

# ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

## I модуль

### 1 рівень

#### ВАРІАНТ 5.

- 1** Нехай  $\vec{a} = \{1, -1, 4\}$ ,  $\vec{b} = \{1, 3, -1\}$ ,  $\vec{c} = \{2, 1, 1\}$ ,  $\vec{d} = \{-3, 4, -2\}$ .

Знайти

а)  $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}, \vec{d}) + \vec{b}(2\vec{a} - \vec{d}, \vec{c})$ ;

б)  $|\vec{b} + \vec{c}|^2 + (\vec{d} - \vec{c}, 2\vec{a} + \vec{b})$ ;

в)  $\text{Pr}_{\vec{a}}(\vec{c} - 2\vec{d})$ ;

г)  $\angle(\vec{a}, \vec{c})$ ;

д) чи утворюють вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора  $\vec{d}$  в цьому базисі.

- 2** Нехай  $\vec{a} = \{-1, -1, \lambda\}$ ,  $\vec{b} = \{1, 3, 1\}$ ,  $\vec{c} = \{2, 1, 1\}$ . Знайти

а) знайти  $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$ , коли  $\lambda = 4$ ;

б) при яких значеннях параметрів  $\alpha$ ,  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$  і  $\alpha\vec{b} + \vec{c}$  колінеарні;

в) при яких значеннях параметра  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) знайти об'єм паралелепіпеда, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = 3$ ;

д) знайти об'єм тетраедра, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = 5$ .

- 3** Нехай  $\vec{a} = \{1, -1, 4\}$ ,  $\gamma : \frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+6}{1}$ ,  $\alpha : 3x - 4y + 2z - 1 = 0$ ,  $M(1, -1, 3)$ ,  $N(1, -2, 1)$ . Знайти

а) скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $M$ , паралельно прямій  $\gamma$ ;

б) скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $N$ , паралельно вектору  $\vec{a}$  і прямій  $\gamma$ ;

в) знайти проекцію точки  $N$  на пряму  $\gamma$ ;

г) знайти проекцію точки  $M$  на площину  $\alpha$ ;

д) знайти проекцію прямої  $\gamma$  на площину  $\alpha$ ;

#### ВАРІАНТ 4.

**1** Нехай  $\vec{a} = \{-1, 1, 4\}$ ,  $\vec{b} = \{5, 4, -1\}$ ,  $\vec{c} = \{-3, -2, 2\}$ ,  $\vec{d} = \{2, -3, -2\}$ . Знайти

а)  $\vec{b}(\vec{a} + \vec{c}, \vec{d}) + \vec{c}(3\vec{c} - \vec{b}, \vec{d})$ ;

б)  $|3\vec{a} + \vec{d}|^2 + (\vec{b} - \vec{c}, 3\vec{a} - \vec{d})$ ;

в)  $\text{Pr}_{\vec{b}}(\vec{c} - 3\vec{a})$ ;

г)  $\angle(\vec{b}, \vec{c})$ ;

д) чи утворюють вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора  $\vec{d}$  в цьому базисі.

**2** Нехай  $\vec{a} = \{-1, 4, \lambda\}$ ,  $\vec{b} = \{-4, -1, 1\}$ ,  $\vec{c} = \{-1, -2, 4\}$ . Знайти

а) знайти  $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$ , коли  $\lambda = -3$ ;

б) при яких значеннях параметрів  $\alpha$ ,  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$  і  $\alpha\vec{b} + \vec{c}$  колінеарні;

в) при яких значеннях параметра  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) знайти об'єм паралелепіпеда, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = -6$ ;

д) знайти об'єм тетраедра, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = -9$ .

**3** Нехай  $\vec{a} = \{1, 3, -4\}$ ,  $\gamma : \frac{x+6}{1} = \frac{y+7}{-4} = \frac{z}{-2}$ ,  $\alpha : x+5y-7z+2=0$ ,  $M(2, -4, 0)$ ,  $N(-2, -6, 1)$ . Знайти

а) скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $M$ , паралельно прямій  $\gamma$ ;

б) скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $N$ , паралельно вектору  $\vec{a}$  і прямій  $\gamma$ ;

в) знайти проекцію точки  $N$  на пряму  $\gamma$ ;

г) знайти проекцію точки  $M$  на площину  $\alpha$ ;

д) знайти проекцію прямої  $\gamma$  на площину  $\alpha$ ;

## ВАРІАНТ 1.

**1** Нехай  $\vec{a} = \{3, 2, -2\}$ ,  $\vec{b} = \{2, -4, -2\}$ ,  $\vec{c} = \{-1, 3, 1\}$ ,  $\vec{d} = \{6, -1, -4\}$ . Знайти

а)  $\vec{a} \left( 3\vec{b} - \vec{a}, \vec{c} \right) + \vec{c} \left( \vec{d} - \vec{b}, \vec{c} - \vec{a} \right);$

б)  $\left| 2\vec{b} - \vec{d} \right|^2 + \left( \vec{d} - 2\vec{a}, \vec{b} - 2\vec{c} \right);$

в)  $\text{Pr}_{\vec{c}} \left( 2\vec{a} - 3\vec{b} \right);$

г)  $\angle \left( \vec{c}, \vec{d} \right);$

д) чи утворюють вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора  $\vec{d}$  в цьому базисі.

**2** Нехай  $\vec{a} = \{-5, -4, \lambda\}$ ,  $\vec{b} = \{1, -1, -5\}$ ,  $\vec{c} = \{3, 2, -3\}$ . Знайти

а) знайти  $\left[ \vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c} \right]$ , коли  $\lambda = -4$ ;

б) при яких значеннях параметрів  $\alpha$ ,  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$  і  $\alpha\vec{b} + \vec{c}$  колінеарні;

в) при яких значеннях параметра  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) знайти об'єм паралелепіпеда, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = 2$ ;

д) знайти об'єм тетраедра, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = 4$ .

**3** Нехай  $\vec{a} = \{-3, 3, 1\}$ ,  $\gamma : \frac{x+5}{-2} = \frac{y-5}{5} = \frac{z-7}{4}$ ,  $\alpha : -4x + 4y - 3z - 2 = 0$ ,  $M(-4, 1, -3)$ ,  $N(6, 1, 3)$ . Знайти

а) скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $M$ , паралельно прямій  $\gamma$ ;

б) скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $N$ , паралельно вектору  $\vec{a}$  і прямій  $\gamma$ ;

в) знайти проекцію точки  $N$  на пряму  $\gamma$ ;

г) знайти проекцію точки  $M$  на площину  $\alpha$ ;

д) знайти проекцію прямої  $\gamma$  на площину  $\alpha$ ;

## ВАРІАНТ 2.

**1** Нехай  $\vec{a} = \{6, 5, -5\}$ ,  $\vec{b} = \{-1, -6, 2\}$ ,  $\vec{c} = \{4, 5, -4\}$ ,  $\vec{d} = \{1, 2, 1\}$ . Знайти

а)  $\vec{c}(2\vec{a} + \vec{d}, 3\vec{c} - \vec{d}) + \vec{a}(\vec{b} - \vec{c}, 2\vec{c} - \vec{a})$ ;

б)  $|\vec{3b} - \vec{c}|^2 + (\vec{a} - 2\vec{d}, 2\vec{c} + 2\vec{b})$ ;

в)  $\text{Pr}_{\vec{d}}(3\vec{a} - 2\vec{d})$ ;

г)  $\angle(\vec{b}, \vec{c})$ ;

д) чи утворюють вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора  $\vec{d}$  в цьому базисі.

**2** Нехай  $\vec{a} = \{5, -2, \lambda\}$ ,  $\vec{b} = \{3, -3, 5\}$ ,  $\vec{c} = \{-4, 5, -6\}$ . Знайти

а) знайти  $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$ , коли  $\lambda = 5$ ;

б) при яких значеннях параметрів  $\alpha$ ,  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$  і  $\alpha\vec{b} + \vec{c}$  колінеарні;

в) при яких значеннях параметра  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) знайти об'єм паралелепіпеда, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = 4$ ;

д) знайти об'єм тетраедра, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = 1$ .

**3** Нехай  $\vec{a} = \{-5, 3, -4\}$ ,  $\gamma : \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z+3}{2}$ ,  $\alpha : 5x - 5y + z + 3 = 0$ ,  $M(-4, 4, 5)$ ,  $N(-4, 3, 5)$ . Знайти

а) скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $M$ , паралельно прямій  $\gamma$ ;

б) скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $N$ , паралельно вектору  $\vec{a}$  і прямій  $\gamma$ ;

в) знайти проекцію точки  $N$  на пряму  $\gamma$ ;

г) знайти проекцію точки  $M$  на площину  $\alpha$ ;

д) знайти проекцію прямої  $\gamma$  на площину  $\alpha$ ;

### ВАРІАНТ 3.

- 1** Нехай  $\vec{a} = \{3, -2, -4\}$ ,  $\vec{b} = \{-2, 3, 3\}$ ,  $\vec{c} = \{1, 6, 2\}$ ,  $\vec{d} = \{-3, 1, 3\}$ .

Знайти

а)  $\vec{b}(\vec{c} - \vec{d}, \vec{a}) + \vec{a}(2\vec{c} - 3\vec{a}, \vec{b} + \vec{d})$ ;

б)  $|2\vec{c} - \vec{a}|^2 + (2\vec{b} - \vec{a}, 2\vec{c} + \vec{d})$ ;

в)  $\text{Pr}_{\vec{a}+\vec{b}}(3\vec{c} - 2\vec{d})$ ;

г)  $\angle(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c} + \vec{d})$ ;

д) чи утворюють вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора  $\vec{d}$  в цьому базисі.

- 2** Нехай  $\vec{a} = \{1, 7, \lambda\}$ ,  $\vec{b} = \{-7, -3, 1\}$ ,  $\vec{c} = \{6, 7, -1\}$ . Знайти

а) знайти  $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$ , коли  $\lambda = -5$ ;

б) при яких значеннях параметрів  $\alpha$ ,  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$  і  $\alpha\vec{b} + \vec{c}$  колінеарні;

в) при яких значеннях параметра  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) знайти об'єм паралелепіпеда, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = -1$ ;

д) знайти об'єм тетраедра, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = 1$ .

- 3** Нехай  $\vec{a} = \{-2, 0, -7\}$ ,  $\gamma: \frac{x+4}{7} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{5}$ ,  $\alpha: -2x + 5y - z - 3 = 0$ ,  $M(4, 0, 2)$ ,  $N(4, -3, -3)$ . Знайти

а) скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $M$ , паралельно прямій  $\gamma$ ;

б) скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $N$ , паралельно вектору  $\vec{a}$  і прямій  $\gamma$ ;

в) знайти проекцію точки  $N$  на пряму  $\gamma$ ;

г) знайти проекцію точки  $M$  на площину  $\alpha$ ;

д) знайти проекцію прямої  $\gamma$  на площину  $\alpha$ ;

## ВАРІАНТ 10.

- 1** Нехай  $\vec{a} = \{-3, -1, -4\}$ ,  $\vec{b} = \{-5, -1, -5\}$ ,  $\vec{c} = \{2, -6, -4\}$ ,  
 $\vec{d} = \{3, -4, 4\}$ . Знайти

а)  $\vec{c}(\vec{b} + \vec{c}, \vec{b}) + \vec{d}(2\vec{c} - \vec{b}, \vec{a})$ ;

б)  $|\vec{a} + \vec{d}|^2 + (\vec{b} - \vec{a}, 2\vec{c} + \vec{d})$ ;

в)  $\text{Pr}_{\vec{c}}(\vec{a} - 2\vec{b})$ ;

г)  $\angle(\vec{b}, \vec{c})$ ;

- д) чи утворюють вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора  $\vec{d}$  в цьому базисі.

- 2** Нехай  $\vec{a} = \{-3, 3, \lambda\}$ ,  $\vec{b} = \{-1, 1, -2\}$ ,  $\vec{c} = \{6, 1, -7\}$ . Знайти

а) знайти  $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$ , коли  $\lambda = 2$ ;

- б) при яких значеннях параметрів  $\alpha$ ,  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$  і  $\alpha\vec{b} + \vec{c}$  колінеарні;

- в) при яких значеннях параметра  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

- г) знайти об'єм паралелепіпеда, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = -5$ ;

- д) знайти об'єм тетраедра, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = -8$ .

- 3** Нехай  $\vec{a} = \{-4, -1, -3\}$ ,  $\gamma: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{3}$ ,  $\alpha: 6x + y - 3z + 1 = 0$ ,  $M(5, 1, 5)$ ,  $N(5, 5, 7)$ . Знайти

- а) скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $M$ , паралельно прямій  $\gamma$ ;

- б) скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $N$ , паралельно вектору  $\vec{a}$  і прямій  $\gamma$ ;

- в) знайти проекцію точки  $N$  на пряму  $\gamma$ ;

- г) знайти проекцію точки  $M$  на площину  $\alpha$ ;

- д) знайти проекцію прямої  $\gamma$  на площину  $\alpha$ ;

## ВАРІАНТ 9.

**1** Нехай  $\vec{a} = \{6, -4, 2\}$ ,  $\vec{b} = \{-3, 2, -5\}$ ,  $\vec{c} = \{7, -2, -3\}$ ,  $\vec{d} = \{-2, -2, 7\}$ . Знайти

а)  $\vec{d}(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}) + \vec{a}(3\vec{a} - \vec{d}, \vec{b})$ ;

б)  $|3\vec{c} + \vec{b}|^2 + (\vec{d} - \vec{a}, 3\vec{c} - \vec{b})$ ;

в)  $\text{Pr}_{\vec{d}}(\vec{a} - 3\vec{c})$ ;

г)  $\angle(\vec{a}, \vec{d})$ ;

д) чи утворюють вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора  $\vec{d}$  в цьому базисі.

**2** Нехай  $\vec{a} = \{-1, -3, \lambda\}$ ,  $\vec{b} = \{-2, -5, 2\}$ ,  $\vec{c} = \{-3, 6, 4\}$ . Знайти

а) знайти  $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$ , коли  $\lambda = -3$ ;

б) при яких значеннях параметрів  $\alpha$ ,  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$  і  $\alpha\vec{b} + \vec{c}$  колінеарні;

в) при яких значеннях параметра  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) знайти об'єм паралелепіпеда, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = 1$ ;

д) знайти об'єм тетраедра, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = 3$ .

**3** Нехай  $\vec{a} = \{1, -1, -2\}$ ,  $\gamma : \frac{x+3}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+7}{-3}$ ,  $\alpha : -3x - y - 5z + 2 = 0$ ,  $M(-1, -1, 1)$ ,  $N(6, 0, -7)$ . Знайти

а) скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $M$ , паралельно прямій  $\gamma$ ;

б) скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $N$ , паралельно вектору  $\vec{a}$  і прямій  $\gamma$ ;

в) знайти проекцію точки  $N$  на пряму  $\gamma$ ;

г) знайти проекцію точки  $M$  на площину  $\alpha$ ;

д) знайти проекцію прямої  $\gamma$  на площину  $\alpha$ ;

## ВАРІАНТ 6.

**1** Нехай  $\vec{a} = \{-2, -1, 2\}$ ,  $\vec{b} = \{-1, 2, -7\}$ ,  $\vec{c} = \{-4, -3, 4\}$ ,  $\vec{d} = \{6, 2, 1\}$ . Знайти

а)  $\vec{c} \left( 3\vec{d} - \vec{c}, \vec{a} \right) + \vec{a} \left( \vec{b} - \vec{d}, \vec{a} - \vec{c} \right);$

б)  $\left| 2\vec{d} - \vec{b} \right|^2 + \left( \vec{b} - 2\vec{c}, \vec{d} - 2\vec{a} \right);$

в)  $\text{Pr}_{\vec{a}} \left( 2\vec{c} - 3\vec{d} \right);$

г)  $\angle \left( \vec{a}, \vec{b} \right);$

д) чи утворюють вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора  $\vec{d}$  в цьому базисі.

**2** Нехай  $\vec{a} = \{7, -6, \lambda\}$ ,  $\vec{b} = \{-7, 4, 1\}$ ,  $\vec{c} = \{2, 2, -4\}$ . Знайти

а) знайти  $\left[ \vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c} \right]$ , коли  $\lambda = 5$ ;

б) при яких значеннях параметрів  $\alpha$ ,  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$  і  $\alpha\vec{b} + \vec{c}$  колінеарні;

в) при яких значеннях параметра  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) знайти об'єм паралелепіпеда, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = 2$ ;

д) знайти об'єм тетраедра, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = -1$ .

**3** Нехай  $\vec{a} = \{-6, -7, 4\}$ ,  $\gamma : \frac{x-6}{-5} = \frac{y+7}{-2} = \frac{z-2}{1}$ ,  $\alpha : 4x - 2y - 2 = 0$ ,  $M(2, 5, -5)$ ,  $N(-4, 7, -7)$ . Знайти

а) скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $M$ , паралельно прямій  $\gamma$ ;

б) скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $N$ , паралельно вектору  $\vec{a}$  і прямій  $\gamma$ ;

в) знайти проекцію точки  $N$  на пряму  $\gamma$ ;

г) знайти проекцію точки  $M$  на площину  $\alpha$ ;

д) знайти проекцію прямої  $\gamma$  на площину  $\alpha$ ;



## ВАРІАНТ 7.

**1** Нехай  $\vec{a} = \{-3, -2, -2\}$ ,  $\vec{b} = \{-4, -3, -2\}$ ,  $\vec{c} = \{5, -2, -1\}$ ,  
 $\vec{d} = \{1, 1, 5\}$ . Знайти

а)  $\vec{a} (2\vec{c} + \vec{b}, 3\vec{a} - \vec{b}) + \vec{c} (\vec{d} - \vec{a}, 2\vec{a} - \vec{c})$ ;

б)  $|3\vec{d} - \vec{a}|^2 + (\vec{c} - 2\vec{b}, 2\vec{a} + 2\vec{d})$ ;

в)  $\text{Pr}_{\vec{b}}(3\vec{c} - 2\beta)$ ;

г)  $\angle (\vec{a}, \vec{d})$ ;

д) чи утворюють вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора  $\vec{d}$  в цьому базисі.

**2** Нехай  $\vec{a} = \{5, -1, \lambda\}$ ,  $\vec{b} = \{-3, 4, 2\}$ ,  $\vec{c} = \{6, 1, 7\}$ . Знайти

а) знайти  $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$ , коли  $\lambda = -2$ ;

б) при яких значеннях параметрів  $\alpha$ ,  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$  і  $\alpha\vec{b} + \vec{c}$  колінеарні;

в) при яких значеннях параметра  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) знайти об'єм паралелепіпеда, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = 4$ ;

д) знайти об'єм тетраедра, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = 6$ .

**3** Нехай  $\vec{a} = \{0, -1, 6\}$ ,  $\gamma : \frac{x-7}{-4} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+2}{4}$ ,  $\alpha : -2x + 3y - 4z - 1 = 0$ ,  $M(-1, 0, -3)$ ,  $N(2, -3, -7)$ . Знайти

а) скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $M$ , паралельно прямій  $\gamma$ ;

б) скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $N$ , паралельно вектору  $\vec{a}$  і прямій  $\gamma$ ;

в) знайти проекцію точки  $N$  на пряму  $\gamma$ ;

г) знайти проекцію точки  $M$  на площину  $\alpha$ ;

д) знайти проекцію прямої  $\gamma$  на площину  $\alpha$ ;

## ВАРІАНТ 8.

**1** Нехай  $\vec{a} = \{-6, 2, 1\}$ ,  $\vec{b} = \{5, 2, -7\}$ ,  $\vec{c} = \{-3, 3, -3\}$ ,  $\vec{d} = \{3, -2, 3\}$ . Знайти

а)  $\vec{d}(\vec{a} - \vec{b}, \vec{c}) + \vec{c}(2\vec{a} - 3\vec{c}, \vec{d} + \vec{b})$ ;

б)  $|2\vec{a} - \vec{c}|^2 + (2\vec{d} - \vec{c}, 2\vec{a} + \vec{b})$ ;

в)  $\text{Pr}_{\vec{c}+\vec{d}}(3\vec{a} - 2\vec{b})$ ;

г)  $\angle(\vec{c} + \vec{d}, \vec{a} + \vec{d})$ ;

д) чи утворюють вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора  $\vec{d}$  в цьому базисі.

**2** Нехай  $\vec{a} = \{-6, -2, \lambda\}$ ,  $\vec{b} = \{1, 5, -4\}$ ,  $\vec{c} = \{-2, 1, -1\}$ . Знайти

а) знайти  $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$ , коли  $\lambda = 5$ ;

б) при яких значеннях параметрів  $\alpha$ ,  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$  і  $\alpha\vec{b} + \vec{c}$  колінеарні;

в) при яких значеннях параметра  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) знайти об'єм паралелепіпеда, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = 1$ ;

д) знайти об'єм тетраедра, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = -2$ .

**3** Нехай  $\vec{a} = \{-5, -2, -1\}$ ,  $\gamma : \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{6} = \frac{z+7}{2}$ ,  $\alpha : 4x - 5y - 6z + 3 = 0$ ,  $M(5, 2, 2)$ ,  $N(5, 1, -5)$ . Знайти

а) скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $M$ , паралельно прямій  $\gamma$ ;

б) скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $N$ , паралельно вектору  $\vec{a}$  і прямій  $\gamma$ ;

в) знайти проекцію точки  $N$  на пряму  $\gamma$ ;

г) знайти проекцію точки  $M$  на площину  $\alpha$ ;

д) знайти проекцію прямої  $\gamma$  на площину  $\alpha$ ;

## ВАРІАНТ 15.

**1** Нехай  $\vec{a} = \{6, 5, 7\}$ ,  $\vec{b} = \{-2, -5, -1\}$ ,  $\vec{c} = \{-2, 2, -2\}$ ,  $\vec{d} = \{-4, 2, -3\}$ . Знайти

а)  $\vec{b}(\vec{a} + \vec{d}, \vec{c}) + \vec{a}(2\vec{b} - \vec{c}, \vec{d})$ ;

б)  $|\vec{a} + \vec{d}|^2 + (\vec{c} - \vec{d}, 2\vec{b} + \vec{a})$ ;

в)  $\text{Pr}_{\vec{b}}(\vec{d} - 2\vec{c})$ ;

г)  $\angle(\vec{b}, \vec{d})$ ;

д) чи утворюють вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора  $\vec{d}$  в цьому базисі.

**2** Нехай  $\vec{a} = \{-3, -1, \lambda\}$ ,  $\vec{b} = \{-2, -1, 3\}$ ,  $\vec{c} = \{-4, -3, -2\}$ . Знайти

а) знайти  $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$ , коли  $\lambda = 4$ ;

б) при яких значеннях параметрів  $\alpha$ ,  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$  і  $\alpha\vec{b} + \vec{c}$  колінеарні;

в) при яких значеннях параметра  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) знайти об'єм паралелепіпеда, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = -7$ ;

д) знайти об'єм тетраедра, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = -5$ .

**3** Нехай  $\vec{a} = \{-2, 1, -6\}$ ,  $\gamma : \frac{x+1}{-7} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z}{-7}$ ,  $\alpha : 4x + 4y + 7z - 3 = 0$ ,  $M(5, -4, 2)$ ,  $N(-3, 6, -4)$ . Знайти

а) скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $M$ , паралельно прямій  $\gamma$ ;

б) скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $N$ , паралельно вектору  $\vec{a}$  і прямій  $\gamma$ ;

в) знайти проекцію точки  $N$  на пряму  $\gamma$ ;

г) знайти проекцію точки  $M$  на площину  $\alpha$ ;

д) знайти проекцію прямої  $\gamma$  на площину  $\alpha$ ;

## ВАРІАНТ 14.

**1** Нехай  $\vec{a} = \{6, 4, -3\}$ ,  $\vec{b} = \{4, -2, -1\}$ ,  $\vec{c} = \{-4, -1, 2\}$ ,  $\vec{d} = \{1, -2, 1\}$ . Знайти

а)  $\vec{a}(\vec{b} + \vec{d}, \vec{c}) + \vec{d}(3\vec{d} - \vec{a}, \vec{c})$ ;

б)  $|3\vec{b} + \vec{c}|^2 + (\vec{a} - \vec{d}, 3\vec{b} - \vec{c})$ ;

в)  $\text{Pr}_{\vec{a}}(\vec{d} - 3\vec{b})$ ;

г)  $\angle(\vec{a}, \vec{d})$ ;

д) чи утворюють вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора  $\vec{d}$  в цьому базисі.

**2** Нехай  $\vec{a} = \{1, 6, \lambda\}$ ,  $\vec{b} = \{4, 3, -1\}$ ,  $\vec{c} = \{-4, -2, 1\}$ . Знайти

а) знайти  $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$ , коли  $\lambda = -3$ ;

б) при яких значеннях параметрів  $\alpha$ ,  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$  і  $\alpha\vec{b} + \vec{c}$  колінеарні;

в) при яких значеннях параметра  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) знайти об'єм паралелепіпеда, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = 2$ ;

д) знайти об'єм тетраедра, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = -1$ .

**3** Нехай  $\vec{a} = \{-6, -2, 1\}$ ,  $\gamma : \frac{x-6}{-1} = \frac{y-1}{6} = \frac{z+7}{4}$ ,  $\alpha : 3x + 2y + 3z - 4 = 0$ ,  $M(0, 3, -2)$ ,  $N(1, -1, -5)$ . Знайти

а) скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $M$ , паралельно прямій  $\gamma$ ;

б) скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $N$ , паралельно вектору  $\vec{a}$  і прямій  $\gamma$ ;

в) знайти проекцію точки  $N$  на пряму  $\gamma$ ;

г) знайти проекцію точки  $M$  на площину  $\alpha$ ;

д) знайти проекцію прямої  $\gamma$  на площину  $\alpha$ ;

## ВАРІАНТ 11.

**1** Нехай  $\vec{a} = \{-2, 1, -2\}$ ,  $\vec{b} = \{-4, 1, -5\}$ ,  $\vec{c} = \{-2, -3, -7\}$ ,  $\vec{d} = \{-2, -4, -11\}$ . Знайти

а)  $\vec{b} (3\vec{a} - \vec{b}, \vec{d}) + \vec{d} (\vec{c} - \vec{a}, \vec{d} - \vec{b})$ ;

б)  $|2\vec{a} - \vec{c}|^2 + (\vec{c} - 2\vec{b}, \vec{a} - 2\vec{d})$ ;

в)  $\text{Pr}_{\vec{d}}(2\vec{b} - 3\vec{a})$ ;

г)  $\angle(\vec{a}, \vec{d})$ ;

д) чи утворюють вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора  $\vec{d}$  в цьому базисі.

**2** Нехай  $\vec{a} = \{7, 1, \lambda\}$ ,  $\vec{b} = \{-1, 5, -1\}$ ,  $\vec{c} = \{1, 5, -2\}$ . Знайти

а) знайти  $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$ , коли  $\lambda = 2$ ;

б) при яких значеннях параметрів  $\alpha$ ,  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$  і  $\alpha\vec{b} + \vec{c}$  колінеарні;

в) при яких значеннях параметра  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) знайти об'єм паралелепіпеда, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = -3$ ;

д) знайти об'єм тетраедра, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = -1$ .

**3** Нехай  $\vec{a} = \{-1, -5, 2\}$ ,  $\gamma : \frac{x+2}{5} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{2}$ ,  $\alpha : -6x - 5y + 6z + 4 = 0$ ,  $M(-2, 7, -1)$ ,  $N(4, -1, 0)$ . Знайти

а) скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $M$ , паралельно прямій  $\gamma$ ;

б) скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $N$ , паралельно вектору  $\vec{a}$  і прямій  $\gamma$ ;

в) знайти проекцію точки  $N$  на пряму  $\gamma$ ;

г) знайти проекцію точки  $M$  на площину  $\alpha$ ;

д) знайти проекцію прямої  $\gamma$  на площину  $\alpha$ ;

## ВАРІАНТ 12.

- 1** Нехай  $\vec{a} = \{4, -3, 1\}$ ,  $\vec{b} = \{3, 2, 3\}$ ,  $\vec{c} = \{-6, 3, -2\}$ ,  $\vec{d} = \{1, 5, 4\}$ .

Знайти

а)  $\vec{d}(2\vec{b} + \vec{c}, 3\vec{d} - \vec{c}) + \vec{b}(\vec{a} - \vec{d}, 2\vec{d} - \vec{b})$ ;

б)  $|3\vec{a} - \vec{d}|^2 + (\vec{b} - 2\vec{c}, 2\vec{d} + 2\vec{a})$ ;

в)  $\text{Pr}_{\vec{c}}(3\vec{b} - 2\vec{c})$ ;

г)  $\angle(\vec{a}, \vec{c})$ ;

д) чи утворюють вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора  $\vec{d}$  в цьому базисі.

- 2** Нехай  $\vec{a} = \{-5, -4, \lambda\}$ ,  $\vec{b} = \{1, 4, -2\}$ ,  $\vec{c} = \{3, -4, 5\}$ . Знайти

а) знайти  $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$ , коли  $\lambda = -4$ ;

б) при яких значеннях параметрів  $\alpha$ ,  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$  і  $\alpha\vec{b} + \vec{c}$  колінеарні;

в) при яких значеннях параметра  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) знайти об'єм паралелепіпеда, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = 1$ ;

д) знайти об'єм тетраедра, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = -2$ .

- 3** Нехай  $\vec{a} = \{1, 4, 1\}$ ,  $\gamma : \frac{x-3}{-4} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+4}{1}$ ,  $\alpha : -2x - 3y - 4z + 2 = 0$ ,  $M(-2, 1, 0)$ ,  $N(-3, 1, -3)$ . Знайти

а) скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $M$ , паралельно прямій  $\gamma$ ;

б) скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $N$ , паралельно вектору  $\vec{a}$  і прямій  $\gamma$ ;

в) знайти проекцію точки  $N$  на пряму  $\gamma$ ;

г) знайти проекцію точки  $M$  на площину  $\alpha$ ;

д) знайти проекцію прямої  $\gamma$  на площину  $\alpha$ ;

### ВАРІАНТ 13.

- 1** Нехай  $\vec{a} = \{5, -3, 3\}$ ,  $\vec{b} = \{7, -1, 2\}$ ,  $\vec{c} = \{3, -1, 5\}$ ,  $\vec{d} = \{-2, -4, -2\}$ .

Знайти

а)  $\vec{b}(\vec{a} + \vec{d}, \vec{c}) + \vec{a}(2\vec{b} - \vec{c}, \vec{d})$ ;

б)  $|\vec{a} + \vec{d}|^2 + (\vec{c} - \vec{d}, 2\vec{b} + \vec{a})$ ;

в)  $\text{Pr}_{\vec{b}}(\vec{d} - 2\vec{c})$ ;

г)  $\angle(\vec{b}, \vec{c})$ ;

д) чи утворюють вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  базис в просторі? якщо так, вкажіть координати вектора  $\vec{d}$  в цьому базисі.

- 2** Нехай  $\vec{a} = \{-2, 3, \lambda\}$ ,  $\vec{b} = \{4, -1, 4\}$ ,  $\vec{c} = \{-5, -2, -7\}$ . Знайти

а) знайти  $[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{c}]$ , коли  $\lambda = -3$ ;

б) при яких значеннях параметрів  $\alpha$ ,  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$  і  $\alpha\vec{b} + \vec{c}$  колінеарні;

в) при яких значеннях параметра  $\lambda$  вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  компланарні, є правою трійкою, є лівою трійкою;

г) знайти об'єм паралелепіпеда, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = -1$ ;

д) знайти об'єм тетраедра, який побудовано на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , коли  $\lambda = 1$ .

- 3** Нехай  $\vec{a} = \{-5, 1, -7\}$ ,  $\gamma : \frac{x+5}{5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{-4}$ ,  $\alpha : 6x - 7y - 2z + 3 = 0$ ,  $M(5, -4, 4)$ ,  $N(2, -2, 2)$ . Знайти

а) скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $M$ , паралельно прямій  $\gamma$ ;

б) скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $N$ , паралельно вектору  $\vec{a}$  і прямій  $\gamma$ ;

в) знайти проекцію точки  $N$  на пряму  $\gamma$ ;

г) знайти проекцію точки  $M$  на площину  $\alpha$ ;

д) знайти проекцію прямої  $\gamma$  на площину  $\alpha$ ;

## 2 рівень

### ВАРІАНТ 20.

- 1** Довести, що система векторів, яка містить два однакових вектора є лінійно залежною. Чи може бути лінійно залежною система, яка складається з одного вектора? **[1]**
- 2** Записати рівняння площини  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}u + \vec{b}v$  в вигляді  $(\vec{r}, \vec{n}) = D$ . **[1]**

**3** Довести тотожність:  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2 = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{a}, \vec{c}) \\ (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{c}) \\ (\vec{a}, \vec{c}) & (\vec{b}, \vec{c}) & (\vec{c}, \vec{c}) \end{vmatrix}$ . **[3]**

### ВАРІАНТ 19.

- 1** Довжини базисних векторів  $\vec{e}_1$  і  $\vec{e}_2$  загальної декартової системи координат на площині дорівнюють відповідно 4 і 2, а кут між базисними векторами дорівнює  $2\pi/3$ . Відносно цієї системи координат задані вершини трикутника  $A(-2, 2)$ ,  $B(-2, -1)$ ,  $C(-1, 0)$ . Знайти довжини сторін і кути трикутника. **[2]**
- 2** Знайти відстань між двома паралельними прямими  $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t$  і  $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}t$ . **[1]**
- 3** Знайти множину точок площини, відношення відстаней від яких до двох перетинних прямих  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  і  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  є постійна величина  $k > 0$ . **[2]**

### ВАРІАНТ 16.

- 1** Три точки  $A(\vec{r}_1)$ ,  $B(\vec{r}_2)$  і  $C(\vec{r}_3)$  не лежать на одній прямій і є послідовними вершинами паралелограма. Знайти координати четвертої вершини  $D$  цього паралелограма. **[1]**
- 2** Скласти рівняння прямої, яка перетинає дві мимобіжні прямі  $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1t$  і  $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2t$  під прямим кутом (спільного перпендикуляра до цих прямих). **[3]**
- 3** Довести, якщо  $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = \vec{0}$ , то вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  і  $\vec{c}$  компланарні **[1]**



### ВАРІАНТ 17.

- 1 Довести, що радіус-вектор центра правильного багатокутника є середнє арифметичне радіус-векторів його вершин. [1]
- 2 Задана пряма  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$  і площина  $(\vec{r}, \vec{n}) = D$ . При якій необхідній і достатній умові
- а) вони перетинаються в єдиній точці;
  - б) паралельні (не мають спільних точок);
  - в) пряма лежить в площині. [2]
- 3 Довести тотожність  $\left( [\vec{a}, \vec{b}], [\vec{b}, \vec{c}], [\vec{c}, \vec{a}] \right) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2$ . [2]

### ВАРІАНТ 18.

- 1 В тетраедрі  $OABC$  точки  $K, L, M, N, P, Q$  — середини ребер  $OA, OB, OC, AB, AC, BC$  відповідно,  $S$  — точка перетину медіан трикутника  $ABC$ . Приймаючи за базисні вектори  $\vec{OA}, \vec{OB}$  і  $\vec{OC}$ , знайти в цьому базисі координати векторів
- а)  $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{AC}$ ;
  - б)  $\vec{KL}, \vec{PQ}, \vec{NC}, \vec{MP}, \vec{KQ}$ ;
  - в)  $\vec{OS}, \vec{KS}$ . [1]
- 2 Скласти рівняння проєкції прямої  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$ , яка не перпендикулярна площині  $(\vec{r}, \vec{n}) = D$ , на цю площину. [2]
- 3 Довести тотожність  $\vec{d}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a}(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) + \vec{b}(\vec{c}, \vec{a}, \vec{d}) + \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$ . [2]

## ВАРІАНТ 25.

- 1** Довести, що для довільних трьох векторів  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  і довільних трьох чисел  $\alpha, \beta$  і  $\gamma$  вектори  $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}, \gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}$  і  $\beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$  лінійно залежні.

**[1]**

- 2** Задана точка  $M_0$  з радіус-вектором  $\vec{r}_0$  і пряма  $\gamma : (\vec{r}, \vec{n}) = D$ .  
Знайти радіус-вектори

а) проєкції точки  $M_0$  на пряму  $\gamma$ ;

б) точки  $M_1$ , яка симетрична точці  $M_0$  відносно  $\gamma$ . **[2]**

- 3** Довести тотожність:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{x}) & (\vec{b}, \vec{x}) & (\vec{c}, \vec{x}) \\ (\vec{a}, \vec{y}) & (\vec{b}, \vec{y}) & (\vec{c}, \vec{y}) \\ (\vec{a}, \vec{z}) & (\vec{b}, \vec{z}) & (\vec{c}, \vec{z}) \end{vmatrix}. \quad \mathbf{[3]}$$

## ВАРІАНТ 24.

- 1** Довжини базисних векторів  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  і  $\vec{e}_3$  загальної декартової системи координат в просторі дорівнюють відповідно  $3, \sqrt{2}$  і  $4$ , а кути між базисними векторами дорівнюють  $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \angle(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \pi/4, \angle(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = \pi/3$ . Обчислити довжини сторін і кути паралелограма, побудованого на векторах, які мають в цьому базисі координати  $\{1, -3, 0\}$  і  $\{-1, 2, 1\}$ . **[2]**

- 2** Знайти необхідну і достатню умову того, що прямі  $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t$  і  $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 t$

а) перетинаються в єдиній точці;

б) паралельні, але не збігаються;

в) збігаються. **[2]**

- 3** Довести тотожність:  $\left| [\vec{a}, \vec{b}] \right|^2 = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) \\ (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{b}) \end{vmatrix}. \quad \mathbf{[1]}$

## ВАРІАНТ 21.

- 1** Знаючи радіус-вектори  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$  вершин  $A, B, D, A_1$  паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , виразити через них радіус-вектори інших вершин. **[1]**
- 2** Задана пряма  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$  і площина  $(\vec{r}, \vec{n}) = D$ , які не паралельні між собою. Точка  $M$  лежить на прямій і віддалена від площини на відстань  $\rho$ . Знайти радіус-вектор точки  $M$ . **[2]**
- 3** Довести, якщо вектори  $[\vec{a}, \vec{b}]$ ,  $[\vec{b}, \vec{c}]$  і  $[\vec{c}, \vec{a}]$  компланарні, то вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  і  $\vec{c}$  компланарні. **[2]**

## ВАРІАНТ 22.

- 1** Знайти суму ортогональних проєкцій вектора  $\vec{a}$  на сторони правильного трикутника. **[1]**
- 2** Знайти необхідну і достатню умову того, що площини  $(\vec{r}, \vec{n}_1) = D_1$  і  $(\vec{r}, \vec{n}_2) = D_2$
- а) перетинаються по прямій;
  - б) паралельні, але не збігаються;
  - в) збігаються. **[2]**

- 3** Довести тотожність  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) [\vec{x}, \vec{y}] = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ (\vec{a}, \vec{x}) & (\vec{b}, \vec{x}) & (\vec{c}, \vec{x}) \\ (\vec{a}, \vec{y}) & (\vec{b}, \vec{y}) & (\vec{c}, \vec{y}) \end{vmatrix}$ .
- [3]**

### ВАРІАНТ 23.

- 1** З однієї точки простору відкладено три вектора  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Довести, що кінець вектора  $\vec{c}$  тоді і тільки тоді лежить на відрізку, який з'єднує кінці векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , коли виконана рівність  $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ , де  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ . В якому відношенні кінець вектора  $\vec{c}$  ділить цей відрізок? **[1]**
- 2** Знайти умови необхідні і достатні для того, щоб три прямі  $A_i x + B_i y + C_i = 0, i = \overline{1, 3}$ :
- а) утворювали трикутник; **[2]**  
б) мали єдину спільну точку.

**3** Довести тотожність: 
$$\left( [\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}] \right) = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{c}) & (\vec{a}, \vec{d}) \\ (\vec{b}, \vec{c}) & (\vec{b}, \vec{d}) \end{vmatrix}. \quad \mathbf{[2]}$$

### ВАРІАНТ 30.

- 1** Відомо, що  $\vec{a} = [\vec{b}, \vec{c}], \vec{b} = [\vec{c}, \vec{a}], \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ . Знайти довжини векторів  $\vec{a}, \vec{b}$  і  $\vec{c}$  і кути між ними. **[1]**
- 2** Задана точка  $M_0(\vec{r}_0)$  і площина  $\alpha : (\vec{r}, \vec{n}) = D$ . Знайти радіус-вектор
- а) проекції точки  $M_0$  на площину  $\alpha$ ;  
б) точки  $M_1$ , яка симетрична точці  $M_0$  відносно  $\alpha$ . **[2]**
- 3** Знайти умову необхідну і достатню для того, щоб чотири площини  $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, i = \overline{1, 4}$  утворювали тетраєдр. **[2]**

### ВАРІАНТ 29.

- 1** Нехай задані вектори  $\vec{a} = \{1, 5, 3\}, \vec{b} = \{6, -4, -2\}, \vec{c} = \{0, -5, 7\}, \vec{d} = \{-20, 27, -35\}$ . Підібрати числа  $\alpha, \beta$  і  $\gamma$  так, щоб вектори  $\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}, \gamma\vec{c}$  і  $\vec{d}$  утворювали замкнену ламану лінію, якщо початок кожного наступного вектора з'єднати з кінцем попереднього. **[1]**
- 2** Скласти рівняння прямої, яка перетинає дві мимобіжні прямі  $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t$  і  $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 t$  і проходить через точку  $M_0(\vec{r}_0)$  яка не лежить на жодній з цих прямих. **[3]**
- 3** Знайти відстань між двома паралельними площинами  $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}u + \vec{b}v$  і  $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}u + \vec{b}v$ . **[1]**

### ВАРІАНТ 26.

- 1 В площині трикутника  $ABC$  знайти точку  $O$  таку, що  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ . Чи існують такі точки ззовні трикутника? [1]
- 2 Знайти необхідну і достатню умову того, що прямі  $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t$  і  $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 t$
- а) перетинаються в єдиній точці;
  - б) мимобіжні;
  - в) паралельні, але не збігаються;
  - г) збігаються. [2]
- 3 Довести тотожність  $\left[ [\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}] \right] = \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) - \vec{a}(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ . [2]

### ВАРІАНТ 27.

- 1 Задано три некопланарних вектора  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Знайти вектор  $\vec{x}$  з системи рівнянь  $(\vec{a}, \vec{x}) = 1, (\vec{b}, \vec{x}) = 0, (\vec{c}, \vec{x}) = 0$ . [1]
- 2 Задана точка  $M_0(\vec{r}_0)$  і пряма  $\gamma: \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t$ . Знайти радіус-вектор
- а) проекції точки  $M_0$  на пряму  $\gamma$ ;
  - б) точки  $M_1$ , яка симетрична точці  $M_0$  відносно  $\gamma$ . [2]
- 3 Задані дві прямі  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  і  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ , які перетинаються і не є взаємно перпендикулярними. Точка  $(x_0, y_0)$  не лежить на жодній з цих прямих. Знайти косинус того кута між цими прямими, в якому лежить ця точка. [2]

### ВАРІАНТ 28.

- 1 Довести, що для трьох неколінеарних векторів  $\vec{a}, \vec{b}$  і  $\vec{c}$  рівності  $\left[ \vec{a}, \vec{b} \right] = \left[ \vec{b}, \vec{c} \right] = \left[ \vec{c}, \vec{a} \right]$  виконуються тоді і тільки тоді, коли  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ . [1]
- 2 Записати рівняння прямої  $(\vec{r}, \vec{n}_i) = D_i, i = 1, 2$  в вигляді  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$ . [2]
- 3 Скласти рівняння прямої, яка перетинає пряму  $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t$  під прямим кутом і проходить через точку  $M_0(\vec{r}_0)$ , що не лежить на цій прямій (перпендикуляра, який опущений з точки  $M_0(\vec{r}_0)$  на пряму  $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t$ ). [2]