізобарному процесі $\delta Q = dI$, отже $\left(\frac{\partial I}{\partial T} \right)_p = C_p$. Тоді

$$dI = C_p dT + \left[-T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p + V \right] dp.$$

Скориставшись сталістю ентальпії $I = \text{const} \Rightarrow dI = 0$, отримаємо

$$\mu_I = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_I = \frac{1}{C_p} \left[T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p - V \right].$$

Знайдемо $\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$. Скористаємось рівнянням Ван-дер-Ваальса у вигляді

$$\left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT; \quad pV + \frac{a}{V} - pb - \frac{ab}{V^2} = RT$$

і продиференціюємо по температурі T за сталого тиску:

$$p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p - \frac{a}{V^2} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p + \frac{2ab}{V^3} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = R.$$

Звідси знайдемо шукану похідну

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{p - \frac{a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3}}.$$

Скористуємось тим, що

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}.$$

Тоді

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3}} = \frac{R}{\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^3}(V-b)} = \frac{\frac{R}{V-b}}{\frac{RT}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^3}}.$$

Підставимо похідну у вираз для швидкості зміни температури із тиском

$$\mu_I = \frac{1}{C_p} \left[\frac{\frac{RT}{V-b}}{\frac{RT}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^3}} - V \right] = \frac{1}{C_p} \left[\frac{\frac{RT}{V-b} - \frac{RTV}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^2}}{\frac{RT}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^3}} \right].$$

Після очевидних перетворень маємо остаточно

$$\mu_I = \frac{1}{C_p} \left[\frac{\frac{2a}{V^2} - \frac{RTb}{(V-b)^2}}{\frac{RT}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^3}} \right].$$

З рівняння Ван-дер-Ваальса знайдемо похідну $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}.$

Підставивши цей вираз у рівняння для μ_I , маємо

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_I = \frac{1}{C_p} \cdot \frac{\frac{RTb}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^2}}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_I \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{C_p} \cdot \left[\frac{RTb}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^2} \right].$$

Скоротивши тиск, домноживши обидві частини на dV і проінтегрувавши, маємо

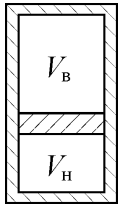
$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_I dV = \frac{1}{C_p} \cdot \left[\frac{RTb}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^2} \right] dV;$$

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{C_p} \cdot \left[-\frac{RT_2 b}{(V_2-b)} + \frac{2a}{V_2} + \frac{RT_1 b}{(V_1-b)} - \frac{2a}{V_1} \right].$$

Оскільки стан 2 – ідеальний газ, то $a = 0$, $b = 0$, отже

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{C_p} \cdot \left[\frac{RT_1 b}{(V_1-b)} - \frac{2a}{V_1} \right].$$

2.7 Иродов



У вертикальному закритому з обох боків циліндрі знаходиться масивний поршень, по обидва боки якого – по одному молю ідеального газу. При $T = 300 \text{ К}$ відношення верхнього об'єму до нижнього становить $\eta = 4,0$. При якій температурі це відношення стане $\eta' = 3,0$? Тертям знехтувати.

Поршень знаходиться у рівновазі. У початковому стані

$$Mg + p_B = p_H,$$

у кінцевому стані

$$Mg + p'_B = p'_H,$$

де M – маса поршня.

Оскільки у кожному стані температура в обох частинах однакова, то

$$p_B V_B = p_H V_H.$$

Оскільки за умовою задачі для початкового стану

$$\frac{V_B}{V_H} = \eta, \quad \text{отже} \quad \frac{p_H}{p_B} = \eta.$$

Аналогічно для кінцевого стану

$$\frac{p'_H}{p'_B} = \eta'.$$

Віднімемо почленно умови рівноваги для початкового і кінцевого станів

$$p_B - p'_B = p_H - p'_H; \quad p_B - p'_B = \eta p_B - \eta' p'_B.$$

Перетворимо

$$(\eta - 1)p_B = (\eta' - 1)p'_B.$$

Скористаємось об'єднаним газовим законом $\frac{pV}{T} = \text{const}$

$$(\eta - 1)\frac{T}{V_B} = (\eta' - 1)\frac{T'}{V'_B}, \quad \text{звідки} \quad T' = \frac{(\eta - 1)}{(\eta' - 1)} T \frac{V'_B}{V_B}.$$

Нам залишилось позбавитись невідомих об'ємів. Скористаємось тим, що у нас циліндр закритий з усіх боків

$$V_B + V_H = V'_B + V'_H; \quad V_B + \frac{1}{\eta} V_B = V'_B + \frac{1}{\eta'} V'_B; \quad \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) V_B = \left(1 + \frac{1}{\eta'}\right) V'_B,$$

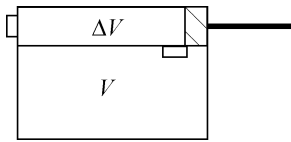
звідки

$$\frac{V'_B}{V_B} = \frac{\eta + 1}{\eta' + 1} \cdot \frac{\eta'}{\eta}.$$

Остаточнo маємо

$$T' = \frac{(\eta - 1)}{(\eta' - 1)} T \frac{(\eta + 1)}{(\eta' + 1)} \cdot \frac{\eta'}{\eta}; \quad \boxed{T' = T \frac{(\eta^2 - 1)}{(\eta'^2 - 1)} \cdot \frac{\eta'}{\eta}}$$

2.8 Иродов



Поршневим повітряним насосом відкачують посудину об'ємом V . За один цикл (хід поршня) насос захоплює об'єм ΔV . Через скільки циклів тиск в посудині зменшиться в η разів. Процес вважати ізотермічним, газ – ідеальним.

Оскільки процес ізотермічний, запишемо стан системи до і після першого циклу

$$pV = p_1(V + \Delta V),$$

отже після першого циклу тиск становитиме

$$p_1 = p \frac{V}{V + \Delta V}.$$

Стан системи до і після другого циклу (після циклу газ розшириться на весь об'єм)

$$p_1 V = p_2 (V + \Delta V),$$

отже після другого циклу тиск становитиме

$$p_2 = p_1 \frac{V}{V + \Delta V} = p \left(\frac{V}{V + \Delta V} \right)^2.$$

Після третього циклу

$$p_3 = p \left(\frac{V}{V + \Delta V} \right)^3.$$

Після n – циклу

$$p_n = p \left(\frac{V}{V + \Delta V} \right)^n.$$

Тоді

$$\eta = \frac{p}{p_n} = \left(\frac{V + \Delta V}{V} \right)^n = \left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right)^n.$$

Звідси

$$n = \frac{\ln \eta}{\ln \left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right)}.$$

Зауваження. Жоден насос не може відкачати повітря повністю. Це зумовлено тим, що при виштовхуванні повітря з камери насоса в атмосферу, між поршнем і стінками залишається деякий проміжок $\Delta V'$. Кінець кінцем трапиться так, що повітря, стиснуте від розміру камери ΔV до $\Delta V'$, буде мати тиск не вище атмосферного, отже повітря з камери не вийде.

$$p_{\min} \Delta V = p_0 \Delta V', \quad p_{\min} = p_0 \frac{\Delta V'}{\Delta V}.$$

Для отримання великих розріджень використовують кілька послідовно з'єднаних насосів. Тоді кожен насос відкачує повітря не в атмосферу, а у відкачану камеру попереднього насоса.

2.85 Иродов

Функція розподілу імовірностей значень деякої величини x має вигляд $f(x) = Ax$ при $0 \leq x \leq a$. Поза цим інтервалом $f = 0$. Тут A і a – сталі величини. Вважаючи, що a – задане, знайти

а) значення функції f при $x = a$;

б) середні значення x і x^2 в інтервалі $(0, a)$.

Спочатку визначимо A з умови нормування

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a Ax dx = 1, \quad A \frac{a^2}{2} = 1,$$

звідки

$$A = \frac{2}{a^2}.$$

а) Значення функції

$$f(a) = Aa = \frac{2}{a}.$$

б) Середні значення

$$\langle x \rangle = \int_0^a xf(x) dx = \int_0^a Ax^2 dx = \left(\frac{Ax^3}{3} \right) \Big|_0^a = A \frac{a^3}{3} = \frac{2a}{3};$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^a Ax^3 dx = \left(\frac{Ax^4}{4} \right) \Big|_0^a = A \frac{a^4}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

2.86 Иродов

Розподіл імовірностей значень деякої величини x описується функцією $f(x) = Ax(a - x)$ при $0 < x < a$. Поза цим інтервалом $f = 0$. Тут A і a – сталі величини. Вважаючи, що a – задане, знайти

а) найбільш імовірне значення x і відповідне значення функції f ;

б) середні значення x і x^2 в інтервалі $(0, a)$.

Спочатку визначимо A з умови нормування

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a Ax(a - x) dx = 1, \quad A \frac{a^3}{2} - A \frac{a^3}{3} = A \frac{a^3}{6} = 1,$$

звідки

$$A = \frac{6}{a^3}.$$

а) Найімовірніше значення

$$\frac{df(x)}{dx} = Aa - 2Ax = 0; \quad x_i = \frac{a}{2}; \quad f(x_i) = \frac{3}{2a}.$$

б) Середні значення

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_0^a Ax^2(a - x) dx = \left(\frac{Aax^3}{3} - \frac{Ax^4}{4} \right) \Big|_0^a = A \frac{a^4}{12} = \frac{a}{2}; \\ \langle x^2 \rangle &= \int_0^a Ax^3(a - x) dx = \left(\frac{Aax^4}{4} - \frac{Ax^5}{5} \right) \Big|_0^a = A \frac{a^5}{20} = \frac{3a^2}{10}. \end{aligned}$$

2.87 Иродов

Знайти для молекул газоподібного азоту при $T = 300 \text{ К}$ відношення кількості молекул з компонентами швидкості вздовж осі x в інтервалі $300 \pm 0,31 \text{ м/с}$ до числа молекул із компонентами швидкості вздовж тієї ж осі $500 \pm 0,51 \text{ м/с}$.

Кількість молекул першої групи швидкостей

$$dn_{v_{x1}} = n f(v_{x1}) dv_{x1},$$

другої групи

$$dn_{v_{x2}} = n f(v_{x2}) dv_{x2}.$$

Відповідні функції розподілу

$$f(v_{x1}) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv_{x1}^2}{2kT}}; \quad f(v_{x2}) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv_{x2}^2}{2kT}}.$$

Тоді відношення

$$\frac{dn_{v_{x1}}}{dn_{v_{x2}}} = \exp \left\{ \frac{m}{2kT} (v_{x2}^2 - v_{x1}^2) \right\} \frac{dv_{x1}}{dv_{x2}} = 1,5.$$

2.88 Иродов

Знайти імовірність того, що при $T = 300 \text{ K}$ молекули азоту мають компоненти швидкості вздовж осей x, y, z відповідно в інтервалі $300 \pm 0,3$; $400 \pm 0,4$ та $500 \pm 0,5 \text{ м/с}$.

$$\frac{dn_{v_x, v_y, v_z}}{n} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}} dv_x dv_y dv_z = 1,7 \cdot 10^{-11}.$$

Маса молекули азоту $m =$

Визначити відносну кількість молекул, компоненти швидкості яких вздовж осі x знаходяться в інтервалі $v_x, v_x + dv_x$, а модулі перпендикулярної складової швидкості – у інтервалі $v_\perp, v_\perp + dv_\perp$. Маса кожної молекули m , температура газу T .

Відносна кількість молекул визначається як

$$\frac{dn}{n} = f(v) d\omega,$$

де $d\omega$ – елементарний об'єм у просторі швидкостей, який для інтервалів швидкостей $(v_x, v_x + dv_x)$, $(v_y, v_y + dv_y)$, $(v_z, v_z + dv_z)$ становить $d\omega = dv_x dv_y dv_z$. В нашому випадку система координат не декартова, а циліндрична. Елементарний об'єм у ній

$$d\omega = 2\pi v_\perp dv_\perp dv_x,$$

а

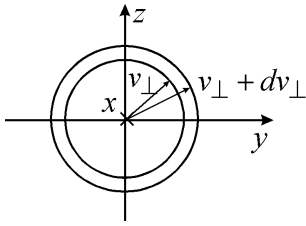
$$v_\perp^2 = v_y^2 + v_z^2.$$

Тоді

$$\frac{dn}{n} = f(v_\perp) f(v_x) 2\pi v_\perp dv_\perp dv_x;$$

остаточно

$$\frac{dn}{n} = 2\pi v_\perp \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_\perp^2)}{2kT}} dv_\perp dv_x.$$



2.90 Иродов

Газ, який складається із молекул масою m , знаходиться при температурі T . Визначити відносну кількість молекул, у яких модулі складових швидкості, перпендикулярні до деякого напрямку, лежать у інтервалі $v_{\perp}, v_{\perp} + dv_{\perp}$.

Густина імовірності потрапляння молекули одночасно у кілька інтервалів

$$f(v) = f(v_x)f(v_y)f(v_z).$$

Тоді використовуючи розв'язок попередньої задачі, можна записати

$$f(v) = f(v_{\perp})f(v_x);$$

звідки випливає, що

$$f(v_{\perp}) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right) e^{-\frac{mv_{\perp}^2}{2kT}}$$

остаточно

$$\boxed{\frac{dn}{n} = \frac{mv_{\perp}}{kT} e^{-\frac{mv_{\perp}^2}{2kT}} dv_{\perp}}.$$

2.93 Иродов

Знайти відносну кількість молекул газу, швидкості яких відрізняються не більше ніж на $\delta\eta = 1\%$ від значення

- а) найбільш імовірної швидкості;
- б) середньої квадратичної швидкості.

Відносна кількість молекул газу

$$\frac{dn_v}{n} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv.$$

- а) Найімовірніша швидкість

$$v_i = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

Окіл точки із заданою швидкістю становить $dv = 2\delta\eta v_i = 0,02v_i$, отже

$$\frac{dn_v}{n} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{2kT}{m} e^{-\frac{m}{2kT} \cdot \frac{2kT}{m}} 2\delta\eta \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \frac{8}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \delta\eta = 1,67\%.$$

- б) Середня квадратична швидкість

$$\bar{v} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

Окіл точки із заданою швидкістю становить $dv = 2\delta\eta \bar{v} = 0,02\bar{v}$, отже

$$\frac{dn_v}{n} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{3kT}{m} e^{-\frac{m}{2kT} \cdot \frac{3kT}{m}} 2\delta\eta \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 12 \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{1/2} e^{-\frac{3}{2}} \delta\eta = 1,85\%.$$

Визначити, яка кількість молекул газу :

а) пролітає без зіткнень відстані, більші за довжину вільного пробігу λ ;

б) має довжини пробігу у проміжку між λ і 2λ ?

Відносна кількість молекул, яка пролітають шлях x і розсіюються на наступній ділянці dx

$$\frac{dN}{N} = -e^{-\frac{x}{\lambda}} \frac{dx}{\lambda}.$$

$$\text{а) } - \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\frac{x}{\lambda}} \frac{dx}{\lambda} = e^{-1} \approx 0,37;$$

$$\text{б) } - \int_{\lambda}^{2\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \frac{dx}{\lambda} = e^{-1} - e^{-2} \approx 0,23 .$$

Як залежать середня довжина вільного пробігу і число зіткнень кожної молекули за одиницю часу від температури ідеального газу у наступних процесах :

а) ізохоричному;

б) ізобаричному ?

а) Довжина вільного пробігу визначається як

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}.$$

Концентрація молекул пов'язана із тиском, і у залежність входить температура

$$p = nkT; \quad n = \frac{p}{kT} \sim \frac{1}{T}.$$

З іншого боку,

$$pV = kT; \quad p = \frac{kT}{V}; \quad \lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} = \frac{kTV}{\sqrt{2}\pi d^2 kT} = \frac{V}{\sqrt{2}\pi d^2}.$$

Оскільки $V = \text{const}$ (процес ізохорний),

$$\lambda \neq f(T).$$

Кількість зіткнень за одиницю часу

$$Z = \frac{\langle v \rangle}{\lambda} = \frac{\sqrt{2}\pi d^2}{V} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \sim \sqrt{T}.$$

б) При ізобарному процесі ($p = \text{const}$) довжина вільного пробігу

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \sim T,$$

а кількість зіткнень

$$Z = \frac{\langle v \rangle}{\lambda} = \frac{\sqrt{2}\pi d^2}{V} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \sim \frac{1}{\sqrt{T}}.$$

Як зміниться коефіцієнт дифузії D і в'язкість η ідеального газу, якщо його об'єм збільшити в n разів

а) ізотермічно;

б) ізобарно ?

Коефіцієнти дифузії і в'язкості мають вигляд

$$D = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \quad \text{і} \quad \eta = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \rho .$$

а) При ізотермічному процесі $pV = \text{const}$, отже якщо в n разів збільшиться об'єм V , то у стільки ж разів зменшиться тиск p і концентрація n , а отже й довжина вільного пробігу $\lambda \sim \frac{1}{n}$ збільшиться у n разів. Швидкість $\langle v \rangle$ не залежить від об'єму, а густина ρ зменшиться в n разів.

Таким чином, коефіцієнт дифузії D збільшиться в n разів, а η не зміниться.

б) При ізобарному процесі $\frac{V}{T} = \text{const}$. Коли об'єм V збільшиться в n разів, то температура так само збільшиться. Отже, середня швидкість $\langle v \rangle$ збільшиться у \sqrt{n} разів. При збільшенні об'єму у n разів зменшиться концентрація n , а густина ρ зменшиться в n разів. Отже довжина вільного пробігу $\lambda \sim \frac{1}{n}$ збільшиться у n разів.

Таким чином, коефіцієнт дифузії D збільшиться в $n^{\frac{3}{2}}$ разів, а η збільшиться у \sqrt{n} разів.

Газ заповнює простір між двома довгими коаксиальними циліндрами, радіуси яких дорівнюють R_1 і R_2 , причому $R_1 < R_2$. Внутрішній циліндр нерухомий, а зовнішній обертають з малою кутовою швидкістю ω . Момент сил тертя, які діють на одиницю довжини внутрішнього циліндру, дорівнює N_1 . Знайти в'язкість газу, маючи на увазі, що сила тертя, яка діє на одиницю площі циліндричної поверхні радіусом r , визначається формулою $\sigma = \eta r \frac{\partial \omega}{\partial r}$.

Якщо сила тертя, яка діє на одиницю площі циліндричної поверхні радіусом r , визначається формулою $\sigma = \eta r \frac{\partial \omega}{\partial r}$, то сила тертя сегмента із кутом $d\varphi$

$$df = \sigma r d\varphi = \eta r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r} d\varphi;$$

а сила тертя кільцевого шару, що знаходиться на відстані r від внутрішнього циліндру,

$$f = \int_0^{2\pi} df = \eta r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r} \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \eta r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r};$$

всі обчислення проводимо на одиницю довжини циліндру, тобто розглядаємо поперечний переріз системи коаксиальних циліндрів.

Момент сили, який створює це кільце, становить

$$dN_1 = fr = 2\pi \eta r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r}.$$

Момент сил N_1 створить весь проміжок між циліндрами, тому можна вираз переписати у вигляді

$$N_1 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^3} = 2\pi \eta \int_0^{\omega} d\omega;$$

вважаємо, що кутова швидкість речовини поблизу нерухомого внутрішнього циліндру дорівнює нулю.

Звідси

$$-\frac{N_1}{2} \left(\frac{1}{r^2} \right)_{R_1}^{R_2} = 2\pi \eta \omega;$$

остаточно

$$\boxed{\eta = \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) \frac{N_1}{4\pi\omega}}.$$

Иродов 2.262.

Один кінець прута, який знаходиться у теплоізолюючій оболонці, підтримується при температурі T_1 , а другий – T_2 . Сам прут складається із двох частин, довжини яких l_1 і l_2 і теплопровідності відповідно χ_1 і χ_2 . Знайти температуру контакту цих частин прута.

Рівняння переносу у випадку теплопровідності має вигляд

$$Q = -\chi \frac{dT}{dx} S,$$

де S – площа перерізу обох частин прута.

Направимо вісь x вздовж прута від першої до другої частини. Позначимо температуру контакту $T(l_1)$ і знайдемо градієнт температури в кожній частині :

$$1) T(x) = \frac{T(l_1) - T_1}{l_1} x + T_1; \quad \frac{dT}{dx} = \frac{T(l_1) - T_1}{l_1};$$

$$2) T(x) = \frac{T_2 - T(l_1)}{l_2} x + T(l_1); \quad \frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T(l_1)}{l_2}.$$

Кількість теплоти, яка проходить через місце контакту для кожної із частин прута повинна бути однаковою, отже з

$$Q_1 = Q_2$$

випливає

$$\chi_1 \frac{T(l_1) - T_1}{l_1} = \chi_2 \frac{T_2 - T(l_1)}{l_2};$$

$$\frac{\chi_1}{l_1} T(l_1) - \frac{\chi_1}{l_1} T_1 = \frac{\chi_2}{l_2} T_2 - \frac{\chi_2}{l_2} T(l_1),$$

$$\frac{\chi_1}{l_1} T(l_1) + \frac{\chi_2}{l_2} T(l_1) = \frac{\chi_2}{l_2} T_2 + \frac{\chi_1}{l_1} T_1$$

звідки остаточно

$$T(l_1) = \frac{\frac{\chi_2}{l_2} T_2 + \frac{\chi_1}{l_1} T_1}{\frac{\chi_1}{l_1} + \frac{\chi_2}{l_2}}.$$

Иродов 2.264.

Прут довжиною l з теплоізолюваною бічною поверхнею зроблений із матеріалу, теплопровідність якого змінюється з температурою за законом $\chi = \alpha/T$, де α – стала. Торці прута підтримують при температурах T_1 і T_2 . Знайти залежність $T(x)$, де x – відстань від торця з температурою T_1 , а також густину потоку тепла.

Те, що торці підтримуються при сталих температурах, означає, що процес теплопередачі є стаціонарним, тобто кількість теплоти, що виділяється на одному з торців, із сталою швидкістю переноситься до іншого.

Кількість теплоти, яка переноситься за одиницю часу через переріз прута

$$dQ = -\chi \frac{dT}{dx} S = -\alpha/T \frac{dT}{dx} S = \text{const}.$$

Тоді друге рівняння можна переписати як

$$\frac{dT}{T} = -C_1 dx, \quad \text{звідки} \quad \ln T = -C_1 x + C_2.$$

Константи знайдемо із граничних умов :

$$x = 0, \quad T = T_1$$

$$\ln T_1 = C_2; \quad \ln T = -C_1 x + \ln T_1$$

$$x = l, \quad T = T_2$$

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = -C_1 l; \quad C_1 = -\frac{1}{l} \ln \frac{T_2}{T_1}; \quad \ln T = \frac{x}{l} \ln \frac{T_2}{T_1} + \ln T_1.$$

Пропотенціюємо вираз і знайдемо шуканий розподіл температури

$$\ln T = \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{x}{l}} + \ln T_1; \quad \boxed{T = T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{x}{l}}}.$$

Густину потоку тепла визначимо як

$$q = \frac{dQ}{S} = -\chi \frac{dT}{dx} = -\alpha/T \frac{dT}{dx} = -\alpha \cdot \frac{d \ln T}{dx}.$$
$$\ln T = \frac{x}{l} \ln \frac{T_2}{T_1} + \ln T_1; \quad \frac{d \ln T}{dx} = \frac{1}{l} \ln \frac{T_2}{T_1};$$

Тоді густина потоку

$$\boxed{q = -\alpha \cdot \frac{1}{l} \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{\alpha}{l} \ln \frac{T_1}{T_2}}.$$

Иродов 2.266.

Знайти розподіл температур у речовині, яка знаходиться між двома великими паралельними пластинами, якщо останні утримують при температурах T_1 і T_2 , відстань між ними становить l і теплопровідність речовини $\chi \sim \sqrt{T}$.

За основним рівнянням явища переносу у випадку теплопровідності

$$dQ = -\chi \frac{dT}{dx} dS.$$

Якщо розподіл температури стаціонарний, то кількість теплоти, яка протікає через площадку S , є сталою

$$Q = \text{const}.$$

Коефіцієнт теплопровідності

$$\chi = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \lambda c_V.$$

Оскільки $\lambda \neq f(T)$ за умовою задачі, а $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$, то $\chi = a\sqrt{T}$, де a – величина, незалежна від температури.

У випадку паралельних пластин, площа S , через яку протікає тепло, є сталою. Умову сталості кількості тепла можна записати у вигляді диференціального рівняння

$$\sqrt{T} \frac{dT}{dx} = \text{const}; \quad b'x = \frac{2}{3} T^{3/2} + C'; \quad bx = T^{3/2} + C.$$

Сталі b і C інтегрування знайдемо з граничних умов.

При $x = 0$, $T = T_1$;

$$0 = T_1^{3/2} + C; \quad \text{звідси } C = -T_1^{3/2}; \quad T^{3/2} = bx + T_1^{3/2}.$$

При $x = l$, $T = T_2$

$$b = \frac{T_2^{3/2} - T_1^{3/2}}{l}.$$

Остаточно

$$T^{3/2} = T_1^{3/2} - \frac{T_1^{3/2} - T_2^{3/2}}{l} x.$$

Иродов 2.271.

Постійний електричний струм протікає по однорідному провіднику, радіус перерізу якого R і теплопровідність χ . У одиниці об'єму провідника виділяється теплова потужність ω . Знайти розподіл температури у провіднику, якщо на його поверхні встановилась температура T_0 .

Очевидно, що мова йде про радіальний розподіл температури.

Кількість теплоти, яка переноситься за одиницю часу через бічну поверхню провідника радіусу r всередині кулі

$$dQ = -\chi \frac{dT}{dr} 2\pi r l.$$

З іншого боку, цю кількість теплоти можна виразити через густину теплової потужності

$$dQ = \omega \pi r^2 l.$$

Прирівнявши вирази, маємо

$$-\chi \frac{dT}{dr} 2\pi r l = \omega \pi r^2 l; \quad -\chi \frac{dT}{dr} = \omega \frac{1}{2} r.$$

Розділивши змінні, маємо диференціальне рівняння

$$-2\chi dT = \omega r dr,$$

звідки

$$-2\chi T = \omega \frac{r^2}{2} + C.$$

Сталу знайдемо із умови, що при $r = R$, $T = T_0$

$$C = -2\chi T_0 - \omega \frac{R^2}{2}.$$

$$-2\chi T = \omega \frac{r^2}{2} - 2\chi T_0 - \omega \frac{R^2}{2}; \quad T = -\omega \frac{r^2}{4\chi} + T_0 + \omega \frac{R^2}{4\chi}.$$

Остаточню

$$\boxed{T = T_0 - \frac{\omega}{4\chi} (r^2 - R^2)}.$$

Иродов 2.272.

В однорідній кулі радіусу R з теплоємністю χ рівномірно по об'єму виділяється теплова потужність з об'ємною густиною ω . Знайти розподіл температури у кулі, якщо на її поверхні встановилась температура T_0

Очевидно, що мова йде про радіальний розподіл температури.

Кількість теплоти, яка переноситься за одиницю часу через бічну поверхню сфери радіусу r всередині кулі

$$dQ = -\chi \frac{dT}{dr} 4\pi r^2.$$

З іншого боку, цю кількість теплоти можна виразити через густину теплової потужності

$$dQ = \omega \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Прирівнявши вирази, маємо

$$-\chi \frac{dT}{dr} 4\pi r^2 = \omega \frac{4}{3} \pi r^3; \quad -\chi \frac{dT}{dr} = \omega \frac{1}{3} r.$$

Розділивши змінні, маємо диференціальне рівняння

$$-3\chi dT = \omega r dr,$$

звідки

$$-3\chi T = \omega \frac{r^2}{2} + C.$$

Сталу знайдемо із умови, що при $r = R$, $T = T_0$

$$C = -3\chi T_0 - \omega \frac{R^2}{2}.$$

$$-3\chi T = \omega \frac{r^2}{2} - 3\chi T_0 - \omega \frac{R^2}{2}; \quad T = -\omega \frac{r^2}{6\chi} + T_0 + \omega \frac{R^2}{6\chi}.$$

Остаточно

$$\boxed{T = T_0 - \frac{\omega}{6\chi} (r^2 - R^2)}.$$

Задача 14, с. 109 (Коршак)

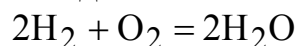
У балоні є $m_1 = 16$ г кисню і $m_2 = 10$ г водню. У скільки разів зміниться тиск у балоні, коли весь кисень сполучиться з необхідною для реакції частиною водню? Температура у балоні підтримується стала. Тиском насиченої пари знехтувати.

До початку реакції тиск у балоні дорівнював сумі парціальних тисків кисню і водню

$$p = p_1 + p_2 = \frac{RT}{V} \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right),$$

де $\mu_1 = 32$ кг/кмоль і $\mu_2 = 2$ кг/кмоль – молекулярні маси кисню і водню відповідно.

З рівняння реакції сполучення водню з киснем



впливає, що 1 кіломоль кисню (32 кг) сполучається із 2 кіломолями водню (4 кг). Тоді пропорційно 16 г кисню сполучається з 2 г водню, і в балоні лишається $m'_2 = 8$ г водню.

Тиск в балоні (нехтуючи зменшенням корисного об'єму)

$$p' = \frac{RT}{V} \frac{m'_2}{\mu_2}.$$

Тоді шукане відношення

$$\boxed{\frac{p'}{p} = \frac{m'_2 \mu_1}{m_1 \mu_2 + m_2 \mu_1} = \frac{8}{11} \approx 0,73}.$$

Задача 20, с. 111 (Коршак)

Тиск повітря всередині пляшки, щільно закритої корком, при температурі $t_1 = 7^\circ \text{C}$ дорівнював $p_1 = 1,05 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$. До якої температури треба нагріти повітря в пляшці, щоб з неї вилетів корок, якщо відомо, що для того, щоб витягти корок з холодної пляшки (при 7°C), потрібно виконати роботу $A = 1 \text{ Дж}$. Довжина корка $l = 4 \text{ см}$, площа поперечного перерізу корка $S = 4 \text{ см}^2$.

Нагрівання повітря в пляшці відбувається при сталому об'ємі, тому за законом Шарля можна записати

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_x}.$$

Тиск повітря пов'яжемо із роботою

$$A = (p_2 - p_1) S \frac{l}{2},$$

звідки

$$p_2 = p_1 + \frac{2A}{Sl}.$$

Звідси

$$\boxed{T_x = T_1 + \frac{2T_1 A}{p_1 S l}} \approx 630 \text{ К}.$$

Скляну колбу з повітрям зважують при 15°C . Колба може закриватись краном. При відкритому крані колбу нагрівають до 80°C і закривають кран. Після цього колбу знову зважують. Виявляється, що її маса зменшилась на $0,25\text{ г}$. Визначити об'єм колби, якщо її розширенням можна знехтувати. Густина повітря при 0°C $\rho_0 = 1,293\text{ кг/м}^3$.

За нормальних умов (при температурі $T_0 = 273\text{ К}$) повітря масою m займає об'єм $V_0 = \frac{m}{\rho_0}$, а при температурі T_1 – об'єм колби $V_1 = \frac{m}{\rho_1}$. Тоді $\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{V_0}{V_1}$, де ρ_1 – густина повітря при температурі T_1 . Коли у нас відкритий кран, тиск у нас не змінюється, отже маємо ізобарний процес, що описується законом Гей-Люссака

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{T_0}{T_1},$$

отже

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{T_0}{T_1}.$$

Аналогічно для густини повітря при температурі T_2

$$\rho_2 = \rho_0 \frac{T_0}{T_2}.$$

З умови задачі випливає, що до нагрівання

$$m = \rho_1 V_1,$$

а після нагрівання частина повітря вийде назовні, і

$$m - \Delta m = \rho_2 V_1.$$

Тоді

$$\rho_2 V_1 + \Delta m = \rho_1 V_1,$$

звідки

$$V_1 = \frac{\Delta m}{\rho_1 - \rho_2} = \frac{\Delta m}{\rho_0 \left(\frac{T_0}{T_1} - \frac{T_0}{T_2} \right)}.$$

Остаточнo

$$\boxed{V_1 = \frac{T_1 T_2 \Delta m}{\rho_0 T_0 (T_2 - T_1)}} \approx 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Варіант 1

1. Для деякого процесу в ідеальному газі теплоємність $C = a + bT^2$. Знайти рівняння цього процесу.

$$CdT = C_V dT + pdV = C_V dT + \frac{RT}{V} dV, \quad (a + bT^2)dT = C_V dT + \frac{RT}{V} dV, \quad (a - C_V + bT^2)dT = \frac{RT}{V} dV;$$

$$\left(\frac{a - C_V}{T} + bT\right)dT = \frac{R}{V} dV; \quad (a - C_V)\ln T + \frac{bT^2}{2} - R\ln V = \text{const}; \quad \boxed{\frac{T^{a - \frac{C_V}{\gamma - 1}} e^{\frac{bT^2}{2}}}{V^R} = \text{const}}.$$

2. Знайти рівняння процесу (у змінних T, V) при якому молярна теплоємність ідеального газу змінюється за законом $C = C_V + \beta V$, де β – стала.

$$CdT = C_V dT + pdV; \quad (C_V + \beta V)dT = C_V dT + pdV, \quad C_V dT + \beta V dT = C_V dT + pdV; \quad \beta V dT = pdV; \quad \beta V dT = \frac{RT}{V} dV;$$

$$\beta \frac{dT}{T} = \frac{R}{V^2} dV, \quad \int \frac{dT}{T} = \frac{R}{\beta} \int \frac{dV}{V^2}; \quad \ln T = -\frac{R}{\beta} \frac{1}{V} + \text{const}.$$

$$\boxed{\frac{R}{T e^{\beta V}} = \text{const}}.$$

3. Один моль ідеального газу, теплоємність якого за сталого тиску C_p , виконує процес за законом $p = p_0 + \alpha V$, де p_0, α – сталі. Знайти теплоємність газу як функцію його об'єму.

$$p = p_0 + \alpha V; \quad dp = \alpha dV, \quad Vdp = \alpha V dV.$$

$$pV = RT; \quad p_0 V + \alpha V^2 = RT; \quad (p_0 + 2\alpha V)dV = R dT; \quad dV = \frac{R}{(p_0 + 2\alpha V)} dT$$

$$pdV + Vdp = R dT; \quad R dT = pdV + Vdp = pdV + \alpha V dV; \quad pdV = R dT - \alpha V dV.$$

Знайдемо роботу

$$\delta A = pdV = R dT - \alpha V dV.$$

Підставивши все у перше начало термодинаміки, маємо

$$CdT = C_V dT + pdV = C_V dT + R dT - \alpha V dV = (C_V + R)dT - \alpha V \frac{R}{(p_0 + 2\alpha V)} dT, \quad \boxed{C = C_p - \frac{R\alpha V}{(p_0 + 2\alpha V)}}.$$

4. Ідеальний газ з показником адіабати γ виконує прямий цикл, який складається із адіабати, ізобари та ізохори. Знайти к.к.д. циклу, якщо при адіабатному процесі об'єм ідеального газу збільшується у n разів.

$$Q_{12} = 0, \quad Q_{23} = C_p(T_3 - T_2) < 0; \quad Q_{31} = C_V(T_1 - T_3) > 0; \quad \eta = 1 - \frac{Q_{23}}{Q_{31}} = 1 - \frac{C_p(T_2 - T_3)}{C_V(T_1 - T_3)} = 1 - \frac{\gamma \left(\frac{T_2}{T_3} - 1\right)}{\left(\frac{T_1}{T_3} - 1\right)}.$$

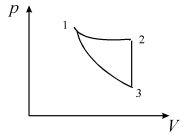
$$p = \text{const} : \frac{T_2}{T_3} = \frac{V_2}{V_3} = n; \quad V = \text{const} : \frac{T_1}{T_3} = \frac{p_1}{p_3}; \quad \text{Адіабата} : p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma; \quad \frac{p_1}{p_3} = \frac{V_2^\gamma}{V_1^\gamma} = n^\gamma.$$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{\gamma(n-1)}{(n^\gamma - 1)}}.$$

5. Ідеальний газ виконує оборотний цикл Карно. Як змінилась температура нагрівача, якщо к.к.д. циклу збільшився у k разів, а температура нагрівача у початковому стані в m разів більша за температуру холодильника.

$$\eta_1 = 1 - \frac{T}{mT} = 1 - \frac{1}{m}; \quad \eta_2 = 1 - \frac{T}{xmT} = 1 - \frac{1}{xm}; \quad \eta_2 = k\eta_1; \quad k\left(1 - \frac{1}{m}\right) = 1 - \frac{1}{xm}; \quad \boxed{x = \frac{1}{m + k - mk}}.$$

6. Ідеальний газ виконує цикл, який складається із ізохори, політропи і ізотерми, причому ізотермічний процес відбувається при *максимальній* температурі циклу. Знайти к.к.д. циклу, якщо температура T газу в його межах змінюється у k разів.



$$T_1 = T_2 = T_3 k. \quad Q_{12} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} > 0; \quad Q_{23} = C_V(T_3 - T_1) < 0, \quad Q_{31} = C(T_1 - T_3) > 0.$$

Тоді к.к.д. циклу

$$\eta = \frac{Q_{12} + Q_{31} - |Q_{23}|}{Q_{12} + Q_{31}} = 1 - \frac{|Q_{23}|}{Q_{12} + Q_{31}} = 1 - \frac{|C_V(T_3 - T_1)|}{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + C(T_1 - T_3)} = 1 - \frac{\left| C_V \left(\frac{T_3}{T_1} - 1 \right) \right|}{R \ln \frac{V_2}{V_1} + C \left(1 - \frac{T_3}{T_1} \right)}.$$

З рівняння політропи

$$T_1 V_1^{n-1} = T_3 V_2^{n-1}; \quad \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_3} \right)^{\frac{1}{n-1}} = k^{\frac{1}{n-1}}.$$

$$\eta = 1 - \frac{C_V \left(1 - \frac{1}{k} \right)}{\frac{R}{n-1} \ln k + C \left(1 - \frac{1}{k} \right)} = 1 - \frac{C_V}{\frac{R}{n-1} \cdot \frac{k}{k-1} \ln k + C}; \quad C_V = \frac{R}{\gamma-1}; \quad C = \frac{R}{\gamma-1} \cdot \frac{n-\gamma}{n-1};$$

$$\eta = 1 - \frac{\frac{R}{\gamma-1}}{\frac{R}{n-1} \cdot \frac{k}{k-1} \ln k + \frac{R}{\gamma-1} \cdot \frac{n-\gamma}{n-1}} = 1 - \frac{1}{\frac{\gamma-1}{n-1} \cdot \frac{k}{k-1} \ln k + \frac{n-\gamma}{n-1}} = 1 - \frac{n-1}{\frac{\gamma-1}{k-1} k \ln k + n - \gamma}$$

$$\eta = 1 - \frac{n-1}{\frac{\gamma-1}{k-1} k \ln k + n - \gamma}.$$

Якщо політропа йде менш круто, ніж ізотерма, то

$$\eta = 1 - \frac{n-\gamma}{(n-1)(k-1) - k(\gamma-1) \ln k}.$$

7. Один моль ідеального газу з відомим значенням теплоємності C_V виконує процес при якому його ентропія S залежить від температури T як $S = \alpha/T^2$, де α – стала. Температура газу T змінилась у k разів. Знайти :

- молярну теплоємність газу як функцію T ;
- кількість теплоти, надану газу;
- роботу, яку виконав газ.

$$dS = \frac{\delta Q}{T}; \delta Q = TdS; \quad C = \frac{\delta Q}{dT}; \quad \delta Q = CdT; \Rightarrow \text{Отже } CdT = TdS; C = T \frac{dS}{dT} = T \frac{d}{dT} \left(\frac{\alpha}{T^2} \right) = -T \frac{2\alpha}{T^3} = -\frac{2\alpha}{T^2}; \quad \boxed{C = -\frac{2\alpha}{T^2}}.$$

$$Q = \int_T^{kT} CdT = -2\alpha \int_T^{kT} \frac{dT}{T^2} = 2\alpha \left(\frac{1}{kT} - \frac{1}{T} \right) = \frac{2\alpha}{T} \cdot \frac{1-k}{k}; \quad \boxed{Q = \frac{2\alpha}{T} \cdot \frac{1-k}{k}}.$$

$$A = Q - U = \frac{2\alpha}{T} \cdot \frac{1-k}{k} - C_V(kT - T) = \frac{2\alpha}{T} \cdot \frac{1-k}{k} - \frac{RT}{\gamma-1}(k-1). \quad \boxed{A = \frac{2\alpha}{T} \cdot \frac{1-k}{k} - \frac{RT}{\gamma-1}(k-1)}$$

8. Ідеальний газ адіабатно розширили у k разів, а потім ізобарно стиснули до початкового об'єму. Знайти приріст ентропії у цьому процесі.

$$\Delta S = \int_1^3 \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_2}^{T_3} C_p \frac{dT}{T} = C_p \ln \frac{T_3}{T_2}; \quad p = const, \quad \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_3}; \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{k}; \quad C_p = \gamma C_V = \frac{\gamma R}{\gamma-1}.$$

$$\Delta S = -\frac{\gamma R}{\gamma-1} \ln k.$$

9. Знайти температуру T як функцію ентропії S для політропного процесу, якщо теплоємність речовини C , а при температурі T_0 ентропія дорівнює S_0 .

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = C \frac{dT}{T}; \quad S = C \int \frac{dT}{T} = C \ln T + \text{const}; \quad S_0 = C \ln T_0 + \text{const}; \quad \boxed{T = T_0 e^{\frac{S-S_0}{C}}}.$$

10. Два однакових тіла з температурами T_1 і T_2 ($T_1 > T_2$) і теплоємностями C , що не залежать від температури, приведені у тепловий контакт. Знайти зміну ентропії системи.

Варіант 2

1. Для деякого процесу в ідеальному газі теплоємність $C = aT + bT^4$. Знайти рівняння цього процесу.

$$CdT = C_V dT + p dV = C_V dT + \frac{RT}{V} dV, \quad (aT + bT^4) dT = C_V dT + \frac{RT}{V} dV, \quad (aT - C_V + bT^4) dT = \frac{RT}{V} dV;$$

$$\left(a - \frac{C_V}{T} + bT^3\right) dT = \frac{R}{V} dV; \quad aT - C_V \ln T + \frac{bT^4}{4} - R \ln V = \text{const};$$

$$\boxed{\frac{e^{aT + \frac{bT^4}{4}}}{\frac{R}{T^{\gamma-1} V^R}} = \text{const}}.$$

2. Знайти рівняння процесу (у змінних T, V) при якому молярна теплоємність ідеального газу змінюється за законом $C = C_V + ap$, де a – стала.

$$CdT = C_V dT + p dV; \quad (C_V + ap) dT = C_V dT + p dV, \quad C_V dT + ap dT = C_V dT + p dV; \quad ap dT = p dV; \quad adT = dV.$$

$$a \int dT = \int dV; \quad aT = V + \text{const}; \quad \boxed{aT - V = \text{const}}.$$

3. Один моль ідеального газу, теплоємність якого за сталого тиску C_p , виконує процес за законом $p = p_0 + \alpha V^2$, де p_0, α – сталі. Знайти теплоємність газу як функцію його об'єму.

$$p = p_0 + \alpha V^2; \quad dp = 2\alpha V dV, \quad V dp = 2\alpha V^2 dV.$$

$$pV = RT; \quad p_0 V + \alpha V^3 = RT; \quad (p_0 + 3\alpha V^2) dV = R dT; \quad dV = \left(\frac{R}{p_0 + 3\alpha V^2}\right) dT$$

$$pdV + V dp = R dT; \quad R dT = pdV + V dp = pdV + 2\alpha V^2 dV; \quad pdV = R dT - 2\alpha V^2 dV.$$

Знайдемо роботу

$$\delta A = p dV = R dT - 2\alpha V^2 dV.$$

Підставивши все у перше начало термодинаміки, маємо

$$CdT = C_V dT + p dV = C_V dT + R dT - 2\alpha V^2 dV = (C_V + R) dT - 2\alpha V^2 \left(\frac{R}{p_0 + 3\alpha V^2}\right) dT, \quad \boxed{C = C_p - \left(\frac{2\alpha R V^2}{p_0 + 3\alpha V^2}\right)}.$$

4. Ідеальний газ з показником адіабати γ виконує прямий цикл, який складається із адіабати, ізобари та ізохори. Знайти к.к.д. циклу, якщо при адіабатному процесі об'єм ідеального газу зменшується у n разів.

$$Q_{12} = C_p(T_2 - T_1) > 0; \quad Q_{23} = C_V(T_3 - T_2) < 0; \quad Q_{31} = 0; \quad \eta = 1 - \frac{-Q_{23}}{Q_{12}} = 1 - \frac{C_V(T_2 - T_3)}{C_p(T_2 - T_1)} = 1 - \frac{\left(1 - \frac{T_3}{T_2}\right)}{\gamma \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)}.$$

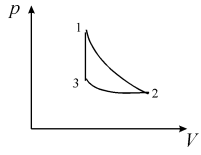
$$p = \text{const} : \frac{T_1}{T_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{n}; \quad V = \text{const} : \frac{T_2}{T_3} = \frac{p_2}{p_3}; \quad \text{Адіабата} : p_1 V_1^\gamma = p_3 V_3^\gamma = p_2 V_1^\gamma; \quad \frac{p_2}{p_3} = \frac{V_2^\gamma}{V_1^\gamma} = n^\gamma.$$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{(n^\gamma - 1)}{\gamma(n-1)n^{\gamma-1}}}.$$

5. Ідеальний газ виконує оборотний цикл Карно. Як змінилась температура холодильника, якщо к.к.д. циклу збільшився у k разів, а температура нагрівача у початковому стані в m разів більша за температуру холодильника.

$$\eta_1 = 1 - \frac{T}{mT} = 1 - \frac{1}{m}; \quad \eta_2 = 1 - \frac{xT}{mT} = 1 - \frac{x}{m}; \quad \eta_2 = k\eta_1; \quad k\left(1 - \frac{1}{m}\right) = 1 - \frac{x}{m}; \quad \boxed{x = m + k - mk}.$$

6. Ідеальний газ виконує цикл, який складається із ізохори, політропи і ізотерми, причому ізотермічний процес відбувається при мінімальній температурі циклу. Знайти к.к.д. циклу, якщо температура T газу в його межах змінюється у k разів.



$$T_2 = T_3 = \frac{T_1}{k}, \quad Q_{12} = C(T_2 - T_1) < 0 \quad Q_{23} = RT_3 \ln \frac{V_3}{V_2} < 0; \quad Q_{31} = C_V(T_1 - T_3) > 0.$$

Тоді к.к.д. циклу

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{12} + Q_{23}|}{Q_{31}} = 1 - \frac{C(T_1 - T_2) + RT_3 \ln \frac{V_2}{V_3}}{C_V(T_1 - T_3)} = 1 - \frac{C\left(\frac{T_1}{T_3} - 1\right) + R \ln \frac{V_2}{V_3}}{C_V\left(\frac{T_1}{T_3} - 1\right)}.$$

З рівняння політропи $T_1 V_3^{n-1} = T_2 V_2^{n-1}$; $\frac{V_2}{V_3} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{n-1}} = k^{\frac{1}{n-1}}$; $C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$; $C = \frac{R}{\gamma - 1} \cdot \frac{n - \gamma}{n - 1}$;

$$\eta = 1 - \frac{C(k-1) + \frac{R}{n-1} \ln k}{C_V(k-1)} = 1 - \frac{\frac{R}{\gamma-1} \cdot \frac{n-\gamma}{n-1} (k-1) + \frac{R}{n-1} \ln k}{\frac{R}{\gamma-1} (k-1)} = 1 - \frac{n-\gamma + \frac{\gamma-1}{k-1} \ln k}{(n-1)}; \quad \boxed{\eta = 1 - \frac{n-\gamma + \frac{\gamma-1}{k-1} \ln k}{(n-1)}}.$$

Якщо політропа йде менш круто, ніж ізотерма, то

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{n-1 + \frac{\gamma-1}{k-1} k \ln k}{(n-\gamma)}}.$$

7. Один моль ідеального газу з відомим значенням теплоємності C_V виконує процес при якому його ентропія S залежить від температури T як $S = \beta/T^3$, де β – стала. Температура газу T змінилась у k разів. Знайти :

- молярну теплоємність газу як функцію T ;
- кількість теплоти, надану газу;
- роботу, яку виконав газ.

$$dS = \frac{\delta Q}{T}; \delta Q = TdS; \quad C = \frac{\delta Q}{dT}; \delta Q = CdT; \Rightarrow \text{Отже } CdT = TdS; C = T \frac{dS}{dT} = T \frac{d}{dT} \left(\frac{\beta}{T^3} \right) = -T \frac{3\beta}{T^4} = -\frac{3\beta}{T^3}; \quad \boxed{C = -\frac{3\beta}{T^3}}.$$

$$Q = \int_T^{kT} CdT = -3\beta \int_T^{kT} \frac{dT}{T^3} = \frac{3\beta}{2} \left(\frac{1}{k^2 T^2} - \frac{1}{T^2} \right) = \frac{3\beta}{2T^2} \cdot \frac{1-k^2}{k^2}; \quad \boxed{Q = \frac{3\beta}{2T^2} \cdot \frac{1-k^2}{k^2}}.$$

$$A = Q - U = \frac{\beta}{T^2} \cdot \frac{1-k^2}{k^2} - C_V(kT - T) = \frac{\beta}{T^2} \cdot \frac{1-k^2}{k^2} - \frac{RT}{\gamma-1}(k-1). \quad \boxed{A = \frac{3\beta}{2T^2} \cdot \frac{1-k^2}{k^2} - \frac{RT}{\gamma-1}(k-1)}$$

8. Ідеальний газ адіабатно стиснули у k разів, а потім ізобарно розширили до початкового об'єму. Знайти приріст ентропії у цьому процесі.

$$\Delta S = \int_1^3 \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_2}^{T_3} C_p \frac{dT}{T} = C_p \ln \frac{T_3}{T_2}; \quad p = \text{const}, \quad \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_3}; \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{V_1}{V_2} = k; \quad C_p = \gamma C_V = \frac{\gamma R}{\gamma-1}.$$

$$\boxed{\Delta S = \frac{\gamma R}{\gamma-1} \ln k}.$$

9. Знайти ентропію S як функцію температури T для політропного процесу, якщо теплоємність речовини C , а при температурі T_0 ентропія дорівнює S_0 .

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = C \frac{dT}{T}; \quad S = C \int \frac{dT}{T} = C \ln T + \text{const}; \quad S_0 = C \ln T_0 + \text{const}; \quad \boxed{T = T_0 e^{\frac{S-S_0}{C}}}.$$

10. Два однакових тіла з температурами T_1 і T_2 ($T_1 > T_2$) і теплоємностями C , що не залежать від температури, приведені у тепловий контакт. Знайти зміну ентропії системи.

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2}; \quad \Delta S = \int_{T_1}^T C \frac{dT}{T} + \int_{T_2}^T C \frac{dT}{T} = C \left(\ln \frac{T}{T_1} + \ln \frac{T}{T_2} \right) = C \left(\ln T^2 - \ln T_1 - \ln T_2 \right) = C \ln \frac{T^2}{T_1 T_2} = C \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4 T_1 T_2};$$

$$\boxed{\Delta S = C \ln \left[\frac{(T_1 + T_2)^2}{4 T_1 T_2} \right]}.$$

Решебник 8.1

В кубічній посудині ємністю 1 л при кімнатній температурі знаходиться N молекул водню (H_2). Знайти імовірність P того, що ці молекули зберуться у одній половині посудини. Оцініть величину N , при якій цю подію можна очікувати за час життя Всесвіту $t = 10^{10}$ років.

Для визначення імовірності потрапляння всіх молекул у половину посудини використаємо формулу розподілу Гауса $P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$.

Виділимо об'єм, рівний половині об'єму посудини. Імовірність для однієї молекули потрапити у виділений об'єм є відношенням його об'єму до повного об'єму посудини $p = \frac{1}{2}$, а, відповідно, імовірність не потрапити до об'єму – $q = 1 - p = \frac{1}{2}$. У виділеному об'ємі, рівному половині повного об'єму, за умовою задачі знаходяться всі молекули ($n = N$), у решті об'єму їх немає ($N - n = 0$), тоді кількість числа сполучень набуває вигляду

$$\frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{N!}{N!0!} = 1.$$

Оскільки $0! = 1$, імовірність того, що всі молекули зберуться у половині об'єму

$$P(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^N.$$

Оцінимо імовірність такої події, виходячи із того, що молекули водню мають середню швидкість $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$. Враховуючи, що $m = 2m_p$ (m_p – маса протона),

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{\pi \cdot 2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}}} = 1777 \text{ м/с.}$$

Щоб пролетіти половину посудини і потрапити у

другу, кожній молекулі потрібен час $\tau = \frac{\sqrt[3]{V}}{2\langle v \rangle} = \frac{0,1}{2 \cdot 1777} = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ с.}$ Це час однієї зміни

стану системи. За час існування Всесвіту $t = 10^{10}$ років $= 3,15 \cdot 10^{17} \text{ с}$ зміниться t/τ станів. Тоді імовірність реалізації заданого стану становить

$$P = \frac{\tau}{t} = \frac{2,8 \cdot 10^{-5}}{3,15 \cdot 10^{17} \cdot 10^{10}} = 8,9 \cdot 10^{-23}. \text{ Звідси кількість таких молекул } N = -\frac{\ln P}{\ln 2} \approx 73.$$

Решебник 8.2

Посудину з N молекулами ідеального газу розділили на дві частини з об'ємами V_1 і V_2 . Знайти імовірність того, що в першій частині буде N_1 , а в другій N_2 молекул.

Для визначення імовірності потрапляння молекул у половину посудини використаємо формулу розподілу Гауса $P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$.

Імовірність для однієї молекули потрапити у виділений об'єм V_1 є відношенням його об'єму до повного об'єму посудини $p = \frac{V_1}{V_1 + V_2}$, а, відповідно, імовірність не

потрапити до об'єму V_1 (потрапити до об'єму V_2) – $q = 1 - p = \frac{V_2}{V_1 + V_2}$. У виділений

об'єм V_1 потрапить N_1 молекул, вибрати їх можна $\frac{N!}{N_1!(N-N_1)!} = \frac{N!}{N_1!N_2!}$

способами. Тоді імовірність становитиме

$$P = \frac{N!}{N_1!N_2!} \left(\frac{V_1}{V_1 + V_2} \right)^{N_1} \left(\frac{V_2}{V_1 + V_2} \right)^{N_2} = \frac{N!}{N_1!N_2!} \cdot \frac{V_1^{N_1} V_2^{N_2}}{(V_1 + V_2)^N}.$$

Знайти дисперсію і відносну флуктуацію для функції $f(E) = 2E + 19$, яка залежить від кінетичної енергії E молекул ідеального газу, що знаходиться при температурі T .

За означенням дисперсії

$$\langle \Delta f^2 \rangle = \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2.$$

Знайдемо окремо доданки.

$$\langle f \rangle = 2\langle E \rangle + 19.$$

Середнє значення енергії знайдемо за допомогою розподілу Максвелла за енергіями

$$f(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}}.$$

Тоді

$$\langle E \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} E \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} dE.$$

Зробимо заміну змінної $E = x^2$; $dE = 2x dx$, тоді

$$\langle E \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{kT}} dx = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \cdot \frac{3}{8} \sqrt{\pi} (kT)^{5/2} = \frac{3}{2} kT.$$

Отже

$$\langle f \rangle = 2 \cdot \frac{3}{2} kT + 19 = 3kT + 19; \quad \langle f \rangle^2 = 9k^2 T^2 + 6 \cdot 19kT + 19^2.$$

Другий доданок

$$f^2 = 4E^2 + 4 \cdot 19E + 19^2; \quad \langle f^2 \rangle = 4\langle E^2 \rangle + 4 \cdot 19\langle E \rangle + 19^2.$$

$$\langle E^2 \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} E^2 \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} dE.$$

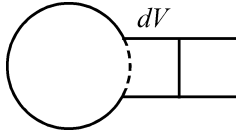
Знову зробимо заміну змінної $E = x^2$; $dE = 2x dx$, тоді

$$\begin{aligned} \langle E^2 \rangle &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} x^6 e^{-\frac{x^2}{kT}} dx = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \frac{15}{16} \sqrt{\pi} (kT)^{7/2} = \frac{15}{4} \cdot (kT)^2 \\ &= 4 \cdot \frac{15}{4} \frac{k^2 T^2}{\sqrt{6kT}} + 6 \cdot 19kT + 19^2 = 15 \frac{k^2 T^2}{\sqrt{6kT}} + 6 \cdot 19kT + 19^2 \\ \langle \Delta f^2 \rangle &= 15k^2 T^2 - 9k^2 T^2 = 6k^2 T^2; \quad \delta_1 = \frac{\sqrt{6kT}}{3kT + 19}. \end{aligned}$$

1.4 (решебник)

Знайти тиск повітря у відкачуваній посудині як функцію часу відкачки t . Об'єм посудини V , початковий тиск p_0 , процес відкачки ізотермічний, швидкість відкачки $C = \frac{dV}{dt}$ не залежить від тиску p .

Процес ізотермічний, отже скористаємось законом Бойля-Маріотта $pV = \text{const}$.



Вважаючи, що в момент часу $t + dt$ тиск та об'єм відповідно дорівнюють $p + dp$ та $V + dV$, знехтувавши доданками другого порядку малості маємо

$$pV = (p + dp)(V + dV), \quad \text{звідки} \quad Vdp = -pdV.$$

Тоді:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{C}{V} dt; \quad p = Ke^{-\frac{C}{V}t},$$

де K – стала інтегрування. Визначимо її, користуючись граничними умовами $t = 0$, $p = p_0$, отже $K = p_0$, і остаточно

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{C}{V}t\right).$$

Примітка: Задача, яку ми розв'язали, – нереальна. В загальному випадку існує “граничний вакуум” з тиском p_∞ , пов'язаний із неконтрольованим натіканням газу в посудину. Якщо швидкість такого натікання Q не залежить від часу, то умова зберігання кількості речовини приймає вигляд

$$pV = (p + dp)(V + dV) - Qdt,$$

або

$$V \frac{dp}{dt} = -p \frac{dV}{dt} + Q.$$

Щоб спростити розв'язок рівняння, скористаємось тим, що при $t \rightarrow \infty$,

$$p \rightarrow p_\infty, \quad \text{тому} \quad \frac{dp}{dt} = 0 \quad \text{і}$$

$$Q = p_\infty \frac{dV}{dt} = p_\infty C.$$

Тоді $V \frac{dp}{dt} = -C(p - p_\infty)$, і звідси

$$p = p_\infty + (p - p_\infty)e^{-\frac{C}{V}t}.$$

1.7 (решобник)

Посудина, об'ємом $V = 20$ л містить суміш водню та гелію при температурі 27°C і тискові $p = 2$ атм. Маса суміші 5 г. Знайти відношення маси водню до маси гелію в суміші.

За законом Дальтона $p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$, звідки випливає

$$pV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \dots \right) RT.$$

У нашому випадку

$$\frac{m_{\text{He}}}{\mu_{\text{He}}} + \frac{m_{\text{H}_2}}{\mu_{\text{H}_2}} = \frac{pV}{RT}.$$

Позначимо відношення мас $\frac{m_{\text{H}_2}}{m_{\text{He}}} = x$. Тоді повна маса суміші $m = (1 + x)m_{\text{He}}$, і рівняння стану набуває вигляду

$$\frac{pV}{RT} = \frac{m}{1 + x} \left(\frac{1}{\mu_{\text{He}}} + \frac{1}{\mu_{\text{H}_2}} \right).$$

Звідси

$$x = \frac{\mu_{\text{H}_2} \mu_{\text{He}} - a \mu_{\text{H}_2}}{a \mu_{\text{He}} - \mu_{\text{H}_2} \mu_{\text{He}}} = \frac{1 - \frac{a}{\mu_{\text{He}}}}{\frac{a}{\mu_{\text{H}_2}} - 1},$$

де

$$a = \frac{mRT}{pV} = \frac{5 \cdot 8,314 \cdot 300}{2 \cdot 101,3 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 3,$$

та

$$x = \frac{m_{\text{H}_2}}{m_{\text{He}}} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{1}{2}.$$

Розв'язки контрольних задач

Варіант 1

1. Знайти імовірність того, що квадрат флуктуації буде більше потроєного середнього квадрату.

Скористаємось розподілом Гауса, вираженим через дисперсію

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\Delta n)^2}} e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2(\Delta n)^2}}$$

Позначимо величину флуктуації $n - \bar{n} = x$. Тоді середній квадрат флуктуації $\overline{x^2}$. В таких позначеннях розподіл Гаусса набуває вигляду

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2x^2}\right).$$

Знаходження імовірності того, що квадрат флуктуації буде більший потроєного середнього квадрату $x^2 > 3\overline{x^2}$, означає знаходження імовірності того, що модуль флуктуації буде більший за квадратний корінь із потроєного середнього квадрату $|x| > \sqrt{3\overline{x^2}}$, тобто лежати у межах $x < -\sqrt{3\overline{x^2}}$ та $x > \sqrt{3\overline{x^2}}$. Імовірність буде визначатись як

$$W\left(x^2 > 3\overline{x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{3\overline{x^2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2x^2}\right) dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} \int_{\sqrt{3\overline{x^2}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2x^2}\right) dx.$$

Внаслідок симетричності розподілу $P(x)$ можна записати

$$W\left(x^2 > 3\overline{x^2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} \int_{\sqrt{3\overline{x^2}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2x^2}\right) dx.$$

Перетворимо інтеграл наступним чином

$$W\left(x^2 > 3\overline{x^2}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} \left[\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2x^2}\right) dx - \int_0^{\sqrt{3\overline{x^2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2x^2}\right) dx \right].$$

Перший з інтегралів є інтегралом Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2x^2}} dx = \sqrt{2\pi x^2}; \quad \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2x^2}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi x^2}.$$

У другому інтегралі зробимо заміну

$$y^2 = \frac{x^2}{2x^2}; \quad x = y\sqrt{2x^2}; \quad dx = dy\sqrt{2x^2}.$$

Межі інтегрування при цьому зміняться

$$x = 0 \rightarrow y = 0; \quad x = \sqrt{3x^2} \rightarrow y = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Тоді вираз для імовірності набуває вигляду

$$W\left(x^2 > 3x^2\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2x^2} - \sqrt{2x^2} \int_0^{\sqrt{1,5}} e^{-y^2} dy \right] = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{1,5}} e^{-y^2} dy.$$

Остаточно

$$W\left(x^2 > 3x^2\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{1,5}} e^{-y^2} dy.$$

2. Знайти імовірність того, що флуктуація не перевищує чверті середньої квадратичної флуктуації.

Знаходження імовірності того, що величина флуктуації не буде перевищувати чверті середньої квадратичної флуктуації $x < \frac{1}{4}\sqrt{x^2}$, означає знаходження імовірності того, що модуль флуктуації буде менший за квадратний корінь із чверті середнього квадрату $|x| < \frac{1}{4}\sqrt{x^2}$, тобто лежати у межах $-\frac{1}{4}\sqrt{x^2} < x < \frac{1}{4}\sqrt{x^2}$. Імовірність буде визначатись як

$$W\left(x < \frac{1}{4}\sqrt{x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} \int_{-\frac{1}{4}\sqrt{x^2}}^{\frac{1}{4}\sqrt{x^2}} e^{-\frac{x^2}{2x^2}} dx = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} \int_0^{\frac{1}{4}\sqrt{x^2}} e^{-\frac{x^2}{2x^2}} dx.$$

Заміна $y^2 = \frac{x^2}{2x^2}$ змінить межі інтегрування

$$x = 0 \rightarrow y = 0; \quad x = \frac{1}{4}\sqrt{x^2} \rightarrow y = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Тоді

$$W\left(x < \frac{1}{4}\sqrt{x^2}\right) = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} \sqrt{2x^2} \int_0^{\frac{1}{4\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{4\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy.$$

3. Знайти дисперсію і відносну флуктуацію для функції $f(E) = 3E + 15$, яка залежить від кінетичної енергії E молекул ідеального газу, що знаходиться при температурі T .

За означенням дисперсії

$$\langle \Delta f^2 \rangle = \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2.$$

Знайдемо окремо доданки.

$$\langle f \rangle = 3\langle E \rangle + 15.$$

Середнє значення енергії знайдемо за допомогою розподілу Максвелла за енергіями

$$f(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}}.$$

Тоді

$$\langle E \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} E \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} dE.$$

Зробимо заміну змінної $E = x^2$; $dE = 2x dx$, тоді

$$\langle E \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{kT}} dx = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \cdot \frac{3}{8} \sqrt{\pi} (kT)^{\frac{5}{2}} = \frac{3}{2} kT.$$

Отже

$$\langle f \rangle = \frac{9}{2} kT + 15; \quad \langle f \rangle^2 = \frac{81}{4} k^2 T^2 + 135 kT + 225.$$

Другий доданок

$$f^2 = 9E^2 + 90E + 225; \quad \langle f^2 \rangle = 9\langle E^2 \rangle + 90\langle E \rangle + 225.$$

$$\langle E^2 \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} E^2 \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} dE.$$

Знову зробимо заміну змінної $E = x^2$; $dE = 2x dx$, тоді

$$\langle E^2 \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} x^6 e^{-\frac{x^2}{kT}} dx = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \frac{15}{16} \sqrt{\pi} (kT)^{7/2} = \frac{15}{4} \cdot (kT)^2$$

$$\begin{aligned} \langle \Delta f^2 \rangle &= 9 \frac{15}{4} \cdot k^2 T^2 + 90 \frac{3}{2} kT + 225 - \frac{81}{4} k^2 T^2 - 135 kT - 225 = \\ &= 9 \frac{15}{4} \cdot k^2 T^2 - \frac{81}{4} k^2 T^2 = \frac{54}{4} k^2 T^2 \end{aligned} \quad ; \quad \delta_1 = \frac{\sqrt{3} kT}{3kT + 10}.$$

4. У колбі знаходиться суміш трьох газів А, Б і В. Через малий отвір у вакуум в середньому 6 частинок газу А, 3 частинки газу Б і 4 частинки газу В. Яка імовірність того, що за 1 с через отвір вилетить 2 частинки газу А, 3 частинки газу Б і 5 частинок газу В ?

Для малої кількості частинок використовуємо розподіл Пуассона

$$P(n) = \frac{(\bar{n})^n}{n!} \cdot e^{-\bar{n}}.$$

Імовірність вилітання частинок кожного газу незалежна.

$$P(n_1) = \frac{(\bar{n}_1)^{n_1}}{n_1!} \cdot e^{-\bar{n}_1}; \quad P(n_2) = \frac{(\bar{n}_2)^{n_2}}{n_2!} \cdot e^{-\bar{n}_2}, \quad P(n_3) = \frac{(\bar{n}_3)^{n_3}}{n_3!} \cdot e^{-\bar{n}_3};$$

тому імовірність вильоту за секунду певної кількості частинок А, Б і В є імовірністю складної події і визначається

$$\begin{aligned} P(n_1, n_2, n_3) &= P(n_1) \cdot P(n_2) \cdot P(n_3) = \frac{\bar{n}_1^{n_1} \bar{n}_2^{n_2} \bar{n}_3^{n_3}}{n_1! n_2! n_3!} e^{-\bar{n}_1 - \bar{n}_2 - \bar{n}_3} = \\ &= \frac{6^2 \cdot 3^3 \cdot 4^5}{2! 3! 5!} e^{-13} = \frac{36 \cdot 27 \cdot 625}{2 \cdot 6 \cdot 120} \cdot 2,26 \cdot 10^{-6} = \frac{27 \cdot 125}{8} \cdot 2,26 \cdot 10^{-6} = 9,53 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

$$P(n_1, n_2, n_3) = 0,0953 \%.$$

5. В посудині ємністю 1 л при кімнатній температурі знаходиться 25 молекул. Знайти імовірність P того, що ці молекули зберуться у одній третині посудини.

Для визначення імовірності потрапляння всіх молекул у половину посудини використаємо формулу розподілу Гауса $P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$.

Виділимо об'єм, рівний третині об'єму посудини. Імовірність для однієї молекули потрапити у виділений об'єм є відношенням його об'єму до повного об'єму посудини $p = \frac{1}{3}$, а, відповідно, імовірність не потрапити до об'єму – $q = 1 - p = \frac{2}{3}$. У виділеному об'ємі, рівному половині повного об'єму, за умовою задачі знаходяться всі молекули ($n = N$), у решті об'єму їх немає ($N - n = 0$), тоді кількість числа сполучень набуває вигляду

$$\frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{N!}{N!0!} = 1.$$

Оскільки $0! = 1$, імовірність того, що всі молекули зберуться у половині об'єму

$$P(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^N = \left(\frac{1}{3}\right)^{25} = 1,18 \cdot 10^{-12}.$$

Варіант 2

1. Знайти імовірність того, що флуктуація не перевищує подвійного значення середньої квадратичної флуктуації.

Знаходження імовірності того, що величина флуктуації не буде перевищувати подвійного значення середньої квадратичної флуктуації $x < 2\sqrt{x^2}$, означає знаходження імовірності того, що модуль флуктуації буде менший за квадратний корінь із чверті середнього квадрату $|x| < 2\sqrt{x^2}$, тобто лежати у межах $-2\sqrt{x^2} < x < 2\sqrt{x^2}$. Імовірність буде визначатись як

$$W\left(x < 2\sqrt{x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} \int_{-2\sqrt{x^2}}^{2\sqrt{x^2}} e^{-\frac{x^2}{2x^2}} dx = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} \int_0^{2\sqrt{x^2}} e^{-\frac{x^2}{2x^2}} dx.$$

Заміна $y^2 = \frac{x^2}{2x^2}$ змінить межі інтегрування

$$x = 0 \rightarrow y = 0; \quad x = 2\sqrt{x^2} \rightarrow y = \sqrt{2}.$$

Тоді

$$W\left(x < 2\sqrt{x^2}\right) = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} \sqrt{2x^2} \int_0^{\sqrt{2}} e^{-y^2} dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{2}} e^{-y^2} dy.$$

2. Знайти імовірність того, що квадрат флуктуації буде більше половини середнього квадрату.

Скористаємось розподілом Гауса, вираженим через дисперсію

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\Delta n)^2}} e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2(\Delta n)^2}}$$

Позначимо величину флуктуації $n - \bar{n} = x$. Тоді середній квадрат флуктуації $\overline{x^2}$. В таких позначеннях розподіл Гаусса набуває вигляду

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2x^2}\right).$$

Знаходження імовірності того, що квадрат флуктуації буде більший половини середнього квадрату $x^2 > \frac{1}{2}\overline{x^2}$, означає знаходження імовірності того, що модуль

флуктуації буде більший за квадратний корінь із половини середнього квадрату $|x| > \sqrt{\frac{x^2}{2}}$, тобто лежати у межах $x < -\sqrt{\frac{x^2}{2}}$ та $x > \sqrt{\frac{x^2}{2}}$. Імовірність буде визначатись як

$$W\left(x^2 > \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{\frac{x^2}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2x^2}\right) dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} \int_{\sqrt{\frac{x^2}{2}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2x^2}\right) dx.$$

Внаслідок симетричності розподілу $P(x)$ можна записати

$$W\left(x^2 > 3x^2\right) = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} \int_{\sqrt{\frac{x^2}{2}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2x^2}\right) dx.$$

Перетворимо інтеграл наступним чином

$$W\left(x^2 > \frac{x^2}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} \left[\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2x^2}\right) dx - \int_0^{\sqrt{\frac{x^2}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2x^2}\right) dx \right].$$

Перший з інтегралів є інтегралом Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2x^2}} dx = \sqrt{2\pi x^2}; \quad \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2x^2}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi x^2}.$$

У другому інтегралі зробимо заміну

$$y^2 = \frac{x^2}{2x^2}; \quad x = y\sqrt{2x^2}; \quad dx = dy\sqrt{2x^2}.$$

Межі інтегрування при цьому зміняться

$$x = 0 \rightarrow y = 0; \quad x = \sqrt{\frac{x^2}{2}} \rightarrow y = \frac{1}{2}.$$

Тоді вираз для імовірності набуває вигляду

$$W\left(x^2 > 3x^2\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2x^2} - \sqrt{2x^2} \int_0^{0,5} e^{-y^2} dy \right] = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0,5} e^{-y^2} dy.$$

Остаточно

$$W\left(x^2 > 3x^2\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0,5} e^{-y^2} dy.$$

3. Знайти дисперсію і відносну флуктуацію для функції $f(E) = 4E + 16$, яка залежить від кінетичної енергії E молекул ідеального газу, що знаходиться при температурі T .

За означенням дисперсії

$$\langle \Delta f^2 \rangle = \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2.$$

Знайдемо окремо доданки.

$$\langle f \rangle = 3\langle E \rangle + 15.$$

Середнє значення енергії знайдемо за допомогою розподілу Максвелла за енергіями

$$f(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}}.$$

Тоді

$$\langle E \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} E \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} dE.$$

Зробимо заміну змінної $E = x^2$; $dE = 2x dx$, тоді

$$\langle E \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{kT}} dx = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \cdot \frac{3}{8} \sqrt{\pi} (kT)^{\frac{5}{2}} = \frac{3}{2} kT.$$

Отже

$$\langle f \rangle = 6kT + 15; \quad \langle f \rangle^2 = 36k^2T^2 + 192kT + 225.$$

Другий доданок

$$f^2 = 16E^2 + 128E + 256; \quad \langle f^2 \rangle = 16\langle E^2 \rangle + 128\langle E \rangle + 256.$$

$$\langle E^2 \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} E^2 \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} dE.$$

Знову зробимо заміну змінної $E = x^2$; $dE = 2x dx$, тоді

$$\langle E^2 \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} x^6 e^{-\frac{x^2}{kT}} dx = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(kT)^{3/2}} \frac{15}{16} \sqrt{\pi} (kT)^{7/2} = \frac{15}{4} \cdot (kT)^2$$

$$\begin{aligned} \langle \Delta f^2 \rangle &= 16 \frac{15}{4} \cdot k^2 T^2 + 128 \frac{3}{2} kT + 256 - 36k^2 T^2 - 192kT - 256 = ; \quad \delta_1 = \frac{\sqrt{6kT}}{3kT + 8}. \\ &= 60 \cdot k^2 T^2 - 36k^2 T^2 = 24k^2 T^2 \end{aligned}$$

4. У колбі знаходиться суміш трьох газів А, Б і В. Через малий отвір у вакуум в середньому 5 частинок газу А, 4 частинки газу Б і 2 частинки газу В. Яка імовірність того, що за 1 с через отвір вилетить 3 частинки газу А, 3 частинки газу Б і 4 частинки газу В ?

Для малої кількості частинок використовуємо розподіл Пуассона

$$P(n) = \frac{(\bar{n})^n}{n!} \cdot e^{-\bar{n}}.$$

Імовірність вилітання частинок кожного газу незалежна.

$$P(n_1) = \frac{(\bar{n}_1)^{n_1}}{n_1!} \cdot e^{-\bar{n}_1}; \quad P(n_2) = \frac{(\bar{n}_2)^{n_2}}{n_2!} \cdot e^{-\bar{n}_2}, \quad P(n_3) = \frac{(\bar{n}_3)^{n_3}}{n_3!} \cdot e^{-\bar{n}_3};$$

тому імовірність вильоту за секунду певної кількості частинок А, Б і В є імовірністю складної події і визначається

$$P(n_1, n_2, n_3) = P(n_1) \cdot P(n_2) \cdot P(n_3) = \frac{\bar{n}_1^{n_1} \bar{n}_2^{n_2} \bar{n}_3^{n_3}}{n_1! n_2! n_3!} e^{-\bar{n}_1 - \bar{n}_2 - \bar{n}_3} =$$

$$= \frac{5^3 \cdot 4^3 \cdot 2^4}{3! 3! 4!} e^{-10} = \frac{125 \cdot 64 \cdot 81}{6 \cdot 6 \cdot 24} \cdot 4,54 \cdot 10^{-5} = 3,405 \cdot 10^{-2}$$

$$P(n_1, n_2, n_3) = 3,405\%.$$

5. В посудині ємністю 1 л при кімнатній температурі знаходиться 30 молекул. Знайти імовірність P того, що ці молекули зберуться у двох третинах посудини.

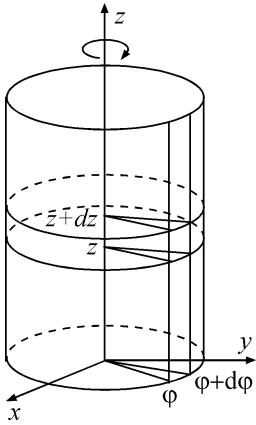
Для визначення імовірності потрапляння всіх молекул у половину посудини використаємо формулу розподілу Гауса $P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$.

Виділимо об'єм, рівний двом третинам об'єму посудини. Імовірність для однієї молекули потрапити у виділений об'єм є відношенням його об'єму до повного об'єму посудини $p = \frac{2}{3}$, а, відповідно, імовірність не потрапити до об'єму – $q = 1 - p = \frac{1}{3}$. У виділеному об'ємі, рівному половині повного об'єму, за умовою задачі знаходяться всі молекули ($n = N$), у решті об'єму їх немає ($N - n = 0$), тоді кількість числа сполучень набуває вигляду

$$\frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{N!}{N!0!} = 1.$$

Оскільки $0! = 1$, імовірність того, що всі молекули зберуться у половині об'єму

$$P(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^N = \left(\frac{2}{3}\right)^{30} = 5,22 \cdot 10^{-6}.$$



Визначити розподіл густини молекул газу в циліндрі радіусом R і довжиною H , що обертається в полі сил тяжіння навколо своєї осі із кутовою швидкістю ω . Вісь циліндра направлена вертикально.

На молекулу у циліндрі діють відцентрова сила $F = m\omega^2 r$ та сила тяжіння mg . Потенціальна енергія відцентрової сили (за абсолютною величиною)

$$U = -\int_0^r m\omega^2 r dr = -\frac{m\omega^2 r^2}{2},$$

де $r^2 = x^2 + y^2$, а потенціальна енергія сили тяжіння mgz .

У загальному вигляді розподіл Больцмана для цієї задачі має вигляд

$$n(x, y, z) = n_0 \exp\left(\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}\right) \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right),$$

де $n(x, y, z)$ – кількість молекул у одиниці об'єму (концентрація). Тоді кількість молекул у виділеному елементарному об'ємі

$$dn(x, y, z) = n_0 \exp\left(\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}\right) \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) dx dy dz.$$

Симетрія задачі пропонує звернутись до циліндричної системи координат (z, r, φ) :

$$dn(z, r, \varphi) = n_0 \exp\left(\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}\right) \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) r dr d\varphi dz.$$

Задача симетрична відносно осі z , отже зводиться до знаходження

$$dn(z, r) = \int_0^{2\pi} dn(z, r, \varphi).$$

Для визначення n_0 використаємо умову нормування $\int dn(z, r, \varphi) = N$ – повна кількість молекул у циліндрі. Тоді

$$N = n_0 \int_0^R \exp\left(\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}\right) r dr \int_0^H \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) dz \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi n_0 \cdot \frac{1}{2} \int_0^R \exp\left(\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}\right) d(r^2) \frac{kT}{mg} \left(1 - e^{-\frac{mgH}{kT}}\right)$$

$$N = \pi n_0 \frac{2kT}{m\omega^2} \left(e^{\frac{m\omega^2 R^2}{2kT}} - 1 \right) \frac{kT}{mg} \left(1 - e^{-\frac{mgH}{kT}} \right),$$

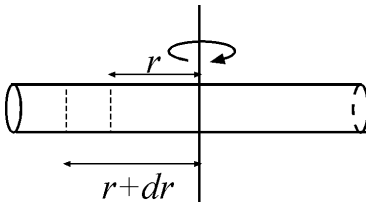
звідки стала

$$n_0 = \frac{N}{\frac{2\pi}{\omega^2 g} \left(\frac{kT}{m} \right)^2 \left(e^{\frac{m\omega^2 R^2}{2kT}} - 1 \right) \left(1 - e^{-\frac{mgH}{kT}} \right)}.$$

Густина розподілу визначається кількістю молекул, отже

$$dn(z,r) = \frac{Ng \left(\frac{m\omega}{kT} \right)^2 r e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}} e^{-\frac{mgz}{kT}}}{2\pi \left(e^{\frac{m\omega^2 R^2}{2kT}} - 1 \right) \left(1 - e^{-\frac{mgH}{kT}} \right)} dr dz.$$

Тонка трубка довжиною l обертається навколо вертикальної осі, що проходить крізь її середину, з частотою ν . Температура повітря дорівнює T . Визначити тиск повітря p_0 посередині трубки, якщо тиск біля відкритих її кінців дорівнює атмосферному p_a . Числові дані : $l = 0,5 \text{ м}$, $\nu = 60 \text{ Гц}$, $T = 290 \text{ К}$, $p_a = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$.



У тонкій трубці, що обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю $\omega = 2\pi\nu$, розподіл густини (тиску) газу вздовж трубки визначається практично тільки полем відцентрової сили, що виникає при обертанні. Отже, за барометричною формулою

$$p = C e^{-\frac{U(r)}{kT}},$$

де $U(r) = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}$ – потенціальна енергія молекули, що знаходиться на відстані $(r, r + dr)$ від центру трубки. Якщо $r = 0$, то $p = p_0$; якщо $r = \frac{l}{2}$, то $p = p_a$, звідки

$$p_a = p_0 e^{-\frac{m\omega^2 r^2}{8kT}},$$

звідки

$$p_0 = p_a e^{\frac{m\omega^2 r^2}{8kT}}.$$